

## Аналіз результатів

Аналізуючи результати, подані на рис. 3–5, можна надати таку рекомендацію щодо будівлі, стан якої описано  $R$  – відношенням (матрицею відображення  $X$  в  $Y$ ): будівля є такою, що може задовільно витримати тільки легке ушкодження. Тобто, стан будівлі такий, що починаючи з помірного ушкодження, будівля перестає бути здатною до використання. Краще заздалегідь розпочинати ремонт.

## Висновок

Описано методику оцінки придатності існуючих споруд з використанням засобів теорії нечітких множин. Методику можна застосувати як у зонах сейсмічної активності, так і в звичайних умовах як інструмент для розроблення методів інженерно-сейсмічних досліджень.

1. Blockley I. A New Technique for Estimating System Uncertainty in Design – Proceeding // The Institution of Mechanical Engineers. – London, 1979. – Vol. 193, No. 5. – P. 159–168. 2. Brown C.B. A. – Fuzzy Safety Measure- Journal of the Engineering Mechanics Division. – 1979. – Vol. 105, N. EM5. – P. 855–872.

УДК 614.313

Я. Ковівчак

Національний університет “Львівська політехніка”,  
кафедра автоматизованих систем управління

## ФОРМУВАННЯ ГРАНИЧНИХ УМОВ У КРАЙОВИХ ПРОСТОРОВИХ ЗАДАЧАХ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ

© Ковівчак Я., 2006

Проаналізовано різні підходи до знаходження граничних умов на межі середовищ з різними електромагнітними характеристиками для просторово-часових диференціальних рівнянь електромагнітного поля польових математичних моделей пристроїв, побудованих на основі функції векторного потенціала. Наведено вирази для граничних умов, отримані з рівності як основних векторів електромагнітного поля на межі розділу середовища, так і перших просторових похідних цих векторів. Доведено, що у випадку нелінійних середовищ ефективнішим є підхід до формування граничних умов на основі рівності не векторів, а їхніх перших просторових похідних.

In paper the analysis of the different approaches up to a determination of boundary conditions on boundary between mediums with different electromagnetic performances of the spatially -hour differential equations of an electromagnetic field of field mathematical models of devices constructed on the basis of function of a vectorial potential are proposed. The expressions for boundary conditions obtained with equality of vectors of an electromagnetic field on a demarcation of mediums, and spatial derivatives of these vectors are shown. Is displayed, that in case of nonlinear mediums more effective is the approach of forming of boundary conditions on the basis of equality not of vectors but their first spatial derivatives.

## Вступ

У крайових просторових задачах електродинаміки знаходження граничних умов для системи алгебро-диференціальних рівнянь, що становлять основу польової математичної моделі фізичного

об'єкта, є важливим теоретичним і прикладним завданням. Від способу знаходження граничних умов залежать якісні та кількісні результати просторових розподілів розрахункових величин електромагнітного поля і, відповідно, інтегральні характеристики (струми та напруги) пристрою, а отже, значною мірою – і адекватність отриманих математичних моделей.

Основна система диференціальних рівнянь моделі містить лінійні і нелінійні, диференціальні і алгебраїчні рівняння, якими описується електромагнітний процес в окремих однорідних ізотропних і анізотропних зонах об'єкта. Коефіцієнти цих рівнянь враховують нелінійні електромагнітні властивості реальних фізичних середовищ. Форма рівнянь, вигляд нелінійних коефіцієнтів та вирази для знаходження граничних умов визначають однозначність розв'язання розробленої математичної моделі. Як свідчить досвід комп'ютерного симулювання електромагнітних полів електротехнічних пристроїв, заміна виразів для знаходження граничних умов за незмінної системи алгебро-диференціальних рівнянь і незмінних початкових умов може призвести до зовсім інших кількісних і якісних стійких просторово-часових розв'язків.

Граничні умови польових математичних моделей умовно можна поділити на дві групи: граничні умови на внутрішніх межах між середовищами з різними електромагнітними характеристиками і граничні умови на зовнішніх межах крайових зон пристрою.

З рівності складових векторів напруженості магнітного поля, що лежать у площині розділу середовищ, знаходять граничні умови на внутрішніх межах, а на зовнішніх – виходячи з просторової симетрії електромагнітного процесу в об'єкті моделювання.

З практичної точки зору у випадку лінійних середовищ цілком придатні методи розрахунку граничних умов на внутрішніх і зовнішніх межах розрахункових зон, наведені в працях [1–15]. У випадку ж нелінійних середовищ ці методи не забезпечують необхідної числової стійкості розв'язку основної системи рівнянь, і за їх допомогою отримати результат із заданою точністю складно.

