

**НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ФІЗИКО-МЕХАНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ім. Г. В. КАРПЕНКА**

На правах рукопису

УДК 621.77:621.314

ЮЗЕФОВИЧ РОМАН МИХАЙЛОВИЧ

**МОДЕЛЮВАННЯ ТА СТАТИСТИЧНИЙ АНАЛІЗ
ВЗАЄМОПОВ'ЯЗАНИХ ПЕРІОДИЧНО НЕСТАЦІОНАРНИХ
ВІБРАЦІЙНИХ СИГНАЛІВ ДЛЯ ВИЯВЛЕННЯ ДЕФЕКТІВ МЕХАНІЗМІВ**

01.05.02 – *математичне моделювання та обчислювальні методи*

Дисертація
на здобуття наукового ступеня
доктора технічних наук

Науковий консультант –
доктор фізико-математичних наук,
професор Яворський Ігор Миколайович

*Ідентичність всіх примірників дисертації
ЗАСВІДЧУЮ.*

*Вчений секретар спеціалізованої
вченої ради Д 35.052.05, д.т.н., проф.*

Бунь Р.А.

ЛЬВІВ – 2017

ЗМІСТ

ВСТУП.....	6
РОЗДІЛ 1. БАГАТОВИМІРНА ВІБРАЦІЙНА ДІАГНОСТИКА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ.....	20
1.1. Задачі багатовимірної діагностики	20
1.1.1. <i>Проблемна ситуація.....</i>	20
1.1.2. <i>Технічні засоби моніторингу стану та діагностики механічних систем</i>	21
1.2. Багатовимірний аналіз даних	26
1.3. Лінійні і нелінійні підходи у вібраційній діагностиці	28
1.4. Багатовимірність як функція багатьох змінних	32
1.5. Висновки до розділу	40
РОЗДІЛ 2. ВЗАЄМОПОВ'ЯЗАНІ ПЕРІОДИЧНО КОРЕЛЬОВАНІ ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ – МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ БАГАТОВИМІРНИХ СИГНАЛІВ	41
2.1. Властивості взаємкореляційних характеристик сигналів.....	41
2.2. Взаємоспектральна густина та її компоненти	45
2.3. Інтегральна функція когерентності	52
2.4. Покомпонентна функція когерентності.....	66
2.5. Висновки до розділу	83
РОЗДІЛ 3. КОГЕРЕНТНИЙ ВЗАЄМОКОРЕЛЯЦІЙНИЙ АНАЛІЗ ПКВ СИГНАЛІВ.....	85
3.1. Оцінки взаємкореляційної функції	86
3.2. Оцінки взаємкореляційних компонентів	95
3.3. Дискретні оцінки взаємкореляційних компонентів	100
3.4. Взаємкореляційний аналіз амплітудно-модульованих сигналів	105
3.5. Висновки до розділу	121

РОЗДІЛ 4. КОМПОНЕНТНИЙ ВЗАЄМОКОРЕЛЯЦІЙНИЙ АНАЛІЗ

ПКВ СИГНАЛІВ	124
4.1. Неперервні оцінки взаємокореляційної функції	124
4.2. Дискретний компонентний взаємокореляційний аналіз.....	133
4.3. Компонентні оцінки взаємокореляційної функції амплітудно- модульованих сигналів	141
4.4. Висновки до розділу	157

РОЗДІЛ 5. ОБЧИСЛЕННЯ ВЗАЄМОСПЕКТРАЛЬНИХ

ХАРАКТЕРИСТИК ПКВ СИГНАЛІВ ЗА ЕМПІРИЧНИМИ ДАНИМИ

5.1. Когерентний взаємоспектральний аналіз	159
5.2. Оцінювання взаємоспектральних компонентів.....	167
5.3. Властивості оцінок взаємоспектральних характеристик модульованих сигналів	173
5.4. Когерентний взаємоспектральний аналіз часових рядів	177
5.5. Дискретні оцінки взаємоспектральних компонентів	184
5.6. Компонентний взаємоспектральний аналіз.....	188
5.7. Дискретні компоненти оцінки спектральної густини.....	199
5.8. Висновки до розділу	206

РОЗДІЛ 6. ВЗАЄМОКОРЕЛЯЦІЙНИЙ АНАЛІЗ ПКВ СИГНАЛІВ

ПРИ НЕВІДОМОМУ ПЕРІОДІ НЕСТАЦІОНАРНОСТІ.....

6.1. Визначення періоду та оцінювання взаємокореляційної функції за допомогою симетричного когерентного усереднення	211
6.2. Покомпонентні оцінки періоду.....	221
6.3. Виявлення прихованих періодичностей у взаємозв'язках за дискретним даними.....	238
6.4. Висновки до розділу	252

РОЗДІЛ 7. КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ СИМУЛЬОВАНИХ ВІБРАЦІЙНИХ СИГНАЛІВ ІЗ ЗАДАНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ПКВ СИГНАЛІВ	255
7.1. Математичне і алгоритмічне забезпечення для обробки вібраційних сигналів.....	255
7.2. Взаємний аналіз симульованих вібраційних сигналів підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці.....	264
7.3. Взаємний аналіз симульованих вібраційних сигналів підшипника кочення з дефектом на внутрішньому кільці.....	282
7.4. Аналіз симульованих вібраційних сигналів бездефектного підшипника кочення	299
7.5. Висновки до розділу	304
РОЗДІЛ 8. ВЕРИФІКАЦІЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ПКВ СИГНАЛІВ З ВИКОРИСТАННЯМ СТВОРЕНОЇ ВІБРОДІАГНОСТИЧНОЇ СИСТЕМИ ПУЛЬС ЗА РЕЗУЛЬТАТАМИ ВИКОНАННЯ РОБІТ НА ПРОМИСЛОВИХ ОБ'ЄКТАХ	306
8.1. Вібродіагностична система ПУЛЬС: загальний огляд, функціональне призначення, технічні характеристики	306
8.1.1. <i>Загальний опис системи ПУЛЬС</i>	306
8.1.2. <i>Схема керування смугою пропускання фільтру нижніх частот</i> ..	309
8.1.3. <i>Блок живлення</i>	312
8.1.4. <i>Регулятор температури</i>	313
8.1.5. <i>Блок-схема узгодження перетворювача заряду з аналого-цифровим перетворювачем</i>	314
8.1.6 <i>Схема електрична принципова узгодження перетворювача заряду з аналого-цифровим перетворювачем E20-10</i>	316
8.1.7. <i>П'єзокерамічний акселерометр типу ABC117</i>	320
8.1.8. <i>Апробація на вібромеханічному стенді ВМС-1</i>	321
8.1.9. <i>Загальне призначення</i>	324

8.2. Взаємний аналіз вібраційних сигналів центрифуги.....	326
8.3. Взаємний аналіз вібраційних сигналів підшипникових вузлів електродвигуна вугільного конвеєра	342
8.4. Взаємний аналіз вібраційних сигналів підшипникових вузлів турбогенераторів Добротвірської ТЕС	358
8.5. Аналіз вібраційних сигналів бездефектного підшипника кочення відібраних на вібромеханічному стенді ВМС-1	365
8.6. Висновки до розділу	370
ВИСНОВКИ.....	372
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	378
ДОДАТОК. Акти використання результатів дисертаційного дослідження	407

ВСТУП

Актуальність теми. Виявлення несправностей, які ще не привели до катастрофічних наслідків, визначення ступеня розвитку дефекту і його ознак можливі лише на основі детального дослідження структури вібросигналів та її зв'язку з кінематикою і динамікою механізмів [2, 16, 40, 71, 87, 126, 188]. Опис такої структури, в свою чергу, можливий на основі адекватних математичних моделей вібросигналів, які відображають ті їх риси, що є необхідними для встановлення стану механічної системи. Характерними ознаками вібраційних коливань є повторюваність і стохастичність. Повторюваність зумовлена циклічним принципом дії багатьох механізмів, а стохастичність може бути викликана флуктуаціями товщини і в'язкості змазки, змінами сил тертя, спонтанними та некерованими змінами навантаження, турбулентністю і т.п. Оскільки поява дефектів приводить до нелінійності механічних коливних систем, то повторюваність і стохастичність виступають у властивостях вібрацій не незалежно, а у взаємодії. Саме в характері такої взаємодії проявляються ті властивості коливного процесу, які в багатьох випадках є визначальними для встановлення стану об'єкта, що його породжує. Адекватними моделями для опису та аналізу цієї взаємодії є періодично й майже періодично нестационарні випадкові процеси (в рамках теорії другого порядку – періодично і майже періодично корельовані) [20, 31–33, 37, 41, 43, 65]. Ці випадкові процеси називають також циклостационарними.

Фундаментальні залежності характеристик сигналів від параметрів технічного стану об'єктів описуються детерміністичними моделями, проте апріорна невизначеність вимірів і впливу завад призводить до випадковості значень діагностичних сигналів. Використання багатомірних періодично нестационарних математичних моделей, як показали проведені у Фізико-механічному інституті ім. Г. В. Карпенка НАН України дослідження, дає можливість значно підвищити ефективність обстежень і діагностики стану об'єктів.

Існуючі методи статистичного аналізу вібраційних сигналів, вимірних у різних точках чи різних напрямках, ґрунтуються на їх моделях у вигляді стаціонарних випадкових процесів, тому не дозволяють аналізувати часову структуру сигналів вібрації. Виявлення несправностей, які ще не привели до катастрофічних наслідків, визначення ступеня розвитку дефекту, його локалізація та тип, можливі лише на основі детального дослідження структури вібросигналів та її зв'язку з кінематикою і динамікою механізмів. Застосування розробленої теорії та запропонованих методів взаємопов'язаних періодично корельованих випадкових процесів (ПКВП) дозволить провести якісний і кількісний аналіз імовірнісних характеристик детермінованої та стохастичної складових вібраційних сигналів, записаних синхронно в різних точках механічної системи. Для виявлення на ранніх стадіях розвитку дефектів у підшипниках турбоагрегатів, газотурбінних двигунів необхідно здійснювати багатомірний статистичний аналіз широкосмугових вібраційних сигналів низького рівня на фоні потужних завад, що ставить підвищені вимоги до відповідних систем по точності і завадостійкості.

Застосування методів теорії та статистики ПКВП для аналізу сигналів вібрацій були започатковані в роботах М. В. Мисловича та Б. Г. Марченка [45, 62, 63], І. М. Яворського та В. Ю. Михайлишина [12, 13, 56], А. С. McCormick, А. К. Nandi [229], С. Capdessus, М. Sidarped, I. L. Lacombe [185]. В останні роки у ФМІ ім. Г.В. Карпенка НАН України проведені дослідження властивостей сигналів вібрацій як ПКВП в рамках усього комплексу імовірнісних характеристик другого порядку: математичного сподівання, кореляційної функції, спектральної густини, їх коефіцієнтів Фур'є. Така модель верифікована як з використанням створеного вібраційного стенда, так і на багатьох реальних сигналах, у тому числі сигналів вібрації підшипників ковзання турбоагрегатів Доботвірської ТЕС. У процесі цього обґрунтовано нові діагностичні ознаки, які уможливають діагностику дефектів на ранніх стадіях їх розвитку. Розвивається цей підхід у роботах J. Antoni та його колег [181, 182, 191, 251]. У їх роботах для діагностики в основному використовуються величини, що описують кореляційні зв'язки між окремими складовими спектра.

Дослідження багатомірних вібраційних сигналів проведено здебільшого в стаціонарному наближенні. Але вже навіть при такому підході підвищується ефективність обробки [14, 53]. Наприклад, вимірювання вібрацій підшипникового вузла турбоагрегату в двох взаємоперпендикулярних напрямках у одній площині вможливує опис орбіти вала. А оскільки форма орбіти руху вала залежить від багатьох факторів, у тому числі від дефектів вала та підшипника, кількості та якості змазки, її аналіз дозволяє виявити декілька видів дефектів та визначити ступінь їх небезпеки. При вирішенні цілого ряду задач технічної діагностики доцільно використовувати взаємний спектральний аналіз двох сигналів, виміряних у різних точках контролю чи в різних напрямках. Дана робота направлена на вивчення фундаментальних зв'язків між імовірнісними характеристиками багатомірних періодично нестаціонарних вібраційних сигналів з параметрами технічного стану об'єктів тривалої експлуатації (машин і агрегатів з циклічними режимами роботи) та розробку нових ефективних методів для контролю і діагностики. В основу роботи покладено: розробку спектральної теорії багатомірних періодично нестаціонарних вібраційних сигналів та методів їх емпіричного спектрального аналізу; обґрунтування алгоритмів і створення програмного забезпечення для визначення параметрів сигналів, розділення джерел вібраційних коливань, обґрунтування нових діагностичних ознак; проведення експериментальних робіт на реальних об'єктах на підприємствах енергетики; підприємствах нафтової, вугільної та газової промисловості.

Розроблені в роботі методи взаємкореляційного і взаємоспектрального аналізів періодично нестаціонарних вібраційних коливань показали свою ефективність при вирішенні цілого ряду діагностичних задач. Перевага таких методів перед тими, які ґрунтуються на моделях у вигляді стаціонарних випадкових процесів, насамперед полягає в тому, що вони дають змогу описати не тільки спектральний склад коливань, а й їх часову структуру. Взаємний статистичний аналіз стохастичних складових переміщень, швидкостей чи прискорень дає змогу глибше пізнати й описати цю структуру й на цій основі створити можливості для більш ефективного виявлення дефектів, їх локалізації та розділення.

У роботі розглянуті методи оцінювання взаємоспектральних густин двох ПКВП-сигналів за експериментальними даними, а також їхніх взаємоспектральних компонентів. Проаналізовані властивості введеної середньочасової функції когерентності, яка визначає взаємозв'язок у спектральній області між періодично нестационарними складовими ПКВП-сигналів. Наведені способи обчислення такої функції, а також функції когерентності, яка визначає зв'язок між стаціонарними компонентами сигналів, які модулюють за фазою та амплітудою їхні базові гармонічні складові.

Таким чином, **актуальність** теми роботи зумовлена необхідністю:

- вивчення фундаментальних взаємозв'язків характеристик багатомірних сигналів з параметрами технічного стану об'єктів тривалої експлуатації;
- розроблення спектрально-кореляційної теорії та методів взаємокореляційного і взаємоспектрального аналізів періодично нестационарних випадкових процесів, розвиток методів їх емпіричного аналізу;
- побудовою моделей взаємопов'язаних вібросигналів на основі експериментальних досліджень та створенням відповідних комп'ютерних технологій для обробки натурних даних.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження за темою дисертації проводились у лабораторії вібродіагностики Фізико-механічного інституту ім. Г. В. Карпенка НАН України (ФМІ НАНУ) при виконанні держбюджетних тем НАН України “Розвиток методів параметричного аналізу випадкових сигналів для діагностики об'єктів тривалої експлуатації” (2007–2009, № держреєстрації 0107U004066), “Розробка методів аналізу і обробки багатомірних сигналів зі стохастичною повторюваністю та створення вимірювальних систем для вібродіагностики” (2010–2012, 0110U000433), “Розробка методів і засобів багатомірного спектрального аналізу періодично нестационарних стохастичних коливань для задач технічної діагностики” (2013–2015, 0113U000304), “Розроблення стохастичних нелінійних моделей коливань пружних тіл і засобів їх застосування у задачах вібродіагностики втомних пошкоджень елементів конструкцій” (2016–2018, 0116U006336), договорів

№ 2.2/375 “Розробка інформаційно-вимірювальної системи для вібродіагностики підшипників великих стаціонарних агрегатів” (2008–2010, 0107U005211), № 2.2 “Розробка інформаційно-вимірювальної системи для багатомірної діагностики обертових вузлів машинних комплексів” (2010–2012, 0110U004575), № 2.4 “Розробка вібродіагностичної системи для визначення дефектів промислового обладнання з використанням методів нестационарної статистичної обробки вібраційних та акустичних коливань” (2013–2015, 0113U004211), у рамках програми “Проблеми ресурсу і безпеки експлуатації конструкцій, споруд та машин” (РЕСУРС), № 2.3.1 “Спеціалізовані пристрої для виявлення дефектів на ранніх стадіях їх зародження при визначенні технічного стану механізмів” (2016–2020, 0116U004950) в рамках цільової програми наукових досліджень НАН України “Надійність і довговічність матеріалів, конструкцій, обладнання та споруд” (РЕСУРС-2).

Практичні результати одержано дисертантом при виконанні науково-дослідних робіт з госпдоговірної тематики, а саме договорів: № 1205 від 02.11.2013 “Дослідження технічного стану редуктора механізму зміни вильоту стріли порталного крану “Сокіл” на державному підприємстві “Одеський морський торговельний порт”, № Б-224/1230 від 03.04.2014 “Дослідження причин підвищеної вібрації турбогенераторів № 4 та № 5 типу ТГВ-200 Бурштинської ТЕС”, № 1326 від 01.06.2015 “Дослідження технічного стану редуктора вугільного конвейера на державному підприємстві “Морський торговельний порт ЮЖНИЙ”, № 1482 від 10.05.2016 “Дослідження рівня підвищеної вібрації приводу механізму підйому вантажу причального контейнерного перевантажувача LIEBHERR моделі P178L (GS) – Super, заводський номер IR1883”.

Мета роботи. *Метою роботи є розвиток спектрально-кореляційної теорії взаємопов’язаних періодично корельованих випадкових процесів (ПКВП) – математичних моделей багатомірних сигналів, розробки методів їх статистичного аналізу й використання останніх для визначення характеристик вібрацій за експериментальними даними з метою встановлення стану механізмів, що їх породжують.*

Досягнення поставленої мети вимагало **вирішення наступних завдань:**

- розробити спектрально-кореляційну теорію взаємопов’язаних ПКВП, обґрунтувати величини для кількісної характеристики взаємозалежності нестационарних властивостей сигналів в спектральній області;
- розробити когерентний метод оцінювання взаємокореляційної функції ПКВП-сигналів, оцінювання взаємокореляційних компонентів за неперервними та дискретними даними, здійснити порівняльний аналіз неперервних та дискретних оцінок;
- дослідити компонентний метод оцінювання взаємокореляційної функції за неперервними та дискретними даними, провести аналіз впливу кроку дискретизації на статистичні характеристики оцінок;
- дослідити властивості неперервних оцінок змінної взаємоспектральної густини та взаємоспектральних компонентів, які знаходяться корелограмним методом на основі когерентних чи компонентних оцінок, провести їх порівняльний аналіз;
- дослідити дискретні значення корелограмних оцінок взаємоспектральної густини і взаємоспектральних компонентів, провести аналіз впливу кроку дискретизації на статистичні характеристики оцінок, в тому числі тих, які пов’язані з ефектом накладання;
- розробити теоретичні основи когерентного взаємокореляційного аналізу ПКВП-сигналів при невідомому періоді взаємної нестационарності, вивчити властивості оцінок періоду, які знаходяться когерентним методом;
- дослідити селективні властивості неперервного та дискретних перетворень Фур’є взаємокореляційного добутку реалізацій сигналів, провести аналіз оцінок періоду, які знаходяться на їх основі;
- розробити алгоритми та створити програмне забезпечення для когерентного та компонентного оцінювання періоду взаємної нестационарності, взаємокореляційного та взаємоспектрального аналізів, обчислення інтегральної та покомпонентної функцій когерентності, їх верифікація;

- розробити та створити технічні засоби для багатоканального відбору вібраційних сигналів, їх аналогової смугової фільтрації, підсилення, перетворення в цифровий код і запис в пам'ять персонального комп'ютера;
- дослідити взаємкореляційну і взаємспектральну структури реалізацій вібрацій підшипника кочення (бездефектного, з дефектом на зовнішньому і внутрішньому кільцях), отриманих на основі чисельних розв'язків системи двох диференціальних рівнянь другого порядку;
- провести випробування розробленої вібродіагностичної системи ПУЛЬС на підприємствах України, встановити характерні особливості взаємної спектрально-кореляційної структури, в тому числі введених функцій когерентності, вібраційних сигналів відібраних на об'єктах, на яких виявлені ті чи інші дефекти.

Об'єктом дослідження роботи є багатомірні випадкові вібраційні сигнали від машин і агрегатів з циклічним режимом роботи.

Предметом дослідження є математичні моделі багатомірних періодично нестационарних випадкових вібраційних сигналів у вигляді ПКВП, методи оцінювання їх взаємних імовірнісних характеристик та встановлення зв'язків між взаємкореляційними і взаємспектральними характеристиками сигналів.

Методи дослідження: математичне моделювання, методи Фур'є аналізу, методи статистичної теорії багатомірних періодично нестационарних випадкових процесів, методи взаємкореляційного і взаємспектрального аналізів, комп'ютерне моделювання та експериментальні дослідження.

Наукова новизна роботи полягає у тому, що у дисертаційній роботі вирішено нову науково-прикладну проблему – розроблено методи взаємного спектрально-кореляційного аналізу вібраційних сигналів на основі їх математичних моделей у вигляді періодично корельованих випадкових процесів, що дало можливість виявляти дефекти механізмів на ранніх стадіях їх розвитку, проводити їх локалізацію та встановлювати типи.

У результаті розв'язання цієї проблеми одержано такі нові наукові результати:

1. Розроблено спектрально-кореляційну теорію взаємопов'язаних ПКВП-сигналів, встановлені особливості представлень їх імовірнісних характеристик рядами Фур'є, проаналізовано зв'язок останніх з характеристиками випадкових процесів, що описують амплітудну й стохастичну модуляції несучих гармонік віброцигналів.

2. Запропоновано і обґрунтовано інтегральну та покомпонентну функції когерентності для кількісного опису взаємозв'язку між властивостями нестационарності ПКВП-сигналів та доведено, що введені функції не змінюються при лінійних перетвореннях.

3. Розвинуто методи когерентного взаємокореляційного аналізу ПКВП-сигналів, що ґрунтується на усередненні відліків їх реалізацій через період нестационарності, виведено умови асимптотичної незміщеності та слухності неперервних і дискретних оцінок взаємокореляційної функції та взаємокореляційних компонентів, встановлено умови відсутності ефектів накладання першого й другого роду.

4. Отримано компонентні оцінки взаємокореляційної функції, які знаходяться на основі тригонометричного полінома, коефіцієнти якого обчислюють за допомогою як неперервних, так і дискретних перетворень Фур'є скінчених відрізків реалізацій сигналів, встановлено умови їх середньоквадратичної збіжності.

5. Розроблено теоретичні основи емпіричного непараметричного взаємоспектрального аналізу ПКВП-сигналів. Для оцінювання взаємоспектральної густини і взаємоспектральних компонентів обґрунтовано корелограмний метод, який є узагальненням метода Блекмана–Тьюкі. Доведено асимптотичну незміщеність і слухність оцінок.

6. Когерентний і компонентний методи взаємокореляційного аналізу узагальнено на випадок, коли період нестационарності є невідомим, доведено, що точки екстремальних значень статистик відносно пробного періоду є асимптотично незміщеними і слухними оцінками періоду, а самі величини цих екстремумів збігаються в середньоквадратичному до взаємокореляційних функцій чи взаємокореляційних компонентів.

7. Встановлено характерні особливості взаємкореляційної та взаємоспектральної структур вібраційних сигналів обертових вузлів промислових об'єктів при наявності дефектних елементів. Показано, що введені інтегральна та покомпонентна функції когерентності дають можливість виявити дефекти на ранніх стадіях їх зародження, розділити та локалізувати їх, встановити типи.

Вірогідність основних наукових положень і результатів забезпечується використанням фізично обґрунтованих математичних постановок задач, які розглянуто в роботі. Аналітико-числові методи, які застосовуються для їх розв'язання, є обґрунтованими, їх збіжність встановлена на основі отриманих числових результатів. Достовірність отриманих результатів підтверджується також співпадінням теоретичних висновків з результатами числових розрахунків. Частина результатів узгоджується з тими, що одержані при проведенні аналогічних досліджень і відомі з літературних джерел.

Практичне значення одержаних результатів. Розроблено спектрально-кореляційну теорію взаємопов'язаних ПКВП-сигналів, введені інтегральна та покомпонентна функції когерентності, створено вібродіагностичну систему, алгоритми та програмне забезпечення для розв'язання низки прикладних задач.

Програмне забезпечення дає можливість обчислювати весь комплекс спектрально-кореляційних характеристик коливань, які досить повно описують їх структуру. Знання такої структури коливань є необхідним для встановлення стану систем, які їх породжують, в тому числі механічних. Використання характеристик періодичної нестационарності для аналізу вібрацій дає можливість виявляти дефекти таких систем на ранній стадії розвитку. Взаємний статистичний аналіз вібрацій є ефективним засобом для встановлення їх просторових властивостей, локалізації їх джерел, встановлення типів. Статистична обробка вібраційних сигналів цілого ряду дефектних механізмів показала високу ефективність використання для цього частотних залежностей введених функцій когерентності.

Практичну цінність створеного програмного забезпечення, що було використано при розробці вібродіагностичної системи ПУЛЬС, підтверджують результати його практичного використання при проведенні діагностичних робіт на

ряді підприємств України, зокрема на теплових електростанціях у м. Бурштин (Івано-Франківська обл.) та смт. Добротвір (Львівська обл.), ДП “Одеський морський торговельний порт”, ДП “Морський торговельний порт “Южний” (Одеська обл.), на газоперекачувальних станціях (м. Комарно, смт. Дашава, Львівська обл.).

Результати дослідження можуть бути застосовані при виконанні науково-дослідних робіт у Інституті проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України, Фізико-механічному інституті ім. Г. В. Карпенка НАН України, Національному університеті “Львівська політехніка”. Також результати роботи можуть бути використані при виконанні робіт по встановленню технічного стану механізмів паливно-енергетичного сектору, виявлення рівня підвищеної вібрації складних машинних комплексів на промислових підприємствах України.

Результати дисертаційної роботи використано у ряді підприємств України (спеціалізований експертно-технічний центр ТОВ фірма “Діалаб”, приватне науково-виробниче підприємство “Інститут новітніх технологій”, підприємство “Кипер-пласт”, ТОВ “Порттехексперт”), що підтверджено відповідними актами.

Апробація результатів дисертації. Основні результати досліджень, викладені в дисертаційній роботі, доповідалися і обговорювалися на 15 міжнародних та національних науково-технічних конференціях, симпозіумах та наукових семінарах, у тому числі на: XV міжнародній європейській конференції з обробки сигналів EUSIPCO (Poznań, Poland, 2007); IV міжнародній науково-технічній конференції “Датчики, прилади та системи” (Ялта, 2008); V міжнародній науково-технічній конференції “Сучасні комп’ютерні системи та мережі: розробка та використання” (Львів, 2011); V міжнародній конференції “Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій” (Львів, 2014); міжнародній науково-технічній конференції “Конструкційна міцність матеріалів та ресурс обладнання АЕС” (Київ, 2012); V і VIII міжнародних науково-технічних конференціях молодих учених та спеціалістів “Зварювання та споріднені технології” (Київ, 2009, 2015); III міжнародній науково-технічній конференції “Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій” (Львів, 2012); XI міжнародній конференції

“Сучасні проблеми радіо-електроніки, телекомунікацій, комп’ютерної інженерії” (Львів, 2012); міжнародній науковій конференції пам’яті проф. Володимира Поджаренка “Вимірювання, контроль та діагностика в технічних системах” (Вінниця, 2013); IX, X, XI, XII Всеукраїнських міжнародних конференціях “Оброблення сигналів, зображень та розпізнавання образів” (УКРОБРАЗ) (Київ, 2008, 2010, 2012, 2014); українсько-польській науково-технічній конференції “Електроніка та інформаційні технології” (Львів, 2014); Національній науково-технічній конференції “Неруйнівний контроль та технічна діагностика” (Київ, 2012); I, II, III і IV науково-технічних конференціях “Обчислювальні методи і системи перетворення інформації” (Львів, 2010, 2012, 2014, 2016); XIX, XX, XXI відкритих науково-технічних конференціях молодих науковців і спеціалістів Фізико-механічного інституту ім. Г. В. Карпенка НАН України (Львів, 2007, 2009, 2011); конференціях молодих учених із сучасних проблем механіки і математики ім. акад. Я. С. Підстригача (Львів, 2009, 2010); проблемно-науковій міжгалузевій конференції “Інформаційні проблеми комп’ютерних систем, юриспруденції, економіки та моделювання” (Бучач-Тернопіль, 2009); Всеукраїнських школах-семінарах молодих вчених і студентів “Сучасні комп’ютерні інформаційні технології” (Тернопіль, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016).

Результати доповідалися на регулярних семінарах відділів і лабораторій ФМІ НАН України протягом 2008-2016 рр. У повному обсязі робота доповідалася та обгово-рювалася на розширеному науковому семінарі відділів № 6 “Електрофізичних методів неруйнівного контролю”, № 7 “Інтелектуальних технологій і систем діагностики”, № 8 “Методів і систем дистанційного зондування” та лабораторії вібродіагностики № 9л.

Особистий внесок здобувача. Основні наукові положення і практичні результати, які увійшли до дисертаційної роботи, претендентом отримані самостійно. У працях, опублікованих одноосібно, здобувачеві належить: [124] – проаналізовано залежність зміщення та дисперсії оцінок взаємоспектральних компонентів від довжини реалізації, точки усічення корелограми, форми згладжувального вікна та спектральних характеристик сигналу; [122] – проана-

лізовано вплив нестационарності на властивості оцінки кореляційної функції стаціонарного наближення періодично корельованих випадкових процесів. показано, що нестационарність істотно змінює величину дисперсії оцінки, а також її поведінку зі збільшенням зсуву; [249] – обґрунтовано вибір кроку дискретизації при когерентному оцінюванні кореляційних компонентів.

У працях, опублікованих у співавторстві, здобувачеві належить: [205, 208] – виведено формули для статистичних характеристик компонентних оцінок матсподівання і кореляційної функції для типових ПКВП, проведено їх порівняльний аналіз з відповідними когерентними; [209] – проведено аналіз впливу величини кроку дискретизації на швидкість збіжності дисперсії оцінок кореляційних характеристик, досліджено ефект накладання 1-го та 2-го роду; [213] – проаналізовано кореляційні і спектральні властивості взаємопов'язаних ПКВП, запропоновано методи оцінювання їх характеристик; [216] – проведено статистичну обробку експериментальних даних різного походження і аналіз її результатів; [138, 218] – проведено аналіз властивостей інтегральної функції когерентності двох взаємопов'язаних ПКВП, результати конкретизовано для амплітудно- і фазомодульованих сигналів; [112, 118, 128, 143, 158, 210] – досліджено когерентні оцінки взаємокореляційних компонентів двох ПКВП, отримано вирази для їх зміщення і дисперсії, наведено умови їх збіжності; [151, 155, 156, 171, 172] – розроблено програмне забезпечення для взаємокореляційного і взаємоспектрального аналізів вібрацій і результати обробки експериментальних даних при його використанні; [137] – проведено аналіз багатомірних моделей у вигляді ПКВП та наведені методи статистичного аналізу останніх; [115, 117, 142] – проаналізовано взаємокореляційні і взаємоспектральні властивості двох залежних між собою ПКВП; [127] – виведено та проаналізовано формули для статистичних характеристик дисперсії оцінок, обґрунтовано величину кроку дискретизації; [168] – аналіз дискретних компонентних оцінок взаємокореляційних характеристик, обґрунтування величини кроку дискретизації; [159] – проведено аналіз оцінок взаємоспектральних характеристик при когерентному оцінюванні взаємоспектральної

функції; [160] – проведено аналіз властивостей дисперсії оцінок когерентної корелограмної оцінки взаємоспектральної густини; [139, 149] – проведено аналіз реальних вібраційних сигналів, встановлено їх авто- та взаємокореляційні і взаємоспектральні характеристики, які можна використовувати як діагностичні критерії; [116, 144, 170, 220] – проведено аналіз формул, що визначають властивості МНК-оцінки математичного сподівання ПКВП, наведено приклади аналізу типових процесів; [121, 161] – проаналізовано оцінки взаємокореляційних функцій двох ПКВП, які визначаються на основі оцінок їх взаємокореляційних компонентів; [73, 150] – за допомогою методу малого параметру доведено асимптотичну збіжність оцінок періоду регулярних складових ПКВП, виведено і проаналізовано формули для зміщення і дисперсії оцінки періоду; [135] – у першому наближенні отримано формули для зміщення й дисперсії оцінок, які визначають вплив попереднього визначення періоду на величину похибки оцінювання; [27, 130] – проведено аналіз збіжності МНК-оцінок матсподівання і кореляційної функції ПКВП, проведено порівняльний аналіз з компонентними оцінками; [52, 104, 106, 154, 169] – проведено взаємокореляційний і взаємо-спектральний аналізи складових вектора вібрацій підшипника кочення з дефектами на зовнішньому і внутрішньому кільцях; [167] – описано нові можливості, які pojawiaються при використанні методів ПКВП у діагностиці турбоагрегатів ТЕЦ, проведено експериментальні роботи; [146, 164] – розроблено програмне забезпечення для когерентного аналізу вібрацій при невідомому періоді і результати обробки експериментальних даних при його використанні, розроблено методи взаємного статистичного ПКВП-аналізу у ранній діагностиці механізмів циклічної дії; [174] – проаналізовано властивості імовірнісних характеристик вібрацій бездефектного підшипникового вузла, які описуються диференціальними рівняннями другого порядку; [46–50] – проведено моделювання вібрацій стержня з тріщиною для різних параметрів циклічних навантажень та їх статистичну обробку; [113, 114, 175] – проаналізовано когерентні оцінки періоду часової мінливості кореляційної та коваріаційної функцій ПКВП та залежність дисперсії оцінки періоду від довжини відрізка реалізації та параметрів,

що описують імовірнісну структуру сигналу; [51, 147, 153] – показано, що вібраційний відгук можна описати моделлю у вигляді ПКВП; на основі обробки симульованих реалізацій досліджено кореляційні властивості вібрації тіла з тріщиною; [120, 123, 145, 219] – отримано й проаналізовано вирази для зміщення й дисперсії оцінки періоду регулярної складової ПКВП, яка отримується за допомогою схеми Бюй-Балло, а також проаналізовано залежності середньоквадратичної та систематичної похибок оцінювання періоду від довжини реалізації та параметрів сигналу; [157, 221] – проведено аналіз взаємкореляційної структури амплітудно- і фазомодульованих сигналів; [222] – проведено аналіз властивостей корелограмної оцінки взаємо-спектральної густини амплітудно- і фазомодульованих сигналів; [152] – наведено результати взаємного статистичного аналізу експериментальних даних з використанням розвинутих методів; [129, 140] – проведено взаємкореляційний аналіз складових вектора вібрацій; [105, 107, 111, 141] – проведено аналіз оцінок взаємкореляційних характеристик горизонтальної і вертикальної складових вектора вібрацій за симульованими та експериментальними даними; [148] – проведено аналіз властивостей коефіцієнтів Фур'є взаємкореляційних функцій амплітудно- і фазомодульованих сигналів; [74] – моделювання вібраційних сигналів із наперед заданими взаємкореляційними характеристиками; [119] – запропоновано алгоритми визначення покомпонентної функції когерентності та їх програмна реалізація.

Публікації. Результати роботи викладені в 79 наукових публікаціях, у тому числі: 2 розділи у закордонних колективних монографіях, 7 статей у закордонних періодичних виданнях, 32 статті у наукових фахових виданнях України, 2 патенти, 4 статті в інших виданнях, 32 публікації у збірниках матеріалів і праць конференцій.

Структура та обсяг роботи. Дисертаційна робота складається зі вступу, восьми розділів, висновків, списку використаних джерел з 251 найменування на 29 сторінках та додатку на 7 сторінках. Загальний обсяг дисертації – 414 сторінок, з них 330 сторінок основного тексту. Робота містить 255 рисунків та одну таблицю.

РОЗДІЛ 1

БАГАТОВИМІРНА ВІБРАЦІЙНА ДІАГНОСТИКА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

1.1. Задачі багатовимірної діагностики

1.1.1. Проблемна ситуація

До області повсякденних і звичних знань, що відображають загальні властивості оточуючого нас світу, належить поняття міцності. Властивості міцності притаманні будь-якому об'єкту матеріального світу, як природного, так і техногенного походження. Міцність є найважливішим критерієм якості середовища проживання, оскільки від неї залежить не тільки здоров'я, комфортність, впевненість і успішність життєдіяльності, але, перш за все – можливість і безпека самого існування життя. Поняття міцності настільки увійшло в повсякденні звички, що відчувається як якесь само-собою зрозуміле буття. На жаль, це далеко не так. Сучасне суспільство регулярно переживає потрясіння від надзвичайних ситуацій на об'єктах життєзабезпечення та масового присутності людей. Численні аварії та катастрофи, позбавляючи людей умов нормального існування і несучи багато людських життів, наносять непоправних моральних, матеріальних і екологічних збитків. Часті у світі трагедії є свідченням того, що суспільство не має в своєму розпорядженні ефективних інструментів спостереження, передбачення і запобігання критичних станів промислових, природно-технічних та громадських об'єктів підвищеної техногенної небезпеки.

У той же час параметри, що визначають міцність, досить коректно формалізовані. Відомо, що міцність забезпечується тоді, коли фізико-механічні властивості будь-якого матеріалу, предмета або пристрою знаходяться в межах області пружно-пластичних деформацій. Пружні деформації проявляються як властивість матеріалу конструкції чинити опір на ряд факторів, як зовнішніх, так і внутрішніх. При пружній деформації тіло повертає собі попередні розміри й форму при знятті напруження. Пластичні деформації проявляються як нездатність

зберігати пружні властивості, в результаті чого, після припинення дії збурюючих сил, об'єкт не здатний повернутися в початковий стан. Міцнісні властивості характеризують фізичні параметри – модулі пружності та деформації [77, 88]. Границі пружних і пластичних деформацій, що залежать від безлічі фізико-механічних властивостей і сукупності зовнішніх факторів, визначають межі міцності матеріалів і, в кінцевому рахунку, безпеки доквілля. По механізму реакції на дії збурюючих чинників можна виділити два принципово різних класи природних, технічних та інших об'єктів і систем, які становлять небезпеку для життєдіяльності людини: 1) силові динамічні агрегати і механізми, що перетворюють енергію в рух і навпаки, 2) силові статичні конструкції, призначені для подолання просторово-часових статичних і динамічних природно-технічних дій.

До першої групи відносяться машини і механізми, все рухоме, що обертається, винайдене людиною – від колеса і транспортних засобів до турбоагрегатів і космічних апаратів. У їх числі двигуни, турбіни, компресори, генератори, насоси та ін. силові агрегати в авіації, транспортування палива, енергетиці, на транспорті, у важкому машинобудуванні. Інтегральним показником міцності цієї групи є вібраційно-діагностичні деформаційні характеристики агрегатів. До другої групи належать усе промислове, цивільне, транспортне, військове та громадське будівництво і природні сейсмонебезпечні об'єкти. У їх числі навантаження несучих конструкцій будівель і споруд, фундаменти, опори, мости, причали, вагові конструкції, метро, монорейкові і швидкісні магістралі, трубопроводи, тунелі та інші техносферні компоненти транспортних природно-технічних систем [42, 68]. Інтегральним показником міцності цієї групи є характеристики напружено-деформованих станів конструкцій.

1.1.2. Технічні засоби моніторингу стану та діагностики механічних систем

Розвиток технологій переходу на обслуговування і ремонт за фактичним станом відбувався за двома зустрічними напрямками. З одного – контроль забезпечується вбудованими вимірювальними засобами та введенням модулів і алгоритмів оцінки поточного стану. З другого – створюють зовнішні системи

збору і аналізу діагностичної інформації, як із вбудованих, так і з будь-яких інших джерел прямої чи опосередкованої інформації про стан об'єктів контролю. Однак досвід розробки методів діагностики за сигналами вібрації свідчить про економічну недоцільність вбудованих сучасних вимірювальних засобів в обладнання виготовлене в минулому столітті [9, 10, 22, 23, 91]. Також невдачею завершуються спроби використати в прогнозуючих системах діагностики первинні сигнали з вимірювальних перетворювачів систем управління чи аварійного захисту. Найчастішою причиною є невідповідність характеристик встановлених первинних перетворювачів вимогам наступного поглибленого аналізу.

Коли вібрацію розглядати як основний процес, за яким визначають працездатність і технічний стан обладнання, то цей процес має чітко визначені зони допустимих значень. Коли ж вважати її (вібрацію) вторинним процесом, то з технічним станом обладнання її параметри можна пов'язати статистично. У першому випадку вирішуватиметься задача контролю і моніторингу вібраційного стану обладнання за низькочастотними коливаннями притаманними технологічному процесу (орієнтовно до 1 кГц). При цьому оцінюється вихід вібрації чи швидкості її росту за допустимі межі, що в свою чергу трактується як відмова обладнання за вібрацією. Допустимі межі вібрації та місця її заміру звичайно визначаються стандартами [1, 76, 85]. У другому випадку – вирішуються задачі вібраційної діагностики, і тоді використовують як НЧ так і ВЧ вібрації, в т.ч. ультразвукову (до 100 кГц і більше). Вирішення таких задач є статистичним, тобто про ефективність конкретних методів і засобів діагностики судять за імовірністю помилкового рішення [40, 82, 84, 108, 125, 126].

Від інших видів діагностики вібраційна, як і струмова, відрізняється тим, що сигнали відбираються в невеликій кількості точок контролю, а обробляється інформація, яку отримують з багатьох компонент цих сигналів. Додаткову інформацію про вузли тертя можна отримувати і з аналізу параметрів мастила, а при неможливості доступитися до опор обертання, ця інформація може бути єдиною доступною (наявність продуктів зношування та зміна властивостей).

Технічні засоби моніторингу стану та діагностики можна розділити на три *основні групи*. Так можна виділити стаціонарні засоби вимірювання і контролю параметрів робочих процесів, які використовуються в системах управління обладнанням. Як правило, це вимірювальні засоби промислової автоматики, які використовують стандартні промислові контролери і стандартні протоколи передачі даних. Жорсткі вимоги до вимірювальних засобів систем управління за достовірністю отримуваної інформації призводять до природних обмежень багатьох характеристик вимірювальних перетворювачів та об'єму їх вихідних даних. Однак первинна інформація з таких засобів може бути корисною і для поглибленого діагностування за вторинними процесами. З розвитком засобів цифрової обробки даних, можливості вібраційних вимірювальних каналів систем управління поступово розширюються.

До другої групи можна віднести засоби функціональної діагностики, які можуть бути або переносними, або стаціонарними. Популярною (з економічної точки зору) останнім часом є поглиблена функціональна діагностика за вторинними ознаками. Вона розрахована на довготерміновий прогноз стану (превентивна діагностика) і не потребує безперервних вимірювань. Головною причиною зацікавлення є мінімізація витрат на першому етапі впровадження засобів діагностики при максимальному охопленні діагностикою більшої частини експлуатованого обладнання. Для такої діагностики найчастіше використовують переносні засоби вимірювання і аналізу діагностичних сигналів. У [82] приведено портативний аналізатор для діагностики обертового обладнання за вібрацією і струмом привідного електродвигуна. Такий двоканальний аналізатор може також використовуватись як засіб вимірювання компонентів акустичної емісії в нижній частині ультразвукового діапазону і локалізації джерела. Спеціалістам по діагностиці часто доручають і роботу з балансування і центрування валів на місці експлуатації машин. Для балансування використовується та сама переносна апаратура, що і для вібродіагностики з вбудованою програмою розрахунку компенсуючих мас, а для центрування валів – спеціальний прилад вимірювання розцентрування і розрахунку коректуючи дій. Люба система періодичної

діагностики має обмеження на достовірність діагнозу, які практично не вдається зменшити скороченням інтервалів між діагностичними вимірюваннями. Достовірність діагнозу можна підняти отриманням додаткової інформації з цих самих сигналів вібрації і струму, аналізуючи їх в перехідних режимах роботи машин і обладнання, наприклад при пусках, стрибках навантаження та ін. Для аналізу вібрації і струму в перехідних режимах потрібні багатоканальні засоби паралельного відбору діагностичних сигналів, а в переносних системах діагностики працюючого обладнання без суттєвого зростання витрат коштів можна збільшувати як види використаних сигналів, так і точок їх відбору.

До третьої групи технічних засобів моніторингу і діагностики відносять засоби візуальної і тестової діагностики, що використовують в спеціальних режимах роботи або на непрацюючому обладнанні. З ефективних засобів візуальної діагностики виділяють системи зовнішнього відео спостереження та ендоскопи для огляду внутрішніх поверхонь обладнання. З засобів тестової діагностики деякі можуть входити в склад переносних приладів і систем функціональної діагностики для розширення їх можливостей. Це, наприклад, багатоканальні засоби вимірювання вібрації і динамічних характеристик при пуску і вибігу обертового обладнання, засоби виявлення витоків за акустичною емісією (ультразвуковою вібрацією) трубопроводів підвищеного тиску, засобів аналізу власних коливань обладнання і засобів вимірювання механічних передаточних характеристик за вібрацією, збудженою зовнішніми ударами, засоби балансування роторів за вібрацією нерухомих частин машини [4, 21, 64, 109, 110].

Основним напрямком розвитку засобів діагностики обладнання є підвищення достовірності результатів діагностики і прогнозу. Її можна підняти отриманням додаткової інформації, наприклад при перехідних режимах роботи об'єктів. Для аналізу перехідних процесів в об'єктах контролю потрібно використовувати багатоканальність обробки. Якщо до вимоги "одночасності" з боку отримання вихідної інформації можна наблизитися збільшенням частоти опитування багатьох каналів та їх компонентного аналізу, то з боку відбору сигналів вхідними

перетворювачами вже потрібно забезпечити реальну одночасність їх паралельної роботи [19, 86, 103]. Тому в переносних системах збільшують число точок контролю діагностичних сигналів і число паралельно використовуваних алгоритмів виявлення дефектів. Крім того, відбувається розвиток технічних характеристик вимірювальних перетворювачів для розширення їх динамічного і частотного діапазону та збільшується об'єм попередньої обробки сигналів [25]. Тому створюються спеціалізовані контролери для паралельного багатоканального вимірювання величини вібрації з можливістю швидкої обробки результатів вимірювання для вирішення окремих діагностичних задач в реальному часі. Багатоканальні контролери створюються і для стаціонарних систем захисту і діагностики, які виконують функцію захисту обладнання (сигналізації) і паралельно видають в інформаційну мережу потік цифрових даних для більш складних діагностичних завдань.

Програмне забезпечення обслуговує як типові засоби вимірювання систем моніторингу і діагностики, що передають інформацію на сигнальному рівні (для вимірювання та аналізу вібрацій, струму, акустичної емісії та зображення з тепловізорів та ендоскопів), так і типові результати кількісного аналізу, що періодично поновлюються операторами за показами засобів контролю робочих процесів, температури окремих вузлів, засобів аналізу мастил. Також у вигляді коментарів фіксуються результати якісної оцінки обстежень стану обладнання і опосередкованих ознак його зміни [39, 88, 89]. Типовим інтервалом між періодичними вимірюваннями, за допомогою переносних засобів функціональної діагностики без зупинки обладнання для більшості систем є два – три місяці. Щодо прогнозу, то при відсутності дефектів за даними останньої діагностики, його типова тривалість до шести місяців. Цього часу переважно вистачає для підготовки до ремонту.

Реальний прогноз залишкового ресурсу, що видається системою моніторингу стану і діагностики, можливий тільки, коли він є коротшим прогнозованого інтервалу безвідмовної роботи. Інакше, може оцінюватися тільки величина

поправки до розрахункового або статистично визначеного ресурсу обладнання [25, 86].

Існуючі технічні засоби моніторингу стану та діагностики механічних систем широко застосовуються на різних типах підприємств, які зацікавлені у збереженні залишкового ресурсу своїх механічних систем [18, 61]. Так як ремонт, зупинка чи заміна елементів великих конструкцій є дороговартісною, то вдосконалення діагностичних засобів контролю для моніторингу та діагностики є актуальною науковою проблемою, яка активно розвивається в наш час.

1.2. Багатовимірний аналіз даних

Розвиток комп'ютерних технологій і їх впровадження в управління промисловими об'єктами зумовлює перехід від традиційних методів аналізу технічного стану складних механічних систем (турбогенератори, електродвигуни, порталні крани, вугільні конвеєри тощо) до більш інформативних, які дозволяють досліджувати розвиток їх дефектів на стадії утворення. Широке використання для контролю технічного стану нових методів, які дають можливість поглибити знання про стан технологічного процесу, дозволяє спланувати поточні ремонти, зменшити простої, прогнозувати показники виробництва та залишковий ресурс, а також здійснювати аналіз його ефективності.

