

# МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ І СИСТЕМ

УДК 621.39

Я. Соколовський, А. Бакалець  
Національний лісотехнічний університет України

## МОДЕЛЮВАННЯ ДЕФОРМАЦІЙНО-РЕЛАКСАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ У ВИСУШУВАНІЙ ДЕРЕВИНІ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

© Соколовський Я., Бакалець А., 2006

**Змодельовано нестационарні деформаційно-релаксаційні процеси в анізотропних капілярно-пористих матеріалах, зокрема у висушуваній деревині. Для числового розв'язування двовимірної математичної моделі використано метод скінченних елементів.**

**The transient strain-relaxation processes in anisotropic capillary and porous materials are modeled, in particular in the dried wood. For the numerical solving of 2D mathematical model the finite elements method is used.**

### Актуальність проблеми

Розробка методів сушіння та аналіз деформаційно-релаксаційних процесів у капілярно-пористих матеріалах із змінними потенціалами тепломасоперенесення сприяють вирішенню важливої науково-технічної проблеми, пов'язаної з раціональним вибором та використанням технологічних процесів гідротермічної обробки деревини й деревинних композитів з одночасним забезпеченням необхідних показників якості цих матеріалів. Тому актуальними є дослідження впливу зміни температурно-вологісних полів на розподіл напружень або деформацій у деревині залежно від анізотропії її фізико-механічних властивостей.

Моделі, якими описують такі процеси, є надто складними для аналітичного відшукування їхнього аналітичного розв'язку. Це обумовлює розроблення числових алгоритмів і відповідного програмного забезпечення.

### Аналіз відомих результатів

У роботах [1, 2] на основі термодинаміки незворотних процесів запропоновано систему диференціальних рівнянь, які описують взаємопов'язані деформаційно-релаксаційні і тепломасообмінні процеси у капілярно-пористих колоїдних матеріалах.

Серед досліджень з числового моделювання двовимірного розподілу температурно-вологісних полів у процесі сушіння із сталими коефіцієнтами тепломасообміну можна назвати [3–5]. У дослідженнях [5] змодельовано анізотропні та нелінійно залежні від фізико-механічних властивостей матеріалу поля температури та вмісту вологості. У статті запропоновано застосування методу скінченних елементів для числового моделювання розподілу деформаційно-релаксаційних та тепломасообмінних полів у деревині в процесі сушіння.

### Формулювання задачі. Фізико-математична модель

Двовимірну модель доцільно розглядати ще й тому, що розміри пиломатеріалу вздовж волокон практично завжди набагато більші за розміри впоперек волокон. Нестационарну задачу тепловологообміну та задачу розподілу деформаційно-релаксаційних полів розглянуто для зміни

тривалості сушіння на проміжку  $\tau \in [0, \theta]$  в області  $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) : x_i \in [0, l_i], i = 1, 2\}$ , що є поперечним перетином прямокутного дерев'яного бруса, центр якого суміжний з початком координат (рис. 1).

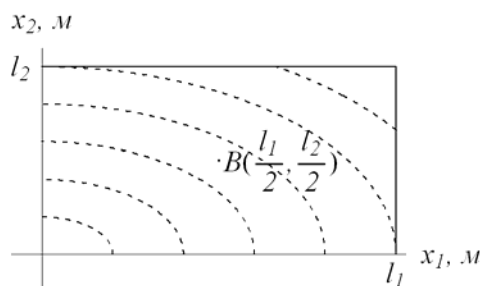


Рис. 1. Схема поперечного перерізу бруса ( $l_1, l_2$  – половини геометричних розмірів)

Згідно з [5], розподіл температури  $T(x_1, x_2, \tau)$  та вмісту вологи  $U(x_1, x_2, \tau)$  у випадку відсутності градієнта загального тиску описують системою диференціальних рівнянь у частинних похідних з відповідними початковими та граничними умовами:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \lambda_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) + \varepsilon \rho_0 r \frac{\partial U}{\partial \tau};$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( a_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( a_2 \frac{\partial U}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( a_1 \delta \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( a_2 \delta \frac{\partial T}{\partial x_2} \right).$$
(1)