### Формулювання проблеми

Для розрахунку електромагнітного поля у квазістаціонарному наближенні в поперечному перерізі пристроїв у декартовій системі координат для випадку провідних середовищ використовують вираз

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \left( v_z \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + v_y \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \frac{\partial A}{\partial z} \right) \pm \frac{\delta}{\gamma}, \quad (1)$$

де  $A$  – складова векторного потенціала електромагнітного поля в напрямку осі  $x$ ;  $\gamma$  – електропровідність середовища в цьому ж напрямку;  $v_z, v_y$  – статичні обернені магнітні проникливості у відповідних осях;  $\delta$  –  $x$ -ва компонента вектора сторонньої густини струму.

Непровідні нелінійні середовища описують рівняннями

$$v_z \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + v_y \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \frac{\partial A}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

У циліндричній системі координат рівняння (1) і (2) мають вигляд

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \left( v_\alpha \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{v_r}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \alpha^2} + \left( \frac{v_\alpha}{r} + \frac{\partial v_\alpha}{\partial r} \right) \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \alpha} \frac{\partial A}{\partial \alpha} \right) \pm \frac{\delta}{\gamma}; \quad (3)$$

$$v_\alpha \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{v_r}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \alpha^2} + \left( \frac{v_\alpha}{r} + \frac{\partial v_\alpha}{\partial r} \right) \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \alpha} \frac{\partial A}{\partial \alpha} = 0. \quad (4)$$

Вирази (1)–(4) застосовують для розрахунку електромагнітного поля всередині окремих ізотропних або анізотропних зон пристрою. Дискретизовані у просторі рівняння (1)–(4) використовують значення функції векторного потенціала у вузлах сітки на межах, які оточують дане середовище. Отже, при розрахунку другої просторової похідної за  $A$  у виразах (1)–(4) присутні значення векторного потенціала з границь зони інтегрування. Ці значення отримують з виразів, що враховують лише першу просторову похідну за  $A$  [1–15] зліва і справа від межі, а це не завжди є

достатньою умовою для отримання стійкого розв'язку. У випадку нелінійних середовищ саме граничні умови стають основним джерелом нестійкості системи розрахункових рівнянь.

Характер зміни векторного потенціалу на межі довільних нелінійних середовищ наведено на рис. 1. З рисунку видно, що функція векторного потенціалу на межі середовищ є нерозривною, але її перша і вищі просторові похідні терплять розрив. З фізичної точки зору розрив цих похідних на межі визначається значеннями нелінійних коефіцієнтів – обернених магнітних проникливостей середовищ зліва і справа від межі. Оскільки у рівняннях (1)–(4) існує друга просторова похідна за  $A$ , необхідно забезпечити знаходження граничних умов на межі нелінійних зон узгоджуючи першу і другу просторові похідні за векторним потенціалом з відповідними значеннями релактивностей середовищ.

У більшості випадків реальні фізичні об'єкти володіють центральною або осьовою симетрією. Тому немає необхідності проводити складні математичні розрахунки електромагнітного поля у всіх повних зонах поперечного перерізу пристрою. Для цього обмежуються лише частиною зрізу об'єкта, за якою можна відтворити загальну картину просторового електромагнітного процесу. Граничні умови на межах частини зон, що відкидаються, задаються з умов центральної або осової симетрії електромагнітного поля в пристрої. На зовнішніх зонах граничні умови формують, виходячи з транспонування характерної поведінки електромагнітного процесу в крайових зонах для випадку їхнього подовження до безмежності.

### Аналіз методів розрахунку

Розглянемо приклад знаходження граничних умов у польовій математичній моделі однофазного трансформатора [1, 2, 3, 12–15]. Модель побудовано стосовно векторного потенціалу електромагнітного поля.

Розрахункові зони поперечного перерізу трансформатора наведено на рис. 2.

Враховуючи просторову симетрію електромагнітного процесу в пристрої, поле розраховують на одній чвертій поперечного зрізу трансформатора.

До розрахункових зон належать: I – зона первинної обмотки трансформатора; II – зона вторинної обмотки трансформатора; III – зона шихтованого магнітопроводу; IV – повітряна зона назовні трансформатора.