Слід зазначити, що на даний час інтенсивного розвитку зазнали наукові напрями пов'язані зі збором даних, видобутком знань з баз даних, навчанням машин, автоматизацією виробничого процесу. Ці напрями часто об'єднують терміном інтелектуальний аналіз даних і вони досягли переконливих успіхів в різних областях людської діяльності. Ряд методів аналізу розвинутих в рамках згаданих наукових напрямків знаходять застосування в задачах технічної діагностики [70]. До них відносять методи розпізнавання образів, нейронні мережі, методи теорії нечітких множин, методи ПКВП та ін. Такий підхід можна

охарактеризувати як індуктивний, тобто такий який здійснюється від обробки реальних даних і експлуатаційних характеристик до моделей конкретного пристрою, що дозволяє вирішувати задачі діагностики в умовах неповної або відсутності необхідної апріорної інформації. Часто методи вирішення задач в межах індуктивного підходу об'єднують терміном багатомірні, підкреслюючи одночасне використання багатьох ознак та характеристик об'єкта (А.І. Могільнер – Росія, Р. Уріг (R. Uhrig) – США).

Незважаючи на чисельні роботи з застосуванням окремих методів багатомірного аналізу даних в діагностиці повного і систематичного дослідження індуктивного підходу та оцінки практичної ефективності різних алгоритмів стосовно задач вібродіагностики досі не зроблено. Багатомірний аналіз даних (MDA) та його чисельні застосування – хеометрика, технометрика, економетрика, енвайрометрика, біометрика, психометрика – це новітній підхід, який широко використовується в різних областях науки та техніки [81]. Основна ідея цього підходу – виявлення закономірностей в хаосі експериментальних даних. Сучасні методи аналізу аналіз головних компонент (PCA), регресія на головні компоненти (PCR), проекція на латентні структури (PLS) – дають можливість зробити це більш ефективно. В економетриці більшу увагу приділяють таким багатомірним статистичним методам як кореляційний, регресійний, компонентний та кластерний аналізи. Причому для зменшення розмірності використовують метод головних компонент і факторний аналіз, а для класифікації – кластерний та дискримінантний аналізи [78]. Методи зниження розмірності багатомірного простору дозволяють без суттєвої втрати інформації перейти від початкової системи багатьох експериментально відслідковуваних взаємозв'язаних факторів до системи суттєво меншого числа прихованих (таких, що не спостерігаються) факторів, які визначають варіацію початкових ознак. Методи багатомірної класифікації призначені для розділення сукупностей об'єктів (що характеризуються більшим числом ознак) на класи, в кожен з яких повинні входити об'єкти в певній мірі однорідні та близькі. Розвиток вчислювальної техніки та програмного забезпечення сприяє широкому

впровадженню методів багатомірного статистичного аналізу в практику. Пакети прикладних програм зі зручним користувацьким інтерфейсом, такі як SPSS, Statistica, SAS та інші спрощують застосування вказаних методів з боку складності математичного апарату, що заснований на лінійній алгебрі, теорії ймовірностей та математичній статистиці.

На відміну від простих одномірних методів, що оперують обмеженими і, як правило, однорідними наборами досліджуваних об'єктів і очевидними взаємозв'язками між їх ознаками, багатомірні методи працюють з необмеженими і розрізненими наборами досліджуваних об'єктів і неочевидними та різноманітними неколінеарними взаємозв'язками між їх ознаками. Фундаментальна відмінність полягає в тому, що сама множина досліджуваних об'єктів і ознак, як і гіпотези та закономірності розподілу і зміни їх значень в просторі та часі, тут є невідомими, а мають бути знайденими, виступаючи щоразу не тільки ціллю означення вихідних умов, але й сутністю самого дослідження. Предметом дослідження виступають як параметричні, так і непараметричні (якісні, порядкові та рангові) зв'язки, детерміновані і недетерміновані (стохастичні), масові та робастні, реальні та хибні, спостережувані та не спостережувані (латентні) зв'язки, тобто всі види і форми зв'язків, недоступні для простого спостереження та вивчення.

1.3. Лінійні і нелінійні підходи у вібраційній діагностиці

Використовуючи для цілей діагностики та контролю додаткову замасковану шумами та розподілену серед багатьох параметрів багатомірну інформацію при сучасних методах інтелектуального аналізу даних можна підвищити безпеку, надійність та економічну ефективність експлуатації широкого асортименту механічного устаткування, робота якого супроводжується генерацією вібрацій. Для досягнення поставленої мети потрібно вирішувати задачі достовірності вимірювальної інформації, виявлення малих відхилень від режимів нормальної експлуатації, розробляти методи вібраційної діагностики, що базуються на аналізі

флуктуації параметрів з виявленням ранніх стадій розвитку порушень режимів, які неможливо виявити за усередненими значеннями сигналів, що зазвичай використовують для забезпечення стійкості вимірів, розробляти активні методи, основані на аналізі відгуків системи на вчинені теплові, механічні та інші впливи для визначення місць розташування дефектних елементів обладнання та їх вчасної заміни. Тому важливо запропонувати та обґрунтувати підхід до вирішення задач вібродіагностики, що базується на застосуванні багатомірних статистичних методів виявлення закономірностей в масивах експлуатаційних даних та методів навчання машин діагностуванню механічного устаткування.

Взаємодія вузлів та елементів механічних машин між собою та навколишнім середовищем породжує, як правило, вібрації, які впливають як на саму машину, так і поширюються в навколишньому середовищі у вигляді акустичної хвилі. В більш загальних випадках предметом дослідження є віброакустичний сигнал. Перетворення вібрацій машин в інформативний сигнал та його аналіз з метою оцінки технічного стану (ТС) є предметом вібродіагностики. Неоднозначність прояву якості функціонування машин у вигляді генерованих вібрацій призводить до моделювання таких вібрацій сигналами з різноманітним параметричним наповненням. У залежності від особливості технології функціонування машин діагностика спирається на обмежену чи розширену множину параметрів таких сигналів, і навіть на різноманітну фізичну природу їх формування. Основна маса технологічного обладнання за свій значний термін служби проявляє ознаки старіння та піддається багаторазовим ремонтам, через що його технічні характеристики погіршуються – причому нелінійно. Так на початковій стадії функціонування одні ознаки є чутливими до появи дефекту, а з його розвитком на перший план виходять ознаки чутливіші до експлуатаційного пошкодження [44]. Розвиток експлуатаційного пошкодження від стадії зародження дефекту до гранично допустимого рівня приводить до настільки значущих порушень правильності функціонування машини, що її динамічна модель стає суттєво нелінійною. В цьому випадку спектрально-кореляційні характеристики перестають адекватно описувати протікаючі процеси. В спектрах появляються складові, до

яких неможливо приписати природні джерела збудження, що змушує проводити додаткову обробку сигналу, оцінювати вид і вплив нелінійної характеристики моделі на відгук, застосовуючи імовірнісну і багатомірну обробку сигналу.

Дослідження генерованих самою машиною вібрацій не завжди можливе, чи економічно оправдане, тому використовують теж примусові зовнішні вібрації і, зокрема, локальну вібродіагностику, побудовану на аналізі нелінійностей механічних систем [35, 36, 67, 69, 83, 93, 98, 102]. У монографіях [35, 36] було закладено принцип підходу – вивчення коливань складних механічних систем з багатьма ступенями вільності, що включають в себе різноманітні нелінійні елементи і підданих дії як періодичних, так і випадкових зовнішніх сил. Розроблені нові методи математичного моделювання, що дозволяють вирішувати складні системи нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь, що описують динамічні процеси в електромеханічних системах, за межами можливостей відомих математичних методів. Запропоновано 25 методів для вирішення нелінійних диференціальних рівнянь Матьє-Хілла, Дуффінга, Ван дер Поля, Мейсснера, а також різноманітних нелінійних диференціальних рівнянь в часткових похідних (рівняння звинних, поздовжніх і крутильних коливань стрижнів з урахуванням фізичної і геометричної нелінійностей, внутрішнього і зовнішнього тертя, інерції обертання і поперечного зсуву перерізів, а також обмеженою потужності джерела збудження та ін.). Монографії [69, 92, 102] присвячені використанню нелінійних ефектів в вібраційних машинах технологічного призначення, зокрема, удосконаленню вібротомашин за рахунок використання властивостей субгармонічних коливань (ефекти відведення, управління знаком асиметрії коливань та ін.), параметричного і бігармонічного збудження (стабілізація резонансних коливань вібротомашини, зниження пускового моменту та ін.). Вивчено нелінійні коливання гнучких зв'язків у вібротомашинах при параметричному і кінематичному збудженні, запропоновано оригінальні способи придушення цих коливань.

Вивчення можливостей використання лінійних і нелінійних підходів у вібраційній діагностиці машин здійснювалося в період з 1981 по 2000 рр. Основні

підходи і методологія використання нелінійних ефектів в вібродіагностиці були сформульовані С. Цифанським і опубліковані в пріоритетних статтях [93, 98]. С. Цифанським також запропонований один з найбільш ефективних діагностичних підходів – метод приєднаної маси [94, 99]. Надалі ці підходи розвивалися його учнями В. Бересневічем і М Магона (Латвія), Б. Лушнікова (Росія), В. Ожіганова, В. Малгіним, А. Оксом і В. Якушевич (Латвія). З 1988 р. метод приєднаної маси продовжував розвивати проф. В. Волков (Каунаський технологічний університет, Литва).

У рамках лінійної інтегральної вібродіагностики пропонується використання електрогідрравлічних збудників коливань на основі високовольтного розряду в рідині [72, 75, 93, 95, 100, 101, 204]. З їх допомогою можна отримати дуже короткий (10-20 мкс) і великий за амплітудою (500-2000 Гц) імпульс з дуже широким частотним спектром. Це дає можливість одночасно збудити широкий спектр частот вільних коливань і потім, у разі необхідності, відомими методами перейти до визначення амплітудно-частотної характеристики об'єкта випробувань [242].

Нелінійні інтегральні методи вібродіагностики засновані на збудженні резонансних режимів звинних форм коливань об'єкта контролю. Залежно від заданих умов збуджуються супер- або субгармонічні резонанси. Їх переваги – відпадає необхідність в еталоні, більш висока чутливість діагностичної процедури, простота реалізації. Є можливість визначення не тільки факту наявності пошкодження в конструкції, але і його приблизного місця розташування. Запропоновано загострення чутливості діагностичних процедур введенням в спектр збудження постійної складової і вищих гармонік та перетворення на час випробувань конструкції з лінійної в нелінійну [96].

Організація практичних заходів з діагностики ТС потребує побудови відповідної системи діагностування. Створення системи діагностування супроводжується постановкою та вирішенням широкого кола завдань. До них відносять дослідження кінематичних та динамічних властивостей об'єкта, визначення всієї множини дефектів, несправностей, поломок, відмов і відповідно, формуванням алфавіту класів діагностованих станів, пошуком інформативних

діагностичних ознак, на мовою котрих можуть бути описані ці класи (словник діагностичних ознак), розробкою алгоритмів і рішаючих правил діагностування, розробкою вимог до переліку і технічних характеристик вимірювальної, аналітичної, реєструючої, обчислювальної, документуючої і т.п. апаратури, розробкою відповідного математичного та технічного забезпечення та ряд ін.

1.4. Багатовимірність як функція багатьох змінних

Для виявлення і діагностування вузлів віброакустичним методом використовують інформацію, отриману в різних вимірювальних точках конструкції машини та навколо неї, напрямках вимірювання (вертикальному, горизонтальному та осьовому) та ділянках частотного діапазону (інфразвуковому, звуковому, ультразвуковому). Практичний досвід показав, що для достовірної оцінки стану машин та механізмів за джерела інформації мають слугувати багатомірні характеристики швидкоплинних коливних процесів, що супроводжують функціонування машини, тобто характеристики віброакустичних процесів у часовій або частотній областях в діапазоні частот $0 \dots 100$ кГц. Верхню межу діапазону визначатимуть можливості вимірювальної і аналізуючої апаратури.

Інтерпретацію фізичних закономірностей процесів впливу дефектів на характер збудження коливальних процесів, чи зміні їх властивостей віброакустичними методами звично проводять на двох рівнях, кожному з яких відповідають свої задачі та методи їх вирішення:

–ступінь втрати працездатності об'єкту, тобто груба оцінка зміни ТС машини вцілому (проблема вібромоніторингу);

–ідентифікація виникаючих пошкоджень у вузлах обладнання при порушенні роботоздатності об'єкту (проблема віброакустичної діагностики).

Перший рівень: вібромоніторинг машинного обладнання – оцінка відхилення від норми інтегральної амплітудної характеристики вібросигналу,

середньоквадратичного значення (СКЗ), рівня вібрації в обмеженому діапазоні частот. При цьому для контролю ТС високообертового обладнання та його вузлів (редукторів, компресорів, турбін та підшипників кочення) розроблені стандарти з використання параметрів віброприскорення в діапазоні частот 10...10000 Гц.

Другий рівень: віброакустична діагностика – розпізнавання несправностей за сукупністю діагностичних ознак, тобто характеристик віброакустичних процесів, чутливих до змін ТС обладнання через виникнення несправностей, що з часом можуть привести до втрати робото здатності об'єкта діагностування.

Для виявлення причин втрати працездатності проводять процедуру діагностування несправностей, основу на детальному якісному і кількісному аналізу змін параметрів віброакустичного сигналу та зв'язку цих змін з параметрами ТС. При побудові системи діагностичних ознак разом з даними спектрального аналізу коливних процесів в реперних точках конструкції машини використовують дані спектрального аналізу амплітудної та фазової огинаючих, аналізу статистичних характеристик, функцій зв'язку коливальних процесів в різних точках конструкції, імовірності викидів та інші характеристики віброакустичних сигналів.

Віброакустичний сигнал несе в собі інформацію про стан машинного обладнання в закодованому вигляді і є результатом не прямих вимірів структурних параметрів машини, а опосередкованою оцінкою деякої області значень цих параметрів. Використання віброакустичних методів потребує розробки певної процедури діагностування, що забезпечує добування інформації, необхідної для постановки діагнозу.

До переліку завдань віброакустичної діагностики відносять не тільки пошук та розробку оптимальних методів виділення компонентів сигналу, що несуть інформацію про зміну ТС об'єкту, не тільки побудову діагностичної моделі, а й розробку засобів діагностування, що дозволяють з мінімальними затратами часу і засобів реалізувати застосування цих методів на практиці. Взаємодіючі між собою об'єкт та засоби діагностування утворюють *систему діагностування*. Незалежно від способу її реалізації і від способу прийняття рішення (автоматично

чи оператором), система діагностування є системою розпізнавання образів, за функціональною схемою відображеною на рис. 1.1.

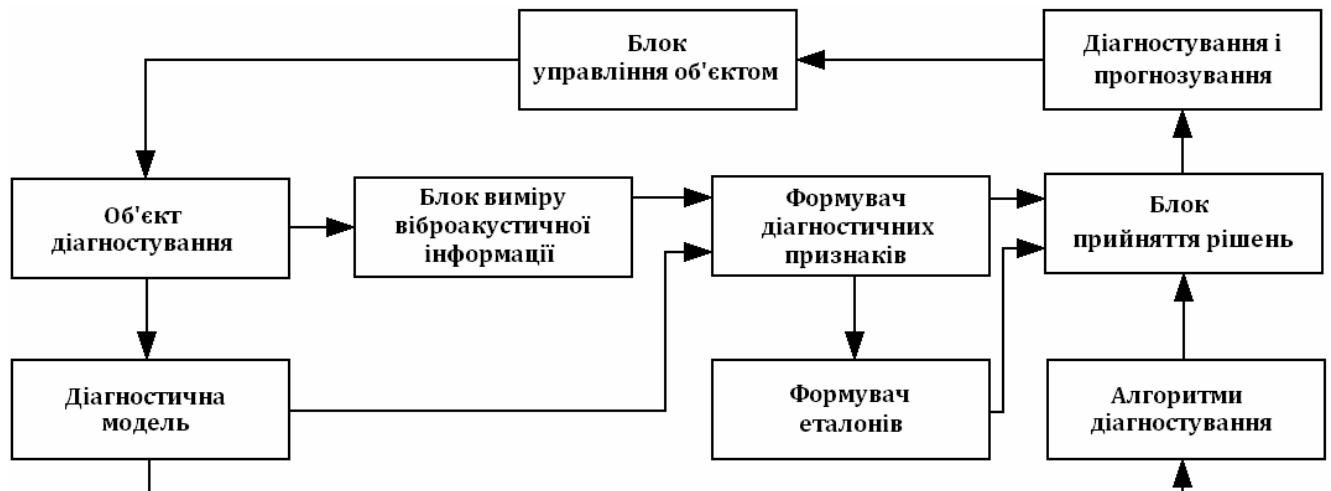


Рис. 1.1. Структурна схема системи віброакустичної діагностики.

Розуміючи вібрацію як функцію багатьох змінних та вимірюючи паралельно вібрацію в декількох віддалених від себе точках обладнання або декілька впливаючих на вібрацію параметрів устаткування для її дослідження можна використовувати багатомірні методи аналізу сигналів. В процесі експлуатації складно проводити паралельні вимірювання в багатьох точках контролю, тому для вирішення діагностичних задач звичайно обмежуються одномірними та двомірними методами аналізу.

Основною областю застосування багатомірного аналізу в технічній діагностиці є просторовий аналіз “фотографій” діагностованих об’єктів, отриманих безконтактними перетворювачами оптичного, теплового та інших видів випромінювань [97]. Такі вимірювання виконуються багатьма незалежними вимірювальними перетворювачами, зібраними в єдину матрицю. На даний час такі матриці для безконтактного вимірювання не випускаються, тому вимірювання вібрації проводиться послідовно у вибраних точках обладнання, а просторовий аналіз вібрації зводиться до аналізу форми коливань на частотах дії гармонічних коливних сил в усталених режимах роботи обладнання, або форми його власних коливань збуджених тестовою дією ударного виду.

Вважають, що аналізовані компоненти або значно перевищують за величиною решту, або їх попередньо виділяють з сигналу вібрації. За найпростішу модель компоненти приймають гармонічний сигнал (рис. 1.2а):

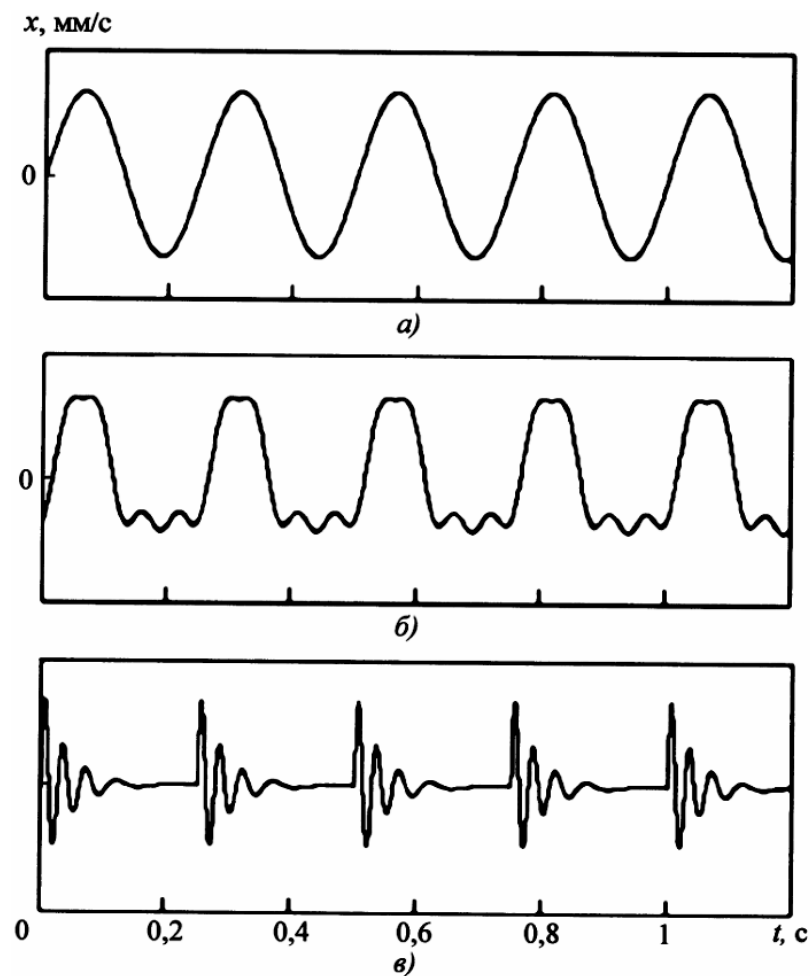


Рис. 1.2. Різні форми періодичного сигналу [83].

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (1.1)$$

де $x(t)$ – біжуче значення сигналу в момент часу t ; A_0 – амплітуда сигналу; ω_0 – кругова частота сигналу; φ_0 – початкова фаза сигналу. Кожен зі вказаних трьох параметрів гармонічної вібрації, що визначають її форму може нести діагностичну інформацію. Винятком є лише початкова фаза вібрації, бо інформацію несе звичайно не її значення а різниця фаз коливань однієї частоти (синхронних коливань), виміряна в двох точках, або напрямках. Період гармонічної вібрації зв'язаний з круговою частотою і рівний $T_0 = 2\pi / \omega_0$. Якщо сигнал вібрації мало відрізняється від гармонічного (рис. 1.2б), і в його складі

лише декілька гармонік, то діагностична інформація може міститись в параметрах кожної з цих гармонік:

$$x(t) = \sum_{k=1}^n A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k). \quad (1.2)$$

Якщо тривалість сигналу мала порівняно з періодом його слідування (рис. 1.2в), то інформація найчастіше міститься в таких параметрах як амплітуда (розмах), частота слідування (період T_0), шпаруватість (відношення тривалості сигналу до періоду слідування), час наростання τ_n і час спадання $\tau_{сп}$. Інтегральною оцінкою такого сигналу може бути і величина пікфактору, тобто відношення максимальної величини імпульсного сигналу до його середньоквадратичного значення.

Часто треба аналізувати форму детермінованих коливань, що являють собою суму періодичних сигналів близьких частот, наприклад суму гармонічних сигналів виду:

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) + A_2 \cos((\omega_0 + \Delta\omega)t + \varphi_2), \quad \Delta\omega = 0.1\omega_0.$$

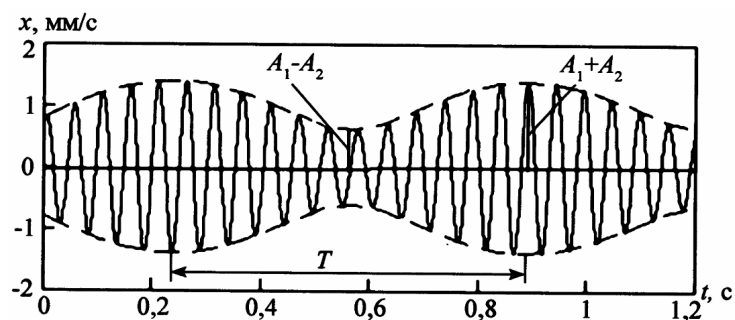


Рис. 1.3. Сигнал биттів двох складових вібрації з близькими частотами [93].

Другою областю використання багатомірного аналізу можна вважати акустичну та гідроакустичну локацію, що вирішує задачу просторового виявлення в однорідних середовищах слабких акустичних сигналів на фоні сильного некорельованого шуму. Використовують при цьому антенні ґратки з багатьох вимірювальних перетворювачів. У вібродіагностиці подібні задачі вирішують в двомірному просторі, наприклад для виявлення витоків в трубопроводах за використання методів взаємного спектрального аналізу вібрації трубопровода. Аналогічні задачі на площині можуть рішатися при виявленні методами

акустичної емісії дефектів в найпростіших навантажених металевих конструкціях, наприклад, в посудинах під тиском.

До третьої області використання методів багатомірного аналізу можна віднести дослідження отриманих з сигналу вібрації діагностичних параметрів як функцій незалежно контрольованих характеристик діагностованого обладнання. Такими параметрами може бути амплітуда деяких складових сигналу вібрації, глибини їх модуляції і т.п., а в якості характеристик обладнання – частота обертання ротора, величина навантаження, температура окремих вузлів та інше. Особливістю застосування такого виду багатомірного аналізу параметрів вібрації є те, що для спрощення аналізу характеристики обладнання вважають незалежними, тобто n – мірна густина імовірності діагностичного параметру дорівнює добутку одномірних густин імовірності цього параметра:

$$p(X, k_1, k_2, \dots, k_n) = \prod_{j=1}^n p(X, k_j), \quad (1.3)$$

де X – контрольований діагностичний параметр; k_j – контрольовані характеристики обладнання. При такому спрощенні та достатній кількості незалежних вимірювань діагностичного параметра X_1, \dots, X_N n -мірний аналіз зводиться до одномірного, тобто розглядають переріз $p(X, k_1, k_2, \dots, k_n)$ за вибраною характеристикою k_j [4, 81, 92].

Такий вид багатомірного аналізу не завжди зручний для якісного вирішення діагностичних задач, так як за час вимірювання діагностичних параметрів X_i деякі характеристики обладнання k_j можуть мінятися в недопустимо широких межах. Прикладом можуть бути амплітуди X_i спектральних складових вібрації, для визначення яких з достатньою точністю необхідний проміжок часу тривалістю 5...10 обертів ротора. За цей час частота обертання ротора в перехідних режимах роботи може мінятися вдвічі та більше разів. Тому в багатьох задачах ефективніше використовувати одномірні методи аналізу з корекцією даних як функції незалежно контрольованих змінних [66].

Важливою особливістю застосування багатомірного аналізу вібрації при вирішенні діагностичних задач є багатомірне відображення вимірних через великі інтервали часу спектрів вібрації діагностованого обладнання.

Таке представлення вібрації дає можливість якісної оцінки безповоротних змін в обладнанні. Аналіз перерізів подібних розподілів по осі частот дозволяє будувати тренди окремих складових вібрації, тобто кількісно оцінювати зміни значень діагностичних параметрів в часі.

Потрібно зауважити, що для подібних кількісних оцінок у вибраній переріз мають попадати складові вібрації однакового походження. Для цього використовують тримірні спектри, побудовані за періодично міряними вузькосмуговими спектрами вібрації з обов'язковим застосуванням методів корекції спектрів за частотою через можливі флуктуації частоти гармонічних складових вібрації від виміру до виміру.

Найпростішим способом такої корекції може бути використання вузькосмугових синхронних спектрів вібрації, однак, цей спосіб усуває лишень помилки в тих гармонічних рядах складових вібрації, які жорстко визначаються частотою обертання ротора. Залишаються помилки визначення, наприклад, амплітуд підшипникових складових вібрації, так як частота обертання сепаратора в залежності від якості монтажу, величини навантаження і ступеня зношення підшипника кочення навіть за постійної частоти обертання ротора може мінятися в часі до 2...3%. Частота обертання тіл кочення може мінятися ще в більших межах до 5...10%. Такі ж проблеми виникають і в асинхронних електродвигунах, в яких складові вібрації механічного походження можуть зсуватися за частотою відносно складових електромагнітного походження до 5...7% в залежності від величини навантаження.

Все це різко знижує ефективність застосування тримірних методів аналізу вібрації, змушуючи застосовувати програми автоматичного аналізу спектрів вібрації. Тільки такі програми дають можливість внести необхідні корективи в тренди тих вузько смугових складових вібрації, які відповідають за появу і розвиток різних видів дефектів обладнання.

Перші програми автоматичної ідентифікації складових спектрів вібрації і її огинаючих, створені на початку 90-х років, забезпечували виявлення та ідентифікацію до 5-10 рядів гармонічних складових вібрації. Сучасні програми розширили ці можливості більш ніж на порядок і успішно застосовуються для діагностики обертового обладнання.

Слід зауважити, що використання трьохкомпонентних давачів віброприскорення (швидкості чи переміщення) дозволяє швидко і надійно проводити виміри вібрації при випробовуванні механізмів та вузлів, що обертаються чи іншого промислового обладнання (газо-, нафтоперекачувальні агрегати, електродвигуни або двигуни внутрішнього згорання, турбіни генеруючі комплексів, порталні крани, конвеєри і багато іншого). Для цього потрібен тільки один кабель для зв'язку з системою вимірювання та аналізу даних, тим самим зменшуючи до мінімуму час встановлення в ході випробувань. Невеликі розміри та маса дозволяють користувачу проводити заміри вібрації в місцях з обмеженими розмірами, де існує простір тільки для одного давача – таких, як вузли підвіски автомобіля чи системи вихлопу відпрацьованих газів. Трьохкомпонентні давачі віброприскорення можуть мати вмонтовану електроніку, що розширить динамічний, частотний та температурний діапазони, а також має низьку чутливість до електромагнітних завад, завдяки низькому вихідному опору. Трьохкомпонентні давачі вібрації дозволяють користувачу можливість самостійно вибрати число необхідних осей виміру вібрації, три, дві або одну, попереджуючи збір зайвих даних, і скорочуючи тим самим кількість необхідних каналів вимірювання. Монтаж давачів вібрації можна виконувати одним з наступних способів: різьбова шпилька, клей, двостороння липка прокладка або монтажна кліпса, що дозволяє отримати ефект від використання запропонованого давача, а саме: зменшення наслідків аварійних станів; економія затрат на ремонт та запасні частини; скорочення простоїв; збільшення коефіцієнту використання обладнання; збільшення терміну експлуатації обладнання.

1.5. Висновки до розділу 1

1. Розглянуті основні задачі багатомірної вібраційної діагностики. Показано, що використання для контролю технічного стану механізмів багатомірної діагностики, дає можливість поглибити знання про стан технологічного процесу, дозволяє спланувати поточні ремонти, зменшити простої, прогнозувати показники виробництва, а також здійснювати аналіз його ефективності.

2. Розглянуто можливості використання лінійних і нелінійних підходів у вібраційній діагностиці технічного стану механізмів. Показано, що нелінійні властивості механічних систем виникають при появі дефектів їх конструкційних елементів. Проведено літературний огляд технічних засобів моніторингу стану та діагностики механічних систем.

3. Проаналізовано проблему розробки і створення віброперетворювачів, які дають можливість одночасно вимірювати різні складові сигналу, а це в свою чергу створює можливості для: зменшення затрат часу на встановлення акселерометрів, що збільшує продуктивність праці; використання акселерометрів в місцях з обмеженими розмірами; швидкого і надійного проведення замірів вібрації; забезпечення максимальної точності вимірів з використанням одного спеціального кабеля; забезпечення широкого динамічного, частотного і температурного діапазону.

РОЗДІЛ 2

ВЗАЄМОЗВ'ЯЗАНІ ПЕРІОДИЧНО КОРЕЛЬОВАНІ ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ – МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ БАГАТОВИМІРНИХ СИГНАЛІВ

2.1. Властивості взаємкореляційних характеристик сигналів

При розв'язуванні задач вібродіагностики часто також виникає потреба аналізу взаємозв'язків між сигналами, які відібрані в різних точках механічної системи. Вібраційний сигнал, що є носієм інформації про певні дефекти системи, має властивості як повторюваності, так і стохастичності. Ці його властивості, з єдиної, а не з альтернативних позицій, дають можливість описати і дослідити математичну модель у вигляді періодично корельованого випадкового процесу (ПКВП) [30, 34, 162, 214, 217]. Імовірнісні характеристики ПКВП відображають модуляційну взаємодію стохастичної і детермінованої складових вібрацій, яка виникає в разі появи дефектів. І власне останні з використанням цих характеристик вдається виявляти вже на ранніх стадіях їх розвитку [12, 13, 56, 137, 146, 155–157, 166, 171, 172]. Взаємний ПКВП-аналіз вібросигналів, відібраних у різних точках, може суттєво полегшити визначення типу дефектів, а також є необхідним для їх розрізнення та локалізації. З цього погляду важливим є визначення основних властивостей взаємкореляційних характеристик пов'язаних між собою ПКВП. На короткому аналізі цих властивостей зупинимося нижче [104, 112, 118, 121, 124, 142].

Задачу взаємного аналізу для спрощення розглянемо тільки для двох ПКВП-сигналів $\xi(t)$ і $\eta(t)$. Їх математичні сподівання і кореляційні функції є періодичними функціями часу

$$m_{\xi}(t) = E\xi(t) = m_{\xi}(t+T), \quad b_{\xi}(t,u) = E\overset{\circ}{\xi}(t)\overset{\circ}{\xi}(t+T) = b_{\xi}(t+T,u), \quad \overset{\circ}{\xi}(t) = \xi(t) - m_{\xi}(t),$$

$$m_{\eta}(t) = E\eta(t) = m_{\eta}(t+T), \quad b_{\eta}(t,u) = E\overset{\circ}{\eta}(t)\overset{\circ}{\eta}(t+T) = b_{\eta}(t+T,u), \quad \overset{\circ}{\eta}(t) = \eta(t) - m_{\eta}(t),$$

і можуть бути подані рядами Фур'є:

$$m_{\xi}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} m_k^{(\xi)} e^{ik\omega_0 t}, \quad m_{\eta}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} m_k^{(\eta)} e^{ik\omega_0 t},$$

$$b_{\xi}(t, u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} B_k^{(\xi)}(u) e^{ik\omega_0 t}, \quad b_{\eta}(t, u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} B_k^{(\eta)}(u) e^{ik\omega_0 t}.$$

Припустимо, що взаємкореляційна функція $b_{\xi\eta}(t, u) = E \overset{\circ}{\xi}(t) \overset{\circ}{\eta}(t+u)$ також змінюється за часом періодично. Тоді

$$b_{\xi\eta}(t, u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} B_k^{(\xi\eta)}(u) e^{ik\omega_0 t}, \quad (2.1.1)$$

де

$$B_k^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{T} \int_0^T b_{\xi\eta}(t, u) e^{-ik\omega_0 t} dt.$$

Величини $B_k^{(\xi\eta)}(u)$ будемо називати взаємкореляційними компонентами.

Оскільки $b_{\xi\eta}(t, u) = E \overset{\circ}{\xi}(t) \overset{\circ}{\eta}(t+u) = E \overset{\circ}{\eta}(t+u) \overset{\circ}{\xi}(t) = b_{\eta\xi}(t+u, -u)$, то

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} B_k^{(\xi\eta)}(u) e^{ik\omega_0 t} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} B_k^{(\eta\xi)}(-u) e^{ik\omega_0(t+u)},$$

а звідси

$$B_k^{(\xi\eta)}(-u) = B_k^{(\eta\xi)}(u) e^{-ik\omega_0 u}. \quad (2.1.2)$$

Для нульового взаємкореляційного компонента маємо $B_0^{(\xi\eta)}(-u) = B_0^{(\eta\xi)}(u)$.

Кожен із сигналів $\xi(t)$ і $\eta(t)$ як ПКВП може бути поданий у вигляді ряду [34, 214]

$$\xi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \xi_k(t) e^{ik\omega_0 t}, \quad (2.1.3)$$

$$\eta(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \eta_k(t) e^{ik\omega_0 t}. \quad (2.1.4)$$

На підставі останніх співвідношень отримуємо:

$$b_{\xi\eta}(t, u) = E \overset{\circ}{\xi}(t) \overset{\circ}{\eta}(t+u) = \sum_{p, q \in \mathbb{Z}} \overline{E \overset{\circ}{\xi}_p(t) \overset{\circ}{\eta}_q(t+u)} e^{i(q-p)\omega_0 t} e^{iq\omega_0 u} =$$

$$= \sum_{p, q \in \mathbb{Z}} R_{pq}^{(\xi\eta)}(u) e^{i(q-p)\omega_0 t} e^{iq\omega_0 u} = \sum_k e^{iq\omega_0 t} \sum_{q \in \mathbb{Z}} R_{q-k, q}^{(\xi\eta)}(u) e^{iq\omega_0 u}, \quad (2.1.5)$$

де $R_{pq}^{(\xi\eta)}(u) = \overline{E \xi_p^\circ(t) \eta_q^\circ(t+u)}$, $\xi_p^\circ(t) = \xi_p(t) - m_p^{(\xi)}$, $\eta_q^\circ(t) = \eta_q(t) - m_q^{(\eta)}$. Порівнюючи (2.1.1) і (2.1.5), приходимо до висновку, що

$$B_k^{(\xi\eta)}(u) = \sum_{q \in \mathbb{Z}} R_{q-k,q}^{(\xi\eta)}(u) e^{iq\omega_0 u}. \quad (2.1.6)$$

З випадковими процесами $\xi_k(t)$ і $\eta_k(t)$, які описують амплітудну й фазову стохастичні модуляції гармонічних складових вібросигналів, безпосередньо пов'язана інформація про ті чи інші дефекти обертових вузлів. Тому на основі взаємкореляційних функцій $R_{pq}^{(\xi\eta)}(u)$, а отже і взаємкореляційних компонентів, можна судити про наявність чи відсутність зв'язків між дефектами. Якщо кореляційні зв'язки між компонентами $\xi_p(t)$ та $\eta_q(t)$ різних номерів p і q відсутні, тобто $R_{pq}^{(\xi\eta)}(u) = R_p^{(\xi\eta)}(u) \delta_{pq}$, δ_{pq} – символ Кронекера, то всі взаємкореляційні компоненти, крім нульового, дорівнюють нулю. Взаємкореляційна функція в цьому випадку не змінюється з часом, а це означає, що два ПКВП-сигнали є стаціонарно зв'язаними. Очевидно, що при $R_p^{(\xi\eta)}(u) = 0$ ці сигнали взагалі будуть некорельованими.

Нульові взаємкореляційні компоненти запишемо у вигляді

$$B_k^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{2} \left[C_k^{(\xi\eta)}(u) - i S_k^{(\xi\eta)}(u) \right]. \quad (2.1.7)$$

Для ряду Фур'є (2.1.1) тоді маємо:

$$b_{\xi\eta}(t, u) = B_0^{(\xi\eta)}(u) + \sum_{k \in \mathbb{N}} \left[C_k^{(\xi\eta)}(u) \cos k\omega_0 t + S_k^{(\xi\eta)}(u) \sin k\omega_0 t \right], \quad (2.1.8)$$

де

$$B_0^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{T} \int_0^T b_{\xi\eta}(t, u) dt, \quad C_k^{(\xi\eta)}(u) = \frac{2}{T} \int_0^T b_{\xi\eta}(t, u) \cos k\omega_0 t dt,$$

$$S_k^{(\xi\eta)}(u) = \frac{2}{T} \int_0^T b_{\xi\eta}(t, u) \sin k\omega_0 t dt.$$

Прийнявши до уваги (2.1.7), умову симетрії для взаємкореляційних компонентів (2.1.8) перепишемо наступним чином:

$$C_k^{(\xi\eta)}(-u) = C_k^{(\eta\xi)}(u) \cos k\omega_0 t - S_k^{(\eta\xi)}(u) \sin k\omega_0 t, \quad (2.1.9)$$

$$S_k^{(\xi\eta)}(-u) = C_k^{(\eta\xi)}(u) \sin k\omega_0 t \cos k\omega_0 t + S_k^{(\eta\xi)}(u) \cos k\omega_0 t. \quad (2.1.10)$$

Подамо взаємкореляційну функцію $b_{\xi\eta}(t, u)$ у вигляді суми парної $b_{\xi\eta}^+(t, u)$ і непарної $b_{\xi\eta}^-(t, u)$ частин

$$b_{\xi\eta}(t, u) = b_{\xi\eta}^+(t, u) + b_{\xi\eta}^-(t, u). \quad (2.1.11)$$

Очевидно, що

$$b_{\xi\eta}^+(t, u) = \frac{1}{2} [b_{\xi\eta}(t, u) + b_{\xi\eta}(t, -u)] = \frac{1}{2} [b_{\xi\eta}(t, u) + b_{\eta\xi}(t - u, u)], \quad (2.1.12)$$

$$b_{\xi\eta}^-(t, u) = \frac{1}{2} [b_{\xi\eta}(t, u) - b_{\xi\eta}(t, -u)] = \frac{1}{2} [b_{\xi\eta}(t, u) - b_{\eta\xi}(t - u, u)]. \quad (2.1.13)$$

Після підстановки до співвідношень (2.1.12) і (2.1.13) ряду (2.1.8) та врахування (2.1.9) і (2.1.10) отримуємо:

$$\begin{aligned} b_{\xi\eta}^+(t, u) &= B_0^{(\xi\eta)}(u) + B_0^{(\xi\eta)}(-u) + \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{N}} \left[[C_k^{(\xi\eta)}(u) + C_k^{(\xi\eta)}(-u)] \cos k\omega_0 t + \right. \\ &+ \left. [S_k^{(\xi\eta)}(u) + S_k^{(\xi\eta)}(-u)] \sin k\omega_0 t \right] = \tilde{B}_0^{(\xi\eta)}(u) + \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{N}} [C_k^{(\xi\eta)}(u) \cos k\omega_0 t + S_k^{(\xi\eta)}(u) \sin k\omega_0 t + \\ &+ C_k^{(\eta\xi)}(u) \cos k\omega_0(t - u) + S_k^{(\eta\xi)}(u) \sin k\omega_0(t - u)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{\xi\eta}^-(t, u) &= B_0^{(\xi\eta)}(u) + B_0^{(\xi\eta)}(-u) + \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{N}} \left[[C_k^{(\xi\eta)}(u) - C_k^{(\xi\eta)}(-u)] \cos k\omega_0 t + \right. \\ &+ \left. [S_k^{(\xi\eta)}(u) - S_k^{(\xi\eta)}(-u)] \sin k\omega_0 t \right] = \tilde{B}_0^{(\xi\eta)}(u) + \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{N}} [C_k^{(\xi\eta)}(u) \cos k\omega_0 t + S_k^{(\xi\eta)}(u) \sin k\omega_0 t - \\ &- C_k^{(\eta\xi)}(u) \cos k\omega_0(t - u) - S_k^{(\eta\xi)}(u) \sin k\omega_0(t - u)], \end{aligned}$$

де $\tilde{B}_0^{(\xi\eta)}$ – парна, а $B_0^{(\xi\eta)}$ – непарна частини нульового взаємкореляційного компонента.

Отримані вирази доцільно використовувати при аналізі спектральних властивостей ПКВП.

2.2. Взаємоспектральна густина та її компоненти

Припустимо, що для всіх $t \in \mathbb{R}$ взаємкореляційна функція $b_{\xi\eta}(t, u)$ є абсолютно інтегрованою

$$\int_{-\infty}^{\infty} |b(t, u)| du < \infty.$$

Тоді для кожного $t \in \mathbb{R}$ існує перетворення Фур'є

$$f_{\xi\eta}(\omega, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b_{\xi\eta}(t, u) e^{-i\omega u} du, \quad (2.2.1)$$

яке будемо називати змінною взаємоспектральною густиною випадкових процесів $\xi(t)$ і $\eta(t)$. Ця функція є комплексною: $f_{\xi\eta}(\omega, t) = \operatorname{Re} f(\omega, t) - i \operatorname{Im} f(\omega, t)$.

Прийнявши до уваги (2.1.11), маємо

$$f_{\xi\eta}(\omega, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [b_{\xi\eta}^+(t, u) \cos \omega u - i b_{\xi\eta}^-(t, u) \sin \omega u] du,$$

а тоді

$$\operatorname{Re} f_{\xi\eta}(\omega, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} b_{\xi\eta}^+(t, u) \cos \omega u du, \quad (2.2.2)$$

$$\operatorname{Im} f_{\xi\eta}(\omega, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} b_{\xi\eta}^-(t, u) \sin \omega u du. \quad (2.2.3)$$

Відтак, дійсна частина взаємоспектральної густини є косинус-перетворення Фур'є парної частини взаємкореляційної функції, а уявна – синус-перетворення непарної. З (2.2.2), (2.2.3) випливає, що $\operatorname{Re} f_{\xi\eta}(-\omega, t) = \operatorname{Re} f_{\xi\eta}(\omega, t)$, $\operatorname{Im} f_{\xi\eta}(-\omega, t) = -\operatorname{Im} f_{\xi\eta}(\omega, t)$, тобто $f_{\xi\eta}(-\omega, t) = \overline{f_{\xi\eta}(\omega, t)}$. Врахувавши останні співвідношення, отримуємо

$$b_{\xi\eta}(t, u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\eta}(\omega, t) e^{i\omega u} d\omega = 2 \int_0^{\infty} [\operatorname{Re} f_{\xi\eta}(\omega, t) \cos \omega u + \operatorname{Im} f_{\xi\eta}(\omega, t) \sin \omega u] d\omega,$$

а звідси

$$b_{\xi\eta}^+(t, u) = 2 \int_0^{\infty} \operatorname{Re} f_{\xi\eta}(\omega, t) \cos \omega u du, \quad (2.2.4)$$

$$b_{\xi\eta}^-(t, u) = 2 \int_0^{\infty} \operatorname{Im} f_{\xi\eta}(\omega, t) \sin \omega u du. \quad (2.2.5)$$

Значення взаємкореляційної функції в нулі, як видно з (2.2.4) і (2.2.5), визначається інтегруванням по всій частотній області дійсної частини взаємспектральної густини:

$$b_{\xi\eta}(t, 0) = 2 \int_0^{\infty} \operatorname{Re} f_{\xi\eta}(\omega, t) du.$$

Підставивши до виразу (2.2.1) ряд (2.1.1), маємо

$$f_{\xi\eta}(\omega, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k^{(\xi\eta)}(\omega) e^{ik\omega_0 t},$$

де

$$f_k^{(\xi\eta)}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_k^{(\xi\eta)}(u) e^{-i\omega u} du. \quad (2.2.6)$$

Величини $f_k^{(\xi\eta)}(\omega)$, які є коефіцієнтами Фур'є змінної спектральної густини

$$f_k^{(\xi\eta)}(\omega) = \frac{1}{T} \int_0^T f_{\xi\eta}(\omega, t) e^{-ik\omega_0 t} dt,$$

будемо називати взаємспектральними компонентами. Нульовий взаємспектральний компонент визначає усереднене за часом значення взаємспектральної густини. Він є перетворенням Фур'є нульового взаємспектрального компонента – середнього за часом значення взаємкореляційної функції:

$$f_0^{(\xi\eta)}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_0^{(\xi\eta)}(\omega, t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{B}_0^{(\xi\eta)}(u) \cos \omega u du - \frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{\tilde{B}}_0^{(\xi\eta)}(u) \sin \omega u du. \quad (2.2.7)$$

Підставивши до виразу (2.2.6) співвідношення (2.1.6), приходимо до формули

$$f_k^{(\xi\eta)}(\omega) = \sum_{q \in \mathbb{Z}} f_{q-k, q}^{(\xi\eta)}(\omega - q\omega_0),$$

де $f_{pq}^{(\xi\eta)}(\omega)$ – взаємоспектральні густини стаціонарних компонентів процесів $\xi(t)$ і $\eta(t)$:

$$f_{pq}^{(\xi\eta)}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{pq}^{(\xi\eta)}(u) e^{-i\omega u} du.$$

Нульовий взаємоспектральний компонент визначається взаємоспектральними густинами стаціонарних компонентів $\xi_p(t)$ і $\eta_p(t)$ з однаковими номерами, а взаємоспектральний компонент номера k – взаємоспектральними густинами тих компонентів, номери яких відрізняються на число k .