Початкові умови:

$$T|_{\tau=0} = T_0; U|_{\tau=0} = U_0.$$
(2)

Граничні умови:

$$\lambda_i \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x_i=l_i} + \rho_0 (1 - \varepsilon) \beta_i (U|_{x_i=l_i} - U_p) = \alpha_i (t_c - T|_{x_i=l_i}); \quad \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x_i=0} = 0;$$

$$\left( a_i \frac{\partial U}{\partial x} + a_i \delta \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{x_i=l_i} = \beta_i (U_p - U|_{x_i=l_i}); \quad \left( \alpha_i \frac{\partial U}{\partial x} + \alpha_i \delta \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{x_i=0} = 0; \quad i = 1, 2,$$
(3)

де  $T_0(x_1, x_2)$ ,  $U_0(x_1, x_2)$  – початкові розподіли температури та вмісту вологи у матеріалі;  $u_p(T, \varphi)$  – рівноважна вологість;  $c(T, U)$  – теплоємність;  $\rho(U)$  – густина;  $\lambda_1(T, U)$ ,  $\lambda_2(T, U)$  – коефіцієнти теплопровідності у напрямках анізотропії;  $\varepsilon$  – коефіцієнт фазового переходу;  $\rho_0$  – базисна густина;  $r$  – питома теплота пароутворення;  $\delta(T, U)$  – термоградієнтний коефіцієнт;  $a_1(T, U)$ ,  $a_2(T, U)$  – коефіцієнти вологопровідності у напрямках анізотропії;  $\alpha_1(t_c, v)$ ,  $\alpha_2(t_c, v)$  – коефіцієнти теплообміну та  $\beta_1(t_c, \varphi, v)$ ,  $\beta_2(t_c, \varphi, v)$  – коефіцієнти вологообміну, які залежать від  $t_c$ ,  $\varphi$  та  $v$  – температури середовища, відносної вологості повітря та швидкості руху агента сушіння відповідно.

Алгоритм числового розв'язування початково-крайової задачі (1)–(3) розглянуто у попередній статті співавторів [5]. У цій статті також наведено результати числового знаходження розподілу температури  $T(x_1, x_2, \tau)$  та вмісту вологи  $U(x_1, x_2, \tau)$ , тому надалі, вважаючи ці функції відомими в області  $\Omega$  та кожен момент часу  $\tau \in [0, \theta]$ , сформулюємо задачу визначення напружено-деформівного стану деревини в процесі сушіння. Необхідно знайти компоненти вектора переміщень  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$ , який задовольняє в області  $\Omega$  рівняння рівноваги:

$$\mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} = 0.$$
(4)

Граничні умови (що враховують симетричність області задачі  $\Omega$ ) є такими:

$$u_i \Big|_{x_i=0} = 0,$$
(5)

$$\sigma_{ii}|_{x_i=l_i} = 0. \quad (6)$$

Тут введено позначення:  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12})^T$  – вектор компонент напружень,  $\mathbf{B}$  – матриця диференціальних операторів

$$\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix}.$$

Співвідношення між переміщеннями та вектором деформацій  $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12})^T$  запишемо так:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u}. \quad (7)$$

Для опису процесів деформування в'язкопружних тіл, до яких належить деревина, використано спадкову теорію пружності [6], за якою описують зв'язок між компонентами напружень та деформацій деревини у процесі сушіння, який визначають у тензорній формі за формулою:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_T) - \mathbf{C} \int_0^t \mathbf{R}(t, \tau) \boldsymbol{\varepsilon}(\tau) d\tau \quad (8)$$