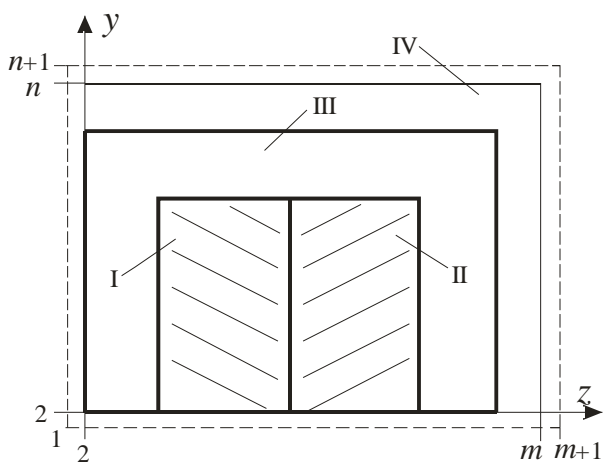


Рис. 2. Розрахункові зони поперечного перерізу трансформатора

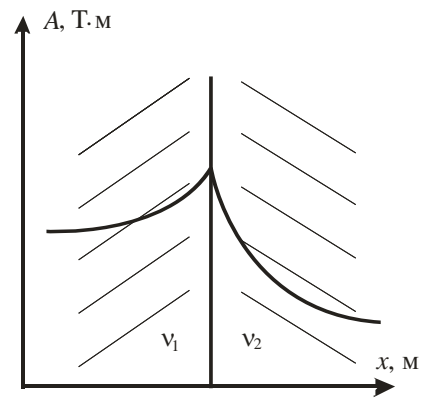


Рис. 1. Поведінка векторного потенціалу на межі нелінійних середовищ

Проаналізуємо відомі підходи до знаходження граничних умов на внутрішніх межах зон поперечного перерізу пристрою [1, 2, 3, 12–15].

Як відомо, на межі двох середовищ з різними електромагнітними характеристиками складові напруженості магнітного поля, що лежать у площині розділу завжди дорівнюють одна одній.

Беручи до уваги квазістаціонарність електромагнітного поля та його просторове розміщення в пристрої у декартовій системі координат (рис. 2), розглянемо знаходження граничних умов на межах однорідних зон, що утворюються у напрямку осі  $y$  (рис. 3).

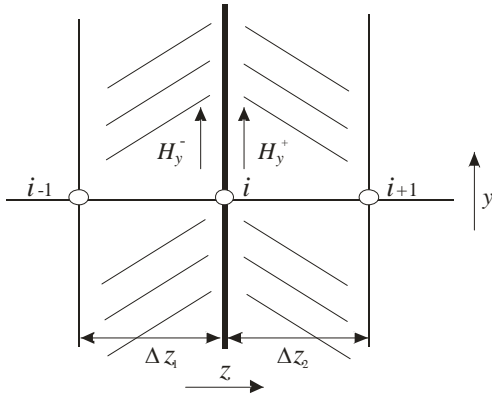


Рис. 3. Межа розділу середовищ поперечного перерізу пристрою у напрямку осі  $y$

У загальному випадку з фізичної точки зору на вказаних межах виконується рівність

$$H_y^- = H_y^+, \quad (5)$$

де  $H_y^-$ ,  $H_y^+$  –  $y$ -ві складові вектора напруженості магнітного поля зліва і справа від межі розділу.

Вираз (5) можна записати по-іншому

$$v_y^- B_y^- = v_y^+ B_y^+, \quad (6)$$

де  $B_y^-$ ,  $B_y^+$  – складові вектора магнітної індукції та  $v_y^-$ ,  $v_y^+$  – обернені магнітні проникливості середовищ зліва і справа від межі в напрямку осі  $y$ .

Враховуючи, що складові вектора магнітної індукції в поперечному перерізі пристрою за умови квазістаціонарності поля мають вигляд

$$B_z = -\frac{\partial A}{\partial y}; \quad B_y = \frac{\partial A}{\partial z}, \quad (7)$$

де  $A$  – складова векторного потенціалу в напрямку осі  $x$ , рівняння (6) видозміниться

$$v_y^- \frac{\partial A^-}{\partial z} = v_y^+ \frac{\partial A^+}{\partial z}. \quad (8)$$

Дискретизувавши просторову похідну по  $A$  у вузлах просторових сіток зліва і справа від межі (рис. 3), з (8) приходимо до

$$v_{yi-1} \frac{A_i - A_{i-1}}{\Delta z_1} = v_{yi+1} \frac{A_{i+1} - A_i}{\Delta z_2}, \quad (9)$$

де  $\Delta z_1$ ,  $\Delta z_2$  – кроки дискретизаційних сіток.

Остаточно вираз (9) для знаходження граничної умови набуде вигляду

$$A_i = \frac{v_{yi-1} \Delta z_2 A_{i-1} + v_{yi+1} \Delta z_1 A_{i+1}}{v_{yi-1} \Delta z_2 + v_{yi+1} \Delta z_1}. \quad (10)$$

Виходячи з тих самих міркувань, отримаємо граничну умову на межі розділу середовищ у напрямку осі  $z$  подібно до (10) [1–3, 12–15]

$$A_k = \frac{v_{zk-1} \Delta y_2 A_{k-1} + v_{zk+1} \Delta y_1 A_{k+1}}{v_{zk-1} \Delta y_2 + v_{zk+1} \Delta y_1}, \quad (11)$$

де  $A_{k-1}$ ,  $A_{k+1}$  – значення функції векторного потенціалу у вузлах сіток зверху і знизу від межі;  $\Delta y_1$ ,  $\Delta y_2$  – кроки дискретизаційних сіток у напрямку осі  $y$ .