Взаємоспектральні компоненти $f_k^{(\xi\eta)}(\omega)$ визначають одночасно ступінь корельованості між гармонічними складовими, які формують кожен із сигналів $\xi(t)$ і $\eta(t)$. Щоб отримати формулу, яка аналітично описує цю корельованість, скористаємося гармонічними розкладами стаціонарних компонентів $\xi_k(t)$ і $\eta_k(t)$:

$$\xi_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ_k^{(\xi)}(\omega), \quad \eta_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ_k^{(\eta)}(\omega),$$

де

$$EdZ_k^{(\xi)}(\omega) = m_k^{(\xi)}\delta(\omega)d\omega, \quad EdZ_k^{(\eta)}(\omega) = m_k^{(\eta)}\delta(\omega)d\omega,$$

а також

$$\overline{dZ_p^{(\xi)}(\omega_1) dZ_q^{(\eta)}(\omega_2)} = f_{pq}^{(\xi\eta)}(\omega_2)\delta(\omega_1 - \omega_2)d\omega_1 d\omega_2,$$

при цьому $dZ_p^{(\xi)}(\omega_1) = dZ_p^{(\xi)}(\omega_1) - m_p^{(\xi)}\delta(\omega)d\omega$, $dZ_q^{(\eta)}(\omega_1) = dZ_q^{(\eta)}(\omega_1) - m_q^{(\eta)}\delta(\omega)d\omega$. Врахувавши (2.1.3) і (2.1.4), для процесів $\xi(t)$ і $\eta(t)$ маємо

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ_{\xi}(\omega), \tag{2.2.8}$$

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ_{\eta}(\omega), \tag{2.2.9}$$

де

$$dZ_{\xi}(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} dZ_k^{(\xi)}(\omega - k\omega_0), \quad dZ_{\eta}(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} dZ_k^{(\eta)}(\omega - k\omega_0).$$

Тоді

$$\begin{aligned} \overline{EdZ_{\xi}(\omega_1)Z_{\eta}(\omega_2)} &= \sum_{p, q \in \mathbb{Z}} \overline{EdZ_p^{(\xi)}(\omega_1 - p\omega_0)dZ_q^{(\eta)}(\omega_2 - q\omega_0)} = \\ &= \sum_{p, q \in \mathbb{Z}} f_{pq}^{(\xi\eta)}(\omega_2 - q\omega_0) \delta(\omega_1 - \omega_2 + (q - p)\omega_0) d\omega_1 d\omega_2. \end{aligned}$$

Ввівши новий індекс сумування $k = q - p$ і позначивши

$$f_k^{(\xi\eta)}(\omega) = \sum_{q \in \mathbb{Z}} f_{q-k, q}^{(\xi\eta)}(\omega - q\omega_0),$$

приходимо до співвідношення

$$\overline{EdZ_{\xi}(\omega_2)Z_{\eta}(\omega_1)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k^{(\xi\eta)}(\omega_1) \delta(\omega_2 - \omega_1 + k\omega_0) d\omega_1 d\omega_2,$$

яке означає, що в гармонічних розкладах процесів (2.2.8) і (2.2.9) між собою корелюють ті гармоніки, частоти яких відділені одна від одної на величину, кратну до ω_0 , а величину цих кореляцій визначають взаємоспектральні компоненти $f_k^{(\xi\eta)}(\omega)$.

Взаємоспектральні компоненти $f_k^{(\xi\eta)}(\omega)$, в тому числі й нульовий (формула (2.2.7)), є комплекснозначними: $f_k^{(\xi\eta)}(\omega) = \text{Re } f_k^{(\xi\eta)}(\omega) - i \text{Im } f_k^{(\xi\eta)}(\omega)$. Приймавши до уваги останнє співвідношення, отримуємо наступні вирази для дійсної і умовної частин змінної спектральної густини:

$$\text{Re } f_{\xi\eta}(\omega, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[\text{Re } f_k^{(\xi\eta)}(\omega) \cos k\omega_0 t + \text{Im } f_k^{(\xi\eta)}(\omega) \sin k\omega_0 t \right],$$

$$\text{Im } f_{\xi\eta}(\omega, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[\text{Im } f_k^{(\xi\eta)}(\omega) \cos k\omega_0 t - \text{Re } f_k^{(\xi\eta)}(\omega) \sin k\omega_0 t \right].$$

Оскільки $B_{-k}^{(\xi\eta)}(u) = \overline{B_k^{(\xi\eta)}(u)}$, то

$$f_{-k}^{(\xi\eta)}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_{-k}^{(\xi\eta)}(u) e^{-i\omega u} du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{B_k^{(\xi\eta)}(u) e^{i\omega u}} du = \overline{f_k^{(\xi\eta)}(-\omega)}.$$

На підставі співвідношення (2.1.2) маємо

$$f_k^{(\xi\eta)}(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_k^{(\xi\eta)}(-u) e^{-i\omega u} du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_k^{(\eta\xi)}(u) e^{-i(\omega+k\omega_0)u} du = f_k^{(\eta\xi)}(\omega+k\omega_0).$$

Відтак

$$f_{-k}^{(\xi\eta)}(\omega) = \overline{f_k^{(\xi\eta)}(-\omega)} = f_k^{(\eta\xi)}(\omega+k\omega_0),$$

зокрема $f_0^{(\xi\eta)}(\omega) = \overline{f_0^{(\xi\eta)}(-\omega)} = \overline{f_0^{(\eta\xi)}(\omega)}$. Для дійсних та уявних частин взаємоспектральних компонентів звідси маємо:

$$\operatorname{Re} f_{-k}^{(\xi\eta)}(\omega) = \operatorname{Re} f_k^{(\xi\eta)}(\omega), \operatorname{Im} f_{-k}^{(\xi\eta)}(\omega) = -\operatorname{Im} f_k^{(\xi\eta)}(\omega),$$

$$\operatorname{Re} f_k^{(\xi\eta)}(-\omega) = \operatorname{Re} f_k^{(\eta\xi)}(\omega+k\omega_0), \operatorname{Im} f_k^{(\xi\eta)}(-\omega) = \operatorname{Im} f_k^{(\eta\xi)}(\omega+k\omega_0),$$

а тоді

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} f_{\xi\eta}(\omega, t) &= \operatorname{Re} f_0^{(\xi\eta)}(\omega) + \sum_{k \in \mathbb{N}} \left[\left[\operatorname{Re} f_k^{(\xi\eta)}(\omega) + \operatorname{Re} f_k^{(\xi\eta)}(-\omega) \right] \cos k\omega_0 t + \right. \\ &+ \left. \left[\operatorname{Im} f_k^{(\xi\eta)}(\omega) + \operatorname{Im} f_k^{(\xi\eta)}(-\omega) \right] \sin k\omega_0 t \right] = \operatorname{Re} f_0^{(\xi\eta)}(\omega) + \sum_{k \in \mathbb{N}} \left[\left[\operatorname{Re} f_k^{(\xi\eta)}(\omega) + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \operatorname{Re} f_k^{(\eta\xi)}(\omega+k\omega_0) \right] \cos k\omega_0 t + \left[\operatorname{Im} f_k^{(\xi\eta)}(\omega) + \operatorname{Im} f_k^{(\eta\xi)}(\omega+k\omega_0) \right] \sin k\omega_0 t \right], \quad (2.2.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f_{\xi\eta}(\omega, t) &= \operatorname{Im} f_0^{(\xi\eta)}(\omega) + \sum_{k \in \mathbb{N}} \left[\left[\operatorname{Im} f_k^{(\xi\eta)}(\omega) - \operatorname{Im} f_k^{(\xi\eta)}(-\omega) \right] \cos k\omega_0 t - \right. \\ &- \left. \left[\operatorname{Re} f_k^{(\xi\eta)}(\omega) - \operatorname{Re} f_k^{(\xi\eta)}(-\omega) \right] \sin k\omega_0 t \right] = \operatorname{Im} f_0^{(\xi\eta)}(\omega) + \sum_{k \in \mathbb{N}} \left[\left[\operatorname{Im} f_k^{(\xi\eta)}(\omega) - \right. \right. \\ &- \left. \left. \operatorname{Im} f_k^{(\eta\xi)}(\omega+k\omega_0) \right] \cos k\omega_0 t - \left[\operatorname{Re} f_k^{(\xi\eta)}(\omega) - \operatorname{Re} f_k^{(\eta\xi)}(\omega+k\omega_0) \right] \sin k\omega_0 t \right]. \quad (2.2.11) \end{aligned}$$

Очевидно, що функції

$$\operatorname{Re} f_k^{(\xi\eta)}(\omega) + \operatorname{Re} f_k^{(\eta\xi)}(\omega+k\omega_0), \operatorname{Im} f_k^{(\xi\eta)}(\omega) + \operatorname{Im} f_k^{(\eta\xi)}(\omega+k\omega_0)$$

є парними, а функції

$$\operatorname{Im} f_k^{(\xi\eta)}(\omega) - \operatorname{Im} f_k^{(\eta\xi)}(\omega+k\omega_0), \operatorname{Re} f_k^{(\xi\eta)}(\omega) - \operatorname{Re} f_k^{(\eta\xi)}(\omega+k\omega_0)$$

непарними функціями частоти ω .

Знайдемо тепер вирази, які пов'язують дійсні та уявні частини взаємоспектральних компонентів з косинусними й синусними взаємокореляційними компонентами. На підставі формули (2.2.7) маємо

$$\operatorname{Re} f_0^{(\xi\eta)}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \tilde{B}_0^{(\xi\eta)}(u) \cos \omega u du, \quad \operatorname{Im} f_0^{(\xi\eta)}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \tilde{B}_0^{(\xi\eta)}(u) \sin \omega u du,$$

$$\operatorname{Re} f_k^{(\xi\eta)}(\omega) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^\infty \left[C_k^{(\xi\eta)}(u) \cos \omega u - S_k^{(\xi\eta)}(u) \sin \omega u \right] du, \quad (2.2.12)$$

$$\operatorname{Im} f_k^{(\xi\eta)}(\omega) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^\infty \left[C_k^{(\xi\eta)}(u) \sin \omega u + S_k^{(\xi\eta)}(u) \cos \omega u \right] du. \quad (2.2.13)$$

Зворотні перетворення мають вигляд

$$\tilde{B}_0^{(\xi\eta)}(u) = 2 \int_0^\infty \operatorname{Re} f_0^{(\xi\eta)}(\omega) \cos \omega u d\omega, \quad \tilde{B}_0^{(\xi\eta)}(u) = 2 \int_0^\infty \operatorname{Im} f_0^{(\xi\eta)}(\omega) \sin \omega u d\omega, \quad (2.2.14)$$

$$C_k^{(\xi\eta)}(u) = 2 \int_{-\infty}^\infty \left[\operatorname{Re} f_k^{(\xi\eta)}(\omega) \cos \omega u + \operatorname{Im} f_k^{(\xi\eta)}(\omega) \sin \omega u \right] du,$$

$$S_k^{(\xi\eta)}(u) = 2 \int_{-\infty}^\infty \left[\operatorname{Im} f_k^{(\xi\eta)}(\omega) \cos \omega u - \operatorname{Re} f_k^{(\xi\eta)}(\omega) \sin \omega u \right] du.$$

Використовуючи співвідношення (2.2.12) і (2.2.13), знаходимо

$$\operatorname{Re} f_k^{(\xi\eta)}(\omega) + \operatorname{Re} f_k^{(\xi\eta)}(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty C_k^{(\xi\eta)}(u) \cos \omega u du, \quad (2.2.15)$$

$$\operatorname{Im} f_k^{(\xi\eta)}(\omega) + \operatorname{Im} f_k^{(\xi\eta)}(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty S_k^{(\xi\eta)}(u) \cos \omega u du, \quad (2.2.16)$$

$$\operatorname{Re} f_k^{(\xi\eta)}(\omega) - \operatorname{Re} f_k^{(\xi\eta)}(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty S_k^{(\xi\eta)}(u) \sin \omega u du, \quad (2.2.17)$$

$$\operatorname{Im} f_k^{(\xi\eta)}(\omega) - \operatorname{Im} f_k^{(\xi\eta)}(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty C_k^{(\xi\eta)}(u) \sin \omega u du. \quad (2.2.18)$$

Після підстановки співвідношень (2.2.14)–(2.2.18) до (2.2.10) і (2.2.11) отримуємо

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} f_{\xi\eta}(\omega, t) = & \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \tilde{B}_0^{(\xi\eta)}(u) \cos \omega u du + \sum_{k \in \mathbb{N}} \left[\cos k \omega_0 t \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty C_k^{(\xi\eta)}(u) \cos \omega u du \right] + \right. \\ & \left. + \sin k \omega_0 t \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty S_k^{(\xi\eta)}(u) \cos \omega u du \right] \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f_{\xi\eta}(\omega, t) = & \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{B}_0^{(\xi\eta)}(u) \sin \omega u du + \sum_{k \in \mathbb{N}} \left[\cos k \omega_0 t \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_k^{(\xi\eta)}(u) \sin \omega u du \right] + \right. \\ & \left. + \sin k \omega_0 t \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_k^{(\xi\eta)}(u) \sin \omega u du \right] \right]. \end{aligned}$$

З останніх виразів випливає, що коефіцієнти Фур'є дійсної частини змінної взаємоспектральної густини визначаються тільки косинусними перетвореннями взаємокореляційних компонентів, а уявної – тільки синусними. Якщо у взаємокореляційних компонентах виділимо парні $\tilde{C}_k^{(\xi\eta)}(u)$, $\tilde{S}_k^{(\xi\eta)}(u)$ і непарні $\tilde{\tilde{C}}_k^{(\xi\eta)}(u)$, $\tilde{\tilde{S}}_k^{(\xi\eta)}(u)$ частини:

$$C_k^{(\xi\eta)}(u) = \tilde{C}_k^{(\xi\eta)}(u) + \tilde{\tilde{C}}_k^{(\xi\eta)}(u), \quad S_k^{(\xi\eta)}(u) = \tilde{S}_k^{(\xi\eta)}(u) + \tilde{\tilde{S}}_k^{(\xi\eta)}(u),$$

то

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_k^{(\xi\eta)}(u) \cos \omega u du = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{C}_k^{(\xi\eta)}(u) \cos \omega u du,$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_k^{(\xi\eta)}(u) \cos \omega u du = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}_k^{(\xi\eta)}(u) \cos \omega u du,$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_k^{(\xi\eta)}(u) \sin \omega u du = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\tilde{C}}_k^{(\xi\eta)}(u) \sin \omega u du,$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_k^{(\xi\eta)}(u) \sin \omega u du = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\tilde{S}}_k^{(\xi\eta)}(u) \sin \omega u du.$$

Таким чином, дійсна частина $\operatorname{Re} f_{\xi\eta}(\omega, t)$ залежить тільки від парних частин взаємокореляційних компонентів, а уявна $\operatorname{Im} f_{\xi\eta}(\omega, t)$ – тільки від непарних. При цьому косинусні і синусні коефіцієнти Фур'є кожної зі спектральних характеристик залежать, відповідно, тільки від косинусних і тільки від синусних взаємокореляційних компонентів.

Виведені і проаналізовані в даному підрозділі формули для взаємокореляційних і взаємоспектральних характеристик ПКВП-сигналів є теоретичною основою для різносторонньої фізичної інтерпретації їх властивостей.

З їх використанням можуть бути обґрунтовані і опрацьовані алгоритми статистичної обробки даних, метою якої є оцінювання таких характеристик за умови мінімальних обчислювальних витрат.

2.3. Інтегральна функція когерентності

Для опису стохастичних зв'язків стаціонарних випадкових сигналів у частотній області широко використовується функція когерентності, яка визначається виразом [6, 7]:

$$\gamma_{\xi\eta}(\omega) = \frac{|f_{\xi\eta}(\omega)|^2}{f_{\xi}(\omega)f_{\eta}(\omega)}, \quad (2.3.1)$$

де $f_{\xi\eta}(\omega)$ – взаємна спектральна густина двох стаціонарних стаціонарно зв'язаних сигналів, а $f_{\xi}(\omega)$ і $f_{\eta}(\omega)$ – їх спектральні густини потужності.

Оскільки [7]

$$|f_{\xi\eta}(\omega)|^2 \leq f_{\xi}(\omega)f_{\eta}(\omega),$$

то для функції (2.3.1) завжди виконується умова: $0 \leq \gamma_{\xi\eta}(\omega) \leq 1$. Для незалежних сигналів $\gamma_{\xi\eta}(\omega) = 0$ для всіх $\omega \in R$. Якщо сигнали $\xi(t)$ і $\eta(t)$ є результатом лінійних перетворень одного й того ж процесу, то $\gamma_{\xi\eta}(\omega) = 1$. Якщо функція когерентності менша від одиниці, то це є показником того, що має місце одна з трьох ситуацій: на один з сигналів впливає зовнішній шум, один з сигналів зазнав нелінійних перетворень, один з досліджуваних сигналів зазнав впливу інших. При аналізі лінійних систем функція когерентності дає можливість виділити ту частину випадкового сигналу $\eta(t)$, яка на частоті ω визначається процесом $\xi(t)$. З другого боку, різниця $1 - \gamma_{\xi\eta}(\omega)$ характеризує ту частину, яка не корелює з $\xi(t)$.

Функцію з подібними властивостями доцільно було би вибрати для опису пов'язаності двох ПКВП-сигналів. У часовій області така пов'язаність, по аналогії до стаціонарних випадкових сигналів, може бути охарактеризована нормованою

взаємкореляційною функцією (коефіцієнтом кореляції), що в даному випадку має вигляд

$$\rho(u, t) = \frac{b_{\xi\eta}(t, u)}{\left[b_{\xi}(t, 0) b_{\eta}(t + u, 0) \right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Ця величина залежить як від зсуву u , так і від часу t . Оскільки $b_{\xi\eta}^2(t, u) \leq b_{\xi}(t, 0) b_{\eta}(t + u, 0)$ то $-1 \leq \rho(u, t) \leq 1$. У зв'язку з тим, що спектральна густина ПКВП при лінійних перетвореннях змінюється за формулою [7]

$$f_{\eta}(\omega, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_k^{(\xi)}(\omega) H(\omega) \overline{H(\omega - k\omega_0)} d\omega \right] e^{ik\omega_0 t},$$

де $f_{(\omega)}^{(\xi)}$ – спектральні компоненти вхідного сигналу, а $H(\omega)$ - передавальна функція, то побудувати аналог функції когерентності (2.3.1) з такими ж властивостями, як в стаціонарному випадку, для ПКВП-сигналів неможливо. У літературі відомі величини, які введені для аналізу пов'язаності ПКВП-сигналів в частотній області, але тільки значень одного й того ж сигналу. Ці величини також називають функціями когерентності [93, 94, 232].

М.І. Нініч використовував введену ним функцію когерентності для виявлення випадкової модуляції гармонік періодичної функції [200]. Автором для опису сигналів зі стохастичною повторюваністю була запропонована модель, яка була названа випадково змодульованою періодичністю. Наведемо її, зберігаючи позначення оригінала:

$$x(t) = K^{-1} \sum_{k=-\frac{K}{2}}^{\frac{K}{2}} [\mu_k + u_k(t)] e^{i2\pi f_k t}.$$

Тут $f_k = \frac{k}{T}$, T – період, $\mu_{-k} = \overline{\mu_k}$, $u_k(t)$ – випадкові процеси зі скінченним інтервалом корельованості, для яких $u_{-k}(t) = \overline{u_k(t)}$. Якщо $u_k(t)$ – стаціонарно зв'язані, то $x(t) \in$ ПКВП. Для кожної частоти $f_k = \frac{k}{T}$ функція когерентності випадкового модульованої періодичності визначалась співвідношенням

$$\gamma_x(k) = \sqrt{\frac{|\mu_k|^2}{|\mu_k|^2 + \sigma_\varphi^2(k)}}$$

де $\sigma_\varphi^2(k) = E|U(k)|^2$, при цьому функція

$$U(k) = \sum_{n=0}^{N-1} u_k(t_n) e^{-i2\pi f_k t_n}$$

є дискретним перетворенням Фур'є модулюючого процесу $u_k(t)$. Функція $\gamma_k(k)$ монотонно зменшується при зменшенні відношення потужності періодичної складової до потужності стохастичної і за змінами $\gamma_k(k)$ можна оцінити похибку модуляції гармонік. Якщо $\sigma_\varphi^2(k) = 0$, то $\gamma_k(k) = 1$. Збільшення $\sigma_\varphi^2(k)$ означає збільшення потужності випадково модульованих гармонік, і коли $\mu_k \equiv 0$, а $\sigma_\varphi^2(k) \neq 0$, то детермінована періодична структура сигналу є повністю зруйнованою.

W.A. Gardner [194–197, 200, 201] для характеристики корельованості гармонічних складових, що формують даний ПКВП, ввів величину, яка була названа усередненою за часом функцією когерентності. Для її визначення були введені два випадкові процеси

$$s(t) = \xi(t) e^{-ik \frac{\omega_0}{2} t},$$

$$v(t) = \xi(t) e^{ik \frac{\omega_0}{2} t},$$

кожен з яких є зсунутою по частоті вліво чи вправо на величину $k \frac{\omega_0}{2}$ всередині процесу $\xi(t)$. Для авто- та взаємкореляційних функцій, які визначають зв'язки

між значеннями процесів в точках $t - \frac{u}{2}$ і $t + \frac{u}{2}$, тоді маємо:

$$b_s\left(t - \frac{u}{2}, u\right) = E \overline{s\left(t - \frac{u}{2}\right)} s\left(t - \frac{u}{2}\right) = b_\xi\left(t - \frac{u}{2}, u\right) e^{-ik \frac{\omega_0}{2} u},$$

$$b_v\left(t - \frac{u}{2}, u\right) = E \overline{v\left(t - \frac{u}{2}\right)} v\left(t + \frac{u}{2}\right) = b_\xi\left(t - \frac{u}{2}, u\right) e^{ik \frac{\omega_0}{2} u},$$

$$b_{vs}\left(t - \frac{u}{2}, u\right) = E\overline{v\left(t - \frac{u}{2}\right)s\left(t + \frac{u}{2}\right)} = b_{\xi}\left(t - \frac{u}{2}, u\right) e^{-ik\frac{\omega_0}{2}u}.$$

Приймаючи до уваги ряд Фур'є

$$b_{\xi}(t, u) = \sum_{k \in Z} B_k(u) e^{ik\omega_0 t},$$

для середніх за часом значень кореляційних функцій отримуємо:

$$R_s(u) = \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{b}_s(t, u) dt = e^{-ik\omega_0 u} \left[\frac{1}{T} \int_0^T \tilde{b}_{\xi}(t, u) dt \right] = e^{-ik\omega_0 u} \tilde{B}_0(u),$$

$$R_v(u) = \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{b}_v(t, u) dt = e^{-ik\omega_0 u} \left[\frac{1}{T} \int_0^T \tilde{b}_{\xi}(t, u) dt \right] = e^{-ik\omega_0 u} \tilde{B}_0(u),$$

$$R_{sv}(u) = \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{b}_{sv}(t, u) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{b}_{\xi}(t, u) e^{-ik\omega_0 u} dt = \tilde{B}_k(u).$$

Коефіцієнти кореляції, визначені за середніми значеннями кореляційних функцій, тоді приймають вигляд

$$\rho_k(u) = \frac{R_{sv}(u)}{[R_s(0)R_v(0)]^{\frac{1}{2}}} = \frac{\tilde{B}_k(u)}{\tilde{B}_0(0)} = \frac{B_k(u) e^{-ik\frac{\omega_0}{2}u}}{B_0(0)}.$$

Тут враховано, що $\tilde{B}_k(u) = B_k(u) e^{-ik\frac{\omega_0}{2}u}$.

Для функції когерентності (спектрального коефіцієнта кореляції) тоді маємо:

$$\gamma_k(\omega) = \frac{|f_{sv}(\omega)|}{[f_s(\omega)f_v(\omega)]^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left| f_k\left(\omega + k\frac{\omega_0}{2}\right) \right|}{\left[f_0\left(\omega + k\frac{\omega_0}{2}\right) f_0\left(\omega - k\frac{\omega_0}{2}\right) \right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.3.2)$$

Ця величина визначає ступінь кореляції між спектральними компонентами ПКВП на частотах $\omega + k\frac{\omega_0}{2}$ і $\omega - k\frac{\omega_0}{2}$. Така кореляція є визначальною для ПКВП.

Випадковий процес є тоді і тільки тоді ПКВП, коли $\gamma_k(\omega) \neq 0$ для будь-яких $k \neq 0$.

Функція (2.3.2) характеризує властивості одного й того ж ПКВП. Щоб підкреслити це, W.A. Gardner вживав також термін “функція автокогерентності”.

Розглянемо як приклад амплітудно-модульований сигнал

$$\xi(t) = \mu(t) \cos \omega_0 t. \quad (2.3.3)$$

Його кореляційна функція

$$\tilde{b}_\xi(t, u) = \tilde{B}_0(u) + \tilde{B}_{-2}(u) e^{-i2\omega_0 t} + \tilde{B}_2(u) e^{i2\omega_0 t},$$

де

$$\tilde{B}_0(u) = \frac{1}{2} R_\mu(u) \cos \omega_0 u, \quad \tilde{B}_{\pm 2}(u) = \frac{1}{2} R_\mu(u) e^{\pm i2u}.$$

Для коефіцієнта кореляції між сигналами $\xi\left(t + \frac{u}{2}\right) e^{-i\omega_0\left(t + \frac{u}{2}\right)}$ і $\xi\left(t - \frac{u}{2}\right) e^{i\omega_0\left(t - \frac{u}{2}\right)}$ тоді

маємо:

$$\rho_{\pm 2}(u) = \frac{1}{2} e^{\pm i2u} \frac{R_\mu(u)}{R_\mu(0)},$$

а звідси

$$|\rho_{\pm 2}(u)| = \frac{1}{2} \frac{|R_\mu(u)|}{R_\mu(0)}.$$

Зауважимо, що $|\rho_{\pm 2}(0)| = \frac{1}{2}$. Нульовий і другий спектральні компоненти сигналу

(2.3.3) визначаються формулами

$$f_0(\omega) = \frac{1}{2} [f_\mu(\omega + \omega_0) + f_\mu(\omega - \omega_0)],$$

$$f_{\pm 2}(\omega) = \frac{1}{2} e^{\pm i2u} f_\mu(\omega - \omega_0).$$

Приймаючи до уваги ці вирази, для функції автокогерентності отримуємо:

$$\gamma_{\pm 2}(\omega) = \frac{f_\mu(\omega) e^{\pm i2u}}{\left[[f_\mu(\omega) + f_\mu(\omega + 2\omega_0)] [f_\mu(\omega) + f_\mu(\omega - 2\omega_0)] \right]^{\frac{1}{2}}}.$$

З цього співвідношення випливає, що за умови $|f_\mu(\omega)| = 0$ при $|\omega| \geq \omega_0$, для $|\omega| < \omega_0$

$|\gamma_{\pm 2}(\omega)| = 1$. Цей результат не є дивним, оскільки спектральні компоненти сигналу

(2.3.3) на частотах $\omega \pm \omega_0$ отримані за допомогою зсувів по частоті спектральних

компонент модулюючого процесу $\mu(t)$. А це означає, що верхня смуга спектру переносить ту саму інформацію, що і нижня. Така властивість ПКВП-сигналу була названа спектральною надлишковістю. Підкреслимо, що власне ця надлишковість може ефективно використовуватись при розв'язуванні різноманітних практичних задач.

Використовуючи розглянутий вище підхід, означимо функцію когерентності для двох ПКВП-сигналів $\xi(t)$ і $\eta(t)$. Як і раніше, введемо в розгляд зсунуті за часом сигнали

$$s(t) = \xi(t) e^{-ik \frac{\omega_0}{2} t}$$

$$v(t) = \eta(t) e^{ik \frac{\omega_0}{2} t}$$

Їх авто- та взаємкореляційні функції мають вигляд:

$$\tilde{b}_s(t, u) = E \overset{\circ}{s} \left(t + \frac{u}{2} \right) \overline{\overset{\circ}{s} \left(t - \frac{u}{2} \right)} = \tilde{b}_\xi(t, u) e^{-ik \frac{\omega_0}{2} u},$$

$$\tilde{b}_v(t, u) = E \overset{\circ}{v} \left(t + \frac{u}{2} \right) \overline{\overset{\circ}{v} \left(t - \frac{u}{2} \right)} = \tilde{b}_\eta(t, u) e^{ik \frac{\omega_0}{2} u},$$

$$\tilde{b}_{sv}(t, u) = E \overset{\circ}{s} \left(t + \frac{u}{2} \right) \overline{\overset{\circ}{v} \left(t - \frac{u}{2} \right)} = \tilde{b}_{\xi\eta}(t, u) e^{-ik \frac{\omega_0}{2} u}.$$

Представивши авто- та взаємкореляційні функції процесів $\xi(t)$ і $\eta(t)$ рядами Фур'є

$$\tilde{b}_\xi(t, u) = \sum_{k \in Z} B_k^{(\xi)}(u) e^{ik\omega_0 t}, \quad \tilde{b}_\eta(t, u) = \sum_{k \in Z} B_k^{(\eta)}(u) e^{ik\omega_0 t}, \quad \tilde{b}_{\xi\eta}(t, u) = \sum_{k \in Z} B_k^{(\xi\eta)}(u) e^{ik\omega_0 t},$$

для середніх значень отримуємо

$$R_s(u) = B_0^{(\xi)}(u) e^{ik \frac{\omega_0}{2} u}, \quad R_v(u) = B_0^{(\eta)}(u) e^{ik \frac{\omega_0}{2} u}, \quad R_{sv}(u) = B_k^{(\xi\eta)}(u) e^{-ik \frac{\omega_0}{2} u}.$$

Коефіцієнт кореляції і функцію когерентності означимо за допомогою співвідношення

$$\rho_k(u) = \frac{R_{sv}(u)}{[R_s(u)R_v(u)]^{\frac{1}{2}}} = \frac{B_k^{(\xi\eta)}(u)e^{-ik\frac{\omega_0}{2}u}}{[B_0^{(\xi)}(0)B_0^{(\eta)}(0)]^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.3.4)$$

$$\gamma_k^2(\omega) = \frac{|f_{sv}(\omega)|^2}{f_s(\omega)f_v(\omega)} = \frac{\left|f_k^{(\xi\eta)}\left(\omega + k\frac{\omega_0}{2}\right)\right|^2}{f_k^{(\xi)}\left(\omega + k\frac{\omega_0}{2}\right)f_k^{(\eta)}\left(\omega - k\frac{\omega_0}{2}\right)}. \quad (2.3.5)$$

Ці величини характеризують ступінь корельованості між спектральними компонентами сигналу $\xi(t)$ та $\eta(t)$ на частоті $\omega - k\frac{\omega_0}{2}$.

Припустимо, що сигнали $\xi(t)$ і $\eta(t)$ є результатами лінійних інваріантних перетворень одного й того ж ПКВП-сигналу $\zeta(t)$ (рис. 2.1).

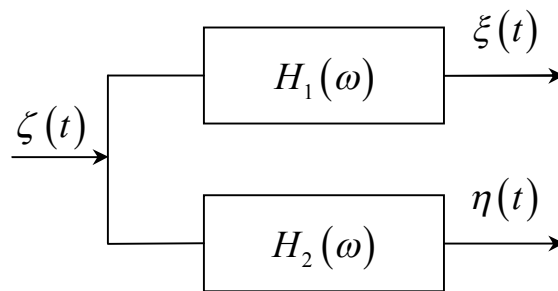


Рис. 2.1. Схема формування сигналів.

Сигнал $\zeta(t)$ може бути представлений у вигляді:

$$\zeta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ(\omega),$$

де

$$EdZ(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} m_k f(\omega - k\omega_0) d\omega, \quad (2.3.6)$$

$$Ed\overset{\circ}{Z}(\omega_1)d\overset{\circ}{Z}(\omega_2) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k(\omega_1)f(\omega_2 - \omega_1 + k\omega_0)d\omega_1d\omega_2, \quad (2.3.7)$$

при цьому $\overset{\circ}{Z}(\omega) = Z(\omega) - \sum_{k \in \mathbb{Z}} m_k U(\omega - k\omega_0)$, $U(\omega)$ – функція Хевісайда. Сигнали

$\xi(t)$ і $\eta(t)$ тоді визначаються виразами [200, 203]

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} H_1(\omega) dZ(\omega),$$

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} H_2(\omega) dZ(\omega),$$

де $H_1(\omega)$ і $H_2(\omega)$ – передавальні функції лінійних фільтрів. Приймаючи до уваги (2.3.6) і (2.3.7), для авто- та взаємкореляційних функцій отримуємо

$$\begin{aligned} b_{\xi}(t, u) &= E \overset{\circ}{\xi}(t) \overset{\circ}{\xi}(t+u) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_1(t+u)} e^{-i\omega_2 t} H_1(\omega_1) \overline{H_1(\omega_2)} E d \overset{\circ}{z}(\omega_1) \overline{d \overset{\circ}{z}(\omega_2)} = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H_1(\omega_1) \overline{H_1(\omega_2)} e^{i\omega_1 u} e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} f_k(\omega_2) f_k(\omega_1) \delta(\omega_2 - \omega_1 + k\omega_0) d\omega_1 d\omega_2 = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{ik\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} H_1(\omega) \overline{H_1(\omega - k\omega_0)} f_k(\omega) e^{i\omega u} d\omega, \end{aligned}$$

$$b_{\eta}(t, u) = E \overset{\circ}{\eta}(t) \overset{\circ}{\eta}(t+u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{ik\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} H_2(\omega) \overline{H_2(\omega - k\omega_0)} f_k(\omega) e^{i\omega u} d\omega,$$

$$\begin{aligned} b_{\xi\eta}(t, u) &= E \overset{\circ}{\xi}(t) \overset{\circ}{\xi}(t+u) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H_1(\omega_1) e^{i\omega_1(t+u)} \overline{H_2(\omega_2)} e^{-i\omega_2 t} E d \overset{\circ}{z}(\omega_1) \overline{d \overset{\circ}{z}(\omega_2)} = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{ik\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} H_1(\omega) \overline{H_2(\omega - k\omega_0)} f_k(\omega) e^{i\omega u} d\omega. \end{aligned}$$

Звідси

$$f_k^{(\xi)}(\omega) = H_1(\omega) \overline{H_1(\omega - k\omega_0)} f_k(\omega), \quad (2.3.8)$$

$$f_k^{(\eta)}(\omega) = H_2(\omega) \overline{H_2(\omega - k\omega_0)} f_k(\omega),$$

$$f_k^{(\xi\eta)}(\omega) = H_1(\omega) \overline{H_2(\omega - k\omega_0)} f_k(\omega),$$

а тоді

$$\gamma_k^2(\omega) = \frac{\left| H_1\left(\omega + k \frac{\omega_0}{2}\right) \right|^2 \left| H_2\left(\omega - k \frac{\omega_0}{2}\right) \right|^2 \left| \delta_k\left(\omega + k \frac{\omega_0}{2}\right) \right|^2}{\left| H_1\left(\omega + k \frac{\omega_0}{2}\right) \right|^2 \left| f_0\left(\omega + k \frac{\omega_0}{2}\right) f_0\left(\omega - k \frac{\omega_0}{2}\right) \right| \left| H_2\left(\omega - k \frac{\omega_0}{2}\right) \right|^2} =$$

$$= \frac{\left| f_k \left(\omega + k \frac{\omega_0}{2} \right) \right|^2}{f_0 \left(\omega + k \frac{\omega_0}{2} \right) f_0 \left(\omega + k \frac{\omega_0}{2} \right)}.$$

З отриманого співвідношення випливає, що функція когерентності двох ПКВП-сигналів, отриманих в результаті різних лінійних перетворень одного й того ж ПКВП-сигналу, дорівнює функції автокогерентності вхідного сигналу. А це означає, що при лінійних перетвореннях функція автокогерентності сигналу не змінюється, тобто є інваріантом. До того ж висновку легко приходимо, аналізуючи кожне з лінійних перетворень окремо. Так, для сигналу $\xi(t)$ на основі співвідношення (2.3.8) маємо

$$\begin{aligned} f_0^{(\xi)} \left(\omega + k \frac{\omega_0}{2} \right) &= \left| H_1 \left(\omega + k \frac{\omega_0}{2} \right) \right|^2 f_0 \left(\omega + k \frac{\omega_0}{2} \right), \\ f_0^{(\xi)} \left(\omega - k \frac{\omega_0}{2} \right) &= \left| H_1 \left(\omega - k \frac{\omega_0}{2} \right) \right|^2 f_0 \left(\omega - k \frac{\omega_0}{2} \right), \\ f_k^{(\xi)} \left(\omega + k \frac{\omega_0}{2} \right) &= H_1 \left(\omega + k \frac{\omega_0}{2} \right) H_1 \left(\omega - k \frac{\omega_0}{2} \right) f_k \left(\omega + k \frac{\omega_0}{2} \right). \end{aligned}$$

На основі цих виразів отримуємо

$$\begin{aligned} \gamma_k^2(\omega) &= \frac{\left| H_1 \left(\omega + k \frac{\omega_0}{2} \right) \right|^2 \left| H_1 \left(\omega - k \frac{\omega_0}{2} \right) \right|^2 \left| f_k \left(\omega + k \frac{\omega_0}{2} \right) \right|^2}{\left| H_1 \left(\omega + k \frac{\omega_0}{2} \right) \right|^2 f_0 \left(\omega + k \frac{\omega_0}{2} \right) \left| H_1 \left(\omega - k \frac{\omega_0}{2} \right) \right|^2 f_0 \left(\omega - k \frac{\omega_0}{2} \right)} = \\ &= \frac{\left| f_k \left(\omega + k \frac{\omega_0}{2} \right) \right|^2}{f_0 \left(\omega + k \frac{\omega_0}{2} \right) f_0 \left(\omega - k \frac{\omega_0}{2} \right)}, \end{aligned}$$

що підтверджує наш висновок.

Зазначимо, що при $k = 0$ формула (2.3.2) набуває такого самого вигляду, як формула когерентності двох стаціонарно зв'язаних сигналів (2.3.1) з тією різницею, що замість спектральних густин стаціонарних сигналів в неї входять

нульові компоненти $f_0^{(\xi)}(\omega)$, $f_0^{(\eta)}(\omega)$ і $f_0^{(\xi\eta)}(\omega)$, що визначають спектральні густини стаціонарних наближень ПКВП-сигналів. Для сигналів $\xi(t)$ і $\eta(t)$, що є результатом лінійних перетворень одного і того самого сигналу $\zeta(t)$ із співвідношень (2.3.8) отримуємо

$$f_0^{(\xi)}(\omega) = |H_1(\omega)|^2 f_0^{(\zeta)}(\omega), \quad f_0^{(\eta)}(\omega) = |H_2(\omega)|^2 f_0^{(\zeta)}(\omega),$$

$$f_0^{(\xi\eta)}(\omega) = \overline{H_1(\omega)} H_2(\omega) f_0^{(\zeta)}(\omega).$$

Звідси $\gamma_0^{(\xi\eta)}(\omega) = 1$, а це означає, що нульова функція когерентності двох зв'язаних ПКВП-сигналів володіє такими ж властивостями, що і функція когерентності стаціонарно зв'язаних сигналів.

Конкретизуємо величини (2.3.5) для амплітудно-модульованих сигналів

$$\xi(t) = \mu(t) \cos \omega_0 t,$$

$$\eta(t) = \nu(t) \sin \omega_0 t.$$

Їх авто- і взаємкореляційна функція визначаються виразами:

$$b_{\xi,\eta}(t,u) = B_0^{(\xi,\eta)}(u) + \sum_{k=\pm 2} B_k^{(\xi,\eta)}(u) e^{ik\omega_0 t}, \quad (2.3.9)$$

$$b_{\xi\eta}(t,u) = B_0^{(\xi\eta)}(u) + \sum_{k=\pm 2} B_k^{(\xi\eta)}(u) e^{ik\omega_0 t}, \quad (2.3.10)$$

при цьому

$$B_0^{(\xi,\eta)}(u) = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} R_\mu(u) \\ R_\nu(u) \end{array} \right\} \cos \omega_0 u, \quad B_2^{(\xi,\eta)}(u) = \frac{1}{4} \left\{ \begin{array}{l} R_\mu(u) \\ R_\nu(u) \end{array} \right\} e^{i\omega_0 u},$$

$$B_0^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{2} R_{\mu\nu}(u) \cos \omega_0 u, \quad B_2^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{4} R_{\mu\nu}(u) e^{i\omega_0 u},$$

де $R_\mu(u) = E \overset{\circ}{\mu}(t) \overset{\circ}{\mu}(t+u)$, $R_\nu(u) = E \overset{\circ}{\nu}(t) \overset{\circ}{\nu}(t+u)$, $R_{\mu\nu}(u) = E \overset{\circ}{\mu}(t) \overset{\circ}{\nu}(t+u)$,

$$\overset{\circ}{\mu}(t) = \mu(t) - m_\mu, \quad \overset{\circ}{\nu}(t) = \nu(t) - m_\nu, \quad m_\mu = E\mu(t), \quad m_\nu = E\nu(t).$$

Якщо

$$f_\mu(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_\mu(u) e^{-i\omega u} du,$$

$$f_v(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_v(u) e^{-i\omega u} du,$$

$$f_{\mu\nu}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\mu\nu}(u) e^{-i\omega u} du,$$

то для спектральних компонентів отримуємо

$$f_0^{(\xi,\eta)}(\omega) = \frac{1}{4} [f_{\mu,\nu}(\omega + \omega_0) + f_{\mu,\nu}(\omega - \omega_0)], \quad f_2^{(\xi,\eta)}(\omega) = \frac{1}{4} f_{\mu,\nu}(\omega - \omega_0),$$

$$f_0^{(\xi\eta)}(\omega) = \frac{1}{4} [f_{\mu\nu}(\omega + \omega_0) + f_{\mu\nu}(\omega - \omega_0)], \quad f_2^{(\xi\eta)}(\omega) = \frac{1}{4} f_{\mu\nu}(\omega - \omega_0).$$

Тоді

$$f_0^{(\xi\eta)}(\omega) = \frac{|f_{\mu\nu}(\omega + \omega_0) + f_{\mu\nu}(\omega - \omega_0)|}{\left[[f_{\mu}(\omega + \omega_0) + f_{\mu}(\omega - \omega_0)] [f_{\nu}(\omega + \omega_0) + f_{\nu}(\omega - \omega_0)] \right]^{\frac{1}{2}}},$$

$$f_2^{(\xi\eta)}(\omega) = \frac{|f_{\mu\nu}(\omega)|}{\left[[f_{\mu}(\omega) + f_{\mu}(\omega - 2\omega_0)] [f_{\nu}(\omega) + f_{\nu}(\omega + 2\omega_0)] \right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Якщо $f_{\mu}(\omega) = 0$ і $f_{\nu}(\omega) = 0$ для частот $|\omega| \geq \omega_0$, то в області $|\omega| < \omega_0$:

$$\gamma_2^{(\xi\eta)}(\omega) = \frac{|f_{\mu\nu}(\omega)|}{[f_{\mu}(\omega)f_{\nu}(\omega)]^{\frac{1}{2}}}.$$

При таких умовах, як бачимо, введена функція когерентності $\gamma_2^{(\xi\eta)}(\omega)$ співпадає з функцією когерентності стаціонарно зв'язаних процесів $\mu(t)$ і $\nu(t)$, яка визначається формулою (2.3.1). Відзначимо, що вираз для нульової функції когерентності при цьому залишається той самий.

Розглянемо тепер функцію когерентності амплітудно- і фазомодульованих сигналів, які описуються квадратурними моделями

$$\xi(t) = \mu_c(t) \cos \omega_0 t + \mu_s(t) \sin \omega_0 t,$$

$$\eta(t) = \nu_c(t) \cos \omega_0 t + \nu_s(t) \sin \omega_0 t.$$

Авто- і взаємкореляційна функції таких сигналів також визначаються співвідношеннями (2.3.9) та (2.3.10), однак авто- і взаємкореляційні компоненти тепер будуть визначатися кореляційними функціями квадратурних складових

$v_c(t)$, $v_s(t)$, $\mu_c(t)$ і $\mu_s(t)$. Тоді для нульових спектральних компонентів $f_0^{(\xi)}(\omega)$ і $f_0^{(\eta)}(\omega)$ та другого взаємоспектрального компонента маємо:

$$f_0^{(\xi)}(\omega) = \frac{1}{4} \left[\begin{aligned} & f_{\mu_c}(\omega + \omega_0) + f_{\mu_c}(\omega - \omega_0) + f_{\mu_s}(\omega + \omega_0) + f_{\mu_s}(\omega - \omega_0) + \\ & + \frac{1}{2} [\operatorname{Im} f_{\mu_c \mu_s}(\omega + \omega_0) - \operatorname{Im} f_{\mu_c \mu_s}(\omega - \omega_0)] \end{aligned} \right],$$

$$f_0^{(\eta)}(\omega) = \frac{1}{4} \left[\begin{aligned} & f_{v_c}(\omega + \omega_0) + f_{v_c}(\omega - \omega_0) + f_{v_s}(\omega + \omega_0) + f_{v_s}(\omega - \omega_0) + \\ & + \frac{1}{2} [\operatorname{Im} f_{v_c v_s}(\omega + \omega_0) - \operatorname{Im} f_{v_c v_s}(\omega - \omega_0)] \end{aligned} \right]$$

$$f_2^{(\xi\eta)}(\omega) = \frac{1}{4} \left[[f_{\mu_c v_c}(\omega - \omega_0) - f_{\mu_s v_s}(\omega - \omega_0)] - i [f_{\mu_c v_s}(\omega - \omega_0) + f_{\mu_s v_c}(\omega - \omega_0)] \right].$$

Якщо спектральні густини квадратурних складових, що входять у ці вирази, а також взаємні спектральні густини дорівнюють нулю для частот $|\omega| \geq \omega_0$, то при $|\omega| \leq \omega_0$ маємо

$$\gamma_2^{(\xi\eta)}(\omega) = \frac{|f_{\mu_c v_c}(\omega) - f_{\mu_s v_s}(\omega) - i [f_{\mu_c v_s}(\omega) + f_{\mu_s v_c}(\omega)]|}{\left[[f_{\mu_c}(\omega) + f_{\mu_s}(\omega) + 2 \operatorname{Im} f_{\mu_c \mu_s}(\omega)] [f_{v_c}(\omega) + f_{v_s}(\omega) - 2 \operatorname{Im} f_{v_c v_s}(\omega)] \right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Функція когерентності $\gamma_2^{(\xi\eta)}(\omega)$, як видно з цього виразу, буде рівна нулю, якщо $f_{\mu_c v_c}(\omega) = f_{\mu_s v_s}(\omega)$ і $f_{\mu_c v_s}(\omega) = f_{\mu_s v_c}(\omega) = 0$. У цьому випадку характеристики нестационарності ПКСП сигналу $\xi(t)$ не будуть впливати на сигнали $\eta(t)$ і навпаки. Однак ці сигнали в той же час можуть бути стаціонарно зв'язаними. Такий зв'язок кількісно характеризується нульовою функцією когерентності, яка з урахуванням формули для нульового взаємного спектрального компонента має вигляд

$$\gamma_0^{(\xi\eta)}(\omega) = |f_{\mu_c v_c}(\omega + \omega_0) + f_{\mu_c v_c}(\omega - \omega_0) + f_{\mu_s v_s}(\omega + \omega_0) + f_{\mu_s v_s}(\omega - \omega_0)| \times \\ \times \left[\begin{aligned} & \left[f_{\mu_c}(\omega + \omega_0) + f_{\mu_c}(\omega - \omega_0) + f_{\mu_s}(\omega + \omega_0) + f_{\mu_s}(\omega - \omega_0) + \right. \\ & \left. + 2 [\operatorname{Im} f_{\mu_c \mu_s}(\omega + \omega_0) - \operatorname{Im} f_{\mu_c \mu_s}(\omega - \omega_0)] \right]^{-\frac{1}{2}} \\ & \left[f_{v_c}(\omega + \omega_0) + f_{v_c}(\omega - \omega_0) + f_{v_s}(\omega + \omega_0) + f_{v_s}(\omega - \omega_0) + \right. \\ & \left. + 2 [\operatorname{Im} f_{v_c v_s}(\omega + \omega_0) - \operatorname{Im} f_{v_c v_s}(\omega - \omega_0)] \right]^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \right].$$

Ця величина дозволяє виділити ту частину середньої потужності сигналу $\eta(t)$, яка визначається середньою потужністю сигналу $\xi(t)$.

Розглянемо як приклад сигнал

$$\xi(t) = \mu(t) \cos \omega_0 t + \nu(t) \sin \omega_0 t$$

для якого $R_{\mu\nu}(u) = E \mu(t) \nu(t+u) = 0$. Тоді

$$B_0(u) = \frac{1}{2} [R_\mu(u) + R_\nu(u)] \cos \omega_0 u, \quad B_2(u) = \frac{1}{2} [R_\mu(u) - R_\nu(u)] e^{i\omega_0 u}.$$

$$B_0^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{2} R_{\mu\nu} \cos \omega_0 u, \quad B_2^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{4} R_{\mu\nu} e^{i\omega_0 u},$$

Прийнявши $R_c(u) = D_1 e^{-\alpha|u|}$, $R_s(u) = D_2 e^{-\alpha|u|}$, для спектральних компонентів знаходимо

$$f_0^{(\xi)}(\omega) = \frac{1}{2} (D_1 + D_2) [I(\omega + \omega_0) + I(\omega - \omega_0)],$$

$$f_2^{(\xi)}(\omega) = \frac{1}{2} (D_1 - D_2) I(\omega - \omega_0),$$

де

$$I(\omega) = \frac{\alpha}{2\pi(\alpha^2 + \omega^2)}.$$

Функція автокогерентності цього сигналу

$$\gamma_2^{(\xi)}(\omega) = \frac{(D_1 - D_2) I(\omega)}{\left[(D_1 + D_2) [I(\omega) + I(\omega - \omega_0)] [I(\omega) + I(\omega + 2\omega_0)] \right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Для вузькосмугового сигналу, тобто при $\alpha \ll \omega_0$, маємо $\gamma_2^{(\xi)}(\omega) = \frac{D_1 - D_2}{D_1 + D_2}$.