або у скалярній формі за формулами:

$$\sigma_{11}(t) = C_{11}(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{T1}) - C_{11} \int_0^t R_{11}(t, \tau) \varepsilon_{11}(\tau) d\tau + C_{12}(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{T2}) - C_{12} \int_0^t R_{12}(t, \tau) \varepsilon_{22}(\tau) d\tau;$$

$$\sigma_{22}(t) = C_{21}(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{T1}) - C_{21} \int_0^t R_{21}(t, \tau) \varepsilon_{11}(\tau) d\tau + C_{22}(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{T2}) - C_{22} \int_0^t R_{22}(t, \tau) \varepsilon_{22}(\tau) d\tau;$$

$$\sigma_{12}(t) = 2C_{33}(\varepsilon_{12} - \varepsilon_{T3}) - 2C_{33} \int_0^t R_{33}(t, \tau) \varepsilon_{12}(\tau) d\tau,$$

де  $\boldsymbol{\varepsilon}_T = \begin{bmatrix} \varepsilon_{T1} \\ \varepsilon_{T2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \Delta T + \beta_1 \Delta U \\ \alpha_2 \Delta T + \beta_2 \Delta U \\ 0 \end{bmatrix}$  – вектор деформацій, зумовлений змінними градієнтами температури  $\Delta T$  та вмісту вологи  $\Delta U$  відповідно. Саме ці деформації є основним джерелом виникнення напружень у деревині в процесі сушіння. Для анізотропного тіла, в випадку плоского напружено-деформівного стану, матриця пружності має вигляд

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{E_{11}}{1 - \nu_1 \nu_2} & \frac{\nu_1 E_{22}}{1 - \nu_1 \nu_2} & 0 \\ \frac{\nu_1 E_{22}}{1 - \nu_1 \nu_2} & \frac{E_{22}}{1 - \nu_1 \nu_2} & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}.$$

Тут  $E_{11}$ ,  $E_{22}$  – модулі Юнга,  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  – коефіцієнти Пуассона,  $\mu$  – модуль зсуву.

У цій задачі враховано, що коефіцієнти матриці пружності залежать від значень температури та вмісту вологості матеріалу. Ядра релаксації  $R(t, \tau)$  мають вигляд

$$\mathbf{R} = R(t, \tau) = \mathbf{R}_1(t - \tau) \cdot \mathbf{R}_2(\tau) = \left[ \sum_{j=1}^L \eta_j e^{-\chi_j(t-\tau)} \right] \cdot \left[ \sum_{j=1}^L \mu_j e^{-\kappa_j(\tau-\tau_0)} \right], \quad (9)$$

де параметри  $\eta_j$ ,  $\chi_j$ ,  $\mu_j$ ,  $\kappa_j$ ,  $\tau_0$ ,  $L$  визначають з умов мінімуму квадратичного відхилення експериментальних кривих  $\boldsymbol{\varepsilon}(T, U, \tau)$ .

За результатами досліджень деформацій повзучості та оберненої повзучості деревини впоперек волокон [7] побудовано необхідні для розрахунку напружено-деформівного стану пиломатеріалів у процесі сушіння функції реологічної поведінки деревини з врахуванням

накопичення залишкових деформацій. Тому, підставивши співвідношення (7) до формули (8), а потім до рівняння (4), отримаємо рівняння рівноваги аналогічні рівнянням Ляме, де роль додаткових об'ємних сил відіграватимуть градієнти температури та вмісту вологи. Отже, якщо до рівнянь (4), (7), (8) та граничних умов (5), (6) додати початкову умову вигляду

$$u_i|_{\tau=0} = 0, \quad (10)$$

то отримаємо нестационарну задачу визначення напружено-деформівного стану висушеної деревини.