Результати аналізу алгоритму отримання виразів (10) і (11) свідчать, що граничні умови знаходять, виходячи лише з умови узгодженості першої просторової похідної за векторним потенціалом зліва і справа від межі із значеннями релактивностей відповідних середовищ.

Розглянемо випадок знаходження граничних умов з урахуванням другої просторової похідної за  $A$ .

Перепишемо вираз (5) по-іншому

$$H_y^+ - H_y^- = 0. \quad (12)$$

Співвідношення (12) подамо похідною за  $z$  на межі

$$\left. \frac{\partial H_y}{\partial z} \right|_{z=i} = 0. \quad (13)$$

Рівняння (13) не порушує фізичного змісту явища поведінки електромагнітного поля на межі розділу середовищ. Запишемо вираз (13) через вектор магнітної індукції

$$\frac{\partial}{\partial z} (v_y B_y) = 0. \quad (14)$$

Взявши просторову похідну (14) за координатою  $z$ , прийдемо до

$$\frac{\partial v_y}{\partial z} B_y + v_y \frac{\partial B_y}{\partial z} = 0. \quad (15)$$

Рівняння (15) видозміниться після підстановки (7)

$$\frac{\partial v_y}{\partial z} \frac{\partial A}{\partial z} + v_y \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = 0. \quad (16)$$

Розпишемо першу і другу просторові похідні за  $A$  у виразі (16) з урахуванням різних кроків дискретизаційних сіток зліва і справа від межі (рис. 3)

$$\frac{v_{yi+1} - v_{yi-1}}{\Delta z_1 + \Delta z_2} \frac{A_{i+1} - A_{i-1}}{\Delta z_1 + \Delta z_2} + \frac{2}{\Delta z_1 \Delta z_2 (\Delta z_1 + \Delta z_2)} (\Delta z_2 v_{yi-1} A_{i-1} - (\Delta z_1 + \Delta z_2) v_{yi} A_i + \Delta z_1 v_{yi+1} A_{i+1}) = 0. \quad (17)$$

У виразі (17) присутня обернена магнітна проникливість безпосередньо на межі середовищ  $v_{yi}$ . Значення релактивності середовищ у цій просторовій точці терпить розрив. Тому необхідно визначити  $v_{yi}$  через значення обернених магнітних проникливостей у двох суміжних точках зліва і справа від межі. Оскільки перехід до дискретних рівнянь у вузлах сіток призводить до просторової лінеаризації нелінійних коефіцієнтів, доцільно використати таку саму лінеаризацію для знаходження  $v_{yi}$

$$v_{yi} = \frac{v_{yi-1} \Delta z_2 + v_{yi+1} \Delta z_1}{\Delta z_1 + \Delta z_2}. \quad (18)$$

Отже, вираз (17) набуває остаточного вигляду

$$A_i = \frac{(v_{yi+1} - v_{yi-1})(A_{i+1} - A_{i-1}) \Delta z_1 \Delta z_2}{2(v_{yi-1} \Delta z_2 + v_{yi+1} \Delta z_1)(\Delta z_1 + \Delta z_2)} + \frac{v_{yi-1} \Delta z_2 A_{i-1} + v_{yi+1} \Delta z_1 A_{i+1}}{v_{yi-1} \Delta z_2 + v_{yi+1} \Delta z_1}. \quad (19)$$

Провівши подібні перетворення (13)–(18) стосовно меж розділу середовищ у напрямку осі  $z$ , отримаємо таку граничну умову

$$A_k = \frac{(v_{zk+1} - v_{zk-1})(A_{k+1} - A_{k-1}) \Delta y_1 \Delta y_2}{2(v_{zk-1} \Delta y_2 + v_{zk+1} \Delta y_1)(\Delta y_1 + \Delta y_2)} + \frac{v_{zk-1} \Delta y_2 A_{k-1} + v_{zk+1} \Delta y_1 A_{k+1}}{v_{zk-1} \Delta y_2 + v_{zk+1} \Delta y_1}. \quad (20)$$

Якщо у рівняннях (16) для відповідних меж припустити, що

$$\frac{\partial v_y}{\partial z} = 0 \quad \text{і} \quad \frac{\partial v_z}{\partial y} = 0, \quad (21)$$

то з (18) і (19) ми отримаємо уже відомі вирази для знаходження граничних умов (10), (11) [1–15].