На виході ланки, що диференціює, отримуємо сигнал

$$\eta(t) = i \int_{-\infty}^{\infty} \omega e^{i\omega t} dz_\xi(\omega),$$

для якого

$$f_0^{(\eta)}(\omega) = \omega^2 f_0^{(\xi)}(\omega), \quad f_2^{(\eta)}(\omega) = \omega(\omega - 2\omega_0) f_2^{(\xi)}(\omega).$$

Легко переконатися, що функції автокогерентності сигналів $\eta(t)$ і $\xi(t)$ рівні:
 $\gamma_2^{(\eta)}(\omega) = \gamma_2^{(\xi)}(\omega)$.

Приймаючи до уваги, що взаємні спектральні компоненти мають вигляд

$$f_0^{(\xi\eta)}(\omega) = if_0^{(\xi)}(\omega), \quad f_2^{(\xi\eta)}(\omega) = i\omega f_2^{(\xi)}(\omega),$$

також приходимо до висновку, що $\gamma_2^{(\xi\eta)}(\omega) = \gamma_2^{(\xi)}(\omega)$, а $\gamma_0^{(\xi\eta)}(\omega) = 1$. Відмітимо, що при $D_1 = D_2$ функція когерентності $\gamma_2^{(\xi\eta)}(\omega) = 0$, в той же час властивості функції $\gamma_0^{(\xi\eta)}(\omega)$ залишаються без змін.

Введена інтегральна функція когерентності кількісно характеризує стохастичний взаємозв'язок між властивостями нестационарності двох ПКВП-сигналів, який проявляється в періодичній зміні по часу їх взаємних імовірнісних характеристик. Визначення цієї величини зводиться до знаходження характеристик корельованості гармонічних складових двох періодично нестационарно зв'язаних сигналів – взаємоспектральних компонентів. Така корельованість ніяк не може бути відображена в характеристиках їх стаціонарних наближень. Функція когерентності, побудована на основі останніх, дозволяє проаналізувати тільки взаємозв'язки між спектральними густинами середньої потужності сигналів. Вибрана характеристика нестационарного взаємозв'язку сигналів не змінюється при лінійних перетвореннях. Така інваріантність обумовлена відповідними зсувами по частоті як нульових спектральних компонентів самих сигналів, так і вищих взаємоспектральних компонентів, що характеризують корельованість гармонік різних сигналів. Властивість інваріантності дає можливість використати введену величину при розв'язуванні різноманітних задач, в тому числі, при виявленні нелінійних спотвореннях сигналів, розділення їх джерел, ідентифікації шляхів їх поширення і т.п.

2.4. Покомпонентна функція когерентності

Для аналізу взаємозв'язаності періодично нестационарних властивостей сигналів в попередньому підрозділі була введена функція когерентності (2.3.5), яка при $k=0$ співпадає з (2.3.1). Взаємоспектральні компоненти $f_k^{(\xi\eta)}(\omega)$ кількісно характеризують корельованість гармонік сигналів, різниця між частотами яких становить $k\omega_0$, $k \in Z$. Така корельованість є визначальною властивістю періодично нестационарного взаємозв'язку сигналів. Зсув спектральних компонентів за частотою на величини $k\frac{\omega_0}{2}$ у формулі (2.3.5) є необхідною умовою для того, щоб функція когерентності була інваріантом при лінійних перетвореннях [183, 223]. Оскільки [200]

$$f_{-k}^{(\xi\eta)}(\omega) = \overline{f_k^{(\xi\eta)}(-\omega)} = \overline{f_k^{(\eta\xi)}(\omega + k\omega_0)},$$

де “ $\overline{\quad}$ ” – знак спряження, то бачимо, що

$$\gamma_k^{(\xi\eta)}(-\omega) = \gamma_k^{(\eta\xi)}(\omega), \quad \gamma_{-k}^{(\xi\eta)}(\omega) = \gamma_k^{(\eta\xi)}(\omega).$$

З другої сторони, випадкові сигнали $\xi(t)$ та $\eta(t)$ тоді і тільки тоді є взаємозв'язаними ПНВС, коли вони можуть бути представлені у вигляді стохастичних рядів

$$\xi(t) = \sum_{k \in Z} \xi_k(t) e^{ik\omega_0 t}, \quad \eta(t) = \sum_{k \in Z} \eta_k(t) e^{ik\omega_0 t}, \quad (2.4.1)$$

де $\xi_k(t)$ і $\eta_k(t)$ є стаціонарно зв'язаними випадковими процесами.

Корельованість гармонік взаємозв'язаних ПНВС у гармонічних представленнях

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dz_{\xi}(\omega), \quad \eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dz_{\eta}(\omega),$$

рівнозначна корельованості модулюючих процесів $\xi_k(t)$ і $\eta_k(t)$ у стохастичних рядах (2.3.1) і (2.3.2) [162].

Виходячи з (2.3.1) і (2.3.2), спектральні компоненти сигналів $\xi_k(t)$ і $\eta_k(t)$ можуть бути виражені через спектральні густини модульованих процесів $\xi_k(t)$ і $\eta_k(t)$:

$$f_k^{(\xi)}(\omega) = \sum_{l \in Z} f_{l,l-k}^{(\xi)}(\omega - l\omega_0), \quad f_k^{(\eta)}(\omega) = \sum_{l \in Z} f_{l,l-k}^{(\eta)}(\omega - l\omega_0), \quad (2.4.2)$$

$$f_k^{(\xi\eta)}(\omega) = \sum_{l \in Z} f_{l,l-k}^{(\xi\eta)}(\omega - l\omega_0). \quad (2.4.3)$$

Тут

$$f_{l,l-k}^{(\xi)}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{l,l-k}^{(\xi)}(u) e^{-i\omega u} du,$$

$$f_{l,l-k}^{(\eta)}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{l,l-k}^{(\eta)}(u) e^{-i\omega u} du,$$

$$f_{l,l-k}^{(\xi\eta)}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{l,l-k}^{(\xi\eta)}(u) e^{-i\omega u} du,$$

де

$$R_{l_r}^{(\xi)}(u) = E \overset{\circ}{\xi}_l(t+u) \overset{\circ}{\xi}_r(t), \quad R_{l_r}^{(\eta)}(u) = E \overset{\circ}{\eta}_l(t+u) \overset{\circ}{\eta}_r(t), \quad R_{l_r}^{(\xi\eta)}(u) = E \overset{\circ}{\xi}_l(t+u) \overset{\circ}{\eta}_r(t),$$

$$\overset{\circ}{\xi}_l(t) = \xi_l(t) - m_l^{(\xi)}, \quad \overset{\circ}{\eta}_r(t) = \eta_r(t) - m_r^{(\eta)}, \quad m_r^{(\xi)} = E \xi_l(t), \quad m_r^{(\eta)} = E \eta_r(t).$$

Із формул (2.4.2) і (2.4.3) випливає, що функція когерентності $\gamma_k^{(\xi\eta)}(\omega)$ визначається сумою спектральних густин усіх стаціонарно зв'язаних випадкових процесів, номери яких відрізняються на число k . Тому така функція когерентності була названа інтегральною. Проаналізуємо цю функцію когерентності, яка характеризує взаємозв'язок окремих модулюючих процесів $\xi_k(t)$ і $\eta_l(t)$. Цю функцію когерентності визначимо на основі їх авто- і взаємоспектральних густин, а саме

$$\gamma_{kl}^{(\xi\eta)}(\omega) = \frac{|f_{kl}^{(\xi\eta)}(\omega)|}{\left[f_{kk}^{(\xi)}(\omega) f_{ll}^{(\eta)}(\omega) \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (2.4.4)$$

і будемо називати покомпонентною, а різницю між номерами стаціонарних компонентів k і l – її порядком.

Покажемо, що функція (2.4.2) не змінюється при лінійних перетвореннях. Припустимо, що сигнали $\xi(t)$ і $\eta(t)$ є результатом лінійних перетворень одного і того самого ПКВС (рис. 2.2):

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau) \zeta(t - \tau) d\tau, \quad (2.4.5)$$

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau) \zeta(t - \tau) d\tau. \quad (2.4.6)$$

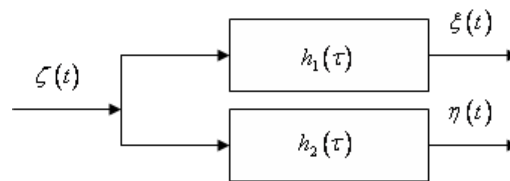


Рис. 2.2. Схема формування сигналів.

Тут $h_1(\tau)$ і $h_2(\tau)$ - відповідні імпульсні перехідні функції. Подамо сигнал $\zeta(t)$ у вигляді

$$\zeta(t) = \sum_{k \in Z} \zeta_k(t) e^{ik\omega_0 t}, \quad (2.4.7)$$

де $\zeta_k(t)$ - стаціонарно зв'язані випадкові процеси, гармонічне представлення яких має вигляд

$$\zeta_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dz_k^{(\zeta)}(\omega), \quad (2.4.8)$$

при цьому

$$Edz_k^{(\zeta)}(\omega) = m_k^{(\zeta)} \delta(\omega) d\omega,$$

$$Edz_k^{(\zeta)}(\omega_1) \overline{z_l^{(\zeta)}(\omega_2)} = f_{kl}^{(\zeta)}(\omega_1) \delta(\omega_2 - \omega_1) d\omega_1 d\omega_2.$$

Беручи до уваги співвідношення (2.4.7) і (2.4.8), для сигналів (2.4.5) і (2.4.6) знаходимо

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \sum_{k \in Z} e^{ik\omega_0 t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H_1(\omega_2) e^{i\omega_1 t} \delta(\omega_2 - \omega_1 - k\omega_0) dz_k^{(\zeta)}(\omega_1) d\omega_2 \right] = \\ &= \sum_{k \in Z} e^{ik\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} H_1(\omega + k\omega_0) e^{i\omega t} dz_k^{(\zeta)}(\omega), \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

$$\eta(t) = \sum_{k \in Z} e^{ik\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} H_2(\omega + k\omega_0) e^{i\omega t} dz_k^{(\zeta)}(\omega). \quad (2.4.10)$$

Тут $H_1(\omega)$ і $H_2(\omega)$ - передаточні функції лінійних перетворень:

$$H_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau,$$

$$H_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

З виразів (2.4.9) і (2.4.10) випливає, що стаціонарно зв'язані компоненти сигналів (2.4.5) і (2.4.6) мають вигляд

$$\xi_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H_1(\omega + k\omega_0) e^{i\omega t} dz_k^{(\zeta)}(\omega),$$

$$\eta_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H_2(\omega + k\omega_0) e^{i\omega t} dz_k^{(\zeta)}(\omega).$$

На основі цих формул для авто- і взаємкореляційних функцій компонентів $\xi_k(t)$ та $\eta_k(t)$ отримуємо:

$$\begin{aligned} R_{kk}^{(\xi)}(u) &= E \overset{\circ}{\xi}_k(t+u) \overline{\overset{\circ}{\xi}_k(t)} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H_1(\omega_1 + k\omega_0) \overline{H_1(\omega_2 + k\omega_0)} e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} e^{i\omega_1 u} E d z_k^{(\zeta)}(\omega_1) \overline{d z_k^{(\zeta)}(\omega_2)} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |H_1(\omega + k\omega_0)|^2 f_{kk}^{(\zeta)}(\omega) e^{i\omega u} d\omega, \end{aligned}$$

$$R_{kk}^{(\eta)}(u) = E \overset{\circ}{\eta}_k(t+u) \overline{\overset{\circ}{\eta}_k(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} |H_2(\omega + k\omega_0)|^2 f_{kk}^{(\zeta)}(\omega) e^{i\omega u} d\omega,$$

$$R_{kl}^{(\xi\eta)}(u) = E \overset{\circ}{\xi}_k(t+u) \overline{\overset{\circ}{\eta}_l(t)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H_1(\omega_1 + k\omega_0) \overline{H_2(\omega_2 + k\omega_0)} e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} e^{i\omega_1 u} E d z_k^{(\zeta)}(\omega_1) \overline{d z_l^{(\zeta)}(\omega_2)} = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} H_1(\omega + k\omega_0) \overline{H_2(\omega + l\omega_0)} f_{kl}^{(\zeta)}(\omega) e^{i\omega u} d\omega.
\end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}
f_{kk}^{(\xi)}(\omega) &= |H_1(\omega + k\omega_0)|^2 f_{kk}^{(\zeta)}(\omega), \\
f_{ll}^{(\eta)}(\omega) &= |H_2(\omega + k\omega_0)|^2 f_{ll}^{(\zeta)}(\omega), \\
f_{kl}^{(\xi\eta)}(\omega) &= H_1(\omega + k\omega_0) \overline{H_2(\omega + l\omega_0)} f_{kl}^{(\zeta)}(\omega).
\end{aligned}$$

Підставляючи останнє співвідношення у вираз (2.4.4), маємо:

$$\gamma_{kl}^{(\xi\eta)}(\omega) = \frac{|f_{kl}^{(\zeta)}(\omega)|}{\left[f_{kk}^{(\zeta)}(\omega) f_{ll}^{(\zeta)}(\omega) \right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.4.11)$$

Таким чином, покомпонентна функція когерентності двох сигналів, отриманих за допомогою лінійних перетворень одного і того самого ПНВС, дорівнює покомпонентній функції автокогерентності цього сигналу. А це означає, що вона не змінюється при лінійних перетвореннях. Підкреслимо, що встановлена властивість величини (2.4.4) має важливе значення при її використанні в задачах багатоканальних систем передачі інформації, шляхів поширення сигналів і т.п.

Легко бачити, що при $k = l$ величина (2.4.11) рівна одиниці, тобто в цьому випадку функція когерентності (2.4.4) при лінійних перетвореннях має таку саму властивість що й функція когерентності стаціонарно зв'язаних сигналів.

Для амплітудно-модульованих сигналів

$$\xi(t) = \mu(t) \cos \omega_0 t,$$

$$\eta(t) = \nu(t) \cos \omega_0 t,$$

де $\mu(t)$ і $\nu(t)$ - стаціонарно зв'язані випадкові процеси, стаціонарні компоненти мають вигляд

$$\xi_1(t) = \xi_{-1}(t) = \frac{1}{2} \mu(t),$$

$$\eta_1(t) = \eta_{-1}(t) = \frac{1}{2}v(t).$$

У цьому випадку

$$\gamma_{1,-1}^{(\xi\eta)}(\omega) = \gamma_{-1,1}^{(\xi\eta)}(\omega) = \frac{|f_{\mu\nu}(\omega)|}{[f_\mu(\omega)f_\nu(\omega)]^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.4.12)$$

де $f_\mu(\omega)$ і $f_\nu(\omega)$ - спектральні густини потужності випадкових процесів $\mu(t)$ і $\nu(t)$, а $f_{\mu\nu}(\omega)$ - їх взаємна спектральна густина. Такий самий вигляд мають і функції когерентності $\gamma_{1,1}^{(\xi\eta)}(\omega)$, $\gamma_{-1,-1}^{(\xi\eta)}(\omega)$.

Взаємоспектральна густина сигналів визначається виразом

$$f_{\xi\eta}(\omega, t) = f_0^{(\xi\eta)}(\omega) + f_{-2}^{(\xi\eta)}(\omega)e^{-i2\omega_0 t} + f_2^{(\xi\eta)}(\omega)e^{i2\omega_0 t},$$

при цьому

$$f_0^{(\xi\eta)}(\omega) = f_{-1,-1}^{(\xi\eta)}(\omega) + f_{1,1}^{(\xi\eta)}(\omega),$$

$$f_2^{(\xi\eta)}(\omega) = f_{1,-1}^{(\xi\eta)}(\omega - \omega_0),$$

$$f_{-2}^{(\xi\eta)}(\omega) = f_{-1,1}^{(\xi\eta)}(\omega + \omega_0).$$

Як бачимо, середньочасове значення функції $f_{\xi\eta}(\omega, t)$ визначається спектральними густинами $f_{-1,-1}^{(\xi\eta)}(\omega, t)$ і $f_{1,1}^{(\xi\eta)}(\omega, t)$, а її періодична зміна за часом – спектральними густинами $f_{1,-1}^{(\xi\eta)}(\omega, t)$ і $f_{-1,1}^{(\xi\eta)}(\omega, t)$. Із цього випливає, що функції когерентності $\gamma_{1,1}^{(\xi\eta)}(\omega)$ і $\gamma_{-1,-1}^{(\xi\eta)}(\omega)$ потрібно розглядати як характеристики взаємозв'язку сигналів у стаціонарному наближенні, функції когерентності $\gamma_{-1,1}^{(\xi\eta)}(\omega)$ і $\gamma_{1,-1}^{(\xi\eta)}(\omega)$ - як характеристики взаємозв'язку нестационарних властивостей сигналів. У даному випадку ці функції рівні, і це не дивно, оскільки стаціонарні компоненти $\xi_{\pm 1}(t)$ і $\eta_{\pm 1}(t)$ формуються на основі одних і тих самих модулюючих процесів $\mu(t)$ і $\nu(t)$. Така властивість ПНВС була названа спектральною надлишковістю. Це означає, що зі спектральними характеристиками модулюючих компонент зв'язана та сама інформація, що і з їх спектральними характеристиками. Однак необхідно підкреслити, що ця

надлишковість може бути використана при розв'язуванні багатьох практичних задач [187, 195, 203, 231, 235, 236].

Відмітимо, що взаємозв'язаність нестационарних властивостей амплітудно-модульованих сигналів також може бути охарактеризована введеною в розділі 2.3 інтегральною функцією когерентності. Ця функція співпадає з (2.4.12) тільки в тому випадку, якщо $f_\mu(\omega) = 0$ і $f_\nu(\omega) = 0$ для $|\omega| > \omega_0$, і тільки для частот $\omega \in [-\omega_0, \omega_0]$. Інтегральна функція когерентності і покомпонентна функція когерентності для стаціонарних наближень сигналів відрізняються між собою тим, що в першій з них врахований зв'язаний з модуляцією перенос частот.

Припустимо, що

$$R_\mu(u) = D_\mu e^{-\alpha_\mu |u|}, R_\nu(u) = D_\nu e^{-\alpha_\nu |u|}, R_{\mu\nu}(u) = D_{\mu\nu} e^{-\alpha_{\mu\nu} |u|}.$$

Тоді

$$f_\mu(\omega) = \frac{D_\mu \alpha_\mu}{\pi(\alpha_\mu^2 + \omega^2)},$$

$$f_\nu(\omega) = \frac{D_\nu \alpha_\nu}{\pi(\alpha_\nu^2 + \omega^2)},$$

$$f_{\mu\nu}(\omega) = \frac{D_{\mu\nu} \alpha_{\mu\nu}}{\pi(\alpha_{\mu\nu}^2 + \omega^2)}.$$

Звідси

$$\gamma_{1,-1}^{(\xi\eta)}(\omega) = \frac{D_{\mu\nu} \alpha_{\mu\nu} \left[(\alpha_\mu^2 + \omega^2)(\alpha_\nu^2 + \omega^2) \right]^{\frac{1}{2}}}{\left[D_\mu D_\nu \alpha_\mu \alpha_\nu \right]^{\frac{1}{2}} (\alpha_{\mu\nu}^2 + \omega^2)}.$$

Графіки отриманої функції когерентності для різних декрементів зникання кореляційних зв'язків представлено на рис. 2.3. Для малих значень декрементів зникання функція когерентності, як бачимо, швидше прямує до нуля. Збільшення значень декрементів призводить до розширення тієї області частот, в якій властивості нестационарності одного із сигналів впливають на властивості нестационарності другого.

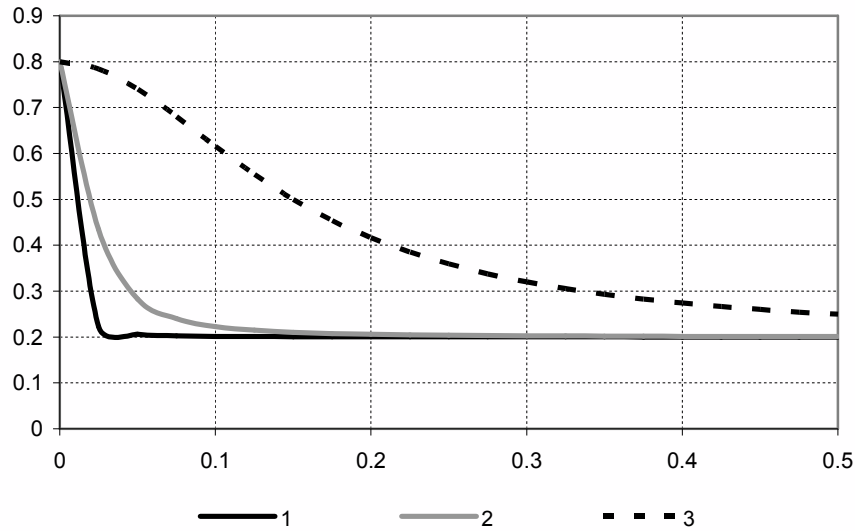


Рис. 2.3. Покомпонентна функція когерентності амплітудно-модульованих сигналів при $D_\mu = D_\nu = 1$, $D_{\mu\nu} = 0.4$, а також: 1) $\alpha_\mu = \alpha_\nu = 0.02$, $\alpha_{\mu\nu} = 0.01$; 2) $\alpha_\mu = \alpha_\nu = 0.08$, $\alpha_{\mu\nu} = 0.04$; 3) $\alpha_\mu = \alpha_\nu = 0.6$, $\alpha_{\mu\nu} = 0.3$.

Знайдемо тепер покомпонентні функції когерентності амплітудно- і фазомодульованих сигналів

$$\xi(t) = \mu_c(t) \cos \omega_0 t + \mu_s(t) \sin \omega_0 t, \quad (2.4.13)$$

$$\eta(t) = \nu_c(t) \cos \omega_0 t + \nu_s(t) \sin \omega_0 t. \quad (2.4.14)$$

У цьому випадку

$$\xi_{\pm 1}(t) = \frac{1}{2} [\mu_c(t) \mp i \mu_s(t)],$$

$$\eta_{\pm 1}(t) = \frac{1}{2} [\nu_c(t) \mp i \nu_s(t)],$$

де $\xi_1(t) = \bar{\xi}_{-1}(t)$, $\eta_1(t) = \bar{\eta}_{-1}(t)$. Для спектральних густин тоді маємо

$$f_{11}^{(\xi)}(\omega) = \frac{1}{4} [f_{\mu_c}(\omega) + f_{\mu_s}(\omega) + 2 \operatorname{Im} f_{\mu_c \mu_s}(\omega)],$$

$$f_{-1,-1}^{(\xi)}(\omega) = \frac{1}{4} [f_{\mu_c}(\omega) + f_{\mu_s}(\omega) - 2 \operatorname{Im} f_{\mu_c \mu_s}(\omega)],$$

$$f_{11}^{(\eta)}(\omega) = \frac{1}{4} [f_{\nu_c}(\omega) + f_{\nu_s}(\omega) + 2 \operatorname{Im} f_{\nu_c \nu_s}(\omega)],$$

$$f_{-1,-1}^{(\eta)}(\omega) = \frac{1}{4} [f_{\nu_c}(\omega) + f_{\nu_s}(\omega) - 2 \operatorname{Im} f_{\nu_c \nu_s}(\omega)],$$

$$f_{1,1}^{(\xi\eta)}(\omega) = \frac{1}{4} \left[f_{\mu_c \nu_c}(\omega) + f_{\mu_s \nu_s}(\omega) + i \left[f_{\mu_c \nu_s}(\omega) - f_{\mu_s \nu_c}(\omega) \right] \right],$$

$$f_{1,-1}^{(\xi\eta)}(\omega) = \frac{1}{4} \left[f_{\mu_c \nu_c}(\omega) - f_{\mu_s \nu_s}(\omega) - i \left[f_{\mu_c \nu_s}(\omega) + f_{\mu_s \nu_c}(\omega) \right] \right],$$

а також $f_{-1,-1}^{(\xi\eta)}(\omega) = f_{1,1}^{(\xi\eta)}(\omega)$, $\gamma_{-1,1}^{(\xi\eta)}(\omega) = \overline{f_{1,-1}^{(\xi\eta)}(\omega)}$. Беручи до уваги останні співвідношення, для функцій когерентності $\gamma_{11}^{(\xi\eta)}(\omega)$ і $\gamma_{-1,1}^{(\xi\eta)}(\omega)$ знаходимо

$$\gamma_{11}^{(\xi\eta)}(\omega) = \frac{\left| f_{\mu_c \nu_c}(\omega) + f_{\mu_s \nu_s}(\omega) - i \left[f_{\mu_c \nu_s}(\omega) - f_{\mu_s \nu_c}(\omega) \right] \right|}{\left[\left[f_{\mu_c}(\omega) + f_{\mu_s}(\omega) + \left[\begin{array}{c} f_{\nu_c}(\omega) + f_{\nu_s}(\omega) + \\ + 2 \operatorname{Im} f_{\mu_c \mu_s}(\omega) \end{array} \right] \right]^2 \right] \left[\begin{array}{c} f_{\nu_c}(\omega) + f_{\nu_s}(\omega) + \\ + 2 \operatorname{Im} f_{\nu_c \nu_s}(\omega) \end{array} \right]^2 \right]}^{\frac{1}{2}}, \quad (2.4.15)$$

$$\gamma_{-1,1}^{(\xi\eta)}(\omega) = \frac{\left| f_{\mu_c \nu_c}(\omega) - f_{\mu_s \nu_s}(\omega) - i \left[f_{\mu_c \nu_s}(\omega) + f_{\mu_s \nu_c}(\omega) \right] \right|}{\left[\left[f_{\mu_c}(\omega) + f_{\mu_s}(\omega) + \left[\begin{array}{c} f_{\nu_c}(\omega) + f_{\nu_s}(\omega) + \\ + 2 \operatorname{Im} f_{\mu_c \mu_s}(\omega) \end{array} \right] \right]^2 \right] \left[\begin{array}{c} f_{\nu_c}(\omega) + f_{\nu_s}(\omega) + \\ + 2 \operatorname{Im} f_{\nu_c \nu_s}(\omega) \end{array} \right]^2 \right]}^{\frac{1}{2}}. \quad (2.4.16)$$

Величина (2.4.14) визначає взаємозв'язаність стаціонарних наближень сигналів (2.4.13) і (2.4.14), а величина (2.4.15) – взаємозалежність їх нестаціонарних властивостей. Перша з них буде рівна нулю тільки у випадку, коли відсутні кореляційні зв'язки між квадратурними складовими обох сигналів, а друга – коли некорельованими є синусоїдальна і косинусоїдальна складові, а кореляції між синусоїдальними і косинусоїдальними складовими рівні. Це означає, що два ПНВС можуть бути тільки стаціонарно зв'язаними, а нестаціонарні властивості, що визначаються характеристиками другого порядку кожного з них, не впливають один на одного.

Зазначимо, що вираз для інтегральної функції когерентності стаціонарних наближень сигналів (2.4.13) і (2.4.14) $\gamma_0^{(\xi\eta)}(\omega)$, який приведено в роботі [138] відрізняється від (2.4.15), що визначає $\gamma_{11}^{(\xi\eta)}(\omega)$. Це пояснюється, по-перше, тим, що нульові спектральні компоненти $f_0^{(\xi)}(\omega)$, $f_0^{(\eta)}(\omega)$ і $f_0^{(\xi\eta)}(\omega)$, як впливає із співвідношень

$$f_0^{(\xi)}(\omega) = f_{1,1}^{(\xi)}(\omega - \omega_0) + f_{-1,-1}^{(\xi)}(\omega + \omega_0),$$

$$f_0^{(\eta)}(\omega) = f_{1,1}^{(\eta)}(\omega - \omega_0) + f_{-1,-1}^{(\eta)}(\omega + \omega_0),$$

$$f_0^{(\xi\eta)}(\omega) = f_{1,1}^{(\xi\eta)}(\omega - \omega_0) + f_{-1,-1}^{(\xi\eta)}(\omega + \omega_0),$$

визначаються не одною, а сумами спектральних і взаємоспектральних густин модулюючих процесів. А, по-друге, на їх величину впливає спричинений модуляцією перенос частот.

Рівність чисельників виразів $\gamma_2^{(\xi\eta)}(\omega)$ і $\gamma_{-1,1}^{(\xi\eta)}(\omega)$ пояснюється тим, що в даному випадку $\gamma_2^{(\xi\eta)}(\omega) = \gamma_{-1,1}^{(\xi\eta)}(\omega - \omega_0)$. Знаменники цих виразів будуть рівними для частот $|\omega| \leq \omega_0$ у випадку, коли спектральні густини квадратурних складових рівні нулю при $|\omega| > \omega_0$.

Покомпонентна функція когерентності (2.4.16) при $R_{\mu_c\mu_s}(u) = 0$, $R_{\nu_c\nu_s}(u) = 0$, $R_{\mu_s\nu_c}(u) = 0$ визначається виразом

$$\gamma_{-1,1}^{(\xi\eta)}(\omega) = \frac{|f_{\mu_c\nu_c}(\omega) - f_{\mu_s\nu_s}(\omega)|}{\left[[f_{\mu_c}(\omega) + f_{\mu_s}(\omega)] [f_{\nu_c}(\omega) + f_{\nu_s}(\omega)] \right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.4.17)$$

Нехай $R_{\mu_c\mu_s}(u) = D_{c,s}^{(\mu)} e^{-\alpha_{c,s}^{(\mu)}|u|}$, $R_{\nu_c\nu_s}(u) = D_{c,s}^{(\nu)} e^{-\alpha_{c,s}^{(\nu)}|u|}$, $R_{\mu_c\mu_c}(u) = D_c^{(\mu\nu)} e^{-\alpha_c^{(\mu\nu)}|u|}$,

$R_{\mu_s\nu_s}(u) = D_s^{(\mu\nu)} e^{-\alpha_s^{(\mu\nu)}|u|}$. Тоді

$$f_{\mu_c\mu_s}(\omega) = \frac{D_{c,s}^{(\mu)} \alpha_{c,s}^{(\mu)}}{\pi \left[\left(\alpha_{c,s}^{(\mu,\nu)} \right)^2 + \omega^2 \right]}, \quad f_{\nu_c\nu_s}(\omega) = \frac{D_{c,s}^{(\nu)} \alpha_{c,s}^{(\nu)}}{\pi \left[\left(\alpha_{c,s}^{(\nu)} \right)^2 + \omega^2 \right]},$$

$$f_{\mu_c\nu_s}(\omega) = \frac{D_s^{(\mu\nu)} \alpha_s^{(\mu\nu)}}{\pi \left[\left(\alpha_s^{(\mu\nu)} \right)^2 + \omega^2 \right]}, \quad f_{\mu_c\nu_c}(\omega) = \frac{D_c^{(\mu\nu)} \alpha_c^{(\mu\nu)}}{\pi \left[\left(\alpha_c^{(\mu\nu)} \right)^2 + \omega^2 \right]}.$$

Графіки функції (2.4.17) для вибраних параметрів наведені на рис. 2.4. Залежність цієї функції від частоти, як бачимо, для різних декрементів зникання кореляційних зв'язків мало відрізняється від частотної залежності функції когерентності амплітудно-модульованих сигналів. Частотна область, у котрій властивості нестационарності сигналів взаємозалежні, розширюється зі збільшенням швидкості зникання взаємкореляційних зв'язків сигналів.

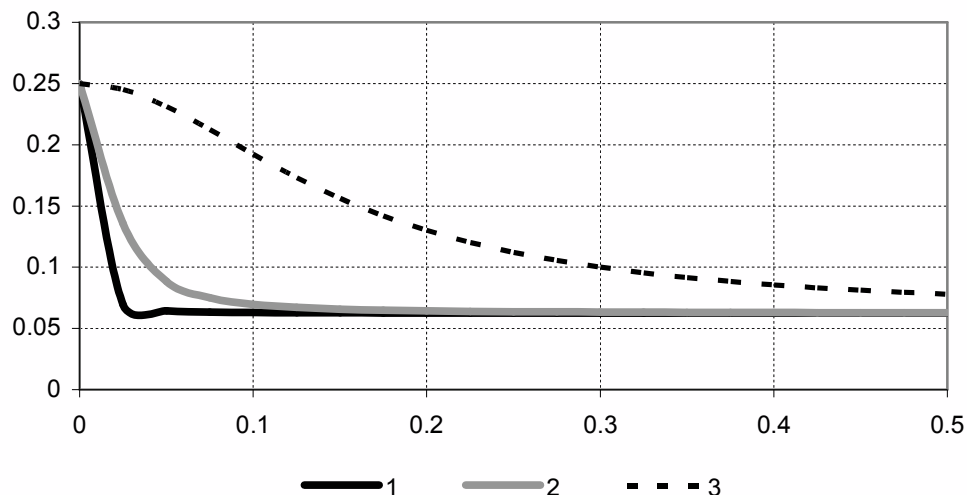


Рис. 2.4. Покомпонентна функція когерентності амплітудно-модульованих сигналів при $D_c^{(\mu)} = D_c^{(\nu)} = 1$, $D_s^{(\mu)} = D_s^{(\nu)} = 0.6$, $D_c^{(\mu\nu)} = 0.4$, $D_s^{(\mu\nu)} = 0.2$, а також:

- 1) $\alpha_{c,s}^{(\mu)} = \alpha_{c,s}^{(\nu)} = 0.02$, $\alpha_{c,s}^{(\mu\nu)} = 0.01$; 2) $\alpha_{c,s}^{(\mu)} = \alpha_{c,s}^{(\nu)} = 0.08$, $\alpha_{c,s}^{(\mu\nu)} = 0.04$; 3)
 $\alpha_{c,s}^{(\mu)} = \alpha_{c,s}^{(\nu)} = 0.6$, $\alpha_{c,s}^{(\mu\nu)} = 0.3$.

Першою задачею, яка виникає при знаходженні покомпонентної функції когерентності, є виділення стаціонарних компонентів $\xi_k(t)$ і $\eta_k(t)$. Як показано в [119], таке виділення може бути проведене за допомогою перетворень:

$$\tilde{\xi}_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\xi(\tau)e^{-ik\omega_0\tau}d\tau,$$

$$\tilde{\eta}_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\eta(\tau)e^{-ik\omega_0\tau}d\tau,$$

де $h(\tau)$ – імпульсна передавальна функція ідеального низькочастотного фільтра зі смугою $\left[-\frac{\omega_0}{2}, \frac{\omega_0}{2}\right]$:

$$h(\tau) = \frac{\sin\left(\frac{\omega_0\tau}{2}\right)}{\pi\tau}.$$

У частотній області маємо:

$$\tilde{\xi}_k(t) = \int_{-\frac{\omega_0}{2}}^{\frac{\omega_0}{2}} e^{i\omega t} dz_{\xi}(\omega + k\omega_0), \quad (2.4.18)$$

$$\tilde{\eta}_k(t) = \int_{-\frac{\omega_0}{2}}^{\frac{\omega_0}{2}} e^{i\omega t} dz_\eta(\omega + k\omega_0). \quad (2.4.19)$$

Як видно, перетворення (2.4.18) і (2.4.19) полягають у частотному зсуві кожного з сигналів вліво на величину $k\omega_0$ і низькочастотній фільтрації. Виділені випадкові процеси $\tilde{\xi}_k(t)$ і $\tilde{\eta}_k(t)$ є стаціонарними та стаціонарно зв'язаними, а їх спектральні густини у випадку вузькосмугових модуляцій збігаються зі спектральними густинами стаціонарних компонентів $\xi_k(t)$ і $\eta_k(t)$. При широкосмугових модуляціях спектральні густини зсунутих за частотою сусідніх процесів $\xi_k(t)$ і $\eta_k(t)$ будуть накладатися, і тоді компоненти $\tilde{\xi}_k(t)$ і $\tilde{\eta}_k(t)$ будуть формуватися багатьма процесами $\xi_k(t)$ і $\eta_k(t)$. Однак представлення процесів у вигляді стохастичних рядів (2.1.3) та (2.1.4) та рядів

$$\xi(t) = \sum_{k \in Z} \tilde{\xi}_k(t) e^{ik\omega_0 t}, \quad \eta(t) = \sum_{k \in Z} \tilde{\eta}_k(t) e^{ik\omega_0 t}$$

будуть еквівалентними в тому сенсі, що імовірнісні характеристики випадкових процесів $\xi(t)$ і $\eta(t)$, виражені через імовірнісні характеристики процесів $\xi_k(t)$ і $\eta_k(t)$, з одного боку, а з другого – через характеристики виділених компонентів, будуть співпадати [162, 195].

Випадкові функції в представленнях (2.4.18) і (2.4.19) подамо у вигляді $z_\xi(\omega) = z_\xi^c(\omega) - iz_\xi^s(\omega)$, $z_\eta(\omega) = z_\eta^c(\omega) - iz_\eta^s(\omega)$ і виділимо дійсні та уявні частини випадкових процесів (2.4.18) і (2.4.19):

$$\tilde{\xi}_k(t) = \frac{1}{2} [\tilde{\xi}_k^c(t) - i\tilde{\xi}_k^s(t)],$$

$$\tilde{\eta}_k(t) = \frac{1}{2} [\tilde{\eta}_k^c(t) - i\tilde{\eta}_k^s(t)].$$

Тут

$$\tilde{\xi}_k^c(t) = 2 \int_{-\frac{\omega_0}{2}}^{\frac{\omega_0}{2}} [\cos \omega t dz_\xi^c(\omega + k\omega_0) + \sin \omega t dz_\xi^s(\omega + k\omega_0)],$$

$$\tilde{\xi}_k^s(t) = 2 \int_{-\frac{\omega_0}{2}}^{\frac{\omega_0}{2}} \left[\cos \omega t dz_{\xi}^s(\omega + k\omega_0) - \sin \omega t dz_{\xi}^c(\omega + k\omega_0) \right],$$

$$\tilde{\eta}_k^c(t) = 2 \int_{-\frac{\omega_0}{2}}^{\frac{\omega_0}{2}} \left[\cos \omega t dz_{\eta}^c(\omega + k\omega_0) + \sin \omega t dz_{\eta}^s(\omega + k\omega_0) \right],$$

$$\tilde{\eta}_k^s(t) = 2 \int_{-\frac{\omega_0}{2}}^{\frac{\omega_0}{2}} \left[\cos \omega t dz_{\eta}^s(\omega + k\omega_0) - \sin \omega t dz_{\eta}^c(\omega + k\omega_0) \right].$$

Звідси для авто- та взаємкореляційних функцій виділених процесів отримуємо:

$$R_{\tilde{\xi}_k}^c(u) = \frac{1}{4} \left[R_{\tilde{\xi}_k}^c(u) + R_{\tilde{\xi}_k}^c(u) + i \left[R_{\tilde{\xi}_k}^{cs}(u) - R_{\tilde{\xi}_k}^{sc}(u) \right] \right],$$

$$R_{\tilde{\eta}_k}^c(u) = \frac{1}{4} \left[R_{\tilde{\eta}_k}^c(u) + R_{\tilde{\eta}_k}^c(u) + i \left[R_{\tilde{\eta}_k}^{cs}(u) - R_{\tilde{\eta}_k}^{sc}(u) \right] \right],$$

$$R_{\tilde{\xi}_k \tilde{\eta}_l}^c(u) = \frac{1}{4} \left[R_{\tilde{\xi}_k \tilde{\eta}_l}^c(u) + R_{\tilde{\xi}_k \tilde{\eta}_l}^c(u) + i \left[R_{\tilde{\xi}_k \tilde{\eta}_l}^{cs}(u) - R_{\tilde{\xi}_k \tilde{\eta}_l}^{sc}(u) \right] \right],$$

де

$$R_{\tilde{\xi}_k}^{c,s}(u) = E \overset{\circ}{\xi}_k^{c,s}(t+u) \overset{\circ}{\xi}_k^{c,s}(t), \quad R_{\tilde{\eta}_k}^{c,s}(u) = E \overset{\circ}{\eta}_k^{c,s}(t+u) \overset{\circ}{\eta}_k^{c,s}(t), \quad R_{\tilde{\xi}_k}^{c,s}(u) = E \overset{\circ}{\xi}_k^c(t+u) \overset{\circ}{\xi}_k^s(t),$$

$$R_{\tilde{\eta}_k}^{c,s}(u) = E \overset{\circ}{\eta}_k^c(t+u) \overset{\circ}{\eta}_k^s(t), \quad R_{\tilde{\xi}_k \tilde{\eta}_l}^{c,s}(u) = E \overset{\circ}{\xi}_k^{c,s}(t+u) \overset{\circ}{\eta}_l^{c,s}(t), \quad R_{\tilde{\xi}_k \tilde{\eta}_l}^{c,s}(u) = E \overset{\circ}{\xi}_k^c(t+u) \overset{\circ}{\eta}_l^s(t),$$

$$\overset{\circ}{\xi}_k^{c,s}(t) = \tilde{\xi}_k^{c,s}(t) - \tilde{m}_{\tilde{\xi}_k}^{c,s}, \quad \overset{\circ}{\eta}_k^{c,s}(t) = \tilde{\eta}_k^{c,s}(t) - \tilde{m}_{\tilde{\eta}_k}^{c,s}, \quad \tilde{m}_{\tilde{\xi}_k}^{c,s} = E \tilde{\xi}_k^{c,s}(t), \quad \tilde{m}_{\tilde{\eta}_k}^{c,s} = E \tilde{\eta}_k^{c,s}(t).$$

Оскільки

$$R_{\tilde{\xi}_k}^{cs}(u) = R_{\tilde{\xi}_k}^{sc}(-u), \quad R_{\tilde{\eta}_k}^{cs}(u) = R_{\tilde{\eta}_k}^{sc}(-u),$$

то

$$R_{\tilde{\xi}_k}^{cs}(u) - R_{\tilde{\xi}_k}^{sc}(-u) = \tilde{R}_{\tilde{\xi}_k}^{cs}(u), \quad R_{\tilde{\eta}_k}^{cs}(u) - R_{\tilde{\eta}_k}^{sc}(-u) = \tilde{R}_{\tilde{\eta}_k}^{cs}(u),$$

де $\tilde{R}_{\tilde{\xi}_k}^{cs}(u)$ і $\tilde{R}_{\tilde{\eta}_k}^{cs}(u)$ – непарні складові відповідних кореляційних функцій. Для спектральних густин процесів (2.4.18) і (2.4.19) тоді маємо:

$$f_{\xi_k}(\omega) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} \left[R_{\xi_k}^c(u) + R_{\xi_k}^s(u) \right] \cos \omega u + 2\tilde{R}_{\xi_k}^{cs}(u) \sin \omega u \, du,$$

$$f_{\eta_k}(\omega) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} \left[R_{\eta_k}^c(u) + R_{\eta_k}^s(u) \right] \cos \omega u + 2\tilde{R}_{\eta_k}^{cs}(u) \sin \omega u \, du.$$

Взаємна спектральна густина цих процесів є комплекснозначною функцією

$$f_{\xi_k \eta_l}(\omega) = \operatorname{Re} f_{\xi_k \eta_l}(\omega) - i \operatorname{Im} f_{\xi_k \eta_l}(\omega), \text{ при цьому}$$

$$\operatorname{Re} f_{\xi_k \eta_l}(\omega) = \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[R_{\xi_k \eta_l}^c(u) + R_{\xi_k \eta_l}^s(u) \right] \cos \omega u + \left[R_{\xi_k \eta_l}^{cs}(u) - R_{\xi_k \eta_l}^{sc}(u) \right] \sin \omega u \, du,$$

$$\operatorname{Im} f_{\xi_k \eta_l}(\omega) = \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[R_{\xi_k \eta_l}^c(u) + R_{\xi_k \eta_l}^s(u) \right] \sin \omega u + \left[R_{\xi_k \eta_l}^{cs}(u) - R_{\xi_k \eta_l}^{sc}(u) \right] \cos \omega u \, du.$$

На основі наведених вище теоретичних формул сформуємо статистики для оцінювання відповідних величин за експериментальними даними.