### Варіаційне формулювання задачі

Для класу задач, до яких належить описана вище нестационарна задача визначення напружено-деформівного стану, поширеним є варіаційне формулювання за принципом Лагранжа (принципу мінімуму повної потенціальної енергії) [8], який стверджує таке. Серед допустимих переміщень  $\mathbf{u}$  деревини як в'язкопружного тіла, що належать простору

$$H_A = \{\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T : u_i|_{x_i=0} = 0, u_i \in W_2^1(\Omega), i=1,2\},$$

є переміщення, що відповідають положенню рівноваги і надають мінімального значення функціоналу Лагранжа

$$\Pi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \int_0^t \mathbf{R}(t, \tau) \boldsymbol{\varepsilon}(\tau) d\tau d\Omega - \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} (\boldsymbol{\alpha} \Delta T + \boldsymbol{\beta} \Delta U) d\Omega. \quad (11)$$

Підставляючи до функціонала (11) вирази (7), (8), отримаємо

$$\Pi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} u d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{C} \int_0^t \mathbf{R}(t, \tau) \mathbf{B} u d\tau d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{C} (\boldsymbol{\alpha} \Delta T + \boldsymbol{\beta} \Delta U) d\Omega. \quad (12)$$

Розв'язок задачі про мінімум функціонала (12) методом скінченних елементів шукають у скінченному підпросторі  $S_N$  енергетичного простору  $H_A$ . Базисні функції визначають на чотирикутниках, що покривають сіткою область  $\Omega$  і не перетинаються між собою. Тоді переміщення на кожному елементі подають через вузлові значення переміщень. Отже:

$$u_1(\mathbf{x}, \tau) = \sum_{i=1}^N u_{1i}(\tau) \varphi_i(\mathbf{x}); \quad u_2(\mathbf{x}, \tau) = \sum_{i=1}^N u_{2i}(\tau) \varphi_i(\mathbf{x}). \quad (13)$$

Введемо розбиття за часом за правилом  $t_k = \tau_k = k\Delta\tau$ ,  $\Delta\tau = \frac{\theta}{S}$ , де  $S$  – ціле число, та позначимо  $\mathbf{u}_k = \{u_1(\tau_k), u_2(\tau_k)\}^T$ . Підставляючи співвідношення (13) до функціонала (12) і підсумовуючи за всіма скінченними елементами, із умови мінімуму функціонала (12)  $\delta\Pi = 0$ , отримаємо на кожному кроці за часом систему лінійних алгебраїчних рівнянь вигляду:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{u}_k d\Omega + \frac{\Delta\tau}{2} \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{R}(t_k, \tau_k) \mathbf{B} \mathbf{u}_k d\Omega = \\ & = \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{C} (\boldsymbol{\alpha} \Delta T + \boldsymbol{\beta} \Delta U) d\Omega - \sum_i^{k-1} \Delta\tau \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{R}(t_k, \tau_i) \mathbf{B} \mathbf{u}_i d\Omega. \end{aligned} \quad (14)$$

Співвідношення (14) явно свідчить, що обчислені на  $k$ -му кроці компоненти вектора переміщень  $\mathbf{u}_k$  (у лівій частині) залежать від градієнта температури та вологості та від попередніх станів системи (у правій частині). Числові розрахунки реалізовано на об'єктно-орієнтованій мові програмування *Java*.

### Аналіз результатів чисельного моделювання

Числовий експеримент визначення нестационарного розподілу деформаційно-релаксаційних полів у процесі сушіння деревини на основі наведеного алгоритму реалізації фізико-математичної моделі (1)–(9) проведемо для дуба ( $\rho_0 = 530 \text{ кг/м}^3$ ) з початковими значеннями вологовмісту

$U_0 = 0,3 \text{ кг/кг}$  і температури  $T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$  та за таких умов сушіння:  $t_c = 70 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $\varphi = 69\%$ ,  $v = 2 \text{ м/с}$ . Для визначення параметрів функцій реологічної поведінки деревини було використано експериментальні дані [7, 9]. Зокрема, миттєвий модуль пружності знаходили за формулою  $E(U, T) = 24.4TU - 3130U - 9.5T + 1200$ . Вхідні значення теплофізичних характеристик деревини залежно від зміни температури і вологості наведено в [5].