Для того, щоб врахувати другу просторову похідну за векторним потенціалом у разі знаходження граничних умов без порушення фізики процесу, візьмемо просторові похідні виразу (5) за координатами  $z$  та  $y$  на відповідних межах

$$\frac{\partial H_y^-}{\partial z} = \frac{\partial H_y^+}{\partial z}; \quad \frac{\partial H_z^-}{\partial y} = \frac{\partial H_z^+}{\partial y}. \quad (22)$$

Згідно з (16) рівняння (22) набудуть вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_y^-}{\partial z} \frac{\partial A^-}{\partial z} + v_y^- \frac{\partial^2 A^-}{\partial z^2} &= \frac{\partial v_y^+}{\partial z} \frac{\partial A^+}{\partial z} + v_y^+ \frac{\partial^2 A^+}{\partial z^2}; \\ \frac{\partial v_z^-}{\partial y} \frac{\partial A^-}{\partial y} + v_z^- \frac{\partial^2 A^-}{\partial y^2} &= \frac{\partial v_z^+}{\partial y} \frac{\partial A^+}{\partial y} + v_z^+ \frac{\partial^2 A^+}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Після виконання необхідних математичних операцій над рівняннями (23), вирази для знаходження граничних умов стають більш складними, громіздкими і одночасно менш стійкими у числовому відношенні. Залежно від способу подання першої і другої просторових похідних у вузлах дискретизаційних сіток, з рівнянь (23) можна отримати цілу низку розрахункових виразів.

Розглянемо методи знаходження граничних умов на внутрішніх і зовнішніх межах крайових зон пристрою, що зображені на рис. 2. Ці межі пролягають по суцільних однорідних анізотропних середовищах. Тому розрахункові вирази необхідно шукати, виходячи з просторової симетрії електромагнітного поля в об'єкті моделювання.

Граничні умови вздовж осі  $y$  у отримують з рівності складових вектора магнітної індукції [1, 2, 3, 12–15]

$$B_y^- = B_y^+, \quad (24)$$

а вздовж осі  $z$  – з просторової симетрії іншої складової того самого вектора

$$B_z^- = -B_z^+. \quad (25)$$

На зовнішніх зонах пристрою (це, як правило, повітряні зони) виникає необхідність обмежитися доцільними розмірами цих зон, оскільки електромагнітний процес поза об'єктом має тенденцію до різкого загасання в просторі зі збільшенням відстані до пристрою із збереженням характерних закономірностей процесу у відповідній системі координат.

Отже, граничні умови на зовнішніх межах крайових зон набувають вигляду [1, 2, 3, 12–15]: вздовж осі  $y$  виконується рівність (24), а вздовж осі  $z$  використовують вираз

$$B_z^- = B_z^+. \quad (26)$$

Завдяки співвідношенням (7), граничні умови на вказаних межах знаходять з рівностей

$$\frac{A_i - A_{i-1}}{\Delta z_1} = \frac{A_{i+1} - A_i}{\Delta z_1}; \quad \frac{A_k - A_{k-1}}{\Delta y_1} = -\frac{A_{k+1} - A_k}{\Delta y_1}; \quad \frac{A_k - A_{k-1}}{\Delta y_1} = \frac{A_{k+1} - A_k}{\Delta y_1}. \quad (27)$$

Якщо взяти до уваги, що значення векторного потенціалу безпосередньо вздовж осі  $y$  дорівнює нулю, то гранична умова на цій межі матиме вигляд (див. рис. 2)

$$A_{i=1} = -A_{i=3}. \quad (28)$$

З рівнянь (25), (26) визначають граничні умови на інших межах

$$A_{k=1} = A_{k=3}; \quad A_{i=m+1} = A_{i=m-1}; \quad A_{i=n+1} = A_{i=n-1}. \quad (29)$$

Вирази для знаходження граничних умов (28) і (29) [1, 2, 3, 12–15] не враховують вищих просторових похідних за векторним потенціалом і у випадку нелінійних середовищ не завжди забезпечують необхідну числову стійкість розв'язку.

Розглянемо інший підхід до знаходження граничних умов на цих межах. Похідні рівнянь (24)–(26) за відповідними координатами дадуть вирази

$$\frac{\partial B_y^-}{\partial z} = \frac{\partial B_y^+}{\partial z}; \quad \frac{\partial B_z^-}{\partial y} = -\frac{\partial B_z^+}{\partial y}; \quad \frac{\partial B_z^-}{\partial y} = \frac{\partial B_z^+}{\partial y}. \quad (30)$$

Співвідношення (30) повністю відповідають фізичним особливостям електромагнітного процесу на вказаних межах пристрою.

Зробимо підстановку (7) у вирази (30)

$$\frac{\partial^2 A^-}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 A^+}{\partial z^2}; \quad \frac{\partial^2 A^-}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 A^+}{\partial y^2}; \quad \frac{\partial^2 A^-}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 A^+}{\partial y^2}. \quad (31)$$

Запишемо рівняння (31) у вузлах дискретизаційних сіток

$$\frac{A_{i-1} - 2A_i + A_{i+1}}{\Delta z_1^2} = \frac{A_i - 2A_{i+1} + A_{i+2}}{\Delta z_1^2}; \quad \frac{A_{k-1} - 2A_k + A_{k+1}}{\Delta y^2} = -\frac{A_k - 2A_{k+1} + A_{k+2}}{\Delta y^2};$$

$$\frac{A_{k-1} - 2A_k + A_{k+1}}{\Delta y^2} = \frac{A_k - 2A_{k+1} + A_{k+2}}{\Delta y^2}. \quad (32)$$