Припустимо, що реалізація ПНВС $\xi(t)$ і $\eta(t)$ задані для значень часу $t \in [-\theta, \theta]$. Формули для виділення стаціонарних компонентів тоді приймають вигляд:

$$\begin{cases} \hat{\xi}_k(t) \\ \hat{\eta}_k(t) \end{cases} = \int_{-\theta}^{\theta} h(t-\tau) \begin{cases} \xi(\tau) \\ \eta(\tau) \end{cases} \cos k\omega_0 \tau d\tau - i \int_{-\theta}^{\theta} h(t-\tau) \begin{cases} \xi(\tau) \\ \eta(\tau) \end{cases} \sin k\omega_0 \tau d\tau.$$

Прийmemo до уваги, що

$$h(t-\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\omega_0}{2}}^{\frac{\omega_0}{2}} e^{i\omega(t-\tau)} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\omega_0}{2}}^{\frac{\omega_0}{2}} \cos \omega(t-\tau) d\omega,$$

і введемо позначення

$$\begin{cases} a_{\xi}(\omega) \\ b_{\xi}(\omega) \end{cases} = \frac{1}{\pi} \int_{-\theta}^{\theta} \xi(\tau) \begin{cases} \cos \omega \tau \\ \sin \omega \tau \end{cases} d\tau,$$

$$\begin{cases} a_{\eta}(\omega) \\ b_{\eta}(\omega) \end{cases} = \frac{1}{\pi} \int_{-\theta}^{\theta} \eta(\tau) \begin{cases} \cos \omega \tau \\ \sin \omega \tau \end{cases} d\tau.$$

Врахувавши, що $a_{\xi, \eta}(-\omega) = a_{\xi, \eta}(\omega)$, а $b_{\xi, \eta}(-\omega) = -b_{\xi, \eta}(\omega)$, знаходимо

$$\hat{\xi}_k^c(t) = \int_0^{\frac{\omega_0}{2}} \left[\begin{array}{l} a_\xi(\omega + k\omega_0) + \\ + a_\xi(\omega - k\omega_0) \end{array} \right] \cos \omega t + \left[\begin{array}{l} b_\xi(\omega + k\omega_0) + \\ + b_\xi(\omega - k\omega_0) \end{array} \right] \sin \omega t \, d\omega,$$

$$\hat{\xi}_k^s(t) = \int_0^{\frac{\omega_0}{2}} \left[\begin{array}{l} b_\xi(\omega + k\omega_0) - \\ - b_\xi(\omega - k\omega_0) \end{array} \right] \cos \omega t + \left[\begin{array}{l} a_\xi(\omega - k\omega_0) - \\ - a_\xi(\omega + k\omega_0) \end{array} \right] \sin \omega t \, d\omega,$$

$$\hat{\eta}_k^c(t) = \int_0^{\frac{\omega_0}{2}} \left[\begin{array}{l} a_\eta(\omega + k\omega_0) + \\ + a_\eta(\omega - k\omega_0) \end{array} \right] \cos \omega t + \left[\begin{array}{l} b_\eta(\omega + k\omega_0) + \\ + b_\eta(\omega - k\omega_0) \end{array} \right] \sin \omega t \, d\omega,$$

$$\hat{\eta}_k^s(t) = \int_0^{\frac{\omega_0}{2}} \left[\begin{array}{l} b_\eta(\omega + k\omega_0) - \\ - b_\eta(\omega - k\omega_0) \end{array} \right] \cos \omega t + \left[\begin{array}{l} a_\eta(\omega - k\omega_0) - \\ - a_\eta(\omega + k\omega_0) \end{array} \right] \sin \omega t \, d\omega.$$

При реалізації обчислень на комп'ютері інтегральні перетворення необхідно замінити на інтегральні суми. Покладемо, що $\theta = Kh$, K - натуральне число, h - інтервал дискретизації. Тоді

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{a}_\xi(\omega \pm k\omega_0) \\ \hat{a}_\eta(\omega \pm k\omega_0) \end{array} \right\} = \frac{h}{\pi} \sum_{n=-K}^K \left\{ \begin{array}{l} \xi(nh) \\ \eta(nh) \end{array} \right\} \cos(\omega \pm k\omega_0),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{b}_\xi(\omega \pm k\omega_0) \\ \hat{b}_\eta(\omega \pm k\omega_0) \end{array} \right\} = \frac{h}{\pi} \sum_{n=-K}^K \left\{ \begin{array}{l} \xi(nh) \\ \eta(nh) \end{array} \right\} \sin(\omega \pm k\omega_0).$$

Частотний інтервал $\left[\omega, \frac{\omega_0}{2} \right]$ поділимо на інтервали $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{2L}$, L - натуральне

число. Тоді при дискретній обробці

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_k^c(t) = \Delta\omega \sum_{n=0}^{L-1} & \left[\left[\hat{\mathfrak{a}}_\xi(n\Delta\omega + k\omega_0) + \hat{\mathfrak{a}}_\xi(n\Delta\omega - k\omega_0) \right] \cos n\Delta\omega t + \right. \\ & \left. + \left[\hat{b}_\xi(n\Delta\omega + k\omega_0) + \hat{b}_\xi(n\Delta\omega - k\omega_0) \right] \sin n\Delta\omega t \right], \end{aligned} \quad (2.4.20)$$

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_k^s(t) = \Delta\omega \sum_{n=0}^{L-1} & \left[\left[\hat{a}_\xi(n\Delta\omega - k\omega_0) - \hat{a}_\xi(n\Delta\omega + k\omega_0) \right] \sin n\Delta\omega t + \right. \\ & \left. + \left[\hat{b}_\xi(n\Delta\omega + k\omega_0) - \hat{b}_\xi(n\Delta\omega - k\omega_0) \right] \cos n\Delta\omega t \right], \end{aligned} \quad (2.4.21)$$

$$\hat{\eta}_k^c(t) = \Delta\omega \sum_{n=0}^{L-1} \left[\left[\hat{a}_\eta(n\Delta\omega + k\omega_0) + \hat{a}_\eta(n\Delta\omega - k\omega_0) \right] \cos n\Delta\omega t + \right. \\ \left. + \left[\hat{b}_\eta(n\Delta\omega + k\omega_0) + \hat{b}_\eta(n\Delta\omega - k\omega_0) \right] \sin n\Delta\omega t \right], \quad (2.4.22)$$

$$\hat{\eta}_k^s(t) = \Delta\omega \sum_{n=0}^{L-1} \left[\left[\hat{a}_\eta(n\Delta\omega - k\omega_0) - \hat{a}_\eta(n\Delta\omega + k\omega_0) \right] \sin n\Delta\omega t + \right. \\ \left. + \left[\hat{b}_\eta(n\Delta\omega + k\omega_0) - \hat{b}_\eta(n\Delta\omega - k\omega_0) \right] \cos n\Delta\omega t \right]. \quad (2.4.23)$$

За співвідношеннями (2.4.20)- (2.4.23) формуємо ряди $\hat{\xi}^{c,s}(rh)$ і $\hat{\eta}^{c,s}(rh)$, r - ціле число, на основі яких обчислюємо оцінки авто- і взаємкореляційних функцій:

$$\hat{R}_{\xi_k}^{c,s}(jh) = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} \left[\hat{\xi}_k^{c,s}((n+j)h) - \hat{m}_{\xi_k}^{c,s} \right] \left[\hat{\xi}_k^{c,s}(nh) - \hat{m}_{\eta_k}^{c,s} \right],$$

$$\hat{R}_{\eta_k}^{c,s}(jh) = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} \left[\hat{\eta}_k^{c,s}((n+j)h) - \hat{m}_{\eta_k}^{c,s} \right] \left[\hat{\eta}_k^{c,s}(nh) - \hat{m}_{\eta_k}^{c,s} \right],$$

$$\hat{R}_{\xi_k}^{cs}(jh) = \hat{R}_{\xi_k}^{cs}(jh) - \hat{R}_{\xi_k}^{sc}(jh) = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} \left[\left[\hat{\xi}_k^c((n+j)h) - \hat{m}_{\xi_k}^c \right] \left[\hat{\xi}_k^s(nh) - \hat{m}_{\xi_k}^s \right] - \right. \\ \left. - \left[\hat{\xi}_k^s((n+j)h) - \hat{m}_{\xi_k}^s \right] \left[\hat{\xi}_k^c(nh) - \hat{m}_{\xi_k}^c \right] \right],$$

$$R_{\xi_k \eta_l}^{c,s}(jh) = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} \left[\hat{\xi}_k^{c,s}((n+j)h) - \hat{m}_{\xi_k}^{c,s} \right] \left[\hat{\eta}_l^{c,s}(nh) - \hat{m}_{\eta_l}^{c,s} \right],$$

$$R_{\xi_k \eta_l}^{cs}(jh) = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} \left[\hat{\xi}_k^c((n+j)h) - \hat{m}_{\xi_k}^c \right] \left[\hat{\eta}_l^s(nh) - \hat{m}_{\eta_l}^s \right].$$

Тут j – ціле число, а також

$$\hat{m}_{\xi_k}^{c,s} = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} \hat{\xi}_k^{c,s}(nh), \quad \hat{m}_{\eta_k}^{c,s} = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} \hat{\eta}_k^{c,s}(nh).$$

Для обчислення оцінок спектральних густин використаємо корелограмний метод Блекмана-Т'юкі. Тоді

$$\hat{f}_{\xi_k}(\omega) = \frac{\Delta u}{4\pi} \sum_{r=0}^L \left[\left[\hat{R}_{\xi_k}^c(r\Delta u) + \hat{R}_{\xi_k}^s(r\Delta u) \right] \cos \omega r \Delta u + \hat{R}_{\xi_k}^{cs}(r\Delta u) \sin \omega r \Delta u \right] k(r\Delta u),$$

$$\hat{f}_{\eta_k}(\omega) = \frac{\Delta u}{4\pi} \sum_{r=0}^{L-1} \left[\left[\hat{R}_{\eta_k}^c(r\Delta u) + \hat{R}_{\eta_k}^s(r\Delta u) \right] \cos \omega r \Delta u + \hat{R}_{\eta_k}^{cs}(r\Delta u) \sin \omega r \Delta u \right] k(r\Delta u),$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \hat{f}_{\xi_k \eta_l}(\omega) &= \frac{\Delta u}{8\pi} \sum_{r=-L}^L \left[\left[\hat{R}_{\xi_k \eta_l}^c(r\Delta u) + \hat{R}_{\xi_k \eta_l}^s(r\Delta u) \right] \cos \omega r \Delta u + \right. \\ &\quad \left. + \left[\hat{R}_{\xi_k \eta_l}^{cs}(r\Delta u) - \hat{R}_{\xi_k \eta_l}^{sc}(r\Delta u) \right] \sin \omega r \Delta u \right] k(r\Delta u), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \hat{f}_{\xi_k \eta_l}(\omega) &= \frac{\Delta u}{8\pi} \sum_{r=-L}^L \left[\left[\hat{R}_{\xi_k \eta_l}^c(r\Delta u) + \hat{R}_{\xi_k \eta_l}^s(r\Delta u) \right] \sin \omega r \Delta u + \right. \\ &\quad \left. + \left[\hat{R}_{\xi_k \eta_l}^{sc}(r\Delta u) - \hat{R}_{\xi_k \eta_l}^{cs}(r\Delta u) \right] \cos \omega r \Delta u \right] k(r\Delta u), \end{aligned}$$

де $k(u)$ – вікно Хеммінга.

Оцінка покомпонентної функції когерентності тоді приймає вигляд:

$$\hat{\gamma}_{kl}^{(\xi\eta)}(\omega) = \frac{\left[\left[\operatorname{Re} \hat{f}_{\xi_k \eta_k}(\omega) \right]^2 + \left[\operatorname{Im} \hat{f}_{\xi_k \eta_k}(\omega) \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{\left[\left| \hat{f}_{\xi_k}(\omega) \right| \left| \hat{f}_{\eta_k}(\omega) \right| \right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.4.24)$$

Загальна схема обчислення покомпонентної функції когерентності наведена на рис. 2.5. Зауважимо, що параметри статистичної обробки, яка проводиться, вибирається на основі аналізу властивостей відповідних оцінок [162, 203].



Рис. 2.5. Загальна схема обчислення покомпонентної функції когерентності

Графіки, наведені на рис. 2.3 та рис. 2.4, можна розглядати як тестові при верифікації розглянутого методу для визначення покомпонентної функції когерентності на основі експериментальних даних. Така функція когерентності визначається взаємоспектральними характеристиками окремих випадкових процесів, які модулюють несучі гармоніки ПНВС. У порівнянні з інтегральною функцією когерентності вона дає змогу детальніше проаналізувати взаємозв'язаність ПНВС, уникаючи при цьому впливу переносу частот, який виникає при модуляції.

2.5. Висновки до розділу 2

1. Досліджено властивості взаємокореляційної функції зв'язаних ПКВП-сигналів – математичних моделей двовимірних вібраційних сигналів. Отримано формули, які пов'язують її коефіцієнти Фур'є – із взаємокореляційними функціями випадкових процесів, що описують стохастичну, амплітудну й фазову модуляції основних гармонічних складових вібросигналів. З такою модуляцією безпосередньо пов'язані відомості про ті чи інші дефекти обертових вузлів. Розглянуті окремі випадки взаємокореляційних залежностей, встановлені їх характерні особливості.

2. Проведено аналіз взаємоспектральної густини та взаємоспектральних компонентів зв'язаних ПКВП-сигналів. Проведено фізичну інтерпретацію цих характеристик, встановлено їх діагностичні можливості. Отримано співвідношення, які пов'язують спектральні компоненти зі спектральними характеристиками стаціонарних модулюючих процесів. Проаналізовано спектральні властивості стохастичної модуляції, обґрунтована доцільність використання спектральних характеристик для виявлення та встановлення типів дефектів.

3. Обґрунтована інтегральна функція когерентності, яка кількісно характеризує стохастичний взаємозв'язок між властивостями не стаціонарності двох ПКВП-сигналів, що проявляється в періодичній зміні за часом їх взаємних

спектральних характеристик. Визначення цієї величини зводиться до знаходження характеристик корельованості гармонічних складових двох ПКВП-сигналів – взаємоспектральних компонентів. Показано, що введена функція когерентності взаємозв'язку сигналів не змінюється при лінійних перетвореннях. Така інваріантність обумовлена відповідними зсувами за частотою як нульових спектральних компонентів кожного з сигналів, так і вищих взаємоспектральних компонентів, які характеризують корельованість гармонік різних сигналів. Властивість інваріантності дає можливість використовувати введену величину при розв'язуванні різноманітних задач, зокрема, при виявленні нелінійних спотворень сигналів, які мають місце при виникненні дефектів.

4. Введена покомпонентна функція когерентності, яка визначається взаємоспектральними густинами окремих модулюючих процесів, що дає можливість більш детально проаналізувати взаємозв'язок ПКВП-сигналів, уникаючи при цьому впливу переносу частот, який виникає при модуляції. Важливою властивістю введеної величини є її інваріантність по відношенню до лінійних перетворень. При цьому покомпонентна функція когерентності, побудована на основі спектральних густин модулюючих процесів однакових номерів, як в стаціонарному випадку, дорівнює одиниці. Цей результат пояснюється тим, що вказані спектральні характеристики визначають взаємозв'язок двох ПКВП-сигналів у стаціонарному наближенні. Встановлену властивість покомпонентної функції доцільно використовувати при розв'язуванні задач вібродіагностики.

5. Обґрунтовані алгоритми виділення за допомогою відповідного переносу частот і низькочастотної фільтрації. У випадку низькочастотної модуляції виділені компоненти будуть співпадати з тими, на основі яких сформований сигнал, який аналізується. При розширенні спектрів модуляції в процесі виділення відбувається накладання сусідніх елементів, що призводить до необхідності збільшення частотних смуг. Однак потрібно підкреслити, що імовірнісні характеристики ПКВП-сигналів, обчислені, з однієї сторони, на основі характеристик вихідних модуляцій, а з другої – на основі виділених компонентів співпадають.

РОЗДІЛ 3

КОГЕРЕНТНИЙ ВЗАЄМОКОРЕЛЯЦІЙНИЙ АНАЛІЗ ПЕРІОДИЧНО КОРЕЛЬОВАНИХ ВИПАДКОВИХ СИГНАЛІВ

Періодичність взаємокореляційних функцій ПКВ сигналів за часом t , “підказують” один з можливих методів оцінювання: усереднення відповідних добутків значень реалізацій через період T . Оскільки для періодичної функції таке усереднення дає її значення в точці, що відповідає початку відліку, то є підстави надіятись, що у випадку ПКВ сигналів, характеристики якого задовольняють певним умовам, аналогічні операції будуть зменшувати вплив флуктуаційних складових. У такому випадку ПКВ сигнали розпадаються на множини узгоджених в часі значень для різних $t \in [0, T]$. Легко бачити, що ці множини формують стаціонарні стаціонарно пов’язані послідовності. Власне виходячи з такої стаціонарності і будуються оцінки взаємокореляційної функції, представляючи собою операції усереднення по двох множинах, що дає можливість виявити часову структуру взаємокорельованості. Такий метод оцінювання називають когерентним [30, 214, 217]. Знання взаємокореляційної функції для $t \in [0, T]$ дає можливість оцінити їх коефіцієнти Фур’є – взаємокореляційні компоненти. При такому оцінюванні зсув u є параметром, який можна змінювати. Формули для оцінок взаємокореляційних компонентів тоді нагадують формули для оцінок взаємокореляційних функцій стаціонарно зв’язаних випадкових процесів з тією різницею, що при усередненні використовуються вагові функції $\varphi_n(t) = e^{in\omega_0 t}$, $n \in Z$. Можливості когерентного методу оцінювання, його ефективність, очевидно, можуть бути досліджені тільки на підставі аналізу статистичних властивостей оцінок характеристик. Власне вивченню властивостей когерентних оцінок взаємокореляційної функції та отримання на їх основі оцінок взаємокореляційних компонентів присвячений даний розділ.

3.1. Оцінки взаємкореляційної функції

Розглянемо спочатку наступні взаємкореляційної функції:

$$\hat{b}_{\xi\eta}^{(1)}(t,u) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [\xi(t+nT) - \hat{m}_{\xi}(t+nT)] [\eta(t+u+nT) - \hat{m}_{\eta}(t+u+nT)], \quad (3.1.1)$$

$$\hat{b}_{\xi\eta}^{(2)}(t,u) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \xi(t+nT)\eta(t+u+nT) - \hat{m}_{\xi}(t)\hat{m}_{\eta}(t+nT), \quad (3.1.2)$$

де

$$\hat{m}_{\xi}(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \xi(t+nT), \quad \hat{m}_{\eta}(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \eta(t+nT).$$

При цьому припускається, що усереднення проводиться на довжині відрізка реалізації $\theta = MT + u_m$, де u_m – найбільше значення зсуву, для якого оцінюється взаємкореляційна функція, а M – натуральне число. Очевидно, що $M = 2N$, де N – число періодів усереднення. Вираз (3.1.1) перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \hat{b}_{\xi\eta}^{(1)}(t,u) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\overset{\circ}{\xi}(t+nT) - \overset{\circ}{\hat{m}}_{\xi}(t+nT) \right] \left[\overset{\circ}{\eta}(t+u+nT) - \overset{\circ}{\hat{m}}_{\eta}(t+u+nT) \right] = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\overset{\circ}{\xi}(t+nT)\overset{\circ}{\eta}(t+u+nT) - \overset{\circ}{\hat{m}}_{\xi}(t+nT)\overset{\circ}{\eta}(t+u+nT) - \right. \\ &\quad \left. - \overset{\circ}{\hat{m}}_{\eta}(t+u+nT)\overset{\circ}{\eta}(t+nT) + \overset{\circ}{\hat{m}}_{\xi}(t+nT)\overset{\circ}{\hat{m}}_{\eta}(t+u+nT) \right], \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

де

$$\overset{\circ}{\hat{m}}_{\xi}(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \overset{\circ}{\xi}(t+nT), \quad \overset{\circ}{\hat{m}}_{\eta}(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \overset{\circ}{\eta}(t+u+nT).$$

Усереднюючи кожну складову окремо, отримуємо

$$E \left\{ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \overset{\circ}{\xi}(t+nT)\overset{\circ}{\eta}(t+u+nT) \right\} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} b_{\xi\eta}(t+nT, u) = b_{\xi\eta}(t, u), \quad (3.1.4)$$

$$\begin{aligned} E \left\{ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \overset{\circ}{\eta}(t+u+nT)\overset{\circ}{\hat{m}}_{\xi}(t+nT) \right\} &= \frac{1}{N^2} \sum_{n,m=0}^{N-1} E \overset{\circ}{\xi}(t+nT+mT)\overset{\circ}{\eta}(t+u+nT) = \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{n,m=0}^{N-1} b_{\xi\eta}(t+nT+mT, u-nT) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} b(t, u-nT), \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

$$\begin{aligned}
E \left\{ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \overset{\circ}{\xi}(t+nT) \overset{\circ}{\hat{m}}_{\eta}(t+u+nT) \right\} &= \frac{1}{N^2} \sum_{n,m=0}^{N-1} E \overset{\circ}{\xi}(t+nT) \overset{\circ}{\eta}(t+u+nT+mT) = \\
&= \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} b_{\xi\eta}(t+nT, u+mT) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} b_{\xi\eta}(t, u+nT), \quad (3.1.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E \left\{ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \overset{\circ}{\hat{m}}_{\xi}(t+nT) \overset{\circ}{\hat{m}}_{\eta}(t+u+nT) \right\} &= \frac{1}{N^3} \sum_{n,m,k=0}^{N-1} E \overset{\circ}{\xi}(t+nT+mT) \overset{\circ}{\eta}(t+u+nT+kT) = \\
&= \frac{1}{N^3} \sum_{n,m,k=0}^{N-1} b_{\xi\eta}(t+nT+mT, t+u+(k-m)T) = \frac{1}{N^2} \sum_{m,n=0}^{N-1} b_{\xi\eta}(t, u+(m-n)T), \quad (3.1.7)
\end{aligned}$$

В останній формулі введемо новий індекс сумування $k = m - n$ і змінимо його порядок (рис. 3.1):

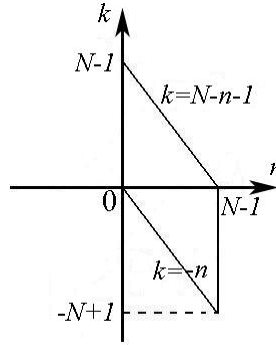


Рис. 3.1. Зміна індексу сумування.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N^2} \sum_{m,n=0}^{N-1} b_{\xi\eta}(t, u+(m-n)T) &= \frac{1}{N^2} \sum_{k=-n}^{N-n-1} b_{\xi\eta}(t, u+kT) = \\
&= \frac{1}{N^2} \left[\sum_{k=-N+1}^0 \sum_{n=-k}^{N-1} b_{\xi\eta}(t, u+kT) + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-k-1} b_{\xi\eta}(t, u+kT) \right].
\end{aligned}$$

Оскільки

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-k}^{N-1} b_{\xi\eta}(t, u+kT) &= (N+k) b_{\xi\eta}(t, u+kT), \\
\sum_{n=0}^{N-k-1} b_{\xi\eta}(t, u+kT) &= (N-k) b_{\xi\eta}(t, u+kT),
\end{aligned}$$

то

$$\frac{1}{N^2} \sum_{m,n=0}^{N-1} b_{\xi\eta}(t, u + (m-n)T) = \frac{1}{N} \sum_{k=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) b_{\xi\eta}(t, u + kT). \quad (3.1.8)$$

Об'єднавши формули (3.1.4)–(3.1.8) та врахувавши, що

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} b_{\xi\eta}(t, u - nT) = \frac{1}{N} \sum_{n=-N+1}^0 b_{\xi\eta}(t, u + nT)$$

знайдемо математичне сподівання статистики (3.1.2). Подамо її у вигляді

$$\begin{aligned} \hat{b}_{\xi\eta}^{(2)}(t, u) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\overset{\circ}{\eta}(t+u+nT) + m_{\eta}(t+u) \right] \left[\overset{\circ}{\xi}(t+nT) + m_{\xi}(t) \right] \times \\ &\times \left[\overset{\circ}{\hat{m}}_{\xi}(t) + m_{\xi}(t) \right] \left[\overset{\circ}{\hat{m}}_{\eta}(t+u) + m_{\eta}(t+u) \right] = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\overset{\circ}{\xi}(t+nT) \overset{\circ}{\eta}(t+u+nT) + \overset{\circ}{\xi}(t+nT) m_{\xi}(t) + \overset{\circ}{\eta}(t+u+nT) m_{\xi}(t) - \right. \\ &\left. - \overset{\circ}{\hat{m}}_{\eta}(t) m_{\eta}(t+u) - \overset{\circ}{\hat{m}}_{\eta}(t+u) m_{\xi}(t) - \overset{\circ}{\hat{m}}_{\xi}(t) \overset{\circ}{\hat{m}}_{\eta}(t+u) \right] = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \overset{\circ}{\xi}(t+nT) \overset{\circ}{\eta}(t+u+nT) - \overset{\circ}{\hat{m}}_{\xi}(t) \overset{\circ}{\hat{m}}_{\eta}(t+u), \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

то

$$E \hat{b}_{\xi\eta}^{(2)}(t, u) = b_{\xi\eta}(t, u) - \frac{1}{N} \sum_{n=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) b_{\xi\eta}(t, u + nT).$$

Таким чином, для зміщень оцінок $\varepsilon \left[\hat{b}^{(i)}(t, u) \right] = E \hat{b}(t, u) - b(t, u)$ відповідно маємо:

$$\varepsilon \left[\hat{b}_{\xi\eta}^{(1)}(t, u) \right] = -\frac{1}{N} \left[b(t, u) + \frac{1}{N} \sum_{n=-N+1}^{N-1} |n| b_{\xi\eta}(t, u + nT) \right], \quad (3.1.10)$$

$$\varepsilon \left[\hat{b}_{\xi\eta}^{(2)}(t, u) \right] = -\frac{1}{N} \sum_{n=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) b(t, u + nT). \quad (3.1.11)$$

Якщо взаємкореляційні зв'язки процесів $\xi(t)$ і $\eta(t)$ зникають з ростом зсуву u ,

тобто

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} \hat{b}_{\xi\eta}(t, u) = 0, \quad (3.1.12)$$

то $\varepsilon \left[\hat{b}_{\xi\eta}^{(1)}(t, u) \right] \rightarrow 0$ і $\varepsilon \left[\hat{b}_{\xi\eta}^{(2)}(t, u) \right] \rightarrow 0$ при $N \rightarrow 0$, тобто оцінки (3.1.1) і (3.1.2) є

асимптотично незміщеними. Величини (3.1.10) і (3.1.11) у першому наближенні

відрізняються тим, що зміщення оцінки (3.1.2) містить додаткові складові, які визначаються значеннями взаємкореляційної функції при зсувах $u_m = u + nT$. Складові вищого порядку малості є однаковими, однак мають протилежний знак. Якщо кореляційні зв'язки зникають до нуля на інтервалі, меншому від періода корельованості, то $\varepsilon[\hat{b}_{\xi\eta}^{(2)}(t, u)] \approx \varepsilon[\hat{b}_{\xi\eta}^{(1)}(t, u)]$.

Підкреслимо, що для оцінювання кореляційної функції також може бути використана статистика:

$$\hat{b}_{\xi\eta}^{(3)}(t, u) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [\xi(t+nT)\eta(t+u+nT) - \hat{m}_{\xi}(t+nT)\hat{m}_{\eta}(t+u+nT)]. \quad (3.1.13)$$

Перепишемо її у формі

$$\begin{aligned} \hat{b}_{\xi\eta}^{(3)}(t, u) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\left[\overset{\circ}{\xi}(t+nT) + m_{\xi}(t) \right] \left[\overset{\circ}{\eta}(t+u+nT) + m_{\eta}(t+u) \right] - \right. \\ &\quad \left. \times \left[\overset{\circ}{\hat{m}}_{\xi}(t+nT) + m_{\xi}(t) \right] \left[\overset{\circ}{\hat{m}}_{\eta}(t+u+nT) + m_{\eta}(t+u) \right] \right] = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\overset{\circ}{\xi}(t+nT)\overset{\circ}{\eta}(t+u+nT) + m_{\xi}(t)\overset{\circ}{\eta}(t+u+nT) + m_{\eta}(t+u)\overset{\circ}{\xi}(t+nT) - \right. \\ &\quad \left. - \overset{\circ}{\hat{m}}_{\xi}(t+nT)\overset{\circ}{\hat{m}}_{\eta}(t+u+nT) - m_{\xi}(t)\overset{\circ}{\hat{m}}_{\eta}(t+u+nT) - m_{\eta}(t+u)\overset{\circ}{\hat{m}}_{\xi}(t+nT) \right]. \end{aligned}$$

Звідси легко знаходимо, що зміщення цієї оцінки співпадає зі зміщенням оцінки (3.1.9).

Якщо припустити, що математичне сподівання процесів $\xi(t)$ і $\eta(t)$ оцінюється тільки для $t \in [0, T]$, а для всіх інших t вони знаходяться на основі рівностей $\hat{m}_{\xi}(t+nT) = \hat{m}_{\xi}(t)$, $\hat{m}_{\eta}(t+nT) = \hat{m}_{\eta}(t)$, де n – ціле число, то для оцінки (3.1.1) отримуємо:

$$\begin{aligned} \hat{b}_{\xi\eta}^{(1)}(t, u) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [\xi(t+nT) - \hat{m}_{\xi}(t)] [\eta(t+u+nT) - \hat{m}_{\eta}(t+u)] = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \xi(t+nT)\eta(t+u+nT) - \frac{\hat{m}_{\xi}(t)}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \eta(t+u+nT) - \\ &\quad - \frac{\hat{m}_{\eta}(t)}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \xi(t+nT) + \hat{m}_{\xi}(t)\hat{m}_{\eta}(t+u). \end{aligned}$$

Приймаючи до уваги (3.1.3), приходимо до формули, що визначає статистику $\hat{b}_{\xi\eta}^{(2)}(t, u)$. Такий самий вигляд при такому оцінюванні математичного сподівання приймає також оцінка (3.1.13). Очевидно, що в цьому випадку всі три оцінки будуть мати однакове зміщення (3.1.11).

Періодичні зміни за часом кореляційної функції приводять до таких самих змін зміщення, тому

$$\varepsilon\left[\hat{b}_{\xi\eta}(t, u)\right] = \varepsilon_0(u) + \sum_{l \in \mathbb{N}} \left[\varepsilon_l^c(u) \cos l\omega_0 t + \varepsilon_l^s(u) \sin l\omega_0 t \right].$$

Легко бачити, що при періодичних оцінках математичних сподівань

$$\varepsilon_0(u) = -\frac{1}{N} \sum_{n=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) B_0^{(\xi\eta)}(u + nT), \quad (3.1.14)$$

$$\varepsilon_l^c(u) = -\frac{1}{N} \sum_{n=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) C_k^{(\xi\eta)}(u + nT), \quad (3.1.15)$$

$$\varepsilon_l^s(u) = -\frac{1}{N} \sum_{n=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) S_0^{(\xi\eta)}(u + nT), \quad (3.1.16)$$

при цьому $C_k^{(\xi\eta)}(u) = B_k^{(\xi\eta)}(u) + B_{-k}^{(\xi\eta)}(u)$, $S_k^{(\xi\eta)}(u) = i \left[B_k^{(\xi\eta)}(u) - B_{-k}^{(\xi\eta)}(u) \right]$. З умови (3.1.12) впливають граничні рівності

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} B_0^{(\xi\eta)}(u) = 0, \quad \lim_{|u| \rightarrow \infty} C_k^{(\xi\eta)}(u) = 0, \quad \lim_{|u| \rightarrow \infty} S_k^{(\xi\eta)}(u) = 0.$$

При їх виконанні $\varepsilon_0(u) \rightarrow 0$, $\varepsilon_l^{c,s}(u) \rightarrow 0$, якщо $N \rightarrow \infty$.

Знайдемо тепер дисперсію оцінки $\hat{b}_{\xi\eta}(t, u)$, вважаючи, що оцінки математичних сподівань є періодичними. При її обчисленні вважатимемо, що взаємна густина ймовірностей випадкових процесів $\xi(t)$ і є гауссовою. Тоді їх треті центральні взаємні моменти дорівнюють нулю, а четверті виражаються через кореляційні функції всіх можливих пар:

$$\begin{aligned} E \overset{\circ}{\xi}(t_1) \overset{\circ}{\eta}(t_2) \overset{\circ}{\xi}(t_3) \overset{\circ}{\eta}(t_4) &= b_{\xi\eta}(t_1, t_2 - t_1) b_{\xi\eta}(t_3, t_4 - t_3) + \\ &+ b_{\xi\eta}(t_1, t_3 - t_1) b_{\xi\eta}(t_2, t_4 - t_2) + b_{\xi\eta}(t_1, t_4 - t_1) b_{\xi\eta}(t_2, t_3 - t_2). \end{aligned}$$

Виходячи зі співвідношення (3.1.9), знаходимо:

$$\begin{aligned}
D[\hat{b}_{\xi\eta}(t,u)] &= E[\hat{b}_{\xi\eta}(t,u)]^2 - [Eb_{\xi\eta}(t,u)]^2 = \\
&= \frac{1}{N^2} \sum_{m,n=0}^{N-1} E \xi(t+nT) \dot{\eta}(t+u+mT) \xi(t+mT) \dot{\eta}(t+u+mT) - \\
&- \frac{2}{N^3} \sum_{m,n,k=0}^{N-1} E \xi(t+nT) \dot{\eta}(t+u+nT) \xi(t+mT) \dot{\eta}(t+u+kT) + \\
&+ \frac{1}{N^4} \sum_{m,n,k,l=0}^{N-1} E \xi(t+nT) \dot{\eta}(t+u+mT) \xi(t+kT) \dot{\eta}(t+u+lT) - [Eb_{\xi\eta}(t,u)]^2 = \\
&= \frac{1}{N^2} \left[\sum_{m,n=0}^{N-1} G_{nnmm}^{(\xi\eta)}(t,u) - \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} G_{nnmk}^{(\xi\eta)}(t,u) + \frac{1}{N^2} \sum_{k,l=0}^{N-1} G_{nmkl}^{(\xi\eta)}(t,u) \right]
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
G_{nmkl}^{(\xi\eta)}(t,u) &= E \xi(t+nT) \dot{\eta}(t+u+mT) \xi(t+kT) \dot{\eta}(t+u+lT) - \\
&- b_{\xi\eta}(t,u+(m-n)T) b_{\xi\eta}(t,u+(l-k)T) = \\
&= b_{\xi}(t,(k-n)T) b_{\eta}(t+u,(l-m)T) + b_{\xi\eta}(t,u+(l-n)T) b_{\xi\eta}(t,u+(m-k)T).
\end{aligned}$$

У першому наближенні можна прийняти, що

$$D[\hat{b}_{\xi\eta}(t,u)] = \frac{1}{N^2} \sum_{m,n=0}^{N-1} \left[b_{\xi}(t,(m-n)T) b_{\eta}(t+u,(m-n)T) + \right. \quad (3.1.17) \\
\left. + b_{\xi\eta}(t,u+(m-n)T) b_{\xi\eta}(t,u+(m-n)T) \right].$$

Складові, що мають вищий порядок малості, зумовлені попереднім визначенням математичного сподівання.

При відомому математичному сподіванні оцінка (3.1.1) набуває вигляду

$$\begin{aligned}
\hat{b}_{\xi\eta}^{(1)}(t,u) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [\xi(t+nT) - m_{\xi}(t)] [\eta(t+u+nT) - m_{\eta}(t+u)] = \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \xi(t+nT) \dot{\eta}(t+u+nT),
\end{aligned}$$

і, як видно, є незміщеною, а формула її дисперсії збігається з виразом (3.1.17).

Статистики (3.1.2) і (3.1.13) при відомому математичному сподіванні ПКВП є однаковими:

$$\hat{b}_{\xi\eta}^{(2,3)}(t,u) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \xi(t+nT) \eta(t+u+mT) - m(t)m(t+u) =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\overset{\circ}{\xi}(t+nT) \overset{\circ}{\eta}(t+u+nT) + m_{\xi}(t) \overset{\circ}{\eta}(t+u+nT) + m_{\eta}(t+u) \overset{\circ}{\xi}(t+nT) \right].$$

Вони також є незміщеними, однак їх дисперсія залежить від математичних сподівань процесів:

$$D \left[\hat{b}_{\xi\eta}^{(2,3)}(t,u) \right] = \frac{1}{N^2} \sum_{m,n=0}^N \left[\begin{aligned} &G_{nnmm}^{(\xi\eta)}(t,u) + m_{\xi}^2(t) b_{\eta}(t+u, (m-n)T) + \\ &+ 2m_{\xi}(t) m_{\eta}(t+u) b_{\xi\eta}(t, u + (m-n)T) + \\ &+ m_{\eta}^2(t+u) b_{\xi}(t, (m-n)T) \end{aligned} \right].$$

Проведемо детальний аналіз співвідношення (3.1.17), яке визначає дисперсію оцінок (3.1.1) – (3.1.2) і (3.1.13) в першому наближенні. Вираз під знаком суми цього співвідношення є кореляційною функцією процесу $\zeta(t,u) = \overset{\circ}{\xi}(t) \overset{\circ}{\eta}(t+u)$:

$$\begin{aligned} b_{\zeta}(t, s-t, u) &= E \left[\overset{\circ}{\xi}(t) \overset{\circ}{\eta}(t+u) - b_{\xi\eta}(t, u) \right] \left[\overset{\circ}{\xi}(s) \overset{\circ}{\eta}(s+u) - b_{\xi\eta}(s, u) \right] = \\ &= b_{\xi}(t, s-t) b_{\eta}(t+u, s-t) + b_{\xi\eta}(t, s-t+u) b_{\xi\eta}(s, t-s+u). \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

Ця функція визначається добутками авто- і взаємкореляційних функцій процесів $\xi(t)$ і $\eta(t)$, тому, якщо $s = t + u_1$, вона змінюється за часом періодично і її можна подати у вигляді ряду Фур'є:

$$b_{\zeta}(t, u_1, u) = \sum_{k \in Z} \tilde{B}_k(u_1, u) e^{ik\omega_0 t}. \quad (3.1.19)$$

Коефіцієнти $\tilde{B}_k(u_1, u)$ легко знаходяться на основі розкладів у ряди Фур'є кореляційних функцій $b_{\xi}(t, u)$, $b_{\eta}(t, u)$, $b_{\xi\eta}(t, u)$. Покладемо, що число кореляційних компонентів є скінченим і дорівнює для всіх кореляційних функцій N_2 . Тоді маємо:

$$\begin{aligned} b_{\zeta}(t, u_1, u) &= b_{\xi}(t, u_1) b_{\eta}(t+u, u_1) + b_{\xi\eta}(t, u_1+u) b_{\xi\eta}(t+u_1, u-u_1) = \\ &= \sum_{p,q=-N_2}^{N_2} e^{i(p-q)\omega_0 t} \left[B_p^{(\xi)}(u_1) \overline{B_q^{(\eta)}(u_1)} e^{-iq\omega_0 u} + B_p^{(\xi\eta)}(u_1+u) \overline{B_q^{(\xi\eta)}(u-u_1)} e^{-iq\omega_0 u_1} \right]. \end{aligned}$$

Тут “ $\overline{\quad}$ ” – знак спряження. Після заміни індексу $r = p - q$ і зміни порядку сумування (рис. 3.2) знаходимо:

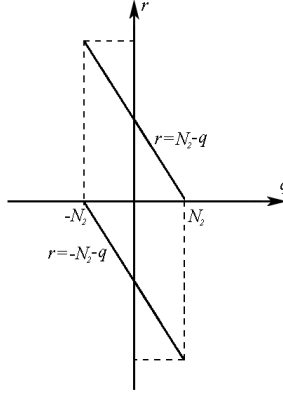


Рис. 3.2. Зміна порядку сумування.

$$\begin{aligned}
 b_{\xi\eta}(t, u_1, u) &= \sum_{q=-N_2}^{N_2} \sum_{r=-N_2-q}^{N_2-q} e^{i(p-q)\omega_0 t} \left[B_{q+r}^{(\xi)}(u_1) \overline{B_q^{(\eta)}(u_1)} e^{-iq\omega_0 u} + \right. \\
 &= \sum_{r=-2N_2}^0 e^{ir\omega_0 t} \sum_{q=-N_2-r}^{N_2} \left[B_{q+r}^{(\xi)}(u_1) \overline{B_q^{(\eta)}(u_1)} e^{-iq\omega_0 u} + B_{q+r}^{(\xi\eta)}(u_1+u) \overline{B_q^{(\xi\eta)}(u-u_1)} e^{-iq\omega_0 u_1} \right] + \\
 &+ \sum_{r=1}^{2N_2} e^{ir\omega_0 t} \sum_{q=-N_2}^{N_2-r} \left[B_{q+r}^{(\xi)}(u_1) \overline{B_q^{(\eta)}(u_1)} e^{-iq\omega_0 u} + B_{q+r}^{(\xi\eta)}(u_1+u) \overline{B_q^{(\xi\eta)}(u-u_1)} e^{-iq\omega_0 u_1} \right].
 \end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$\tilde{B}_r(u_1, u) = \begin{cases} \sum_{q=-N_2-r}^{N_2} \left[B_{q+r}^{(\xi)}(u_1) \overline{B_q^{(\eta)}(u_1)} e^{-iq\omega_0 u} + B_{q+r}^{(\xi\eta)}(u_1+u) \overline{B_q^{(\xi\eta)}(u-u_1)} e^{-iq\omega_0 u_1} \right], & r \leq 0, \\ \sum_{q=-N_2}^{N_2-r} \left[B_{q+r}^{(\xi)}(u_1) \overline{B_q^{(\eta)}(u_1)} e^{-iq\omega_0 u} + B_{q+r}^{(\xi\eta)}(u_1+u) \overline{B_q^{(\xi\eta)}(u-u_1)} e^{-iq\omega_0 u_1} \right], & r > 0. \end{cases} \quad (3.1.20)$$

На основі виразу (3.1.18) легко знаходимо, що $b_\zeta(t, s-t, u) = b_\zeta(s, t-s, u)$, а звідси

$b_\zeta(t, u_1, u) = b_\zeta(t+u_1, -u_1, u)$ або

$$\sum_{r=-2N_2}^{N_2} \tilde{B}_r(-u_1, u) e^{ir\omega_0 t} = \sum_{r=-2N_2}^{2N_2} \tilde{B}_r(u_1, u) e^{-ir\omega_0 u_1} e^{ir\omega_0 t}.$$

Тоді

$$\tilde{B}_r(-u_1, u) = \tilde{B}_r(u_1, u) e^{-ir\omega_0 u_1}.$$

Підставляючи в останню рівність $u_1 = nT$, маємо $\tilde{B}_r(-nT, u) = \tilde{B}_r(nT, u)$, тобто кореляційні компоненти $\tilde{B}_r(nT, u)$ є парними функціями n . Використаємо цю їхню властивість для спрощення виразу для дисперсії оцінки кореляційної функції. Ця величина, як випливає з формули (3.1.17), є періодичною функцією часу і може бути подана у вигляді ряду Фур'є:

$$D[\hat{b}_{\xi_1}(t, u)] = \alpha_0(u) + \sum_{l=1}^{2N_2} [\alpha_l^c(u) \cos l\omega_0 t + \alpha_l^s(u) \sin l\omega_0 t],$$

де
$$\alpha_0(u) = \frac{1}{N^2} \sum_{m,n=0}^{N-1} \tilde{B}_0[(m-n)T, u],$$

$$\alpha_l^c(u) = \frac{1}{N^2} \sum_{m,n=0}^{N-1} \tilde{B}_l^c[(m-n)T, u],$$

$$\alpha_l^s(u) = \frac{1}{N^2} \sum_{m,n=0}^{N-1} \tilde{B}_l^s[(m-n)T, u],$$

і $\tilde{B}_l^c(u_1, u) - i\tilde{B}_l^s(u_1, u) = 2\tilde{B}_l(u_1, u)$. Після заміни $k = m - n$, врахування рівностей $\tilde{B}_0(-nT, u) = \tilde{B}_0(nT, u)$, $\tilde{B}_l^{c,s}(-nT, u) = \tilde{B}_l^{c,s}(nT, u)$ і перетворень знаходимо

$$\alpha_0(u) = \frac{1}{N} \sum_{m,n=0}^{N-1} \left[\tilde{B}_0(0, u) + 2 \sum_{n=1}^{N-1} \left(1 - \frac{n}{N}\right) \tilde{B}_0(nT, u) \right], \quad (3.1.21)$$

$$\alpha_l^c(u) = \frac{1}{N} \sum_{m,n=0}^{N-1} \left[\tilde{B}_l^c(0, u) + 2 \sum_{n=1}^{N-1} \left(1 - \frac{n}{N}\right) \tilde{B}_l^c(nT, u) \right], \quad (3.1.22)$$

$$\alpha_l^s(u) = \frac{1}{N} \sum_{m,n=0}^{N-1} \left[\tilde{B}_l^s(0, u) + 2 \sum_{n=1}^{N-1} \left(1 - \frac{n}{N}\right) \tilde{B}_l^s(nT, u) \right]. \quad (3.1.23)$$

З умови (3.1.12) і виразів (3.1.20) випливає, що коефіцієнти $\tilde{B}_0(nT, u)$, $\tilde{B}_l^{c,s}(nT, u)$ зникають до нуля якщо $n \rightarrow \infty$. Це приводить до граничних рівностей

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \alpha_0(u) = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \alpha_l^{c,s}(u) = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} D[\hat{b}(t, u)] = 0,$$

тобто до поступового зменшення коефіцієнтів $\alpha_0(u)$, $\alpha_l^{c,s}(u)$ і самої дисперсії з ростом числа періодів відрізка реалізації, на основі якого оцінюється кореляційна функція. А це означає, що оцінки взаємкореляційної функції (3.1.1), (3.1.2) і (3.1.13) є слухними.

Усереднена за часом дисперсія, яка визначається коефіцієнтами $\alpha_0(u)$, залежить, як видно з формул (3.1.20) і (3.1.21), не тільки від нульового, а й від вищих кореляційних компонентів. Звідси випливає важливий висновок: якщо сигнали описуються ПКВП, то середня за часом похибка оцінювання їх взаємкореляційної функції не може бути визначена, виходячи тільки з характеристик їх стаціонарних наближень.

Отримані вище співвідношення для статистичних характеристик оцінок взаємкореляційних функцій можуть бути конкретизовані для певного типу їх апроксимацій. Тоді аналіз властивостей оцінок може бути поглиблений, в тому числі можуть бути отримані залежності величини похибок оцінювання від довжини відрізка реалізації, а також параметрів, які описують кореляційну структуру сигналів, насамперед швидкості зникання взаємкореляційних зв'язків. Ці результати є основою для підготовки рекомендацій для вибору таких довжин реалізацій, які забезпечать потрібну якість обробки.

3.2. Оцінки взаємкореляційних компонентів

Припустимо, що оцінка взаємкореляційної функції обчислена для всіх $t \in [0, T]$ і зсувів u , що належать до певного інтервалу $[0, u_m]$, де u_m - точка усічення корелограми. Для таких значень зсувів можуть бути побудовані оцінки взаємкореляційних компонентів

$$\hat{B}_0^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{T} \int_0^T \hat{b}_{\xi\eta}(t, u) dt, \quad (3.2.1)$$

$$\hat{C}_k^{(\xi\eta)}(u) = \frac{2}{T} \int_0^T \hat{b}_{\xi\eta}(t, u) \cos k\omega_0 t dt, \quad \hat{S}_k^{(\xi\eta)}(u) = \frac{2}{T} \int_0^T \hat{b}_{\xi\eta}(t, u) \sin k\omega_0 t dt. \quad (3.2.2)$$

Приймаючи до уваги вираз для зміщення оцінки взаємкореляційної функції (3.1.2) і її подання у вигляді ряду Фур'є, після інтегрування по t для зміщень оцінок (3.2.1) та (3.2.2) знаходимо

$$\begin{aligned}\varepsilon\left[\hat{B}_0^{(\xi\eta)}(u)\right] &= \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon\left[\hat{b}_{\xi\eta}(t,u)\right] dt = -\frac{1}{N} \sum_{n=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) B_0^{(\xi\eta)}(u+nT), \\ \varepsilon\left[\hat{C}_k^{(\xi\eta)}(u)\right] &= \frac{2}{T} \int_0^T \varepsilon\left[\hat{b}_{\xi\eta}(t,u)\right] \cos k\omega_0 t dt = -\frac{1}{N} \sum_{n=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) C_k^{(\xi\eta)}(u+nT), \\ \varepsilon\left[\hat{S}_k^{(\xi\eta)}(u)\right] &= \frac{2}{T} \int_0^T \varepsilon\left[\hat{b}_{\xi\eta}(t,u)\right] \sin k\omega_0 t dt = -\frac{1}{N} \sum_{n=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) S_k^{(\xi\eta)}(u+nT).\end{aligned}$$

Зміщення оцінок, як видно, визначаються тільки величиною тільки тих компонентів, які оцінюються. Отримані вирази є аналогічними до тих, які визначають відповідні коефіцієнти Фур'є зміщення оцінки кореляційної функції (3.1.2), а саме (3.1.12)–(3.1.16).

Обчислимо дисперсії оцінок. Після підстановки формули (3.1.2) до оцінки нульового кореляційного компонента, заміни $s = t + nT$ і врахування рівностей $\hat{m}_\xi(t+nT) = \hat{m}_\xi(t)$, $\hat{m}_\eta(t+nT) = \hat{m}_\eta(t)$, $n \in Z$ знаходимо

$$\begin{aligned}\hat{B}_0^{(\xi\eta)}(u) &= \frac{1}{NT} \int_0^T \sum_{n=0}^{N-1} \left[\overset{\circ}{\xi}(t+nT) \overset{\circ}{\eta}(t+u+nT) - \overset{\circ}{\hat{m}}_\xi(t+nT) \overset{\circ}{\hat{m}}_\eta(t+nT) \right] dt = \\ &= \frac{1}{\theta} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{nT}^{(n+1)T} \left[\overset{\circ}{\eta}(s+u) \overset{\circ}{\xi}(s) - \overset{\circ}{\hat{m}}_\xi(s) \overset{\circ}{\hat{m}}_\eta(s+u) \right] ds = \\ &= \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \left[\overset{\circ}{\xi}(s) \overset{\circ}{\eta}(s+u) - \overset{\circ}{\hat{m}}_\xi(s) \overset{\circ}{\hat{m}}_\eta(s+u) \right] ds.\end{aligned}\quad (3.2.3)$$

Для оцінок вищих кореляційних компонентів аналогічно отримуємо:

$$\hat{C}_k^{(\xi\eta)}(u) = \frac{2}{\theta} \int_0^\theta \left[\overset{\circ}{\xi}(s) \overset{\circ}{\eta}(s+u) - \overset{\circ}{\hat{m}}_\xi(s) \overset{\circ}{\hat{m}}_\eta(s+u) \right] \cos k\omega_0 s ds, \quad (3.2.4)$$

$$\hat{S}_k^{(\xi\eta)}(u) = \frac{2}{\theta} \int_0^\theta \left[\overset{\circ}{\xi}(s) \overset{\circ}{\eta}(s+u) - \overset{\circ}{\hat{m}}_\xi(s) \overset{\circ}{\hat{m}}_\eta(s+u) \right] \sin k\omega_0 s ds. \quad (3.2.5)$$

Приймаючи до уваги (3.2.3), для дисперсії оцінки (3.2.1) маємо:

$$\begin{aligned}D\left[B_0^{(\xi\eta)}(u)\right] &= E\left[B_0^{(\xi\eta)}(u) - EB_0^{(\xi\eta)}(u)\right]^2 = \frac{1}{\theta^2} \int_0^\theta \int_0^\theta E\left[\overset{\circ}{\xi}(s) \overset{\circ}{\eta}(s+u) - \overset{\circ}{\hat{m}}_\xi(s) \overset{\circ}{\hat{m}}_\eta(s+u)\right] \times \\ &\quad \times \left[\overset{\circ}{\xi}(t) \overset{\circ}{\eta}(t+u) - \overset{\circ}{\hat{m}}_\xi(t) \overset{\circ}{\hat{m}}_\eta(t+u)\right] dt ds - \left[EB_0^{(\xi\eta)}(u)\right]^2 =\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\theta^2} \int_0^\theta \int_0^\theta E \left[\begin{aligned} & \xi^\circ(t) \eta^\circ(t+u) \xi^\circ(s) \eta^\circ(s+u) - 2 \xi^\circ(t) \eta^\circ(t+u) \hat{m}_\xi^\circ(s) \hat{m}_\eta^\circ(s+u) + \\ & + \hat{m}_\xi^\circ(t) \hat{m}_\eta^\circ(t+u) \hat{m}_\xi^\circ(s) \hat{m}_\eta^\circ(s+u) \end{aligned} \right] dt ds - \left[EB_0^{\hat{(\xi\eta)}}(u) \right]^2.$$

Для гауссових процесів ПКВП в першому наближенні маємо:

$$D \left[B_0^{(\xi\eta)}(u) \right] = \frac{1}{\theta^2} \int_0^\theta \int_0^\theta b_\zeta(t, s-t, u) dt ds. \quad (3.2.6)$$

Подібні перетворення виразів для дисперсій оцінок (3.2.2) з використанням співвідношень (3.2.4)–(3.2.6) дають

$$D \left[\hat{C}_k^{(\xi\eta)}(u) \right] = \frac{4}{\theta^2} \int_0^\theta \int_0^\theta b_\zeta(t, s-t, u) \cos k\omega_0 t \cos k\omega_0 s dt ds, \quad (3.2.7)$$

$$D \left[\hat{S}_k^{(\xi\eta)}(u) \right] = \frac{4}{\theta^2} \int_0^\theta \int_0^\theta b_\zeta(t, s-t, u) \sin k\omega_0 t \sin k\omega_0 s dt ds. \quad (3.2.8)$$

Зробимо у виразі (3.2.6) заміну $u_1 = s - t$ і змінимо порядок інтегрування (рис. 3.3):

$$\begin{aligned} D \left[\hat{B}_0^{(\xi\eta)}(u) \right] &= \frac{1}{\theta^2} \int_0^\theta \int_{-t}^{\theta-t} b_\zeta(t, u_1, u) dt du_1 = \\ &= \frac{1}{\theta^2} \int_{-\theta}^0 \int_0^\theta b_\zeta(t, u_1, u) dt du_1 + \frac{1}{\theta^2} \int_0^\theta \int_0^{\theta-u_1} b_\zeta(t, u_1, u) dt du_1. \end{aligned}$$

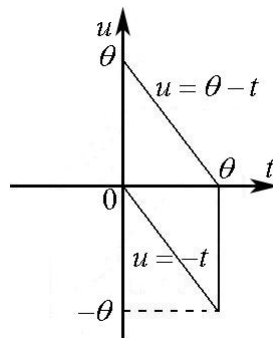


Рис. 3.3. Зміна порядку інтегрування.