Криві на рис. 2 та 3, що відображають вплив початкової вологості пиломатеріалу на розвиток напружень у часі, свідчать про значний вплив на значення максимальних напружень, що виникнуть у матеріалі в процесі сушіння. На рис. 3–4 показано вплив параметрів зовнішнього середовища на напружено-деформівний стан висушуваної деревини.

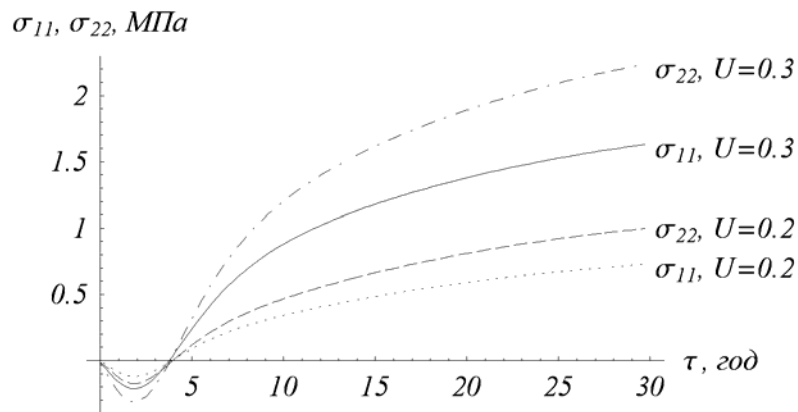


Рис. 2. Зміна нормальних напружень у точці  $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  залежно від початкової вологості деревини

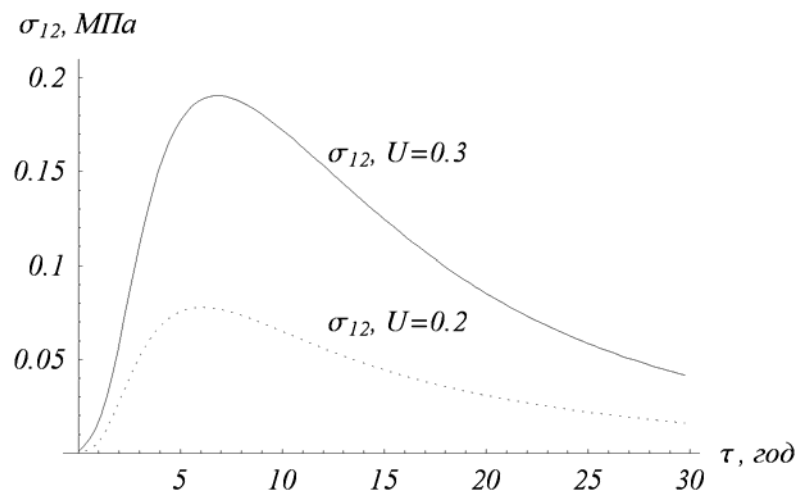


Рис. 3. Розподіл тангенціальних напружень у точці  $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  залежно від початкової вологості деревини

На рис. 3 показано вплив температури зовнішнього середовища  $t_c$  на розподіл полів напружень у випадку фіксованих значень початкової вологості та температури пиломатеріалу та інших параметрів середовища: відносної вологості повітря  $\varphi$  та швидкості руху агента сушіння  $v$ . Криві відповідають значенням  $t_c = 60, 70, 80 \text{ }^\circ\text{C}$ . Збільшення температури зовнішнього середовища  $t_c$  спричиняє інтенсивніше вологовиділення [5], а це, як видно з рис. 3, своєю чергою, призводить до зростання напружень у деревині.