На основі виразів (32) граничні умови вздовж осі  $y$  на внутрішній і зовнішній межах (рис. 2) мають вигляд

$$A_{i=1} = 3A_{i=2} - 3A_{i=3} + A_{i=4};$$

$$A_{i=m+1} = 3A_{i=m} - 3A_{i=m-1} + A_{i=m-2}. \quad (33)$$

Значення векторного потенціала на інших межах знаходимо з рівностей

$$A_{k=1} = A_{k=2} - A_{k=3} + A_{k=4};$$

$$A_{k=n+1} = 3A_{k=n} - 3A_{k=n-1} + A_{k=n-2}. \quad (34)$$

Отже, вирази (33), (34), на відміну від відомих виразів (28), (29), забезпечують знаходження граничних умов на зовнішніх межах розрахункових зон поперечного перерізу трансформатора, виходячи з узгодженості першої і другої просторових похідних за векторним потенціалом зліва і справа від умовної межі розділу. Іншими словами, значення функції  $A$  на межі знаходимо за

допомогою просторової інтерполяції цієї функції, відштовхуючись від її відомих значень у розрахунковій зоні, з дотриманням просторової неперервності не тільки самої функції, але й її першої та другої похідних.

Запропонований підхід є універсальним і може бути застосований для будь-яких внутрішніх і зовнішніх меж поперечного перерізу довільного пристрою.

Розглянемо відомі методи знаходження граничних умов для зон поперечного зрізу електричної машини.

Приклад зон поперечного перерізу такого пристрою на полюсному діленні наведено на рис. 4.

Особливості конструкції електричних машин вимагають розраховувати електромагнітне поле у циліндричній системі координат. У поперечному перерізі такого пристрою при квазістаціонарному полі векторний потенціал має лише осьову компоненту, а вектор напруженості магнітного поля та вектор магнітної індукції – дві компоненти: радіальну та тангенціальну.

Усі можливі межі, які утворюються між однорідними анізотропними середовищами в поперечному перерізі електричної машини, показано на рис. 4. Тангенціальні та радіальні внутрішні межі у вузлах дискретизаційних сіток циліндричної системи координат наведено на рис. 5 і 6.

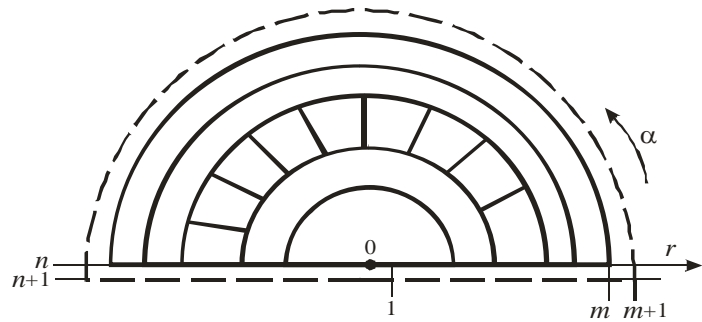


Рис. 4. Розрахункові зони полюсного ділення поперечного перерізу електричної машини

Складові вектора магнітної індукції квазістаціонарного поля в площині зрізу пристрою мають вигляд

$$B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \alpha}; \quad B_\alpha = -\frac{\partial A}{\partial r}, \quad (35)$$

де  $B_r$ ,  $B_\alpha$  – радіальна та тангенціальна компоненти вектора магнітної індукції;  $r$  – відстань від осі  $z$  до точки розрахунку.

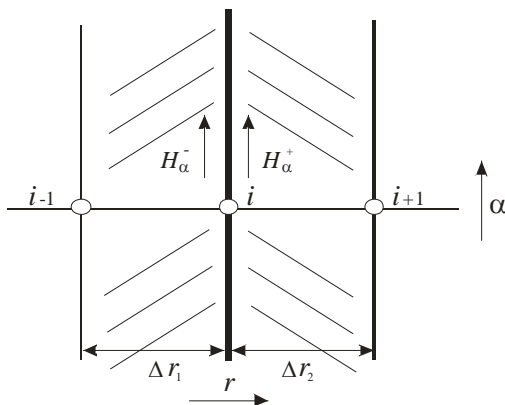


Рис. 5. Тангенціальна межа розділу середовищ поперечного перерізу електричної машини

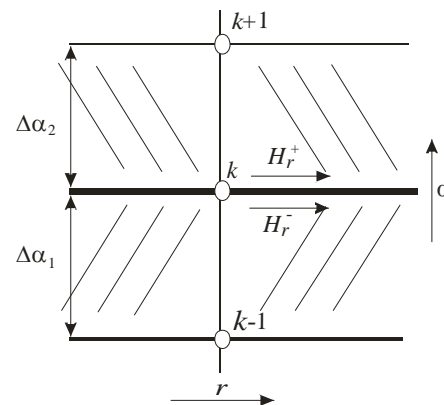


Рис. 6. Радіальна межа розділу середовищ поперечного перерізу електричної машини

Відомі вирази для знаходження граничних умов на внутрішніх межах отримують, виходячи із тих самих міркувань і в тій самій послідовності, що і вирази (10), (11), тільки в циліндричній системі координат [1–11].