Використовуючи властивість $b_\zeta(t, -u_1, u) = b_\zeta(t - u_1, u_1, u)$, перший інтеграл перепишемо наступним чином

$$\frac{1}{\theta^2} \int_{-\theta}^0 \int_0^\theta b_\zeta(t, u_1, u) dt du_1 = \frac{1}{\theta^2} \int_0^\theta \int_0^{u_1} b_\zeta(t - u_1, u_1, u) dt du_1 = \frac{1}{\theta^2} \int_0^\theta \int_0^{\theta-u_1} b_\zeta(t, u_1, u) dt du_1.$$

Отже

$$D\left[\hat{B}_0^{(\xi\eta)}(u)\right] = \frac{2}{\theta^2} \int_0^\theta \int_0^{\theta-u} b_\zeta(t, u_1, u) dt du_1. \quad (3.2.9)$$

Перетворюючи співвідношення (3.2.7) і (3.2.8), отримуємо:

$$D\left[\hat{C}_k^{(\xi\eta)}(u)\right] = \frac{4}{\theta^2} \int_0^\theta \int_0^{\theta-u_1} b_\zeta(t, u_1, u) \left[\cos l\omega_0 u_1 + \cos l\omega_0 (2t + u_1) \right] dt du_1, \quad (3.2.9)$$

$$D\left[\hat{S}_k^{(\xi\eta)}(u)\right] = \frac{4}{\theta^2} \int_0^\theta \int_0^{\theta-u_1} b_\zeta(t, u_1, u) \left[\cos l\omega_0 u_1 - \cos l\omega_0 (2t + u_1) \right] dt du_1. \quad (3.2.10)$$

Підставивши до виразу (3.2.9) подання кореляційної функції $b_\zeta(t, u_1, u)$ у вигляді ряду Фур'є (2.1.1), після інтегрування по t маємо

$$D\left[\hat{B}_0^{(\xi\eta)}(u)\right] = \frac{2}{\theta^2} \int_0^\theta \left[\left(1 - \frac{u}{\theta}\right) \tilde{B}_0(u_1, u) + \sum_{l=1}^{2N_2} \left[\tilde{B}_l^c(u_1, u) f_l^c(0, \theta - u_1) + \tilde{B}_l^s(u_1, u) f_l^s(0, \theta - u_1) \right] \right] du_1,$$

де

$$f_l^c(0, \theta - u_1) = \frac{\sin l\omega_0(\theta - u_1)}{l\omega_0\theta}, \quad f_l^s(0, \theta - u_1) = \frac{\cos l\omega_0(\theta - u_1)}{l\omega_0\theta}.$$

Перша складова рівностей (3.2.10) та (3.2.11) відрізняється від інтегралу (3.2.9) тільки присутністю незалежного від часу множника. Тому

$$\begin{aligned} & \frac{4}{\theta^2} \int_0^\theta \int_0^{\theta-u_1} b_\zeta(t, u_1, u) \cos l\omega_0 u_1 dt du_1 = \frac{4}{\theta} \int_0^\theta \left[\left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) \tilde{B}_0(u_1, u) + \right. \\ & \left. + \sum_{l=1}^{2N_2} \left[\tilde{B}_l^c(u_1, u) f_l^c(0, \theta - u_1) + \tilde{B}_l^s(u_1, u) f_l^s(0, \theta - u_1) \right] \right] \cos l\omega_0 u_1 du_1. \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

Для другої складової виразів (3.2.10) та (3.2.11) маємо

$$\begin{aligned} & \frac{4}{\theta^2} \int_0^\theta \int_0^{\theta-u_1} b_\zeta(t, u_1, u) \cos k\omega_0 (2t + u_1) dt du_1 = \frac{4}{\theta} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^\theta \int_0^{\theta-u_1} b_\zeta(t, u_1, u) e^{ik\omega_0(2t+u_1)} dt du_1 \right\} = \\ & = \frac{2}{\theta} \sum_{k=-2N_2}^{2N_2} \int_0^\theta \left[\left[\tilde{B}_l^c(u_1, u) f_{l+2k}^c(0, \theta - u_1) + \tilde{B}_l^s(u_1, u) f_{l+2k}^s(0, \theta - u_1) \right] \cos k\omega_0 u_1 + \right. \\ & \left. + \left[\tilde{B}_l^s(u_1, u) f_{l+2k}^c(0, \theta - u_1) - \tilde{B}_l^c(u_1, u) f_{l+2k}^s(0, \theta - u_1) \right] \sin k\omega_0 u_1 \right] du_1. \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

Дисперсія косинусних компонентів дорівнює сумі виразів (3.2.12) і (3.2.13), а синусних – їх різниці. Якщо знехтувати складовими, які містять функції $f_l^{c,s}(0, \theta - u_1)$, $l \neq 0$, то формули для дисперсій оцінок компонентів переписуються у вигляді

$$D[\hat{B}_0^{(\xi\eta)}(u)] = \frac{2}{\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) \tilde{B}_0(u_1, u) du_1, \quad (3.2.14)$$

$$D[\hat{C}_k^{(\xi\eta)}(u)] = \frac{2}{\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) \left[2\tilde{B}_0(u_1, u) \cos k\omega_0 u_1 + \right. \\ \left. + \tilde{B}_{2k}^c(u_1, u) \cos k\omega_0 u_1 - \tilde{B}_{2k}^s(u_1, u) \sin k\omega_0 u_1 \right] du_1, \quad (3.2.15)$$

$$D[\hat{S}_k^{(\xi\eta)}(u)] = \frac{2}{\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) \left[2\tilde{B}_0(u_1, u) \cos k\omega_0 u_1 - \right. \\ \left. - \tilde{B}_{2k}^c(u_1, u) \cos k\omega_0 u_1 + \tilde{B}_{2k}^s(u_1, u) \sin k\omega_0 u_1 \right] du_1. \quad (3.2.16)$$

Нульовий компонент $\tilde{B}_0(u_1, u)$, як випливає зі співвідношення (3.1.20), залежить від усіх кореляційних компонентів сигналу. Тому обчислення похибки оцінювання нульового кореляційного компонента, що проводиться за допомогою звичайного усереднення не може бути проведено без врахування вищих кореляційних компонентів. Це ще раз підкреслює ту важливу роль, яку відіграє вибір моделі сигналів при їх статистичних дослідженнях. Дисперсії оцінок косинусних і синусних компонентів залежать від нульового, а також вищих компонентів функції $b_\zeta(t, u_1, u)$. Для дисперсії оцінки комплексного компонента

$\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{2} [C_k^{(\xi\eta)}(u) - S_k^{(\xi\eta)}(u)]$ на основі (3.2.15) і (3.2.16) отримуємо:

$$D[\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(u)] = \frac{1}{4} [D[\hat{C}_k^{(\xi\eta)}(u)] - D[\hat{S}_k^{(\xi\eta)}(u)]] = \frac{2}{\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) \tilde{B}_0(u_1, u) \cos k\omega_0 u_1 du_1.$$

Ця величина, як видно, залежить тільки від нульового кореляційного компонента процесу $\zeta(t) = \xi(t)\eta(t+u)$. Дисперсії оцінок компонентів різних номерів відрізняються тільки частотою дискретизації косинусної вагової функції.

3.3. Дискретні оцінки взаємкореляційних компонентів

Дискретизація є необхідною процедурою при обробці сигналів за допомогою комп'ютерної техніки. Однією з основних задач при її реалізації є вибір кроку дискретизації. Такий вибір можна обґрунтувати тільки на основі співвідношень, які визначають статистичні похибки дискретного оцінювання. Традиційно дискретні оцінки отримуються заміною інтегралів відповідними інтегральними сумами. При такому підході дискретними аналогами для точок дискретизації $t_n = nh$, $h = \frac{T}{M+1}$, неперервних оцінок взаємкореляційних компонентів (3.2.1) і

(3.2.2) будуть статистики:

$$\hat{B}_0^{(\xi\eta)}(jh) = \frac{1}{M+1} \sum_{n=0}^M \hat{b}_{\xi\eta}(nh, jh), \quad (3.3.1)$$

$$\hat{C}_k^{(\xi\eta)}(jh) = \frac{2}{M+1} \sum_{n=0}^M \hat{b}_{\xi\eta}(nh, jh) \cos l \frac{2\pi}{M+1} n,$$

$$\hat{S}_k^{(\xi\eta)}(jh) = \frac{2}{M+1} \sum_{n=0}^M \hat{b}_{\xi\eta}(nh, jh) \sin l \frac{2\pi}{M+1} n,$$

де

$$\hat{b}_{\xi\eta}(nh, jh) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\xi[(n+j)h + l(M+1)h] \xi[(n+k(M+1))h] - \hat{m}_\eta[(n+j)h] \hat{m}_\xi[nh] \right].$$

Оскільки

$$E\hat{b}_{\xi\eta}(nh, jh) = b_{\xi\eta}(nh, jh) - \frac{1}{N} \sum_{p=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|p|}{N} \right) b_{\xi\eta}[nh, (j+p(M+1))h],$$

то математичне сподівання оцінки нульового компонента дорівнює

$$E\hat{B}_0^{(\xi\eta)}(jh) = \sum_{r=-N_2}^{N_2} \left[B_r^{(\xi\eta)}(jh) - \frac{1}{N} \sum_{p=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|p|}{N} \right) B_r^{(\xi\eta)}[(j+p(M+1))h] \right] f_r(0, M),$$

де

$$f_r(0, M) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^M e^{ir \frac{2\pi}{M+1} n} = \frac{1 - e^{i2\pi n}}{1 - e^{in \frac{2\pi}{M+1}}} = 0,$$

при $r \neq q(M+1)$, $q \in Z$, а при $r = q(M+1)$ функція $f_r(0, M) = 1$. Звідси випливає, що при $M \geq N_2$, то $f_r(0, M) = 0$ для всіх r , за винятком $r = 0$. Зміщення оцінки (3.3.1) дорівнює

$$\varepsilon \left[\hat{B}_0^{(\xi\eta)}(jh) \right] = -\frac{1}{N} \sum_{p=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|p|}{N} \right) B_0^{(\xi\eta)} \left[(j + p(M+1))h \right].$$

Розглянемо тепер оцінку

$$\hat{B}_l^{(\xi\eta)}(jh) = \frac{1}{2} \left[\hat{C}_l^{(\xi\eta)}(jh) - i \hat{S}_l^{(\xi\eta)}(jh) \right] = \frac{1}{M+1} \sum_{n=0}^M \hat{b}_{\xi\eta}(nh, jh) e^{-il \frac{2\pi}{M+1} n}.$$

Приймаючи до уваги ряд Фур'є для взаємокореляційної функції (2.1.1), отримуємо

$$E \hat{B}_l^{(\xi\eta)}(jh) = \sum_{r=-N_2}^{N_2} \left[B_r^{(\xi\eta)}(jh) - \frac{1}{N} \sum_{p=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|p|}{N} \right) B_r^{(\xi\eta)} \left[(j + p(M+1))h \right] \right] f_{r-l}(0, M).$$

Функція $f_{r-l}(0, M)$ дорівнює одиниці, якщо $r-l = q(M+1)$, $q \in Z$, і дорівнює нулю, якщо $r-l \neq q(M+1)$. Тому

$$E B_l^{(\xi\eta)}(jh) = \sum_{q \in Q} \left[B_{l+q(M+1)}^{(\xi\eta)}(jh) - \frac{1}{N} \sum_{p=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|p|}{N} \right) B_{l+q(M+1)}^{(\xi\eta)} \left[(j + p(M+1))h \right] \right].$$

де Q – множина цілих чисел, для яких $l + q(M+1) \in [-N_2, N_2]$. Умова $r-l \neq q(M+1)$ виконується для всіх $q \neq 0$, якщо $M \geq 2N_2$. Тоді ефект накладання відсутній і зміщення оцінок визначається формулами

$$\varepsilon \left[\hat{B}_l^{(\xi\eta)}(jh) \right] = -\frac{1}{N} \sum_{p=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|p|}{N} \right) B_l^{(\xi\eta)} \left[(j + p(M+1))h \right],$$

$$\varepsilon \left[\hat{C}_l^{(\xi\eta)}(jh) \right] = -\frac{1}{N} \sum_{p=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|p|}{N} \right) C_l^{(\xi\eta)} \left[(j + p(M+1))h \right],$$

$$\varepsilon \left[\hat{S}_l^{(\xi\eta)}(jh) \right] = -\frac{1}{N} \sum_{p=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|p|}{N} \right) S_l^{(\xi\eta)} \left[(j + p(M+1))h \right].$$

Розглянемо тепер властивості дисперсії оцінок.

Вираз для оцінки нульового взаємокореляційного компонента, враховуючи рівність $\hat{m}_\eta \left[(n + p(M+1))h \right] = \hat{m}_\eta(nh)$, перепишемо у формі

$$\begin{aligned}
\hat{B}_l^{(\xi\eta)}(jh) &= \frac{1}{N(M+1)} \sum_{n=0}^M \sum_{p=0}^{N-1} \left[\eta[(n+j+p(M+1))h] - \hat{m}_\eta[(n+j+p(M+1))h] \right] \times \\
&\times \left[\xi[(n+p(M+1))h] - \hat{m}_\xi[(n+p(M+1))h] \right] = \\
&= \frac{1}{K} \sum_{p=0}^{K-1} \sum_{k=p(M+1)}^{M+p(M+1)} \left[\eta[(k+j)h] - \hat{m}_\eta[(k+j)h] \right] \left[\xi[kh] - \hat{m}_\xi[kh] \right] = \\
&= \frac{1}{K} \sum_{p=0}^{K-1} \left[\eta[(k+j)h] - \hat{m}_\eta[(k+j)h] \right] \left[\xi(kh) - \hat{m}_\xi(kh) \right]. \tag{3.3.2}
\end{aligned}$$

Аналогічно отримуємо

$$\hat{C}_l^{(\xi\eta)}(jh) = \frac{2}{K} \sum_{n=0}^{K-1} \left[\eta[(k+j)h] - \hat{m}_\eta[(k+j)h] \right] \left[\xi(kh) - \hat{m}_\xi(kh) \right] \cos l \frac{2\pi}{M+1} n, \tag{3.3.3}$$

$$\hat{S}_l^{(\xi\eta)}(jh) = \frac{2}{K} \sum_{n=0}^{K-1} \left[\eta[(k+j)h] - \hat{m}_\eta[(k+j)h] \right] \left[\xi(kh) - \hat{m}_\xi(kh) \right] \sin l \frac{2\pi}{M+1} n. \tag{3.3.4}$$

Впровадимо в розгляд процес $\zeta(nh, jh) = \overset{\circ}{\xi}(nh) \overset{\circ}{\eta}((n+j)h)$. Для дисперсій оцінок (3.3.2)–(3.3.4) тоді отримуємо

$$D[\hat{B}_0^{(\xi\eta)}(jh)] = \frac{1}{K^2} \sum_{m,n=0}^{K-1} b_\zeta[nh, (m-n)h, jh],$$

$$D[\hat{C}_l^{(\xi\eta)}(jh)] = \frac{2}{K^2} \sum_{m,n=0}^{K-1} b_\zeta[nh, (m-n)h, jh] \begin{bmatrix} \cos l \frac{2\pi}{M+1} (m-n) + \\ + \cos l \frac{2\pi}{M+1} (m+n) \end{bmatrix}, \tag{3.3.5}$$

$$D[\hat{S}_l^{(\xi\eta)}(jh)] = \frac{2}{K^2} \sum_{m,n=0}^{K-1} b_\zeta[nh, (m-n)h, jh] \begin{bmatrix} \cos l \frac{2\pi}{M+1} (m-n) - \\ - \cos l \frac{2\pi}{M+1} (m+n) \end{bmatrix}, \tag{3.3.6}$$

де $b_\zeta[nh, (m-n)h, jh]$ – кореляційна функція процесу $\zeta(nh, jh)$. Для гауссових ПКВП

$$\begin{aligned}
b_\zeta[nh, (m-n)h, jh] &= b[nh, (m-n)h] b[(n+j)h, (m-n)h] + \\
&+ b[nh, (m-n+j)h] b[nh, (m-n-j)h].
\end{aligned}$$

Функція $b_\zeta[nh, kh, jh]$ є періодичною відносно аргументу nh , а також має властивість симетрії $b_\zeta[nh, -kh, jh] = b_\zeta[(n-k)h, kh, jh]$. Після впровадження нового індекса $p = m - n$ і зміни порядку сумування для дисперсії нульового компонента отримуємо

$$D[\hat{B}_0^{(\xi n)}(jh)] = \frac{1}{K^2} \left[\sum_{n=0}^{K-1} b_\zeta[nh, 0, jh] + 2 \sum_{p=1}^{K-1} \sum_{n=0}^{K-p-1} b_\zeta[nh, ph, jh] \right].$$

Підставимо до цієї рівності подання функції $b_\zeta[nh, kh, jh]$ у вигляді ряду Фур'є:

$$b_\zeta[nh, kh, jh] = \sum_{r=-2N_2}^{2N_2} \tilde{B}_r(ph, jh) e^{ir \frac{2\pi}{M+1} n}.$$

Тоді маємо

$$D[\hat{B}_0^{(\xi n)}(jh)] = \frac{1}{K} \sum_{r=-2N_2}^{2N_2} \left[\tilde{B}_r(0, jh) f_r(0, K-1) + 2 \sum_{p=1}^{K-1} \tilde{B}_r(ph, jh) f_r(0, K-p-1) \right].$$

Для всіх $r \neq q(M+1)$, $q \in Z$, функція $f_r(0, K-1)$ дорівнює нулю, а $f_r(0, K-p-1)$ при великих K є величиною малою. Для нульового індекса $f_0(0, K-1) = 1$, а $f_0(0, K-p-1) = 1 - \frac{p}{K}$. Умова $r \neq q(M+1)$ виконується, якщо $M \geq 2N_2$. У цьому випадку

$$D[\hat{B}_0^{(\xi n)}(jh)] = \frac{1}{K} \left[\tilde{B}_0(0, jh) + 2 \sum_{p=1}^{K-1} \left(1 - \frac{p}{K}\right) \tilde{B}_0(ph, jh) \right]. \quad (3.3.7)$$

Для першої складової виразів (3.3.5) і (3.3.6) після подібних перетворень знаходимо

$$\begin{aligned} & \frac{2}{K^2} \sum_{m,n=0}^{K-1} b_\zeta[nh, (m-n)h, jh] \cos l \frac{2\pi}{M+1} (m-n) = \\ & = \frac{2}{K^2} \left[\sum_{n=0}^{K-1} b_\zeta(nh, 0, jh) + 2 \sum_{p=1}^{K-1} \sum_{n=0}^{K-p-1} b_\zeta(nh, ph, jh) \right] = \\ & = \frac{2}{K} \left[\sum_{r=-2N_2}^{2N_2} \left[\tilde{B}_r(0, jh) f_r(0, K-1) + 2 \sum_{p=1}^{K-1} \tilde{B}_r(ph, jh) f_r(0, K-p-1) \right] \cos l \frac{2\pi}{M+1} p \right]. \end{aligned}$$

Якщо $M \geq 2N_2$, то для всіх $r \neq 0$ функція $f_r(0, K-1) = 0$ і тоді

$$\begin{aligned} & \frac{2}{K^2} \sum_{m,n=0}^{K-1} b_\zeta [nh, (m-n)jh, jh] \cos l \frac{2\pi}{M+1} (m-n) = \\ & = \frac{2}{K} \left[\tilde{B}_0(0, jh) + 2 \left[\sum_{r=-2N_2}^{2N_2} \sum_{p=1}^{K-1} \tilde{B}_r(ph, jh) f_r(0, K-p-1) \cos l \frac{2\pi}{M+1} p \right] \right]. \end{aligned}$$

Друга складова переписується у вигляді

$$\begin{aligned} & \frac{2}{K^2} \sum_{m,n=0}^{K-1} b_\zeta [nh, (m-n)h, jh] \cos l \frac{2\pi}{M+1} (m+n) = \\ & = \frac{1}{K} \left[\sum_{r=-2N_2}^{2N_2} \left[\tilde{B}_r(0, jh) [f_{r+2l}(0, K-1) + f_{r-2l}(0, K-1)] + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2 \sum_{p=1}^{K-1} \tilde{B}_r(ph, jh) \left[f_{r+2l}(0, K-p-1) e^{il \frac{2\pi}{M+1} p} + f_{r-2l}(0, K-p-1) e^{il \frac{2\pi}{M+1} p} \right] \right] \right]. \end{aligned}$$

Припустимо, що рівність $r = 2l + q(M+1)$ виконується тільки для $q = 0$. Це значить, що $|2l + q(M+1)| > 2N_2$. Звідси випливає нерівність $M \geq 4N_2$. Якщо вона виконується, то $f_{r+2l}(0, K-1) = 0$ для $r - 2l \neq 0$. Тоді

$$\begin{aligned} D[\hat{C}_l^{(\xi n)}(jh)] &= \frac{1}{K} \left[2\tilde{B}_0(0, jh) + \tilde{B}_{2l}^c(0, jh) + \frac{2}{K} \sum_{r=-2N_2}^{2N_2} \tilde{B}_r(ph, jh) [2f_r(0, K-p-1) \times \right. \\ & \left. \times \cos l \frac{2\pi}{M+1} p + f_{r+2l}(0, K-p-1) e^{il \frac{2\pi}{M+1} p} + f_{r-2l}(0, K-p-1) e^{-il \frac{2\pi}{M+1} p} \right]. \end{aligned}$$

Складовим, що містять функції $f_r(0, K-p-1) = 0$ і $f_{r \pm 2l}(0, K-p-1) = 0$ з ненульовими індексами, при великих K можна знехтувати:

$$\begin{aligned} D[\hat{C}_l^{(\xi n)}(jh)] &= \frac{1}{K} \left[2\tilde{B}_0(0, jh) + \tilde{B}_{2l}^c(0, jh) + 2 \sum_{p=1}^{K-1} \left(1 - \frac{p}{K} \right) [2\tilde{B}_0(ph, jh) \times \right. \\ & \left. \times \cos l \frac{2\pi}{M+1} p + \tilde{B}_{2l}^c(ph, jh) \cos l \frac{2\pi}{M+1} p - \tilde{B}_{2l}^s(ph, jh) \sin l \frac{2\pi}{M+1} p \right]. \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Для дисперсії оцінок синусових компонентів аналогічно отримуємо

$$D[\hat{S}_l^{(\xi n)}(jh)] = \frac{1}{K} \left[2\tilde{B}_0(0, jh) - \tilde{B}_{2l}^c(0, jh) + 2 \sum_{p=1}^{K-1} \left(1 - \frac{p}{K} \right) [2\tilde{B}_0(ph, jh) \times \right.$$

$$\times \cos l \frac{2\pi}{M+1} p - \tilde{B}_{2l}^c(ph, jh) \cos l \frac{2\pi}{M+1} p + \tilde{B}_{2l}^s(ph, jh) \sin l \frac{2\pi}{M+1} p \Big]. \quad (3.3.9)$$

Використовуючи (3.3.8) і (3.3.9), знаходимо дисперсію оцінки

$$\hat{B}_l^{(\xi\eta)}(jh) = \frac{1}{2} [\hat{B}_l^c(jh) - i\hat{B}_l^s(jh)]:$$

$$D[\hat{B}_l^{(\xi\eta)}(jh)] = \frac{1}{K} \left[\tilde{B}_0(0, jh) + 2 \sum_{p=1}^{K-1} \left(1 - \frac{p}{K}\right) \tilde{B}_0(ph, jh) \cos l \frac{2\pi}{M+1} p \right]. \quad (3.3.10)$$

З проведеного аналізу випливає, що дискретизація приводить до збільшення як регулярної, так і флуктуаційної складової похибок оцінювання – ефектів накладання першого та другого роду. Формули для зміщення й дисперсії в загальному випадку містять додаткові члени, величини яких є одного порядку зі значеннями основних. Саме поява нових членів дисперсії відрізняє вплив дискретизації на властивості оцінок в даному випадку від ефекту накладання, заданого у випадку спектрального аналізу стаціонарних сигналів. Умова відсутності ефектів накладання першого та другого роду є різними. Останні не співпадають з умовами теореми про дискретизацію Котельникова-Шеннона. При їх виконанні похибки дискретизації визначаються різницями між відповідними інтегралами та інтегральними сумами.

3.4. Взаємкореляційний аналіз амплітудно-модульованих сигналів

Амплітудно-модульовані сигнали $\xi(t) = \mu(t) \cos \omega_0 t$ і $\eta(t) = \partial(t) \cos \omega_0 t$ є одними з найпростіших окремих випадків ПКВП. Їх математичні сподівання, авто- та взаємкореляційні функції відповідно дорівнюють:

$$m_\xi(t) = m_\mu \cos \omega_0 t, \quad m_\eta(t) = m_\partial(t) \cos \omega_0 t,$$

$$b_\xi(t, u) = B_0^{(\xi)}(u) + C_2^{(\xi)}(u) \cos 2\omega_0 t + S_2^{(\xi)}(u) \sin 2\omega_0 t, \quad (3.4.1)$$

$$b_\eta(t, u) = B_0^{(\eta)}(u) + C_2^{(\eta)}(u) \cos 2\omega_0 t + S_2^{(\eta)}(u) \sin 2\omega_0 t, \quad (3.4.2)$$

$$b_{\xi\eta}(t, u) = B_0^{(\xi\eta)}(u) + C_2^{(\xi\eta)}(u) \cos 2\omega_0 t + S_2^{(\xi\eta)}(u) \sin 2\omega_0 t, \quad (3.4.3)$$

де

$$B_0^{(\xi)}(u) = C_2^{(\xi)}(u) = \frac{1}{2} R_\mu(u) \cos \omega_0 u, \quad S_2^{(\xi)}(u) = -\frac{1}{2} R_\mu(u) \sin \omega_0 u, \quad (3.4.4)$$

$$B_0^{(\eta)}(u) = C_2^{(\eta)}(u) = \frac{1}{2} R_\mu(u) \cos \omega_0 u, \quad S_2^{(\eta)}(u) = -\frac{1}{2} R_\delta(u) \sin \omega_0 u, \quad (3.4.5)$$

$$B_0^{(\xi\eta)}(u) = C_2^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{2} R_{\mu\delta}(u) \cos \omega_0 u, \quad S_2^{(\xi\eta)}(u) = -\frac{1}{2} R_{\mu\delta}(u) \sin \omega_0 u, \quad (3.4.6)$$

при цьому

$$m_\mu = E\mu(t), \quad m_\delta = E\delta(t), \quad R_\mu(u) = E\dot{\mu}(t)\dot{\mu}(t+u), \quad R_\delta(u) = E\dot{\delta}(t)\dot{\delta}(t+u),$$

$$R_{\mu\nu}(u) = E\dot{\mu}(t)\dot{\nu}(t+u), \quad \dot{\mu}(t) = \mu(t) - m_\mu, \quad \dot{\nu}(t) = \delta(t) - m_\delta.$$

Для комплексно-значних кореляційних компонентів маємо:

$$B_2^{(\xi)}(u) = \frac{1}{4} R_\mu(u) e^{i\omega_0 u}, \quad B_2^{(\eta)}(u) = \frac{1}{4} R_\delta(u) e^{i\omega_0 u}, \quad B_2^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{4} R_{\mu\delta}(u) e^{i\omega_0 u}.$$

Зміщення оцінок взаємкореляційної функції тоді визначається за формулою

$$\varepsilon \left[\hat{b}_{\xi\eta}^\wedge(t, u) \right] = \varepsilon_0(u) + \varepsilon_2^c(u) \cos 2\omega_0 t + \varepsilon_2^s(u) \sin 2\omega_0 t, \quad (3.4.7)$$

де для оцінки (3.1.2):

$$\varepsilon_0(u) = \varepsilon_2^c(u) = -\frac{1}{2N} \sum_{n=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N} \right) R_{\mu\delta}(u + nT) \cos \omega_0 u,$$

$$\varepsilon_2^s(u) = \frac{1}{2N} \sum_{n=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N} \right) R_{\mu\nu}(u + nT) \sin \omega_0 u.$$

Якщо $R_{\mu\delta}(u) = D e^{-\alpha|u|}$, то

$$\varepsilon_0(u) = \varepsilon_2^c(u) = -\frac{D}{2N} S_0(\alpha, n, u) \cos \omega_0 u, \quad \varepsilon_2^s(u) = \frac{D}{2N} S_0(\alpha, n, u) \sin \omega_0 u, \quad (3.4.8)$$

де

$$S_0(\alpha, N, u) = \sum_{n=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N} \right) e^{-\alpha|u+nT|}.$$

Функція $S_0(\alpha, N, u)$ зменшується з ростом зсуву. Однак швидкість її зменшення є меншою, ніж швидкість зникання самої кореляційної функції. Очевидно, що це стосується також зміщення (3.4.7). Тому відносне зміщення

$\frac{\left| \varepsilon \left[\hat{b}_{\xi\eta}(t, u) \right] \right|}{\left| \hat{b}_{\xi\eta}(t, u) \right|}$ збільшується з ростом зсуву. Звідси випливає, що кореляційна функція може бути обчислена з заданою похибкою тільки для зсувів, що належать до деякого скінченного інтервалу $[0, u_m]$.

Перейдемо тепер до аналізу дисперсії оцінки взаємкореляційної функції (3.4.2). Приймаючи до уваги (3.4.1)–(3.4.6), обчислимо коефіцієнти Фур'є функції $b_{\xi}(t, u_1, u)$, яка в даному випадку має вигляд

$$b_{\xi}(t, u_1, u) = \tilde{B}_0(u_1, u) + \sum_{l=2, u} \left[\tilde{B}_l^c(u_1, u) \cos l\omega_0 t + \tilde{B}_l^s(u_1, u) \sin l\omega_0 t \right].$$

Використавши подання

$$b_{\xi\eta}(t, u) = B_0^{(\xi\eta)}(u) + B_{-2}^{(\xi\eta)}(u) e^{-i2\omega_0 t} + B_2^{(\xi\eta)}(u) e^{i2\omega_0 t},$$

маємо

$$\begin{aligned} b_{\xi}(t, u) b_{\eta}(t, u, u_1) &= B_0^{(\xi)}(u_1) B_0^{(\eta)}(u_1) + B_{-2}^{(\xi)}(u_1) B_2^{(\eta)}(u_1) e^{i2\omega_0 u} + \\ &+ B_2^{(\xi)}(u_1) B_{-2}^{(\eta)}(u_1) e^{-i2\omega_0 u} + B_0^{(\eta)}(u_1) B_{-2}^{(\xi)}(u_1) e^{-i2\omega_0 t} + B_0^{(\eta)}(u_1) B_2^{(\xi)}(u_1) e^{i2\omega_0 t} + \\ &+ B_{-2}^{(\xi)}(u_1) B_{-2}^{(\eta)}(u_2) e^{-i2\omega_0 u} e^{-i4\omega_0 t} + B_2^{(\xi)}(u_1) B_2^{(\eta)}(u_1) e^{i2\omega_0 u} e^{i4\omega_0 t} + \\ &+ B_0^{(\xi)}(u_1) B_{-2}^{(\eta)}(u_1) e^{-i2\omega_0 u} e^{-i2\omega_0 t} + B_0^{(\xi)}(u_1) B_2^{(\eta)}(u_1) e^{i2\omega_0 u} e^{i2\omega_0 t}, \end{aligned}$$

а також

$$\begin{aligned} b_{\xi\eta}(t, u_1 + u) b_{\xi\eta}(t + u, u - u_1) &= B_0^{(\xi\eta)}(u - u_1) B_0^{(\xi\eta)}(u + u_1) + B_{-2}^{(\xi\eta)}(u + u_1) B_2^{(\xi\eta)}(u - u_1) e^{i2\omega_0 u} + \\ &+ B_2^{(\xi\eta)}(u + u_1) B_{-2}^{(\xi\eta)}(u - u_1) e^{-i2\omega_0 u_1} + \left[B_0^{(\xi\eta)}(u + u_1) B_{-2}^{(\xi\eta)}(u - u_1) e^{-i2\omega_0 u_1} + \right. \\ &\left. + B_0^{(\xi\eta)}(u - u_1) B_{-2}^{(\xi\eta)}(u + u_1) \right] e^{-i2\omega_0 t} + \\ &+ \left[B_0^{(\xi\eta)}(u + u_1) B_2^{(\xi\eta)}(u - u_1) e^{i2\omega_0 u_1} + \right. \\ &\left. + B_0^{(\xi\eta)}(u - u_1) B_2^{(\xi\eta)}(u + u_1) \right] e^{-i2\omega_0 t} + B_{-2}^{(\xi\eta)}(u + u_1) B_{-2}^{(\xi\eta)}(u - u_1) e^{-i2\omega_0 u_1} \times \\ &\times e^{-i4\omega_0 t} + B_2^{(\xi\eta)}(u + u_1) B_2^{(\xi\eta)}(u - u_1) e^{i2\omega_0 u} e^{i4\omega_0 t}. \end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{aligned} \tilde{B}_0(u, u_1) &= B_0^{(\xi)}(u_1) B_0^{(\eta)}(u_1) + 2 \operatorname{Re} \left\{ B_2^{(\xi)}(u_1) B_{-2}^{(\eta)}(u_1) e^{-i2\omega_0 u} \right\} + \\ &+ B_0^{(\xi\eta)}(u + u_1) B_0^{(\xi\eta)}(u - u_1) + 2 \operatorname{Re} \left\{ B_2^{(\xi\eta)}(u + u_1) B_{-2}^{(\xi\eta)}(u - u_1) e^{-i2\omega_0 u_1} \right\}, \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_2(u_1, u) &= B_0^{(\eta)}(u_1)B_2^{(\xi)}(u_1) + B_0^{(\xi)}(u_1)B_2^{(\eta)}(u_1)e^{i2\omega_0 u} + \\ &+ B_0^{(\xi\eta)}(u - u_1)B_2^{(\xi\eta)}(u + u_1) + B_0^{(\xi\eta)}(u + u_1)B_2^{(\xi\eta)}(u - u_1)e^{i2\omega_0 u_1}, \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

$$\tilde{B}_4(u_1, u) = B_2^{(\xi)}(u_1)B_2^{(\eta)}(u_1)e^{i2\omega_0 u} + B_2^{(\xi\eta)}(u + u_1)B_2^{(\xi\eta)}(u - u_1)e^{i2\omega_0 u_1}. \quad (3.4.11)$$

Підставляючи до останніх співвідношень вирази

$$B_2^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{2} \left[C_2^{(\xi, \eta)}(u) - iS_2^{(\xi, \eta)}(u) \right], \quad B_2^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{2} \left[C_2^{(\xi, \eta)}(u) - iS_2^{(\xi, \eta)}(u) \right],$$

для косинусних і синусних кореляційних компонентів $\tilde{B}_2^{c,s}(u_1, u)$ та $\tilde{B}_4^{c,s}(u_1, u)$

отримаємо

$$\begin{aligned} \tilde{B}_2^c(u_1, u) &= B_0^{(\eta)}(u_1)C_2^{(\eta)}(u_1) + B_0^{(\xi)}(u_1) \left[C_2^{(\xi)}(u_1)\cos 2\omega_0 u + \right. \\ &\quad \left. + S_2^{(\eta)}(u_1)\sin 2\omega_0 u \right] + \\ &+ \tilde{B}_0^{(\xi\eta)}(u + u_1) \left[C_2^{(\xi\eta)}(u - u_1)\cos 2\omega_0 u_1 + \right. \\ &\quad \left. + S_2^{(\xi\eta)}(u - u_1)\sin 2\omega_0 u_1 \right] + B_0^{(\xi\eta)}(u - u_1)C_2^{(\xi\eta)}(u + u_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_2^s(u_1, u) &= B_0^{(\eta)}(u_1)S_2^{(\xi)}(u_1) + B_0^{(\xi)}(u_1) \left[S_2^{(\eta)}(u_1)\cos 2\omega_0 u - \right. \\ &\quad \left. - C_2^{(\eta)}(u_1)\sin 2\omega_0 u \right] + \\ &+ \tilde{B}_0^{(\xi\eta)}(u + u_1) \left[S_2^{(\xi\eta)}(u - u_1)\cos 2\omega_0 u_1 - \right. \\ &\quad \left. - C_2^{(\xi\eta)}(u - u_1)\sin 2\omega_0 u_1 \right] + B_0^{(\xi\eta)}(u - u_1)S_2^{(\xi\eta)}(u + u_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_4^c(u_1, u) &= \frac{1}{2} \left[\left[C_2^{(\xi)}(u_1)C_2^{(\eta)}(u_1) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - S_2^{(\xi)}(u_1)S_2^{(\eta)}(u_1) \right] \cos 2\omega_0 u + \left[C_2^{(\xi\eta)}(u + u_1)C_2^{(\xi\eta)}(u - u_1) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - S_2^{(\xi\eta)}(u + u_1)S_2^{(\xi\eta)}(u - u_1) \right] \cos 2\omega_0 u_1 + \right. \\ &+ \left[S_2^{(\xi)}(u_1)C_2^{(\eta)}(u_1) + \right. \\ &\quad \left. + C_2^{(\xi)}(u_1)S_2^{(\eta)}(u_1) \right] \sin 2\omega_0 u + \left[C_2^{(\xi\eta)}(u + u_1)S_2^{(\xi\eta)}(u - u_1) + \right. \\ &\quad \left. + S_2^{(\xi\eta)}(u + u_1)C_2^{(\xi\eta)}(u - u_1) \right] \sin 2\omega_0 u_1 \Big], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_4^s(u_1, u) &= \frac{1}{2} \left[\left[C_2^{(\xi)}(u_1)S_2^{(\eta)}(u_1) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - S_2^{(\xi)}(u_1)C_2^{(\eta)}(u_1) \right] \cos 2\omega_0 u + \left[S_2^{(\xi\eta)}(u + u_1)C_2^{(\xi\eta)}(u - u_1) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + C_2^{(\xi\eta)}(u + u_1)S_2^{(\xi\eta)}(u - u_1) \right] \cos 2\omega_0 u_1 + \right. \\ &+ \left[S_2^{(\xi)}(u_1)S_2^{(\eta)}(u_1) - \right. \\ &\quad \left. - C_2^{(\xi)}(u_1)C_2^{(\eta)}(u_1) \right] \sin 2\omega_0 u + \left[S_2^{(\xi\eta)}(u + u_1)S_2^{(\xi\eta)}(u - u_1) - \right. \\ &\quad \left. - C_2^{(\xi\eta)}(u + u_1)C_2^{(\xi\eta)}(u - u_1) \right] \sin 2\omega_0 u_1 \Big]. \end{aligned}$$

Для амплітудно-модульованого сигналу, використовуючи вирази (3.4.9)–(3.4.11), знаходимо:

$$\tilde{B}_0(u_1, u) = \frac{1}{8} \tilde{R}_{\mu\nu}(u_1, u) (1 + \cos 2\omega_0 u + \cos 2\omega_0 u_1), \quad (3.4.12)$$

$$\tilde{B}_2^c(u_1, u) = \frac{1}{8} \tilde{R}_{\mu\nu}(u_1, u) (1 + \cos 2\omega_0 u + \cos 2\omega_0 u_1 + \cos 2\omega_0 (u_1 + u)), \quad (3.4.13)$$

$$\tilde{B}_2^s(u_1, u) = -\frac{1}{8} \tilde{R}_{\mu\nu}(u_1, u) (\sin 2\omega_0 u + \sin 2\omega_0 u_1 + \sin 2\omega_0 (u_1 + u)), \quad (3.4.14)$$

$$\tilde{B}_4^c(u_1, u) = \frac{1}{8} \tilde{R}_{\mu\nu}(u_1, u) \cos 2\omega_0 (u_1 + u), \quad (3.4.15)$$

$$\tilde{B}_4^s(u_1, u) = -\frac{1}{8} \tilde{R}_{\mu\nu}(u_1, u) \sin 2\omega_0 (u_1 + u), \quad (3.4.16)$$

де

$$\tilde{R}_{\mu\nu}(u_1, u) = R_\mu(u_1) R_\nu(u_1) + R_{\mu\nu}(u + u_1) R_{\mu\nu}(u - u_1).$$

Приймаючи до уваги ці співвідношення, легко показати, що нульовий компонент $\tilde{B}_0(u_1, u)$ є парною функцією зсуву u_1 $\tilde{B}_0(-u_1, u) = \tilde{B}_0(u_1, u)$, а вищі задовольняють рівності:

$$\tilde{B}_2^c(-u_1, u) = \tilde{B}_2^c(u_1, u) \cos 2\omega_0 u_1 - \tilde{B}_2^s(u_1, u) \sin 2\omega_0 u_1,$$

$$\tilde{B}_2^s(-u_1, u) = \tilde{B}_2^s(u_1, u) \cos 2\omega_0 u_1 + \tilde{B}_2^c(u_1, u) \sin 2\omega_0 u_1,$$

$$\tilde{B}_4^c(-u_1, u) = \tilde{B}_4^c(u_1, u) \cos 2\omega_0 u_1 - \tilde{B}_4^s(u_1, u) \sin 2\omega_0 u_1$$

$$\tilde{B}_4^s(-u_1, u) = \tilde{B}_4^s(u_1, u) \cos 4\omega_0 u_1 + \tilde{B}_4^c(u_1, u) \sin 4\omega_0 u_1.$$

Дисперсія оцінок взаємкореляційної функції в даному випадку визначається формулою

$$D[\hat{b}_{\xi\eta}(t, u)] = \alpha_0(u) + \sum_{l=2, u} [\alpha_l^c(u) \cos l\omega_0 t + \alpha_l^s(u) \sin l\omega_0 t].$$

Для коефіцієнтів $\alpha_0(u), \alpha_l^{c,s}(u)$ на основі співвідношень (3.1.21)–(3.1.23), (3.4.12)–(3.4.16) отримуємо:

$$\alpha_0(u) = \frac{1}{8N} \left[\tilde{R}_{\mu\nu}(0, u) + 2 \sum_n^{N-1} \left(1 - \frac{n}{N} \right) \tilde{R}_{\mu\nu}(nT, u) \right] (2 + \cos 2\omega_0 u),$$

$$\alpha_2^c(u) = \frac{1}{4N} \left[\tilde{R}_{\mu\nu}(0, u) + 2 \sum_n^{N-1} \left(1 - \frac{n}{N} \right) \tilde{R}_{\mu\nu}(nT, u) \right] (1 + \cos 2\omega_0 u)$$

$$\begin{aligned}\alpha_2^s(u) &= -\frac{1}{4N} \left[\tilde{R}_{\mu\nu}(0, u) + 2 \sum_n^{N-1} \left(1 - \frac{n}{N}\right) \tilde{R}_{\mu\nu}(nT, u) \right] \sin 2\omega_0 u, \\ \alpha_4^c(u) &= \frac{1}{8N} \left[\tilde{R}_{\mu\nu}(0, u) + 2 \sum_n^{N-1} \left(1 - \frac{n}{N}\right) \tilde{R}_{\mu\nu}(nT, u) \right] \cos 2\omega_0 u \\ \alpha_4^s(u) &= -\frac{1}{8N} \left[\tilde{R}_{\mu\nu}(0, u) + 2 \sum_n^{N-1} \left(1 - \frac{n}{N}\right) \tilde{R}_{\mu\nu}(nT, u) \right] \sin 2\omega_0 u.\end{aligned}$$

Якщо покладемо

$$R_{\mu\nu}(u) = D e^{-\alpha|u|}, \quad R_\mu(u) = D_1 e^{-\alpha_1|u|}, \quad R_\nu(u) = D_2 e^{-\alpha_2|u|}, \quad (3.4.17)$$

то

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{\mu\nu}(0, u) &= R_\mu(0)R_\nu(0) + R_{\xi\eta}^2(u) = D_1 D_2 + D^2 e^{-2\alpha|u|}, \\ \tilde{R}_{\mu\nu}(nT, u) &= D_1 D_2 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)|nT|} + D^2 e^{-\alpha(|u+nT| + |u-nT|)}.\end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}\alpha_0(u) &= \frac{1}{8N} \left[D_1 D_2 (1 + 2S(\alpha_1 + \alpha_2, N)) + D^2 (e^{-\alpha|u|} + 2\tilde{S}(\alpha, N, u)) \right] (2 + \cos 2\omega_0 u), \\ \alpha_2^c(u) &= \frac{1}{4N} \left[D_1 D_2 (1 + 2S(\alpha_1 + \alpha_2, N)) + D^2 (e^{-\alpha|u|} + 2\tilde{S}(\alpha, N, u)) \right] (1 + \cos 2\omega_0 u), \\ \alpha_2^s(u) &= -\frac{1}{4N} \left[D_1 D_2 (1 + 2S(\alpha_1 + \alpha_2, N)) + D^2 (e^{-\alpha|u|} + 2\tilde{S}(\alpha, N, u)) \right] \sin 2\omega_0 u, \\ \alpha_4^c(u) &= \frac{1}{8N} \left[D_1 D_2 (1 + 2S(\alpha_1 + \alpha_2, N)) + D^2 (e^{-\alpha|u|} + 2\tilde{S}(\alpha, N, u)) \right] \cos 2\omega_0 u, \\ \alpha_4^s(u) &= -\frac{1}{8N} \left[D_1 D_2 (1 + 2S(\alpha_1 + \alpha_2, N)) + D^2 (e^{-\alpha|u|} + 2\tilde{S}(\alpha, N, u)) \right] \sin 2\omega_0 u,\end{aligned}$$

де

$$S(\alpha_1 + \alpha_2, N) = \sum_n^{N-1} \left(1 - \frac{n}{N}\right) e^{-(\alpha_1 + \alpha_2, N)|nT|}, \quad \tilde{S}(\alpha, N, u) = \sum_n^{N-1} \left(1 - \frac{n}{N}\right) e^{-\alpha(|u+nT| + |u-nT|)}.$$

Коефіцієнти $\alpha_0(u), \alpha_2^c(u), \alpha_4^c(u)$ є парними функціями зсуву, а $\alpha_2^s(u), \alpha_4^s(u)$ – непарними. При $u=0$ коефіцієнти $\alpha_0(u), \alpha_2^c(u), \alpha_4^c(u)$ приймають максимальні значення, а $\alpha_2^s(u), \alpha_4^s(u)$ – нульові, при цьому

$$\alpha_0(0) = \frac{3}{8N} \left[D_1 D_2 (1 + 2S(\alpha_1 + \alpha_2, N)) + D^2 (1 + 2S(\alpha, N)) \right],$$

$$\alpha_2^c(0) = \frac{1}{2N} \left[D_1 D_2 (1 + 2S(\alpha_1 + \alpha_2, N)) + D^2 (1 + 2S(\alpha, N)) \right]$$

$$\alpha_4^c(0) = \frac{1}{8N} \left[D_1 D_2 (1 + 2S(\alpha_1 + \alpha_2, N)) + D^2 (1 + 2S(\alpha, N)) \right].$$

Видно, що $\alpha_2^c(0) = \alpha_2(0) + \alpha_4^c(0)$. Для дисперсії оцінки дисперсії сигналу тоді отримуємо

$$D[\hat{b}_{\xi\eta}(t, 0)] = \frac{1}{8N} \left[\begin{array}{l} D_1 D_2 (1 + 2S(\alpha_1 + \alpha_2, N)) + \\ + D^2 (1 + 2S(\alpha, N)) \end{array} \right] (3 + 4 \cos 2\omega_0 t + \cos 4\omega_0 t).$$

З цього виразу випливає, що в точках $t_k = \frac{(2k+1)T}{4}$, $k \in Z$, дисперсія $D[\hat{b}_{\xi\eta}(t, 0)]$, приймає нульові значення. Отриманий результат можна пояснити тим, що в цих точках дисперсія сигналу є апіорі відомою. Очевидно, що ці значення можуть бути тільки нульовими, а це й випливає з формули $D[\hat{b}_{\xi\eta}(t, 0)] = \frac{D}{2}(1 + \cos 2\omega_0 t)$.