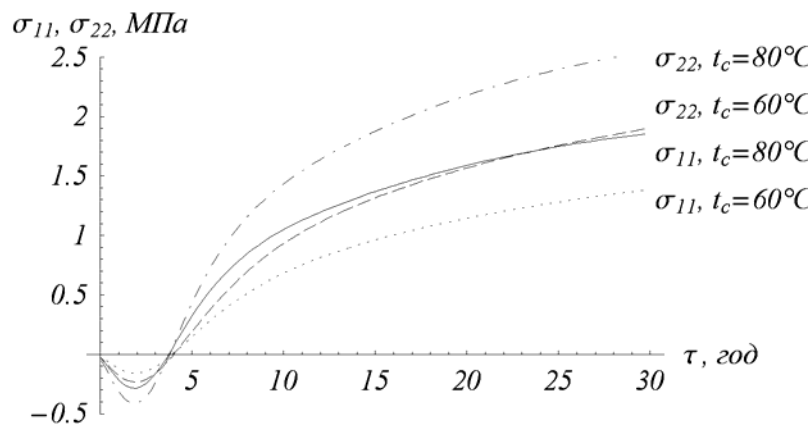


Рис. 4. Зміна нормальних напружень у точці  $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  залежно від температури середовища

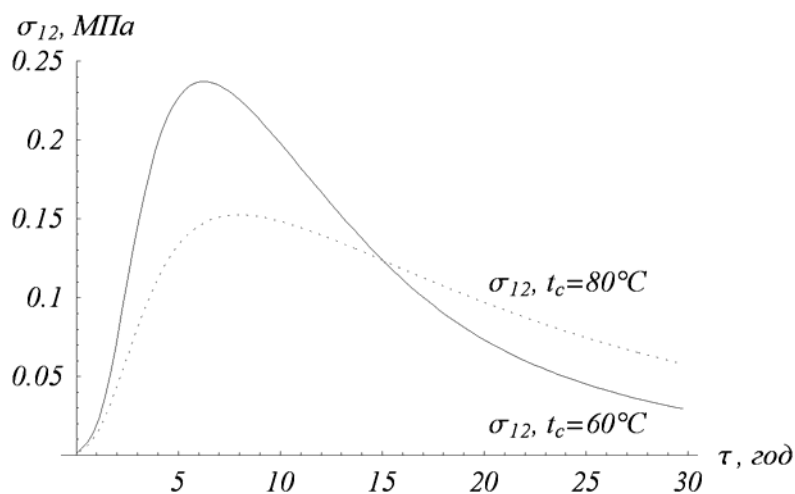


Рис. 5. Розподіл у часі тангенціальних напружень у точці  $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  залежно від температури середовища

### Висновок

Сформульовано важливу для процесу сушіння деревини задачу моделювання розподілу температурно-вологісних полів та напружено-деформівного стану. Записано варіаційне формулювання задачі для подальшого розв'язування методом скінченних елементів. Після числового розв'язування побудовано графіки, що відображають вплив різних параметрів процесу сушіння на розподіл напружень у пиломатеріалі.

1. Соколовський Я.І. Взаємозв'язок деформаційно-релаксаційних і тепломасообмінних процесів у капілярно-пористих тілах // Доп. НАН України. – 1998. – № 9. – С. 76–80. 2. Соколовський Я.І. Взаємозв'язок деформаційно-релаксаційних і тепломасообмінних процесів при сушці капілярно-пористих тел // Прикладна механіка. – 1998. – № 9. – С. 101–107. 3. Дендюк В.М., Побережко В.П., Соколовський Я.І. Застосування методу кінцевих елементів для розрахунку нестационарних полів вологоперенесення у висушуваній деревині // Лісове господарство, лісова, паперова і деревообробна промисловість. – 2003. – Вип. 28. – С. 100–106. 4. Соколовський Я.І., Бакалець А.В. Розрахунок анізотропних нестационарних температурно-вологісних полів у висушуваній деревині методом скінченних елементів // Лісове господарство, лісова, паперова і деревообробна промисловість. – 2004. – Вип. 29. – С. 109–117. 5. Бакалець А.В., Соколовський Я.І. Моделювання нелінійних тепломасообмінних процесів у висушуваній деревині методом скінченних елементів // Вісн. Нац. ун-ту