Граничні умові вздовж тангенціальних меж розділу середовищ знаходять з виразу

$$A_i = \frac{v_{\alpha i-1} \Delta r_2 A_{i-1} + v_{\alpha i+1} \Delta r_1 A_{i+1}}{v_{\alpha i-1} \Delta r_2 + v_{\alpha i+1} \Delta r_1}, \quad (36)$$

а вздовж радіальних – з рівняння

$$A_k = \frac{v_{rk-1}\Delta\alpha_2 A_{k-1} + v_{rk+1}\Delta\alpha_1 A_{k+1}}{v_{rk-1}\Delta\alpha_2 + v_{rk+1}\Delta\alpha_1}, \quad (37)$$

де  $\Delta r_1, \Delta r_2, \Delta\alpha_1, \Delta\alpha_2$  – кроки дискретизаційних сіток у відповідних координатах.

Нові граничні умови вздовж вказаних меж отримуємо на основі викладеної вище методики розрахунку (рівняння (13)–(23)) стосовно векторного потенціалу у циліндричній системі координат

$$A_i = \frac{(v_{ai+1} - v_{ai-1})(A_{i+1} - A_{i-1})\Delta r_1 \Delta r_2}{2(v_{ai-1}\Delta r_2 + v_{ai+1}\Delta r_1)(\Delta r_1 + \Delta r_2)} + \frac{v_{ai-1}\Delta r_2 A_{i-1} + v_{ai+1}\Delta r_1 A_{i+1}}{v_{ai-1}\Delta r_2 + v_{ai+1}\Delta r_1}; \quad (38)$$

$$A_k = \frac{(v_{rk+1} - v_{rk-1})(A_{k+1} - A_{k-1})\Delta\alpha_1 \Delta\alpha_2}{2(v_{rk-1}\Delta\alpha_2 + v_{rk+1}\Delta\alpha_1)(\Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2)} + \frac{v_{rk-1}\Delta\alpha_2 A_{k-1} + v_{rk+1}\Delta\alpha_1 A_{k+1}}{v_{rk-1}\Delta\alpha_2 + v_{rk+1}\Delta\alpha_1}. \quad (39)$$

Вирази (38), (39) на відміну від виразів (36) і (37) забезпечують узгодженість розриву першої і другої просторової похідної за векторним потенціалом на межах розділу середовищ з відповідними значеннями релактивностей зліва і справа від межі. Крім цього, ряд нових виразів для граничних умов можна отримати на основі рівнянь (23), записаних у циліндричній системі координат.

Рівняння, за допомогою якого знаходять граничні умови на зовнішній межі крайової зони поперечного зрізу електричної машини, беручи до уваги, що на цій межі виконується умова [1–11]

$$B_\alpha^- = B_\alpha^+, \quad (40)$$

відповідає другому виразу рівнянь (29).

Нові граничні умови на вказаній межі знаходимо завдяки рівності

$$\frac{\partial B_\alpha^-}{\partial r} = \frac{\partial B_\alpha^+}{\partial r}. \quad (41)$$

З урахуванням (35) та за допомогою виразу (41) отримуємо таку граничну умову на зовнішній межі пристрою

$$A_{i=m+1} = 3A_{i=m} - 3A_{i=m-1} + A_{i=m-2}, \quad (42)$$

де  $i$  – індекс, що відповідає вузлам просторової сітки циліндричної системи координат за радіусом.

Відомі граничні умови вздовж радіусів межі інтегрування формуються за умови періодичності електромагнітного процесу на полюсному діленні машини [1–11]

$$A(r, 0) = -A(r, \tau), \quad (43)$$

де  $\tau$  – полюсне ділення машини.

Якщо врахувати періодичність поля на полюсному діленні на рівні першої просторової похідної за вектором магнітної індукції

$$\left. \frac{\partial B_r}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = - \left. \frac{\partial B_r}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\tau}, \quad (44)$$

то після підстановки (35), (44) видозміниться

$$\left. \frac{\partial^2 A}{\partial \alpha^2} \right|_{\alpha=0} = - \left. \frac{\partial^2 A}{\partial \alpha^2} \right|_{\alpha=\tau}. \quad (45)$$

З (45) отримуємо нові граничні умови для радіальних зовнішніх меж поперечного зрізу пристрою (рис. 4)

$$\begin{aligned} A_{k=1} &= 2A_{k=2} + 2A_{k=n-1} - A_{k=3} - A_{k=n-2} - A_{k=n}; \\ A_{k=n+1} &= A_{k=2} + A_{k=4} + A_{k=n-1} - 2A_{k=3} - 2A_{k=n}, \end{aligned} \quad (46)$$

де  $k$  – індекс, що відповідає вузлам просторової дискретизаційної сітки циліндричної системи координат за кутом.