Всі коефіцієнти дисперсії оцінки взаємо кореляційної функції для початкових зсувів мають вигляд зникаючих осциляцій. Якщо $u \rightarrow \infty$, то $\tilde{S}(\alpha, N, u) \rightarrow 0$, а це означає, що для великих зсувів властивості дисперсії визначаються переважно автокореляційними функціями сигналів $\xi(t)$ і $\eta(t)$. Тоді

$$\tilde{\alpha}_0(u) = \lim_{|u| \rightarrow \infty} \alpha_0(u) = \frac{D_1 D_2}{8N} [1 + 2S(\alpha_1 + \alpha_2, N)] (2 + \cos 2\omega_0 u),$$

$$\tilde{\alpha}_2^c(u) = \lim_{|u| \rightarrow \infty} \alpha_2^c(u) = \frac{D_1 D_2}{4N} [1 + 2S(\alpha_1 + \alpha_2, N)] (1 + \cos 2\omega_0 u),$$

$$\tilde{\alpha}_2^s(u) = \lim_{|u| \rightarrow \infty} \alpha_2^s(u) = -\frac{D_1 D_2}{4N} [1 + 2S(\alpha_1 + \alpha_2, N)] \sin 2\omega_0 u,$$

$$\tilde{\alpha}_4^c(u) = \lim_{|u| \rightarrow \infty} \alpha_4^c(u) = -\frac{D_1 D_2}{8N} [1 + 2S(\alpha_1 + \alpha_2, N)] \cos 2\omega_0 u,$$

$$\tilde{\alpha}_4^s(u) = \lim_{|u| \rightarrow \infty} \alpha_4^s(u) = -\frac{D_1 D_2}{8N} [1 + 2S(\alpha_1 + \alpha_2, N)] \sin 2\omega_0 u.$$

З цих граничних рівностей випливає, що для великих зсувів всі коефіцієнти є періодичними функціями. Таким чином, дисперсія $D[\hat{b}_{\xi\eta}(t, u)]$ не прямує до нуля з ростом зсуву, а має вигляд незникаючих осциляцій. Амплітуда цих осциляцій зменшується з ростом числа періодів усереднення N . Ця важлива властивість дисперсії оцінки повинна враховуватись при обробці сигналів. Оскільки кореляційні зв'язки сигналу зникають до нуля, то відносна середньоквадратична

похибка $\frac{D[\hat{b}_{\xi\eta}(t, u)]}{|b(t, u)|}$ швидко зростає з ростом зсуву, що приводить до

необхідності усічення корелограми. Значення u , для яких може бути обчислена кореляційна функція з певною вірогідністю, належить до повного інтервалу $[0, u_m]$, при цьому u_m зростає зі збільшенням числа періодів усереднення N .

Розглянемо тепер властивості оцінок взаємо кореляційних компонентів (3.2.1) і (3.2.2). Формули для зміщення оцінок співпадають з виразами, які визначають відповідні коефіцієнти Фур'є зміщення оцінок кореляційної функції, тобто (3.4.8). Для дисперсій оцінок компонентів $\hat{B}_0^{(\xi\eta)}(u)$, $\hat{C}_2^{(\xi, \eta)}(u)$ і $\hat{S}_2^{(\xi\eta)}(u)$ на основі (3.2.14)–(3.2.16) в першому наближенні маємо:

$$D[\hat{B}_0^{(\xi\eta)}(u)] = \frac{2}{\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) \tilde{B}_0(u_1, u) du_1, \quad (3.4.18)$$

$$D[\hat{C}_2^{(\xi\eta)}(u)] = \frac{2}{\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) \left[2\tilde{B}_0(u_1, u) \cos 2\omega_0 u_1 + \tilde{B}_4^c(u_1, u) \cos 2\omega_0 u_1 - \tilde{B}_4^s(u_1, u) \sin 2\omega_0 u_1 \right] du_1, \quad (3.4.19)$$

$$D[\hat{S}_2^{(\xi\eta)}(u)] = \frac{2}{\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) \left[2\tilde{B}_0(u_1, u) \cos 2\omega_0 u_1 - \tilde{B}_4^c(u_1, u) \cos 2\omega_0 u_1 + \tilde{B}_4^s(u_1, u) \sin 2\omega_0 u_1 \right] du_1. \quad (3.4.20)$$

Після підстановки до виразу (3.4.18) формули для $\tilde{B}_0(u_1, u)$ при апроксимаціях (3.4.17) знаходимо

$$D[B_0^{(\xi\eta)}(u)] = \frac{1}{4\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) \left[R_\mu(u_1) R_\nu(u_1) + R_{\mu\nu}(u_1 + u) R_{\mu\nu}(u_1 - u) \right] (1 + \cos 2\omega_0 u + \cos 2\omega_0 u_1) du_1 =$$

$$= \frac{1}{4N} \left[\begin{array}{l} D_1 D_2 [r_0(\alpha_1 + \alpha_2)(1 + \cos 2\omega_0 u) + r_2(\alpha_1 + \alpha_2)] + \\ + D^2 [\tilde{r}_0(\alpha, u)(1 + \cos 2\omega_0 u) + \tilde{r}_2(\alpha, u)] \end{array} \right], \quad (3.4.21)$$

де

$$r_2(\alpha) = \frac{1}{T} \int_0^{NT} \left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) e^{-\alpha u} \cos 2\omega_0 u du, \quad \tilde{r}_2(\alpha, u) = \frac{1}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) e^{-\alpha(|u+u_1|+|u-u_1|)} \cos 2\omega_0 u_1 du_1.$$

У правій частині співвідношення (3.4.21) можна виділити три складові. Перша з них не залежить від зсуву u

$$D^{(1)} \left[\hat{B}_0^{(\xi n)}(u) \right] = \frac{D_1 D_2}{4N} [r_0(\alpha_1 + \alpha_2) + r_2(\alpha_1 + \alpha_2)],$$

друга зникає з ростом зсуву

$$D^{(2)} \left[\hat{B}_0^{(\xi n)}(u) \right] = \frac{D^2}{4N} [\tilde{r}_0(\alpha, u)(1 + \cos 2\omega_0 u) + \tilde{r}_2(\alpha, u)],$$

а третя змінюється за зсувом періодично

$$D^{(3)} \left[\hat{B}_0^{(\xi n)}(u) \right] = \frac{D_1 D_2}{4N} r_0(\alpha_1 + \alpha_2) \cos 2\omega_0 u.$$

Перша й третя складові визначаються виключно автокореляційними функціями сигналів, а друга – їх взаємокореляційними функціями.

При $u = 0$

$$D^{(2)} \left[\hat{B}_0^{(\xi n)}(0) \right] = \frac{D^2}{4N} [2r_0(2\alpha) + r_2(2\alpha)], \quad D^{(3)} \left[\hat{B}_0^{(\xi n)}(u) \right] = \frac{D_1 D_2}{4N} r_0(\alpha_1 + \alpha_2),$$

і тоді

$$D \left[\hat{B}_0^{(\xi n)}(u) \right] = \frac{1}{4N} \left[D_1 D_2 [2r_0(\alpha_1 + \alpha_2) + r_2(\alpha_1 + \alpha_2)] + D^2 [2r_0(2\alpha) + r_2(2\alpha)] \right].$$

Для великих зсувів $D^{(2)} \left[\hat{B}_0^{(\xi n)}(0) \right] \approx 0$, тому в цьому випадку

$$D \left[\hat{B}_0^{(\xi n)}(u) \right] = \frac{D_1 D_2}{4N} [r_0(\alpha_1 + \alpha_2)(1 + \cos 2\omega_0 u) + r_2(2\alpha)]. \quad (3.4.22)$$

Періодичні зміни функції (3.4.22) мають значну амплітуду і істотно впливають на величину дисперсії $D \left[\hat{B}_0^{(\xi n)}(u) \right]$. Ці зміни зумовлені періодичною не стаціонарністю сигналу. Характеристики нестаціонарності впливають не тільки

на поведінку функції $D[\hat{B}_0^{(\xi n)}(u)]$ в асимптотиці, а також на її властивості при малих значеннях зсувів.

Виділимо у виразі для нульового кореляційного компонента $\tilde{B}_0(u_1, u)$ складову, яка залежить тільки від нульових кореляційних компонентів $B_0^{(\xi)}(u)$, $B_0^{(\eta)}(u)$ і $B_0^{(\xi\eta)}(u)$:

$$\tilde{B}_0^{(c)}(u_1, u) = \frac{1}{8} \left[R_\mu(u_1)R_\nu(u_1)(1 + \cos 2\omega_0 u_1) + R_{\mu\nu}(u + u_1)R_{\mu\nu}(u - u_1)(\cos 2\omega_0 u + \cos 2\omega_0 u_1) \right], \quad (3.4.23)$$

а також складову, що залежить тільки від других кореляційних компонентів $B_2^{(\xi)}(u)$, $B_2^{(\eta)}(u)$ і $B_2^{(\xi\eta)}(u)$:

$$\tilde{B}_0^{(h)}(u_1, u) = \frac{1}{8} \left[R_\mu(u_1)R_\nu(u_1)\cos 2\omega_0 u + R_{\mu\nu}(u + u_1)R_{\mu\nu}(u - u_1) \right]. \quad (3.4.24)$$

Тобто його стаціонарну й нестаціонарну частини. Для відповідних складових дисперсії тоді отримуємо:

$$\begin{aligned} D^{(c)}[\hat{B}_0^{(\xi\eta)}(u)] &= \frac{1}{4\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) \left[R_\mu(u_1)R_\nu(u_1)(1 + \cos 2\omega_0 u_1) + R_{\mu\nu}(u + u_1)R_{\mu\nu}(u - u_1)(\cos 2\omega_0 u + \cos 2\omega_0 u_1) \right] du_1 = \\ &= \frac{1}{4N} \left[D_1 D_2 [r_0(\alpha_1 + \alpha_2) + r_2(\alpha_1 + \alpha_2)] + D^2 [\tilde{r}_0(\alpha, u)\cos 2\omega_0 u + \tilde{r}_2(\alpha, u)] \right]. \end{aligned} \quad (3.4.25)$$

$$\begin{aligned} D^{(h)}[\hat{B}_0^{(\xi\eta)}(u)] &= \frac{1}{4\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) \left[R_\mu(u_1)R_\nu(u_1)\cos 2\omega_0 u + R_{\mu\nu}(u + u_1)R_{\mu\nu}(u - u_1) \right] du_1 = \\ &= \frac{1}{4N} \left[D_1 D_2 r_0(\alpha_1 + \alpha_2) + D^2 \tilde{r}_0(\alpha, u) \right]. \end{aligned} \quad (3.4.26)$$

Складова (3.4.25) містить функції, які від зсуву не залежать, а також функцію, яка зникає з ростом зсуву. Складова (3.4.26) виражається як сума періодичної функції зсуву і функції, зникаючої зі збільшенням u . Відношення цих складових визначає вплив нестаціонарності сигналу на вірогідність оцінювання взаємкореляційної функції стаціонарного наближення $B_0^{(\xi\eta)}(u)$.

Для нульового зсуву $u = 0$:

$$D^{(c)} \left[\hat{B}_0^{(\xi\eta)}(0) \right] = \frac{1}{4N} \left[D_1 D_2 (r_0(\alpha_1 + \alpha_2) + r_2(\alpha_1 + \alpha_2)) + D^2 (r_0(2\alpha) + r_2(2\alpha)) \right],$$

$$D^{(h)} \left[\hat{B}_0^{(\xi\eta)}(0) \right] = \frac{1}{4N} \left[D_1 D_2 r_0(\alpha_1 + \alpha_2) + D^2 r_0(2\alpha) \right].$$

Оскільки $|r_2(2\alpha)| \leq r_0(2\alpha)$, то $\frac{D^{(h)} \left[\hat{B}_0^{(\xi\eta)}(0) \right]}{D^{(c)} \left[\hat{B}_0^{(\xi\eta)}(0) \right]} \geq 0,5$. Неврахування нестационарності

сигналу, як бачимо, приводить до значної помилки при обчисленні дисперсії оцінки. Для великих u стаціонарна частина не залежить від зсуву

$$D^{(c)} \left[\hat{B}_0^{(\xi\eta)}(0) \right] = \frac{D_1 D_2}{4N} \left[r_0(\alpha_1 + \alpha_2) + r_2(\alpha_1 + \alpha_2) \right],$$

а нестационарна є періодичною функцією зсуву:

$$D^{(h)} \left[\hat{B}_0^{(\xi\eta)}(0) \right] = \frac{D_1 D_2}{4N} r_0(\alpha_1 + \alpha_2) \cos 2\omega_0 u.$$

Як бачимо, нестационарність сигналу істотно змінює не тільки величину дисперсії оцінки, а й поведінку при зміні зсуву u . Це черговий раз підкреслює ту важливу роль, яку відіграє вибір моделі сигналу при його статистичному аналізі.

Властивості дисперсії оцінок других кореляційних компонентів визначаються, як видно з (3.4.10) і (3.4.11), також нульовим і другим кореляційними компонентами. Приймаючи до уваги вирази (3.4.12)–(3.4.16) і (3.4.19) та (3.4.20), знаходимо

$$\begin{aligned} D \left[\hat{C}_2^{(\xi\eta)}(u) \right] &= \frac{1}{4\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta} \right) \left[(1 + 2 \cos 2\omega_0 u_1)(1 + \cos 2\omega_0 u_1) + \cos 4\omega_0 u_1 \right] \times \\ &\quad \times \left[R_\mu(u_1) R_\nu(u_1) + R_{\mu\nu}(u + u_1) R_{\mu\nu}(u - u_1) \right] du = \\ &= \frac{1}{4N} \left[\begin{aligned} &D_1 D_2 \left[(r_0(\alpha_1 + \alpha_2) + 2r_2(\alpha_1 + \alpha_2))(1 + \cos 2\omega_0 u) + r_4(\alpha_1 + \alpha_2) \right] + \\ &+ D^2 \left[(\tilde{r}_0(\alpha, u) + 2\tilde{r}_2(\alpha, u))(1 + \cos 2\omega_0 u) + \tilde{r}_4(\alpha, u) \right] \end{aligned} \right], \\ D \left[\hat{S}_2^{(\xi\eta)}(u) \right] &= \frac{1}{4\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta} \right) \left[2 \cos 2\omega_0 u_1 (1 + \cos 2\omega_0 u) + 1 - \cos 2\omega_0 u + \cos 4\omega_0 u_1 \right] \times \\ &\quad \times \left[R_\mu(u_1) R_\nu(u_1) + R_{\mu\nu}(u + u_1) R_{\mu\nu}(u - u_1) \right] du = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4N} \left[D_1 D_2 \left[2r_2(\alpha_1 + \alpha_2)(1 + \cos 2\omega_0 u) + r_0(\alpha_1 + \alpha_2)(1 - \cos 2\omega_0 u) + r_4(\alpha_1 + \alpha_2) \right] + \right. \\ \left. + D^2 \left[2\tilde{r}_2(\alpha, u)(1 + \cos 2\omega_0 u) + \tilde{r}_0(\alpha, u)(1 - \cos 2\omega_0 u) + \tilde{r}_4(\alpha, u) \right] \right].$$

Для зсуву $u = 0$ отримуємо

$$D \left[\hat{C}_2^{(\xi\eta)}(0) \right] = \frac{1}{4N} \left[D_1 D_2 \left[2(r_0(\alpha_1 + \alpha_2) + 2r_2(\alpha_1 + \alpha_2)) + r_4(\alpha_1 + \alpha_2) \right] + \right. \\ \left. + D^2 \left[2(r_0(2\alpha) + 2r_2(2\alpha)) + r_4(2\alpha) \right] \right],$$

$$D \left[\hat{S}_2^{(\xi\eta)}(0) \right] = \frac{1}{4N} \left[D_1 D_2 (4r_2(\alpha_1 + \alpha_2) + r_4(\alpha_1 + \alpha_2)) + D^2 (4r_2(2\alpha) + r_4(2\alpha)) \right],$$

а для великих u :

$$D \left[\hat{C}_2^{(\xi\eta)}(u) \right] = \frac{D_1 D_2}{4N} \left[(r_0(\alpha_1 + \alpha_2) + 2r_2(\alpha_1 + \alpha_2))(1 + \cos 2\omega_0 u) + r_4(\alpha_1 + \alpha_2) \right], \quad (3.4.27)$$

$$D \left[\hat{S}_2^{(\xi\eta)}(u) \right] = \frac{D_1 D_2}{4N} \left[\begin{array}{l} 2r_2(\alpha_1 + \alpha_2)(1 + \cos 2\omega_0 u) + \\ + r_0(\alpha_1 + \alpha_2)(1 - \cos 2\omega_0 u) + r_4(\alpha_1 + \alpha_2) \end{array} \right]. \quad (3.4.28)$$

Дисперсії (3.4.27) і (3.4.28) зменшуються в порівнянні зі своїми початковими значеннями при $u = 0$. Складові, що визначаються взаємкореляційними зв'язками сигналів.

Швидкість загасання дисперсій $D \left[\hat{B}_0^{(\xi\eta)}(u) \right]$, $D \left[\hat{C}_2^{(\xi\eta)}(u) \right]$ і $D \left[\hat{S}_2^{(\xi\eta)}(u) \right]$ з ростом зсуву є меншою, ніж швидкість загасання самих кореляційних компонентів. Присутність сталої і періодичної складових в області великих значень u приводить з ростом зсуву до збільшення відносних

середньоквадратичних похибок $\frac{\left[D \left[\hat{B}_0^{(\xi\eta)}(u) \right] \right]^{\frac{1}{2}}}{|B_0(u)|}$, $\frac{\left[D \left[\hat{C}_2^{(\xi\eta)}(u) \right] \right]^{\frac{1}{2}}}{|C_2^{(\xi\eta)}(u)|}$, $\frac{\left[D \left[\hat{S}_2^{(\xi\eta)}(u) \right] \right]^{\frac{1}{2}}}{|S_2^{(\xi\eta)}(u)|}$

і робить неможливим вірогідне оцінювання взаємкореляційних компонентів для тих значень зсуву, які не належать до певного інтервалу $[0, u_m]$. Значення u_m росте зі збільшенням числа періодів усереднення N .

При дискретному оцінюванні взаємокореляційних компонентів амплітудно-модульованих сигналів ефекти накладання першого роду відсутні, якщо $h \leq \frac{T}{5}$, а ефекти накладання другого роду при умові $h \leq \frac{T}{9}$. Зміщення оцінок

$$\begin{aligned}\hat{B}_0^{(\xi\eta)}(jh) &= \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} [\eta[(k+j)h] - \hat{m}_\eta[(k+j)h]] [\xi(kh) - \hat{m}_\xi(kh)], \\ \hat{C}_2^{(\xi\eta)}(jh) &= \frac{2}{K} \sum_{k=0}^{K-1} [\eta[(k+j)h] - \hat{m}_\eta[(k+j)h]] [\xi(kh) - \hat{m}_\xi(kh)] \cos \frac{4\pi}{M+1} k, \\ \hat{S}_2^{(\xi\eta)}(jh) &= \frac{2}{K} \sum_{k=0}^{K-1} [\eta[(k+j)h] - \hat{m}_\eta[(k+j)h]] [\xi(kh) - \hat{m}_\xi(kh)] \sin \frac{4\pi}{M+1} k,\end{aligned}$$

тоді визначаються формулами

$$\begin{aligned}\varepsilon[\hat{B}_0^{(\xi\eta)}(jh)] &= \varepsilon[\hat{C}_2^{(\xi\eta)}(jh)] = -\frac{D}{2N} S_0(\alpha, N, jh) \cos \frac{2\pi}{M+1} j, \\ \varepsilon[\hat{S}_2^{(\xi\eta)}(jh)] &= \frac{D}{2N} S_0(\alpha, N, jh) \sin \frac{2\pi}{M+1} j,\end{aligned}$$

а їх дисперсії в першому наближенні дорівнюють

$$\begin{aligned}D[\hat{B}_0^{(\xi\eta)}(jh)] &= \frac{1}{K} \left[\tilde{B}_0(0, jh) + 2 \sum_{p=1}^{K-1} \left(1 - \frac{p}{K}\right) \tilde{B}_0(ph, jh) \right], \\ D[\hat{C}_2^{(\xi\eta)}(jh)] &= \frac{1}{K} \left[2\tilde{B}_0(0, jh) + \tilde{B}_4^c(0, jh) + 2 \sum_{p=1}^{K-1} \left(1 - \frac{p}{K}\right) \left[2\tilde{B}_0(ph, jh) \cos \frac{4\pi}{M+1} p + \right. \right. \\ &\left. \left. + \tilde{B}_4^c(ph, jh) \cos \frac{4\pi}{M+1} p - \tilde{B}_4^s(ph, jh) \sin \frac{4\pi}{M+1} p \right] \right], \quad (3.4.29)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D[\hat{S}_2^{(\xi\eta)}(jh)] &= \frac{1}{K} \left[2\tilde{B}_0(0, jh) - \tilde{B}_4^c(0, jh) + 2 \sum_{p=1}^{K-1} \left(1 - \frac{p}{K}\right) \left[2\tilde{B}_0(ph, jh) \cos \frac{4\pi}{M+1} p - \right. \right. \\ &\left. \left. - \tilde{B}_4^c(ph, jh) \cos \frac{4\pi}{M+1} p + \tilde{B}_4^s(ph, jh) \sin \frac{4\pi}{M+1} p \right] \right]. \quad (3.4.30)\end{aligned}$$

Використовуючи співвідношення (3.4.12)–(3.4.16), маємо:

$$\tilde{B}(ph, jh) = \frac{1}{8} \left[R_\mu(ph) R_\nu(ph) + \right. \\ \left. + R_{\mu\nu}((p+j)h) R_{\mu\nu}((p-j)h) \right] \left(1 + \cos \frac{4\pi}{M+1} j + \cos \frac{4\pi}{M+1} p \right), \quad (3.4.31)$$

$$\tilde{B}_4^c(ph, jh) = \frac{1}{8} \left[R_\mu(ph)R_\nu(ph) + R_{\mu\nu}((p+j)h)R_{\mu\nu}((p-j)h) \right] \cos \frac{4\pi}{M+1}(j+p), \quad (3.4.32)$$

$$\tilde{B}_4^s(ph, jh) = -\frac{1}{8} \left[R_\mu(ph)R_\nu(ph) + R_{\mu\nu}((p+j)h)R_{\mu\nu}((p-j)h) \right] \sin \frac{4\pi}{M+1}(j+p), \quad (3.4.33)$$

Прийнявши до уваги апроксимації (3.4.17), знаходимо:

$$D \left[\hat{B}_0^{(\xi\eta)}(jh) \right] = \frac{1}{8K} \left[\left(D_1 D_2 + D^2 e^{-2\alpha|jh} \right) \left(2 + \cos \frac{4\pi}{M+1} j \right) + 2D_1 D_2 \left[q_0(\alpha_1 + \alpha_2) \left(1 + \cos \frac{4\pi}{M+1} j \right) + q_2(\alpha_1 + \alpha_2) + 2D^2 \left[\tilde{q}_0(\alpha, jh) \left(1 + \cos \frac{4\pi}{M+1} j \right) + \tilde{q}_2(\alpha, jh) \right] \right] \right], \quad (3.4.34)$$

де

$$q_l(\alpha) = \sum_{p=1}^{K-1} \left(1 - \frac{p}{K} \right) e^{-\alpha p h} \cos l \frac{2\pi}{M+1} p, \quad \tilde{q}_l(\alpha, jh) = \sum_{p=1}^{K-1} \left(1 - \frac{p}{K} \right) e^{-\alpha(|p+j|+|j-p|)h} \cos l \frac{2\pi}{M+1} p.$$

При $j=0$ співвідношення (3.4.34) визначає дисперсію оцінки нульового компонента функції $b_{\xi\eta}(t, 0)$:

$$D \left[\hat{B}_0^{(\xi\eta)}(0) \right] = \frac{1}{8K} \left[3(D_1 D_2 + D^2) + 2D_1 D_2 \left[2q_0(\alpha_1 + \alpha_2) + q_2(\alpha_1 + \alpha_2) \right] + 2D^2 \left[2q_0(2\alpha) + q_2(2\alpha) \right] \right].$$

Для великих значень j , $\tilde{q}_0(\alpha, jh) \approx 0$ і $\tilde{q}_2(\alpha, jh) \approx 0$, і тоді

$$D \left[\hat{B}_0^{(\xi\eta)}(jh) \right] = \frac{D_1 D_2}{8K} \left[2 + \cos \frac{4\pi}{M+1} j + 2D_1 D_2 \left[q_0(\alpha_1 + \alpha_2) \left(1 + \cos \frac{4\pi}{M+1} j \right) + q_2(\alpha_1 + \alpha_2) \right] \right]. \quad (3.4.35)$$

Функція (3.4.35) містить незалежні від j складові, а також складові, які змінюються відносно j періодично. Вони зумовлені, відповідно, характеристиками стаціонарного наближення сигналу і характеристиками, які описують його нестационарні властивості. Для стаціонарної й нестационарної частин нульового компонента $\tilde{B}_0(ph, jh)$ відповідно маємо:

$$\tilde{B}_0^{(c)}(ph, jh) = \frac{1}{8} \left[\begin{aligned} &R_\mu(ph)R_\nu(ph) \left(1 + \cos \frac{4\pi}{M+1} p \right) + \\ &+ R_{\mu\nu}((p+j)h)R_{\mu\nu}((p-j)h) \left(\cos \frac{4\pi}{M+1} p + \cos \frac{4\pi}{M+1} j \right) \end{aligned} \right],$$

$$\tilde{B}_0^{(H)}(ph, jh) = \frac{1}{8} \left[R_\mu(ph)R_\nu(ph) \cos \frac{4\pi}{M+1} j + R_{\mu\nu}((p+j)h)R_{\mu\nu}((p-j)h) \right].$$

Відповідні складові дисперсії оцінки нульового компонента дорівнюють

$$D^{(c)} \left[\hat{B}_0^{(\xi\eta)}(jh) \right] = \frac{1}{8K} \left[\begin{aligned} &2D_1D_2 + D^2 e^{-2\alpha|j|h} \left(1 + \cos \frac{4\pi}{M+1} j \right) + 2D_1D_2 \left[\begin{aligned} &q_0(\alpha_1 + \alpha_2) + \\ &+ q_2(\alpha_1 + \alpha_2) \end{aligned} \right] + \\ &+ 2D^2 \left[\tilde{q}_0(\alpha, jh) \cos \frac{4\pi}{M+1} j + \tilde{q}_2(\alpha, jh) \right] \end{aligned} \right],$$

$$D^{(H)} \left[\hat{B}_0^{(\xi\eta)}(jh) \right] = \frac{1}{8K} \left[\begin{aligned} &D_1D_2 \cos \frac{4\pi}{M+1} j + D^2 e^{-2\alpha|j|h} + \\ &+ 2D_1D_2 q_0(\alpha_1 + \alpha_2) \cos \frac{4\pi}{M+1} j + 2D^2 \tilde{q}_0(\alpha, jh) \end{aligned} \right].$$

Відношення $D^{(H)} \left[\hat{B}_0^{(\xi\eta)}(jh) \right]$ до $D^{(c)} \left[\hat{B}_0^{(\xi\eta)}(jh) \right]$ визначає вплив нестаціонарності на властивості оцінки нульового взаємкореляційного компонента. Складова $D^{(c)} \left[\hat{B}_0^{(\xi\eta)}(jh) \right]$ містить функції, які незалежні від зсуву, а теж функції, які з ростом зсуву зменшуються. Складова $D^{(H)} \left[\hat{B}_0^{(\xi\eta)}(jh) \right]$ визначається періодичними за зсувом функціями і функціями зникаючими. Для нульового значення $j=0$ маємо

$$D^{(c)} \left[B_0^{(\xi\eta)}(0) \right] = \frac{1}{4K} \left[\begin{aligned} &D_1D_2 (1 + q_0(\alpha_1 + \alpha_2) + q_2(\alpha_1 + \alpha_2)) + \\ &+ D^2 (1 + q_0(2\alpha) + q_2(2\alpha)) \end{aligned} \right], \quad (3.4.36)$$

$$D^{(H)} \left[B_0^{(\xi\eta)}(0) \right] = \frac{1}{8K} \left[D_1D_2 (1 + 2q_0(\alpha_1 + \alpha_2)) + D^2 (1 + 2q_0(2\alpha)) \right], \quad (3.4.37)$$

Відношення (3.4.37) до (3.4.36), як відомо, задовольняє нерівність

$$\frac{D^{(c)} \left[B_0^{(\xi\eta)}(0) \right]}{D^{(H)} \left[B_0^{(\xi\eta)}(0) \right]} \geq 0,5. \text{ Для великих зсувів}$$

$$D^{(c)}\left[\hat{B}_0^{(\xi_n)}(jh)\right] = \frac{D_1 D_2}{4K} \left(1 + q_0(\alpha_1 + \alpha_2) + q_2(\alpha_1 + \alpha_2)\right),$$

$$D^{(h)}\left[B_0^{(\xi_n)}(jh)\right] = \frac{D_1 D_2}{8K} \left(\cos \frac{4\pi}{M+1} j + 2q_0(\alpha_1 + \alpha_2) \cos \frac{4\pi}{M+1} j\right).$$

Дисперсії оцінок косинусного і синусного взаємкореляційних компонентів визначається функціями $\hat{B}_0(ph, jh)$ і $B_4^{c,s}(ph, jh)$, які в свою чергу, залежать від нульових і других авто та взаємкореляційних компонентів сигналу. Після підстановки до (3.4.29) виразів (3.4.31)–(3.4.34) знаходимо:

$$D\left[\hat{C}_2^{(\xi_n)}(jh)\right] = \frac{1}{8K} \left[\left[R_\mu(0)R_\nu(0) + R_{\mu\nu}^2(jh) \right] \left(4 + 3 \cos \frac{4\pi}{M+1} j \right) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{p=1}^{K-1} \left(1 - \frac{p}{K} \right) \left[\left(1 + 2 \cos \frac{4\pi}{M+1} p \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(1 + \cos \frac{4\pi}{M+1} j \right) + \cos \frac{8\pi}{M+1} p \right] \left[R_\mu(ph)R_\nu(ph) + R_{\mu\nu}[(j+p)h]R_{\mu\nu}[(j-p)h] \right] \right],$$

Звідси випливає, що

$$D\left[\hat{C}_2^{(\xi_n)}(jh)\right] = \frac{1}{8K} \left[\left(D_1 D_2 + D^2 e^{-2\alpha|jh} \right) \left(4 + 3 \cos \frac{4\pi}{M+1} j \right) + \right. \\ \left. + 2 \left[D_1 D_2 \left[\left[q_0(\alpha_1 + \alpha_2) + 2q_2(\alpha_1 + \alpha_2) \right] \left(1 + \cos \frac{4\pi}{M+1} j \right) + q_4(\alpha_1 + \alpha_2) \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + D^2 \left[\left[\tilde{q}_0(\alpha, jh) + 2\tilde{q}_2(\alpha, jh) \right] \left(1 + \cos \frac{4\pi}{M+1} j \right) + \tilde{q}_4(\alpha, jh) \right] \right] \right]. \quad (3.4.38)$$

Враховуючи співвідношення (3.4.31)–(3.4.34) для дисперсії оцінки синусного взаємкореляційного компонента (3.4.30) отримуємо:

$$D\left[\hat{S}_2^{(\xi_n)}(jh)\right] = \frac{1}{8K} \left[\left(D_1 D_2 + D^2 e^{-2\alpha|jh} \right) \left(4 + \cos \frac{4\pi}{M+1} j \right) + \right. \\ \left. + 2 \left[D_1 D_2 \left[2q_2(\alpha_1 + \alpha_2) \left(1 + \cos \frac{4\pi}{M+1} j \right) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + q_0(\alpha_1 + \alpha_2) \left(1 - \cos \frac{4\pi}{M+1} j \right) + q_4(\alpha_1 + \alpha_2) \right] + \right. \\ \left. \left. + D^2 \left[2\tilde{q}_2(\alpha, jh) \left(1 + \cos \frac{4\pi}{M+1} j \right) + \tilde{q}_0(\alpha, jh) \left(1 - \cos \frac{4\pi}{M+1} j \right) + \tilde{q}_4(\alpha, jh) \right] \right] \right]. \quad (3.4.39)$$

Для нульових зсувів дисперсії приймають вигляд:

$$D[\hat{C}_2^{(\xi_n)}(0)] = \frac{1}{8K} [D_1 D_2 (7 + 4q_0(\alpha_1 + \alpha_2) + 8q_2(\alpha_1 + \alpha_2) + 2q_4(\alpha_1 + \alpha_2)) + D^2 (7 + 4q_0(2\alpha) + 8q_2(2\alpha) + 2q_4(2\alpha))],$$

$$D[\tilde{S}_2^{(\xi_n)}(0)] = \frac{1}{8K} \left[D_1 D_2 [5 + 8q_2(\alpha_1 + \alpha_2) + 2q_4(\alpha_1 + \alpha_2)] + D^2 [5 + 8q_2(2\alpha) + 2q_4(2\alpha)] \right].$$

Для великих значень j , нехтуючи зникаючими складовими, маємо:

$$D[\hat{C}_2^{(\xi_n)}(jh)] = \frac{D_1 D_2}{8K} \left[\left(4 + 3 \cos \frac{4\pi}{M+1} j \right) + [2q_0(\alpha_1 + \alpha_2) + 4q_2(\alpha_1 + \alpha_2)] \left(1 + \cos \frac{4\pi}{M+1} j \right) + 2q_4(\alpha_1 + \alpha_2) \right], \quad (3.4.40)$$

$$D[\tilde{S}_2^{(\xi_n)}(jh)] = \frac{D_1 D_2}{8K} \left[4 + \cos \frac{4\pi}{M+1} j + 4q_2(\alpha_1 + \alpha_2) \left(1 + \cos \frac{4\pi}{M+1} j \right) + 2q_0(\alpha_1 + \alpha_2) \left(1 - \cos \frac{4\pi}{M+1} j \right) + 2q_4(\alpha_1 + \alpha_2) \right]. \quad (3.4.41)$$

Функції (3.4.40) і (3.4.41) містять сталі і періодичні складові, величини яких визначаються тільки параметрами автокореляційних функцій сигналів. Вирази (3.4.34)–(3.4.41) уможливають обґрунтований вибір кроку дискретизації при дискретному взаємокореляційному аналізі амплітудно-модульованих сигналів. Обчислюючи дисперсії для конкретних значень параметрів сигналів, можна знайти такі значення h , зменшення яких мало змінює самі величини дисперсій, і ті останні мало відрізняються від дисперсій неперервних оцінок.

3.5. Висновки до розділу 3

1. Досліджено Розвинуто методи когерентного взаємокореляційного аналізу ПКВП – сигналів. Отримано умови асимптотичної незміщеності та слушності оцінок взаємокореляційної функції, які визначаються на основі відліків, які відбираються через період не стаціонарності. Для можливих оцінок, які

відрізняються способом центрування на когерентні оцінки математичних сподівань сигналів, виведено формули для зміщення та дисперсії, які представлені відповідними родами Фур'є. Ці статистичні характеристики дають можливість обчислити середньоквадратичну похибку оцінювання в залежності від числа періодів, які усереднюються, і взаємокореляційних характеристик сигналів. Показано, що таке обчислення суттєво спрощується при використанні асимптотичних формул, отриманих для коефіцієнтів Фур'є відповідних статистичних характеристик.

2. Проведено аналіз оцінок взаємокореляційних компонентів, які знаходяться на основі інтегральних перетворень Фур'є оцінок взаємокореляційної функції. Отримано асимптотичні формули для зміщення й дисперсії оцінок, які описують залежності цих величин від довжин реалізації та кореляційних компонентів сигналів. Показано, що зміщення оцінок залежить тільки від величин того компонента, який оцінюється, натомість дисперсія залежить від усіх авто- та взаємокореляційних компонентів обох сигналів. Показано, що обчислення похибки оцінювання нульового взаємокореляційного компонента, яке проводиться за допомогою звичайного усереднення не може бути виконане без врахування вищих компонентів. Це підкреслює ту важливу роль, яку відіграє вибір моделі сигналів при їх статистичних дослідженнях.

3. З метою обґрунтованого вибору інтервалу дискретизації проведено аналіз дискретних оцінок взаємокореляційних компонентів, які знаходяться на основі інтегральних сум, що є наближеними значеннями відповідних інтегралів. Показано, що дискретизація приводить до збільшення як регулярної, так і флуктуаційної складової похибок оцінювання, які зумовлені ефектами накладання першого та другого роду. Формули для зміщення й дисперсії в загальному випадку містять додаткові члени, величини яких є одного порядку зі значеннями основних. Саме поява нових членів дисперсії відрізняє вплив дискретизації на властивості оцінок в даному випадку від ефекту накладання, заданого у випадку спектрального аналізу стаціонарних сигналів. Отримано умови відсутності ефектів накладання першого й другого роду, які є різними. Останні не

співпадають з умовами теореми про дискретизацію Котельникова – Шеннона. При їх виконанні похибки дискретизації визначаються різницями між відповідними інтегралами й інтегральними сумами.

4. Когерентні оцінки взаємкореляційної функції і взаємкореляційних компонентів проаналізовані для амплітудномодульованих сигналів. Для вибраних апроксимацій авто– та взаємкореляційних функцій модулюючих процесів отримані залежності статистичних характеристик оцінок від довжини відрізка реалізації, кроку дискретизації і параметрів сигналів. Проаналізовано на основі таких залежностей вплив не стаціонарності на похибки оцінювання. Показано, що відносні середньоквадратичні оцінки ростуть зі збільшенням зсуву, їх апріорі вибрані величини можуть бути отримані тільки для зсувів, що є меншими від деякої заданої величини U_m – точки усічення корелограми. Така точка усічення може бути вибрана, виходячи з розрахунків, проведених для вибраних параметрів обробки та параметрів сигналів.

РОЗДІЛ 4

КОМПОНЕНТНИЙ ВЗАЄМОКОРЕЛЯЦІЙНИЙ АНАЛІЗ ПЕРІОДИЧНО КОРЕЛЬОВАНИХ ВИПАДКОВИХ СИГНАЛІВ

4.1. Неперервні оцінки взаємокореляційної функції

Когерентні оцінки імовірнісних характеристик ПНВП, які знаходяться за допомогою усереднення відліків, що відбираються через період корельованості T , використовують тільки одне значення реалізації на періоді. Компонентна статистика

$$\hat{b}_{\xi\eta}(t, u) = \sum_{k=-N_2}^{N_2} \hat{B}_k^{(\xi\eta)}(u) e^{ik\omega_0 t}, \quad (4.1.1)$$

яка формується на основі інтегральної оцінки

$$\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta [\xi(t) - \hat{m}_\xi(t)] [\eta(t+u) - \hat{m}_\eta(t+u)] e^{-ik\omega_0 t} dt, \quad (4.1.2)$$

де

$$\hat{m}_\xi(t) = \sum_{k=-N_2}^{N_2} \hat{m}_k^{(\xi)} e^{ik\omega_0 t}, \quad \hat{m}_\eta(t) = \sum_{k=-N_2}^{N_2} \hat{m}_k^{(\eta)} e^{ik\omega_0 t}, \quad (4.1.3)$$

$$\hat{m}_k^{(\xi)}(t) = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \xi(t) e^{-ik\omega_0 t} dt, \quad \hat{m}_k^{(\eta)}(t) = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \eta(t) e^{-ik\omega_0 t} dt,$$

містять вже “багатшу” інформацію про властивості процесів. Тому можна сподіватися, що у випадку, коли взаємокореляційна функція процесів суттєво змінюється за зсувом u в межах інтервалу довжиною T , компонентна оцінка (4.1.1) буде ефективніша, ніж когерентна (3.1.1).

Компонентний метод можна застосовувати тоді, коли маємо апріорні дані про число гармонічних складових в розкладах Фур'є кожної з імовірнісних характеристик, яка оцінюється. Про це число можна судити на основі аналізу фізичних умов протікання процесів, а також результатів обробки

експериментальних даних за допомогою когерентного методу. Зрозуміло, що ефективність компонентного оцінювання знижується при збільшенні числа гармонік, які містяться в тригонометричних поліномах (1) і (3), а в асимптотиці $N_1 \rightarrow \infty$ і $N_2 \rightarrow \infty$ компонентні статистики переходять у когерентні. При скінчених N_1 і N_2 різниця між статистичними характеристиками компонентних та когерентних оцінок визначатиметься кореляційними властивостями процесів [162, 169, 175].

Зупинимося на аналізі оцінки (4.1.1). Оцінку взаємкореляційних компонентів (4.1.2) перепишемо наступним чином

$$\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \left[\overset{\circ}{\xi}(t) - \hat{m}_\xi(t) \right] \left[\overset{\circ}{\eta}(t+u) - \hat{m}_\eta(t+u) \right] e^{-ik\omega_0 t} dt, \quad (4.1.4)$$

де

$$\hat{m}_\xi(t) = \sum_{l=-N_1}^{N_1} e^{il\omega_0 t} \left[\frac{1}{\theta} \int_0^\theta \overset{\circ}{\xi}(s) e^{-il\omega_0 s} ds \right].$$

Очевидно, що

$$E\hat{b}_{\xi\eta}(t, u) = \sum_{k=-N_2}^{N_2} E\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(u) e^{ik\omega_0 t},$$

при цьому

$$E\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta E \left[\begin{array}{l} \overset{\circ}{\xi}(t)\overset{\circ}{\eta}(t+u) - \hat{m}_\xi(t)\overset{\circ}{\eta}(t+u) - \\ - \hat{m}_\eta(t+u)\overset{\circ}{\xi}(t) + \hat{m}_\xi(t)\hat{m}_\eta(t+u) \end{array} \right] e^{-ik\omega_0 t} dt.$$

Для першої складової цього виразу після усереднення маємо:

$$\frac{1}{\theta} \int_0^\theta b_{\xi\eta}(t, u) e^{-ik\omega_0 t} dt = B_{(\xi\eta)}(u).$$

Тут вважається, що $\theta = NT$. Ввівши функції

$$g_k(N_1, s_1, s_2) = e^{-ik\omega_0 s_2} \sum_{l=-N_1}^{N_1} e^{il\omega_0(s_2-s_1)}, \quad h_k(N_1, s_1, s_2) = e^{-ik\omega_0 s_2} \sum_{l=-N_1}^{N_1} e^{il\omega_0(s_2-s_1+u)},$$

другу і третю складову перепишемо у вигляді:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\theta} \int_0^\theta E \left[\hat{m}_\xi(t) \hat{\eta}(t+u) - \hat{m}_\eta(t+u) \hat{\xi}(t) \right] e^{-ik\omega_0 t} dt = \\
& = -\frac{1}{\theta^2} \int_0^\theta \int_0^\theta \left[b_{\xi\eta}(s_1, s_2 - s_1 + u) g_k(N_1, s_1, s_2) + b_{\eta\xi}(s_1, s_2 - s_1) h_k(N_1, s_1, s_2) \right] ds_1 ds_2.
\end{aligned}$$

Для четвертої складової після перетворень отримуємо

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\theta} \int_0^\theta E \hat{m}_\xi(t) \hat{m}_\eta(t+u) e^{-il\omega_0 t} dt = \\
& = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta e^{-il\omega_0 t} \sum_{l, m=-N_1}^{N_1} e^{i\omega_0[(l+m)t+mu]} \left[\frac{1}{\theta^2} \int_0^\theta \int_0^\theta [b_{\eta\xi}(s_1, s_2 - s_1)] e^{-i\omega_0[ls_1+ms_2]} ds_1 ds_2 \right] dt = \\
& = \frac{1}{\theta^2} \int_0^\theta \int_0^\theta b_{\eta\xi}(s_1, s_2 - s_1) p_k(N_1, s_1, s_2) ds_1 ds_2, \tag{4.1.5}
\end{aligned}$$

де

$$p_k(N_1, s_1, s_2) = e^{-ik\omega_0 s_2} \sum_{l \in M} e^{il\omega_0(s_2 - s_1 + u)}, \tag{4.1.6}$$

а множина M є добутком множин $\{-N_1, \dots, N_1\}$ і $\{k - N_1, \dots, k + N_1\}$:

$M = \{-N_1, \dots, N_1\} \cap \{k - N_1, \dots, k + N_1\}$. Тут враховано, що

$$\frac{1}{\theta} \int_0^\theta e^{i\omega_0(l-k+m)t} dt = \delta_{l, k-m},$$

для цієї множини, де $\delta_{k, l-m}$ – символ Кронекера. Таким чином, зміщення оцінки кореляційних компонентів визначається співвідношенням

$$\varepsilon \left[\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(u) \right] = -\frac{1}{\theta^2} \int_0^\theta \int_0^\theta \left[b_{\xi\eta}(s_1, s_2 - s_1 + u) g_k(N_1, s_1, s_2) + b_{\eta\xi}(s_1, s_2 - s_1) [h_k(N_1, s_1, s_2) - p_k(N_1, s_1, s_2)] \right] ds_1 ds_2.$$

Для різниці $\tilde{p}_k(N_1, s_1, s_2) = h_k(N_1, s_1, s_2) - p_k(N_1, s_1, s_2)$, маємо що:

$$\tilde{p}_k(N_1, s_1, s_2) = e^{-ik\omega_0 s_2} \sum_{l \in \bar{M}} e^{il\omega_0(s_2 - s_1 + u)},$$

при цьому множина \bar{M} при $k=0$ є порожньою, при $k > 0$ $\bar{M} = \{-N_1, \dots, -N_1 + k - 1\}$, а при $k < 0$ $\bar{M} = \{N_1 + k + 1, \dots, N_1\}$. Зміщення тоді

перепишується у вигляді

$$\varepsilon \left[\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(u) \right] = -\frac{1}{\theta^2} \int_0^\theta \int_0^\theta \left[b_{\xi\eta}(s_1, s_2 - s_1 + u) g_k(N_1, s_1, s_2) + b_{\eta\xi}(s_1, s_2 - s_1) \tilde{p}_k(N_1, s_1, s_2) \right] ds_1 ds_2.$$

Спростимо цей вираз. Перша складова після введення нової змінної $u_1 = s_2 - s_1$ і зміни порядку інтегрування набуває форми

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta^2} \int_0^\theta \int_0^\theta b_{\xi\eta}(s_1, s_2 - s_1 + u) g_k(N_1, s_1, s_2) ds_1 ds_2 &= \frac{1}{\theta^2} \int_0^\theta \int_{-s}^{\theta-s} b_{\xi\eta}(s, u_1 + u) g_k(N_1, s, s + u) du_1 ds = \\ &= \frac{1}{\theta^2} \left[\int_{-\theta}^0 \int_{-u_1}^0 b_{\xi\eta}(s, u_1 + u) g_k(N_1, s, s + u_1) ds du_1 + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\theta \int_0^{\theta-u_1} b_{\xi\eta}(s, u_1 + u) g_k(N_1, s, s + u_1) ds du_1 \right]. \end{aligned}$$

Оскільки після заміни $u_1 = -u_1'$, $s - u_1 = s_1$ маємо

$$\int_{-\theta}^0 \int_{-u_1}^0 b_{\xi\eta}(s, u_1 + u) g_k(N_1, s, s + u_1) ds du_1 = \int_0^{\theta-u_1} \int_0^{\theta-u_1} b_{\xi\eta}(s + u_1, u - u_1) g_k(N_1, u_1 + s, s) ds du_1,$$

то

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta^2} \int_0^\theta \int_0^\theta b_{\xi\eta}(s_1, s_2 - s_1 + u) g_k(N_1, s_1, s_2) ds_1 ds_2 &= \\ &= \frac{1}{\theta^2} \int_0^\theta \int_0^{\theta-u_1} \left[b_{\xi\eta}(s, u_1 + u) g_k(N_1, s, s + u_1) + \right. \\ &\quad \left. + b_{\xi\eta}(s + u_1, u - u_1) g_k(N_1, s + u_1, s) \right] ds du_1. \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

Аналогічні перетворення другої складової зміщення дають

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta^2} \int_0^\theta \int_0^\theta b_{\eta\xi}(s_1, s_2 - s_1) \tilde{p}_k(N_1, s_1, s_2) ds_1 ds_2 &= \\ &= \frac{1}{\theta^2} \int_0^\theta \int_0^{\theta-u_1} \left[b_{\eta\xi}(s, u) \tilde{p}_k(N_1, s, s + u_1) + b_{\xi\eta}(s, u) \tilde{p}_k(N_1, s + u_1, u_1) \right] ds du_1. \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

Підставимо до формул (4.1.7) і (4.1.8) подання взаємкореляційної функції

$$b_{\xi\eta}(s, u) = \sum_{r=-N_2}^{N_2} B_r^{(\xi\eta)}(u) e^{ir\omega_0 t}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \varepsilon \left[\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(u) \right] = & -\frac{1}{\theta} \sum_{r=-N_2}^{N_2} \left[\int_0^\theta \left[B_r^{(\xi\eta)}(u_1 - u) e^{ir\omega_0 u} + B_r^{(\xi\eta)}(u_1 + u) e^{-ir\omega_0 u} \right] h(N, u_1) + \right. \\ & \left. + B_r^{(\eta\xi)}(u_1) \tilde{h}_k(N_1, u, u_1) + B_r^{(\xi\eta)}(u_1) \tilde{\tilde{h}}_k(N_1, u, u_1) \right] f_{r-k}(0, \theta - u_1) du_1, \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

де

$$\begin{aligned} h(N, u_1) &= \sum_{l=-N_1}^{N_1} e^{il\omega_0 u_1}, \quad \tilde{h}_k(N_1, u, u_1) = e^{ik\omega_0 u_1} \sum_{l \in \bar{M}} e^{-il\omega_0(u+u_1)}, \\ \tilde{\tilde{h}}_k(N_1, u, u_1) &= \sum_{l \in \bar{M}} e^{-il\omega_0(u-u_1)}, \quad f_r(0, \theta - u_1) = \frac{1}{\theta} \int_0^{\theta-u_1} e^{ir\omega_0 u_1} du_1 = \frac{e^{ir\omega_0(\theta-u_1)} - 1}{ir\omega_0 \theta}. \end{aligned}$$

Якщо складовими, що містять функції $f_{r-k}(0, \theta - u_1)$ при $r \neq k$ знехтувати, то для (4.1.9) маємо

$$\varepsilon \left[\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(u) \right] = -\frac{1}{\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta} \right) \left[\begin{aligned} & \left[B_k^{(\xi\eta)}(u_1 + u) e^{-ik\omega_0 u_1} + \right. \\ & \left. + B_k^{(\xi\eta)}(u_1 - u) e^{ik\omega_0 u_1} \right] h(N_1, u_1) + \\ & + B_k^{(\eta\xi)}(u_1) \tilde{h}_k(N_1, u, u_1) + \\ & \left. + B_k^{(\xi\eta)}(u_1) \tilde{\tilde{h}}_k(N_1, u, u_1) \right] du_1. \end{aligned} \right] \quad (4.1.10)$$

Зміщення оцінки взаємкореляційної функції дорівнює

$$\varepsilon \left[\hat{b}_{\xi\eta}(t, u) \right] = \sum_{k=-N_2}^{N_2} \varepsilon \left[\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(u) \right] e^{ik\omega_0 t}.$$

Якщо виконуються умова (3.1.12), то $\varepsilon \left[\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(t, u) \right] \rightarrow 0$, а тоді і $\varepsilon \left[\hat{b}_k^{(\xi\eta)}(t, u) \right] \rightarrow 0$ при $\theta \rightarrow \infty$, тобто оцінка (4.1.4) є асимптотично незміщеною.