“Львівська політехніка”. – Львів. – 2005. – № 543. – С. 58–63. 6. Илюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. – М.: Наука, 1970. – 280 с. 7. Соколовський Я.І., Анбрашек Й.В. Методика та результати експериментальних досліджень реологічної поведінки деревини // Наук. вісник: Зб. наук.-техн. праць. – Львів: УкрДЛТУ. – 1999. – Вип. 9.13. – С. 15–26. 8. Кузьменко В.І. Вступ до методу скінченних елементів. – Дніпропетровськ, 2002. – 50 с. 9. Уголев Б.Н. и др. Контроль напряжений при сушке древесины. – М.: Лесная пром-сть, 1980. – 208 с.

УДК 681.3

А. Пелецишин, О. Березко

Національний університет “Львівська політехніка”,  
кафедра інформаційних систем та мереж

## АНАЛІЗ СУЧАСНИХ КОНЦЕПЦІЙ РОЗВИТКУ ГЛОБАЛЬНОГО СЕРЕДОВИЩА WWW

© Пелецишин А., Березко О., 2006

**Сьогодні Веб 2.0 та Семантичний Веб є основними концепціями розвитку WWW. Але тоді як Веб 2.0 домінує, Семантичний Веб поки не набув глобального поширення. Незважаючи на це, привабливою є перспектива об’єднання цих концепцій. Запропоновано комплексний аналіз концепції Вебу 2.0 та її порівняння з Семантичним Вебом у світлі перспектив розвитку WWW.**

**Today Web 2.0 and Semantic Web are the main conceptions of WWW development. But while Web 2.0 is prevalent, Semantic Web has not become a mainstream yet. Nevertheless integration of these conceptions is desirable. Proposed is a comprehensive analysis of the Web 2.0 conception and its comparison with Semantic Web in the light of the WWW development outlook.**

### Постановка проблеми

Сьогодні Всесвітня павутина (World Wide Web) є безпрецедентним за своїми розмірами, багатоплановістю, динамічністю, доступністю, розподіленістю та темпами зростання обсягів контенту інформаційним ресурсом. Кількість користувачів Інтернету є надзвичайно великою (близько мільярда [24]) і продовжує невпинно зростати.

Впродовж останніх років у розвитку Інтернету можна виділити ряд тенденцій, які стали визначальними. Їх підґрунтям є нові технології та підходи до розробки, підтримки, використання Веб-ресурсів, обміну інформацією між ними тощо. Ці підходи і технології отримали спільну назву “Веб 2.0” і позиціонуються багатьма дослідниками Вебу як новий якісний крок у розвитку Інтернету [1, 21, 22, 26, 31].

Разом з тим, вже довгий час існує інша концепція розвитку Вебу – Семантичний Веб, яка поки не користується загальним визнанням, але містить багато корисних ідей [8]. Основним завданням Семантичного Вебу є збагачення Веб-контенту метаданими, за якими програмні агенти зможуть виконувати різноманітні складні пошукові завдання користувачів. Проте, певні цілі Семантичного Вебу вже сьогодні можуть бути ефективно досягнуті засобами Вебу 2.0. Отже, актуальним є порівняльний аналіз цих концепцій.

### Аналіз останніх досліджень

Поняття “Веб 2.0” з’явилося у 2004 році і набуло значної популярності (близько 874 мільйонів посилань у Google станом на липень 2006 року). Проте, досі триває дискусія про те, що саме воно означає і чи є насправді важливим [1, 11, 17, 21, 22, 25, 26, 31]. Як правило, з’ясовуючи