Вирази (42), (46) є більш адекватні фізичному процесу, оскільки у разі знаходження граничних умов на уявних зовнішніх межах зрізу нелінійних середовищ забезпечують узгодженість першої і другої просторових похідних за векторним потенціалом у розрахунковій зоні.



## Висновки

Під час побудови польових математичних моделей реальних об'єктів систем автоматики й управління завжди необхідно проводити розрахунок електромагнітного поля в нелінійних середовищах. Вирази для знаходження граничних умов між такими середовищами є основним джерелом нестійкості розрахункової системи рівнянь.

Оскільки польові моделі, розроблені на основі функції векторного потенціала, містять рівняння з першою та другою просторовими похідними за  $\mathbf{A}$ , виникає необхідність отримати граничні умови із узгодженням цих похідних з реальними характеристиками нелінійних середовищ на межі розділу.

Запропоновано нові підходи до знаходження граничних умов на внутрішніх і зовнішніх межах поперечного перерізу електротехнічних пристроїв із дотриманням описаних вище вимог, які не суперечать фізичним особливостям електромагнітних явищ на границях розділу середовищ.

Отримані вирази є стійкіші у числовому відношенні за наявності алгебраїчних і диференціальних рівнянь зі значними нелінійностями.

Описаний метод знаходження граничних умов є універсальним і може бути застосований для будь-яких меж поперечного перерізу довільного пристрою.

Викладений матеріал є актуальним під час побудови польових математичних моделей елементів систем автоматики і управління.

1. Чабан В. Й. *Математичне моделювання електромагнітних процесів: Навч. посібник.* – К.: НМК ВО, 1992. – 391 с.
2. Чабан В. *Математичне моделювання електромеханічних процесів.* – Львів: Вид-во Держ. ун-ту “Львівська політехніка”, 1997. – 342 с.
3. Чабан В. *Електромагнетне поле.* – Львів: Вид-во Тараса Сороки, 2006. – 394 с.
4. Tchaban V., Kovivchak Y., Tchaban O. *Simulation of electromagnetic excitation field of Turbogenerator. Proceedings International Conference on Modeling & Simulation, 23–26 May 2001.* – Lviv, 2001. – P. 21–24.
5. Чабан В., Ковівчак Я. *Симуляція електромагнетного поля холостого стану турбогенератора // Електротехніка і електромеханіка.* – 2002. – № 1. – С. 108–110.
6. Tchaban V., Kovivchak Y., Tchaban O., Tymoshyk A. *2D-Field Mathematical Model of Turbogenerator. Proceedings of MS'2002 International Conference on Modelling and Simulation in Technical and Social Sciences.* – Girona, Catalonia (Spain), 25–27 June 2002. – P. 663–668.
7. Ковівчак Я. *Симуляція холостого стану турбогенератора // Технічні вісті.* – 2002. – № 1(14), 2(15). – С. 21–23.
8. Tchaban V., Kovivchak Ya. *2D-Field Mathematical Model of Turbogenerator with Real Stator Tooth Zone // Compact Disk of Proceedings of MCMS'2003 Mediterranean Conference on Modelling and Simulation.* – Reggio Calabria (Italy), 25–27 June 2003. – 164 pdf.
9. Чабан В.Й., Ковивчак Я.В. *Полевая математическая модель турбогенератора в режиме холостого хода // Электричество.* – 2003. – № 6. – С. 32–36.
10. Чабан В.Й., Ковивчак Я.В. *Полевая математическая модель турбогенератора в режиме холостого хода в фазных координатах // Электричество.* – 2003. – № 7. – С. 53–57.
11. Ковівчак Я.В., Чабан В.Й. *2-D польова модель турбогенератора // Електроенергетичні та електромеханічні системи.* – 2003. – № 485. – С. 60–66.
12. Чабан В.Й., Пелешко Д.Д., Ковівчак Я.В. *Польова математична модель дроселя // Теоретична електротехніка.* – 1996. – № 53. – С. 82–85.
13. Чабан В.Й., Пелешко Д.Д., Ковівчак Я.В. *Математична модель дроселя // Техническая электродинамика.* – 1996. – № 3. – С. 17–19.
14. Чабан В.Й., Пелешко Д.Д., Колковий О. *Математична модель трифазного трансформатора // Вісн. Держ. ун-ту “Львівська політехніка”.* – 1997. – № 340. – С. 129–134.
15. Чабан В., Пелешко Д. *3D модель насиченого дроселя // Технічні вісті.* – 1999. – № 1(8)/2(9). – С. 93–95.