При $k = 0$ множина \bar{M} порожня, тому

$$\varepsilon \left[\hat{B}_0^{(\xi\eta)}(u) \right] = -\frac{1}{\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta} \right) \left[B_0^{(\xi\eta)}(u - u_1) + B_0^{(\xi\eta)}(u + u_1) \right] h(N, u_1) du_1. \quad (4.1.11)$$

Приймаючи до уваги, що $\varepsilon \left[\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(u) \right] = \frac{1}{2} \left[\varepsilon \left[\hat{C}_k^{(\xi\eta)}(u) \right] - i \varepsilon \left[\hat{S}_k^{(\xi\eta)}(u) \right] \right]$, на основі співвідношення (4.1.11) легко виділити ті складові, що окремо визначають зміщення оцінок косинусних $\hat{C}_k^{(\xi\eta)}(u)$ та синусних $\hat{S}_k^{(\xi\eta)}(u)$ взаємкореляційних компонентів.

Відмітимо, що на відміну від зміщення оцінки нульового взаємкореляційного компонента, зміщення оцінок вищих компонентів містить складові, які змінюються за зсувом періодично.

Для оцінювання взаємкореляційних компонентів також може бути використана статистика

$$\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta [\xi(t)\eta(t+u) - \hat{m}_\xi(t)\hat{m}_\eta(t+u)] e^{-ik\omega_0 t} dt. \quad (4.1.12)$$

Перепишемо її у вигляді

$$\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \left[\overset{\circ}{\xi}(t)\overset{\circ}{\eta}(t+u) - \overset{\circ}{\hat{m}}_\xi(t)\overset{\circ}{\hat{m}}_\eta(t+u) + \right. \\ \left. + m_\xi(t) \left[\overset{\circ}{\eta}(t+u) - \overset{\circ}{\hat{m}}_\eta(t+u) \right] + m_\eta(t+u) \left[\overset{\circ}{\xi}(t) - \overset{\circ}{\hat{m}}_\xi(t) \right] \right] e^{-ik\omega_0 t} dt.$$

Очевидно, що

$$E\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(u) = B_k^{(\xi\eta)}(u) - \frac{1}{\theta} \int_0^\theta E \overset{\circ}{\hat{m}}_\xi(t)\overset{\circ}{\hat{m}}_\eta(t+u) e^{-ik\omega_0 t} dt.$$

Приймаючи до уваги (4.1.5), маємо

$$\varepsilon \left[\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(u) \right] = -\frac{1}{\theta^2} \int_0^\theta \int_0^\theta b(s_1, s_2 - s_1) p_k(N_1, s_1, s_2) ds_1 ds_2,$$

при цьому функція $p_k(N_1, s_1, s_2)$ визначається співвідношенням (4.1.6). Після перетворень знаходимо

$$\varepsilon \left[\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(u) \right] = -\frac{1}{\theta} \sum_{r=-N_2}^{N_2} \int_0^\theta B_r(u_1) f_{r,k}(0, \theta - u_1) \tilde{p}_k(N_1, u, u_1) du_1,$$

де

$$\tilde{p}_k(N_1, u, u_1) = \sum_{n \in M} e^{in\omega_0 u} \left(e^{-in\omega_0 u_1} + e^{i(n-k)\omega_0 u_1} \right).$$

Якщо осцилюючими складовими знехтувати, то

$$\varepsilon \left[\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(u) \right] = -\frac{1}{\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta} \right) B_k(u_1) \tilde{p}_k(N_1, u, u_1) du_1. \quad (4.1.13)$$

Виділимо окремо формулу зміщення оцінки нульового компонента. Оскільки

$$\tilde{p}_0(N_1, u, u_1) = 2 \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{in\omega_0 u} \cos n\omega_0 u_1 = 2 \left(1 + \sum_{n=1}^{N_1} \cos n\omega_0 u_1 \cos n\omega_0 u \right),$$

то

$$\varepsilon \left[\hat{B}_0^{(\xi\eta)}(u) \right] = -\frac{2}{\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta} \right) B_0^{(\xi\eta)}(u_1) \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{N_1} \cos n\omega_0 u_1 \cos n\omega_0 u \right] du_1.$$

Як впливає з виразів (4.1.6) і (4.1.13), всі складові, що формують зміщення оцінок кореляційних компонентів, в тому числі й оцінки нульового компонента, є періодичними функціями зсуву. Оскільки кореляційні компоненти зникають з ростом зсуву, то така залежність приводить до небажаних властивостей відносного зміщення оцінки кореляційної функції.

Розглянемо тепер властивості дисперсії компонентної оцінки взаємкореляційної функції, поданої у вигляді (4.1.1). На основі цього виразу маємо

$$D \left[\hat{b}_{\xi\eta}(t, u) \right] = E \left| \sum_{l=-N_2}^{N_2} \hat{B}_l^{(\xi\eta)}(u) e^{il\omega_0 t} \right|^2,$$

при цьому $\hat{B}_l^{(\xi\eta)}(u) = \hat{B}_l^{(\xi\eta)}(u) - E\hat{B}_l^{(\xi\eta)}(u)$. Після усереднення за розподілом отримуємо

$$D \left[\hat{b}_{\xi\eta}(t, u) \right] = \sum_{k, l=-N_2}^{N_2} R_{l, k}^{(\xi\eta)}(u) e^{i(l-k)\omega_0 t},$$

де функції $R_{l, k}^{(\xi\eta)}(u)$ визначають кореляції між оцінками кореляційних компонентів:

$R_{l, k}^{(\xi\eta)}(u) = E \hat{B}_l^{(\xi\eta)}(u) \hat{B}_k^{(\xi\eta)}(u) = E \hat{B}_l^{(\xi\eta)}(u) \overline{\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(u)} - E\hat{B}_l^{(\xi\eta)}(u) E\overline{\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(u)}$. Ввівши новий індекс і помінявши порядок сумування, знаходимо

$$D \left[\hat{b}_{\xi\eta}(t, u) \right] = \sum_{n=-2N_2}^{2N_2} \alpha_n(u) e^{in\omega_0 t} = \alpha_0(u) + \sum_{n=1}^{2N_2} \left[\alpha_n^c(u) \cos n\omega_0 t + \alpha_n^s(u) \sin n\omega_0 t \right], \quad (4.1.14)$$

при цьому

$$\alpha_n(u) = \begin{cases} \sum_{k=-N_2-n}^{N_2} R_{n+k, k}^{(\xi\eta)}(u), & n \leq 0, \\ \sum_{k=-N_2}^{N_2-n} R_{n+k, k}^{(\xi\eta)}(u), & n > 0, \end{cases}$$

і $\alpha_n(u) = \frac{1}{2} [\alpha_n^c(u) - i\alpha_n^s(u)]$. Коефіцієнт $\alpha_0(u)$ визначає середнє значення дисперсії $D[\hat{b}_{\xi\eta}(t, u)]$ і визначається дисперсіями оцінок кореляційних компонентів:

$$\alpha_0(u) = \sum_{k=-N_2}^{N_2} R_{k,k}^{(\xi\eta)}(u) = D[\hat{B}_0^{(\xi\eta)}(u)] + 2 \sum_{k=1}^{N_2} D[\hat{B}_0^{(\xi\eta)}(u)]. \quad (4.1.15)$$

У першому наближенні для обох оцінок взаємкореляційних компонентів (4.1.4) і (4.1.10) маємо

$$R_{n+k,k}^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{\theta^2} \int_0^\theta \int_0^\theta b_\zeta(t, s-t, u) e^{ik\omega_0(s-t)} e^{-in\omega_0 t} dt ds,$$

де кореляційна функція $b_\zeta(t, s-t, u) = E \zeta^\circ(t, u) \zeta^\circ(s, u)$, $\zeta^\circ(t, u) = \xi^\circ(t) \eta^\circ(t+u)$, для гауссових ПНВС визначається формулою (3.1.18).

Введемо нову змінну інтегрування $u_1 = s - t$ і змінимо його порядок

$$\begin{aligned} R_{n+k,k}^{(\xi\eta)}(u) &= \frac{1}{\theta^2} \int_0^\theta \int_{-t}^{\theta-t} b_\zeta(t, u_1, u) e^{ik\omega_0 u_1} e^{-in\omega_0 t} du_1 dt = \\ &= \frac{1}{\theta^2} \left[\int_{-\theta}^0 \int_{-u_1}^0 b_\zeta(t, u_1, u) e^{ik\omega_0 u_1} e^{-in\omega_0 t} dt du_1 + \int_0^\theta \int_0^{\theta-u_1} b_\zeta(t, u_1, u) e^{ik\omega_0 u_1} e^{-in\omega_0 t} dt du_1 \right]. \end{aligned}$$

Оскільки $b_\zeta(t, -u_1, u) = b_\zeta(t - u_1, u_1, u)$, то

$$\begin{aligned} &\int_{-\theta}^0 \int_{-u_1}^0 b_\zeta(t, u_1, u) e^{ik\omega_0 u_1} e^{-in\omega_0 t} dt du_1 = \\ &= \int_0^\theta \int_{u_1}^\theta b_\zeta(t - u_1, u_1, u) e^{-ik\omega_0 u_1} e^{-in\omega_0 t} dt du_1 = \int_0^\theta \int_0^{\theta-u_1} b_\zeta(t, u_1, u) e^{-i(k+n)\omega_0 u_1} e^{-in\omega_0 t} dt du_1. \end{aligned}$$

Відтак

$$R_{n+k,k}^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{\theta^2} \int_0^\theta \int_0^{\theta-u_1} b_\zeta(t, u_1, u) e^{-in\omega_0 t} \left[e^{-i(k+n)\omega_0 u_1} + e^{ik\omega_0 u_1} \right] dt du_1.$$

Подаючи функцію $b_\zeta(t, u_1, u)$ у вигляді ряду Фур'є

$$b_\zeta(t, u_1, u) = \sum_{k=-2N_2}^{N_2} \tilde{B}_k(u_1, u) e^{ik\omega_0 t},$$

після інтегрування по t знаходимо:

$$R_{n+k,k}^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{\theta^2} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) \tilde{B}_n(u_1, u) \left[e^{-i(k+n)\omega_0 u_1} + e^{-ik\omega_0 u_1} \right] du_1 + \\ + \frac{1}{\theta} \sum_{\substack{l=-2N_2, 0 \\ l \neq n}}^{2N_2} \int_0^\theta \tilde{B}_l(u_1, u) f_{l-n}(0, \theta - u_1) \left[e^{-i(k+n)\omega_0 u_1} + e^{ik\omega_0 u_1} \right] du_1.$$

При врахуванні тільки першої складової для дисперсій оцінок компонентів маємо:

$$D[\hat{B}_0^{(\xi\eta)}(u)] = \frac{2}{\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) \tilde{B}_0(u_1, u) du_1, \\ D[\hat{B}_0^{(\xi\eta)}(u)] = \frac{2}{\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) \tilde{B}_0(u_1, u) \cos k\omega_0 u_1 du_1.$$

Приймаючи до уваги ці співвідношення, для коефіцієнта $\alpha_0(u)$ отримуємо:

$$\alpha_0(u) = \frac{2}{\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) \tilde{B}_0(u_1, u) \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{N_2} \cos k\omega_0 u_1\right) du_1 = \\ = \frac{2}{\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) \tilde{B}_0(u_1, u) h(N_2, u_1) du_1. \quad (4.1.16)$$

Формула для коефіцієнтів вищих порядків у тому ж наближенні має вигляд:

$$\alpha_n(u) = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) \tilde{B}_n(u_1, u) \sum_{k=-N_2}^{N_2-n} \left[e^{-i(k+n)\omega_0 u_1} + e^{-ik\omega_0 u_1} \right] du_1. \quad (4.1.17)$$

Звідси

$$\alpha_n^c(u) = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) \left[\tilde{B}_n^c(u_1, u) \sum_{k=-N_2}^{N_2-n} [\cos(k+n)\omega_0 u_1 + \cos k\omega_0 u_1] - \right. \\ \left. - \tilde{B}_n^s(u_1, u) \sum_{k=-N_2}^{N_2-n} [\sin(k+n)\omega_0 u_1 - \sin k\omega_0 u_1] \right] du_1, \quad (4.1.18)$$

$$\alpha_n^s(u) = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) \left[\tilde{B}_n^s(u_1, u) \sum_{k=-N_2}^{N_2-n} [\cos(k+n)\omega_0 u_1 + \cos k\omega_0 u_1] + \right. \\ \left. + \tilde{B}_n^c(u_1, u) \sum_{k=-N_2}^{N_2-n} [\sin(k+n)\omega_0 u_1 - \sin k\omega_0 u_1] \right] du_1. \quad (4.1.19)$$

Зі співвідношень (4.1.14) і (4.1.16)–(4.1.19) випливає, що статистики (4.1.1), (4.1.2) і (4.1.12) при виконанні умови (3.1.12) визначають слушну оцінку взаємкореляційної функції ПКВ процесів, поданої у вигляді

$$b_{\xi\eta}(t, u) = \sum_{k=-N_2}^{N_2} B_k^{(\xi\eta)}(u) e^{ik\omega_0 t}, \quad (4.1.20)$$

а її дисперсія в першому наближенні визначається формулами (4.1.14) і (4.1.16)–(4.1.19).

Коефіцієнт $\alpha_0(u)$, як видно, залежить не тільки від нульового, а й вищих взаємкореляційних компонентів процесу. Звідси випливає важливий висновок: навіть усереднене в часі значення дисперсії оцінки взаємкореляційної функції не може бути визначене на основі характеристик стаціонарного наближення ПКВП.

Як вже відмічалось, характерною особливістю оцінок, які розглядаються в даному підрозділі, є те, що вони сформовані з врахуванням початкової інформації про кількість гармонічних складових, що містять характеристики, які оцінюються. При застосуванні когерентного методу неявно припускається існування нескінченного числа компонентів. Саме це, в першу чергу, відрізняє його від компонентного і може спричинити більшу точність компонентних оцінок у випадку швидкого загасання кореляційних зв'язків.

4.2. Дискретний компонентний взаємкореляційний аналіз

Основними завданнями компонентного аналізу є встановлення структури періодичної нестаціонарності на основі оцінювання коефіцієнтів Фур'є імовірнісних характеристик першого та другого порядків і побудові для останніх відповідних тригонометричних поліномів. Вирішальний вплив на ефективність компонентного оцінювання має гармонічний склад тієї чи іншої характеристики, який власне відображає її поведінку в часі. Залежність якості оцінок від швидкості зникання кореляційних зв'язків спричинює певні втрати ефективності при переході від неперервних оцінок до дискретних. Тому критерієм при

обґрунтуванні кроку дискретизації повинна бути якраз міра таких втрат. А остання може бути оцінена тільки на основі дослідження властивостей дискретних статистик.

Припустимо, як і вище, що число гармонічних складових математичного сподівання дорівнює N_1 , а кореляційної функції – N_2 . Нехай також $T = (M + 1)h$, $M \in \mathbb{N}$ і $\theta = NT$. Компонентна дискретна оцінка взаємкореляційної функції має вигляд

$$\hat{b}_{\xi\eta}(nh, jh) = \sum_{k=-N_2}^{N_2} \hat{B}_k^{(\xi\eta)}(jh) e^{ik \frac{2\pi}{M+1} n}, \quad (4.2.1)$$

при цьому будемо вважати, що

$$\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(jh) = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} [\xi(nh) - \hat{m}_\xi(nh)] [\eta[(n+j)h] - \hat{m}_\eta[(n+j)h]] e^{-ik \frac{2\pi}{M+1} n}, \quad (4.2.2)$$

де

$$\begin{aligned} \hat{m}_\xi(nh) &= \sum_{k=-N_1}^{N_1} \hat{m}_k^{(\xi)} e^{ik \frac{2\pi}{M+1} n}, \quad \hat{m}_k^{(\xi)} = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} \xi(nh) e^{-ik \frac{2\pi}{M+1} n}, \\ \hat{m}_\eta(nh) &= \sum_{k=-N_1}^{N_1} \hat{m}_k^{(\eta)} e^{ik \frac{2\pi}{M+1} n}, \quad \hat{m}_k^{(\eta)} = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} \eta(nh) e^{-ik \frac{2\pi}{M+1} n}. \end{aligned}$$

Перепишемо вираз (4.2.2) у вигляді

$$\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(jh) = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} \left[\overset{\circ}{\xi}(nh) \overset{\circ}{\eta}[(n+j)h] - \overset{\circ}{\hat{m}}_\xi(nh) \overset{\circ}{\eta}[(n+j)h] - \overset{\circ}{\xi}(nh) \overset{\circ}{\hat{m}}_\eta[(n+j)h] + \overset{\circ}{\hat{m}}_\xi(nh) \overset{\circ}{\hat{m}}_\eta[(n+j)h] \right] e^{-ik \frac{2\pi}{M+1} n}, \quad (4.2.3)$$

де $\overset{\circ}{\hat{m}}_{\xi\eta}(nh) = \hat{m}_{\xi\eta}(nh) - m_{\xi\eta}(nh)$. Якщо накладання відсутнє ($M \geq 2N_1$), то

$$\begin{aligned} \hat{m}_\xi(nh) - m_\xi(nh) &= \sum_{l=-N_1}^{N_1} (\hat{m}_l^{(\xi)} - m_l^{(\xi)}) e^{il \frac{2\pi}{M+1} n} = \sum_{l=-N_1}^{N_1} e^{il \frac{2\pi}{M+1} n} \left[\frac{1}{K} \sum_{p=0}^{K-1} \overset{\circ}{\xi}(ph) e^{-il \frac{2\pi}{M+1} p} \right], \\ \hat{m}_\eta(nh) - m_\eta(nh) &= \sum_{l=-N_1}^{N_1} (\hat{m}_l^{(\eta)} - m_l^{(\eta)}) e^{il \frac{2\pi}{M+1} n} = \sum_{l=-N_1}^{N_1} e^{il \frac{2\pi}{M+1} n} \left[\frac{1}{K} \sum_{p=0}^{K-1} \overset{\circ}{\eta}(ph) e^{-il \frac{2\pi}{M+1} p} \right]. \end{aligned}$$

Приймаючи до уваги ці формули, для другої і третьої складових виразу (4.2.3) отримуємо

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} \left[\hat{m}_{\xi}(nh) \hat{\eta}[(n+j)h] + \hat{m}_{\eta}[(n+j)h] \hat{\xi}(nh) \right] e^{-ik \frac{2\pi}{M+1} n} = \\
& = -\frac{1}{K^2} \sum_{n,p=0}^{K-1} \left[\hat{\xi}(nh) \hat{\eta}[(p+j)h] \tilde{g}_k(N_1, n, p) + \hat{\xi}(nh) \hat{\eta}(ph) \tilde{h}_k(N_1, n, p) \right],
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_k(N_1, n, p) &= e^{-ik \frac{2\pi}{M+1} p} \sum_{l=-N_1}^{N_1} e^{il \frac{2\pi}{M+1} (p-n)}, \\
\tilde{h}_k(N_1, n, p) &= e^{-ik \frac{2\pi}{M+1} p} \sum_{l=-N_1}^{N_1} e^{il \frac{2\pi}{M+1} (n-p+j)}.
\end{aligned}$$

Четверта складова переписується у вигляді

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} \hat{m}_{\xi}(nh) \hat{m}_{\eta}[(n+j)h] e^{-ik \frac{2\pi}{M+1} n} = \\
& = \frac{1}{K^2} \sum_{p,q=0}^{K-1} \hat{\xi}(ph) \hat{\eta}(qh) \sum_{l,m=-N_1}^{N_1} e^{i \frac{2\pi}{M+1} [(j-q)m-lp]} \left[\frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} e^{i \frac{2\pi}{M+1} (l-k+m)} \right]. \quad (4.2.4)
\end{aligned}$$

Якщо $M \geq N_2 + N_1$, то

$$\frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} e^{i \frac{2\pi}{M+1} (l-k+m)} = \delta_{l,k-m},$$

і тоді

$$\sum_{l,m=-N_1}^{N_1} e^{i \frac{2\pi}{M+1} [(j-q)m-lp]} \delta_{l,k-m} = e^{-ik \frac{2\pi}{M+1} p} \sum_{l \in M} e^{il \frac{2\pi}{M+1} (p-q+j)}, \quad (4.2.5)$$

де $M = \{-N_1, \dots, N_1\} \cap \{k - N_1, \dots, k + N_1\}$. Позначимо праву частину виразу (3.6.14)

через $\tilde{p}_k(N_1, p, q)$. Для різниці $\tilde{p}_k(N_1, p, q) - \tilde{h}_k(N_1, p, q)$ маємо

$$\tilde{p}_k(N_1, p, q) - \tilde{h}_k(N_1, p, q) = e^{-ik \frac{2\pi}{M+1} p} \sum_{l \in M} e^{il \frac{2\pi}{M+1} (n-p+j)} = \tilde{p}'(N_1, p, q),$$

при цьому $\overline{M} = \{-N_1, \dots, -N_1\} \setminus M$. Враховуючи співвідношення (4.2.4) і (4.2.5), для

математичного сподівання оцінки (4.2.2) при умові $M \geq 2N_2$ знаходимо

$$EB_k^{(\xi\eta)}(jh) = B_k^{(\xi\eta)}(jh) - \frac{1}{K^2} \sum_{n,p=0}^{K-1} \left[b_{\xi\eta}(ph, (n-p+j)h) \tilde{g}_k(N_1, n, p) + \right. \\
\left. + b_{\eta\xi}(ph, (n-p)h) \tilde{p}'_k(N_1, n, p) \right].$$

Ввівши новий індекс сумування $r = n - p$ і змінивши його порядок, після перетворень отримуємо наступну формулу для зміщення:

$$\begin{aligned} \varepsilon \left[\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(jh) \right] &= -\frac{1}{K^2} \sum_{p=0}^{K-1} \sum_{r=-p}^{K-p-1} \left[b_{\xi\eta}(ph, (r+j)h) \tilde{g}_k(N_1, r+p, p) + \right. \\ &= \frac{1}{K^2} \left[\sum_{p=0}^{K-1} \left[b_{\xi\eta}(ph, jh) \tilde{g}_k(N_1, p, p) + b_{\eta\xi}(ph, 0) \tilde{p}'_k(N_1, p, p) \right] + \right. \\ &+ \sum_{r=1}^{K-1} \sum_{p=0}^{K-r-1} \left[b_{\xi\eta}[ph, (r+j)h] \tilde{g}_k(N_1, p+r, p) + b_{\xi\eta}[(p+r)h, (j-r)h] \tilde{g}_k(N_1, p, p+r) + \right. \\ &\left. \left. + b_{\eta\xi}(ph, rh) \tilde{p}'_k(N_1, r+p, p) + b_{\xi\eta}(ph, rh) \tilde{p}'_k(N_1, p, p+r) \right] \right]. \end{aligned}$$

Представимо взаємкореляційну функцію у вигляді ряду (4.1.20). Тоді

$$\begin{aligned} \varepsilon \left[\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(jh) \right] &= -\frac{1}{K} \left[\sum_{m=-N_2}^{N_2} \sum_{r=1}^{K-1} \left[B_m^{(\xi\eta)}[(r-j)h] e^{im\frac{2\pi}{M+1}j} + \right. \right. \\ &+ \left. \left[B_m^{(\eta\xi)}(rh) \tilde{h}'(N_1, j, r) + B_m^{(\xi\eta)}(rh) \tilde{h}'(N_1, j, r) \right] \tilde{f}_{m-k}(0, K-r-1) + \right. \\ &\left. + (2N_1 + 1) B_k^{(\xi\eta)}(jh) + B_k^{(\xi\eta)}(0) \sum_{l \in M} e^{il\frac{2\pi}{M+1}j} \right], \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{h}(N_1, r) &= 1 + 2 \sum_{l=1}^{N_1} \cos l \frac{2\pi}{M+1} r, \\ \tilde{h}'_k(N_1, j, r) &= e^{-ik\frac{2\pi}{M+1}r} \sum_{l \in M} e^{il\frac{2\pi}{M+1}(r+j)}, \\ \tilde{h}'_k(N_1, j, r) &= \sum_{l \in M} e^{il\frac{2\pi}{M+1}(j-r)}, \\ \tilde{f}_{m-k}(0, K-r-1) &= \frac{1}{K} \sum_{p=0}^{K-r-1} e^{i(m-k)\frac{2\pi}{M+1}p}. \end{aligned}$$

Зміщення $\varepsilon \left[\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(u) \right]$, як видно з (4.2.6), залежить не тільки від величини того компонента, що оцінюється, але й всіх інших компонентів, які формують кореляційну функцію ПКВП. Однак залежність від компонентів інших номерів, не

є істотною, оскільки значення функції $\tilde{f}_0(0, K-r-1)$ значно перевищують значення інших. Тому складовими, що містять функції $\tilde{f}_{m-k}(0, K-r-1)$ при $m \neq k$, як складовими вищого порядку малості, можемо знехтувати:

$$\begin{aligned} \varepsilon \left[\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(jh) \right] = & -\frac{1}{K} \left[(2N_1 + 1) B_k^{(\xi\eta)}(jh) + B_k^{(\xi\eta)}(0) \sum_{l \in \bar{M}} e^{il \frac{2\pi}{M+1} j} + \right. \\ & + \sum_{r=1}^{K-1} \left(1 - \frac{r}{K} \right) \left[B_k^{(\xi\eta)}[(j-r)h] e^{ik \frac{2\pi}{M+1} j} + B_k^{(\xi\eta)}[(r+j)h] e^{-ik \frac{2\pi}{M+1} r} \right] \tilde{h}(N_1, r) + \\ & \left. + B_k^{(\eta\xi)}(rh) \tilde{h}'_k(N_1, j, r) + B_k^{(\xi\eta)}(rh) \tilde{h}'_k(N_1, j, r) \right]. \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Зміщення оцінок взаємкореляційних компонентів (4.2.6) і (4.2.7) є амплітудами відповідних гармонічних складових зміщення оцінки взаємкореляційної функції:

$$\varepsilon \left[\hat{b}_{\xi\eta}(nh, jh) \right] = \sum_{k=-N_2}^{N_2} \varepsilon \left[\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(jh) \right] e^{ik \frac{2\pi}{M+1} n}.$$

Відмітимо, ще раз, що дані формули справедливі, якщо $M \geq 2N_1$ і $M \geq N_2 + 2N_1$. Якщо $k=0$, то множина \bar{M} порожня, тому для середнього значення зміщення оцінки взаємкореляційної функції (4.2.1) маємо:

$$\varepsilon_{cep} \left[\hat{b}_{\xi\eta}(nh, jh) \right] = -\frac{1}{K} \left[(2N_1 + 1) B_0^{(\xi\eta)}(jh) + \sum_{r=1}^{K-1} \left(1 - \frac{r}{K} \right) \left[B_0^{(\xi\eta)}[(r-j)h] + B_0^{(\xi\eta)}[(r+j)h] \right] \right] \left(1 + 2 \sum_{l=1}^{N_1} \cos l \frac{2\pi}{N+1} r \right).$$

У границі $h \rightarrow 0$, $\theta = const$, формула визначатиме зміщення оцінок взаємкореляційних компонентів при неперервному оцінюванні. Переходячи до асимптотики $N_1 \rightarrow 0$, отримаємо співвідношення, які визначатимуть зміщення оцінок кореляційних компонентів, що обчислюються за формулою

$$\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{T} \int_0^T \hat{b}_{\xi\eta}(t, u) e^{-ik\omega_0 t} dt,$$

де $\hat{b}_{\xi\eta}(t, u)$ – когерентна оцінка (3.1.2).

Перейдемо до аналізу дисперсії оцінки взаємкореляційної функції (4.2.1). При цьому будемо вважати, що оцінка математичного сподівання є незміщеною ($M \geq 2N_1$). Оцінка (4.2.3) в такому випадку приймає вигляд

$$\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(jh) = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} \left[\overset{\circ}{\xi}(nh) \overset{\circ}{\eta}[(n+j)h] e^{-ik \frac{2\pi}{M+1} n} - \frac{1}{K} \sum_{p=0}^{K-1} \left[\overset{\circ}{\eta}[(p+j)h] \overset{\circ}{\xi}(ph) \tilde{g}_k(N_1, n, p) + \overset{\circ}{\xi}(nh) \overset{\circ}{\eta}(ph) \tilde{p}'_k(N_1, n, p) \right] \right].$$

На основі (4.2.1) отримуємо

$$\begin{aligned} D[\hat{b}_{\xi\eta}(nh, jh)] &= E \left[\sum_{l=-N_2}^{N_2} \hat{B}_l^{(\xi\eta)}(jh) e^{il \frac{2\pi}{M+1} n} \right]^2 = \sum_{r=-2N_2}^{2N_2} \alpha_r(jh) e^{ir \frac{2\pi}{M+1} n} = \\ &= \alpha_0(jh) + \sum_{r=1}^{2N_2} \left[\alpha_r^c(jh) \cos r \frac{2\pi}{M+1} n + \alpha_r^s(jh) \sin r \frac{2\pi}{M+1} n \right], \end{aligned}$$

де

$$\alpha_r(jh) = \frac{1}{2} \left[\alpha_r^c(jh) - i \alpha_r^s(jh) \right] = \begin{cases} \sum_{k=-N_2-r}^{N_2} R_{r+k,k}^{(\xi\eta)}(jh), & r \leq 0, \\ \sum_{k=-N_2}^{N_2-r} R_{r+k,k}^{(\xi\eta)}(jh), & r > 0, \end{cases} \quad (4.2.8)$$

а також $R_{lk}^{(\xi\eta)}(jh) = E \hat{B}_l^{(\xi\eta)}(jh) \overline{\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(jh)} - E \hat{B}_l^{(\xi\eta)}(u) \overline{E \hat{B}_k^{(\xi\eta)}(jh)}$. Для кореляції $R_{r+k,k}(jh)$ в першому наближенні знаходимо

$$R_{r+k,k}^{(\xi\eta)}(jh) = \frac{1}{K^2} \sum_{p,q=0}^{K-1} b_{\zeta} [ph, (q-p)h, jh] e^{ik \frac{2\pi}{M+1} (q-p)} e^{-ir \frac{2\pi}{M+1} p},$$

$$\begin{aligned} b_{\zeta} [ph, (q-p)h, jh] &= b_{\xi} [ph, (q-p)h] b_{\eta} [(p+j)h, (q-p)h] + \\ &+ b_{\xi\eta} [ph, (q-p)h + jh] b_{\xi\eta} [(p+j)h, (q-p)h]. \end{aligned}$$

Враховуючи властивість $b_{\zeta} [ph, (q-p)h, jh] = b_{\zeta} [qh, (q-p)h, jh]$, після перетворень отримуємо

$$R_{r+k,k}^{(\xi\eta)}(jh) = \frac{1}{K^2} \sum_{p=0}^{K-1} \sum_{m=-p}^{K-p-1} b_{\zeta}(ph, mh, jh) e^{i \frac{2\pi}{M+1} (km-rp)} =$$

$$= \frac{1}{K^2} \left[\sum_{p=0}^{K-1} b_{\zeta}(ph, 0, jh) e^{-ir \frac{2\pi}{M+1} p} + \sum_{m=1}^{K-1} \left[e^{-i(k+r) \frac{2\pi}{M+1} m} + e^{ik \frac{2\pi}{M+1} m} \right] \sum_{p=0}^{K-m-1} b_{\zeta}(ph, mh, jh) e^{-ir \frac{2\pi}{M+1} p} \right]. \quad (4.2.9)$$

Функція $b_{\zeta}(ph, mh, jh)$ є періодичною за аргументом ph , тому може бути подана у вигляді ряду

$$b_{\zeta}(ph, mh, jh) = \sum_{q=-2N_2}^{2N_2} \tilde{B}_q(mh, jh) e^{iq \frac{2\pi}{M+1} p}.$$

Підставимо його у вираз (4.2.9) і просумуємо по p :

$$R_{r+k,k}^{(\xi\eta)}(jh) = \frac{1}{K} \sum_{q=-2N_2}^{2N_2} \left[\tilde{B}_q(0, jh) \tilde{f}_{q-r}(0, K-1) + \sum_{m=1}^{K-1} \tilde{B}_q(mh, jh) \tilde{f}_{q-r}(0, K-m-1) \left[e^{-i(k+r) \frac{2\pi}{M+1} m} + e^{ik \frac{2\pi}{M+1} m} \right] \right].$$

Нехтуючи складовими, для котрих $q-r \neq s(M+1)$, $s \in \mathbb{Z}$, для коефіцієнтів $\alpha_r(jh)$ маємо:

$$\alpha_r(jh) = \frac{1}{K} \left[\sum_{s \in A} (2N_2 - |r| + 1) \tilde{B}_{r+s(M+1)}(0, jh) + \sum_{m=1}^{K-1} \left(1 - \frac{m}{K} \right) \tilde{B}_{r+s(M+1)}(mh, jh) \sum_{k \in Q} \left[e^{-i(k+r) \frac{2\pi}{M+1} m} + e^{ik \frac{2\pi}{M+1} m} \right] \right],$$

де $Q = \{-N_2 - r, \dots, N_2\}$ для $r < 0$ і $Q = \{-N_2, \dots, N_2 - r\}$ для $r \geq 0$. Множина A є множиною цілих чисел s , при яких $|r + s(M+1)| \leq 2N_2 + 1$. Якщо $M \geq 4N_2$, то ця множина складається з одного елемента $s=0$. У цьому випадку накладання відсутнє і

$$\alpha_r(jh) = \frac{1}{K} \left[(2N_2 - |r| + 1) \tilde{B}_r(0, jh) + \sum_{m=1}^{K-1} \left(1 - \frac{m}{K} \right) \tilde{B}_r(mh, jh) \sum_{k \in Q} \left[e^{-i(k+r) \frac{2\pi}{M+1} m} + e^{ik \frac{2\pi}{M+1} m} \right] \right]. \quad (4.2.10)$$

Звідси, враховуючи $\tilde{B}_r(mh, jh) = \frac{1}{2} [\tilde{B}_r^e(mh, jh) - i\tilde{B}_r^s(mh, jh)]$, знаходимо

$$\begin{aligned}
\alpha_r^c(jh) = & \frac{1}{K} \left[(2N_2 - |r| + 1) \tilde{B}_r^c(0, jh) + \right. \\
& + \sum_{m=1}^{K-1} \left(1 - \frac{m}{K} \right) \left[\tilde{B}_r^c(mh, jh) \sum_{k \in Q} \left[\cos(k+r) \frac{2\pi}{M+1} m + \cos k \frac{2\pi}{M+1} m \right] - \right. \\
& \left. \left. - \tilde{B}_r^s(mh, jh) \sum_{k \in Q} \left[\sin(k+r) \frac{2\pi}{M+1} m - \sin k \frac{2\pi}{M+1} m \right] \right] \right], \quad (4.2.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_r^s(jh) = & \frac{1}{K} \left[(2N_2 - |r| + 1) \tilde{B}_r^s(0, jh) + \right. \\
& + \sum_{m=1}^{K-1} \left(1 - \frac{m}{K} \right) \left[\tilde{B}_r^c(mh, jh) \sum_{k \in Q} \left[\sin(k+r) \frac{2\pi}{M+1} m - \sin k \frac{2\pi}{M+1} m \right] + \right. \\
& \left. \left. + \tilde{B}_r^s(mh, jh) \sum_{k \in Q} \left[\cos(k+r) \frac{2\pi}{M+1} m + \cos k \frac{2\pi}{M+1} m \right] \right] \right]. \quad (4.2.12)
\end{aligned}$$

Нульовий коефіцієнт $\alpha_0(jh)$, як випливає з (4.2.8), визначається тільки дисперсіями оцінок взаємокореляційних компонентів:

$$\alpha_0(jh) = \sum_{k=-N_2}^{N_2} R_{k,k}^{(\xi\eta)}(jh) = D \left[\hat{B}_0^{(\xi\eta)}(jh) \right] + 2 \sum_{k=1}^{N_2} D \left[\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(jh) \right].$$

Підставляючи до цього співвідношення формули (3.3.7) і (3.3.10), що визначають величини $D \left[\hat{B}_0^{(\xi\eta)}(jh) \right]$ і $D \left[\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(jh) \right]$ отримуємо вираз:

$$\alpha_0(jh) = \frac{1}{K} \left[(2N_2 + 1) \tilde{B}_0(0, jh) + 2 \sum_{m=1}^{K-1} \left(1 - \frac{m}{K} \right) \tilde{B}_0(mh, jh) \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{N_2} \cos k \frac{2\pi}{M+1} m \right) \right], \quad (4.2.13)$$

який співпадає з (4.2.10) при $r = 0$.

Якщо $h \rightarrow 0$, $\theta = const$, то з (4.2.10)–(4.2.12) приходимо до формул для коефіцієнтів Фур'є дисперсії неперервної оцінки кореляційної функції, що мають вигляд (4.1.12), а звідси при $N_2 \rightarrow \infty$ маємо

$$\alpha_r(u) = \frac{1}{N} \left[\tilde{B}_r(0, u) + 2 \sum_{n=1}^{K-1} \left(1 - \frac{n}{K} \right) \tilde{B}_r(nT, u) \right].$$

Отриманні вище співвідношення уможливають при заданих апроксимаційних виразах взаємкореляційних компонентів ПКВП обчислення числових значень характеристик оцінок математичного сподівання і кореляційної функції ПКВП при певному кроці дискретизації h та величині вибірки K і на цій основі проведення обґрунтованого вибору цих параметрів обробки. Як і в неперервному випадку, перевага за збіжністю компонентних оцінок, якщо інтервал дискретизації задовольняє необхідні вимоги (умова відсутності ефектів накладання першого й другого роду), більш суттєво буде проявлятися при невеликій кількості коефіцієнтів Фур'є характеристик, що обчислюються, і швидкому загасанні кореляційних зв'язків.

4.3. Компонентні оцінки взаємкореляційної функції амплітудно-модульованих сигналів

Конкретизуємо отримані вище формули для статистичних характеристик оцінки взаємкореляційної функції амплітудно-модульованих сигналів, яка має вигляд

$$\hat{b}_{\xi\eta}(t, u) = \hat{B}_0^{(\xi\eta)}(u) + \hat{C}_2^{(\xi\eta)}(u) \cos 2\omega_0 t + \hat{S}_2^{(\xi\eta)}(u) \sin 2\omega_0 t, \quad (4.3.1)$$

де

$$\hat{B}_0^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta [\xi(t) - \hat{m}_\xi(t)] [\eta(t+u) - \hat{m}_\eta(t+u)] dt,$$

$$\hat{C}_2^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta [\xi(t) - \hat{m}_\xi(t)] [\eta(t+u) - \hat{m}_\eta(t+u)] \cos 2\omega_0 t dt,$$

$$\hat{S}_2^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta [\xi(t) - \hat{m}_\xi(t)] [\eta(t+u) - \hat{m}_\eta(t+u)] \sin 2\omega_0 t dt.$$

При цьому

$$\hat{m}_\xi(t) = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \xi(s) ds + e^{i\omega_0 t} \left[\frac{1}{\theta} \int_0^\theta \xi(s) e^{-i\omega_0 s} ds \right] + e^{-i\omega_0 t} \left[\frac{1}{\theta} \int_0^\theta \xi(s) e^{-i\omega_0 s} ds \right].$$

На основі (4.1.10) і (4.1.11) тоді отримуємо:

$$\varepsilon\left[\hat{B}_0^{(\xi\eta)}(u)\right] = -\frac{1}{\theta}\int_0^\theta\left(1-\frac{u_1}{\theta}\right)\left[B_0^{(\xi\eta)}(u_1+u)+B_0^{(\xi\eta)}(u-u_1)\right](1+2\cos\omega_0u_1)du_1, \quad (4.3.2)$$

$$\varepsilon\left[\hat{B}_2^{(\xi\eta)}(u)\right] = -\frac{1}{\theta}\int_0^\theta\left(1-\frac{u_1}{\theta}\right)\left[\begin{array}{l} B_2^{(\xi\eta)}(u-u_1)e^{i2\omega_0u_1}(1+2\cos\omega_0u_1)+ \\ +B_2^{(\xi\eta)}(u+u_1)e^{-i2\omega_0u_1}(1+2\cos\omega_0u_1)+ \\ +B_2^{(\eta\xi)}(u_1)e^{-i2\omega_0u_1}(1+e^{-i\omega_0(u+u_1)})+ \\ +B_2^{(\xi\eta)}(u_1)(1+e^{-i\omega_0(u-u_1)}) \end{array}\right]du_1. \quad (4.3.3)$$

При виведенні останнього співвідношення враховано, що $\bar{\mu} = \{-1, 0\}$, а тоді

$$\tilde{h}_2(N_1, u_1, u) = e^{-i2\omega_0u_1}(1+e^{-i\omega_0(u+u_1)}),$$

$$\tilde{\tilde{h}}_2(N_1, u_1, u) = 1+e^{i\omega_0(u_1-u)},$$

$$h(N_1, u_1) = 1+2\cos\omega_0u_1.$$

Підставляючи до (4.3.2) вираз для нульового кореляційного компонента

$$B_0^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{2}R_{\mu\nu}(u)\cos\omega_0u, \text{ знаходимо}$$

$$\varepsilon\left[\hat{B}_0^{(\xi\eta)}(u)\right] = -\frac{1}{2\theta}\int_0^\theta\left(1-\frac{u_1}{\theta}\right)\left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} R_{\mu\nu}(u_1+u)+ \\ +R_{\mu\nu}(u_1-u) \end{array}\right](1+\cos\omega_0u_1+\cos2\omega_0u_1)\cos\omega_0u+ \\ +\left[\begin{array}{l} R_{\mu\nu}(u_1-u)- \\ -R_{\mu\nu}(u_1+u) \end{array}\right](\sin\omega_0u_1+\sin2\omega_0u_1)\sin\omega_0u \end{array}\right]du_1.$$

При перетворенні виразу (4.3.3) врахуємо, що

$$B_2^{(\xi\eta)}(u-u_1)e^{i2\omega_0u_1} = B_2^{(\eta\xi)}(u_1-u)e^{i2\omega_0u},$$

а також

$$B_2^{(\xi\eta)}(u+u_1) = \frac{1}{4}R_{\mu\nu}(u+u_1)e^{i\omega_0(u+u_1)}, \quad B_2^{(\eta\xi)}(u_1-u) = \frac{1}{4}R_{\mu\nu}(u_1-u)e^{i\omega_0(u_1-u)}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \varepsilon\left[\hat{B}_2^{(\xi\eta)}(u)\right] &= \\ &= -\frac{1}{4\theta}\int_0^\theta\left(1-\frac{u_1}{\theta}\right)\left[\left[R_{\nu\mu}(u_1-u)+R_{\mu\nu}(u+u_1)\right](1+\cos\omega_0u_1+\cos2\omega_0u_1)\cos\omega_0u+ \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + [R_{\mu\nu}(u+u_1) - R_{\mu\nu}(u_1-u)](\sin \omega_0 u_1 + \sin 2\omega_0 u_1) \sin \omega_0 u + \\
& + R_{\mu\nu}(u_1) [\cos \omega_0 u_1 + \cos \omega_0 (2u_1+u)] + R_{\nu\mu}(u_1) [\cos \omega_0 u_1 + \cos \omega_0 (2u_1-u)] + \\
& + i [R_{\nu\mu}(u_1-u) + R_{\mu\nu}(u+u_1)] (1 + \cos \omega_0 u_1 + \cos 2\omega_0 u_1) \sin \omega_0 u + \\
& + [R_{\nu\mu}(u_1-u) - R_{\mu\nu}(u+u_1)] (\sin \omega_0 u_1 + \sin 2\omega_0 u_1) \cos \omega_0 u - \\
& - R_{\mu\nu}(u_1) [\sin \omega_0 u_1 + \sin \omega_0 (2u_1+u)] + R_{\nu\mu}(u_1) [\sin \omega_0 u_1 + \sin \omega_0 (2u_1-u)] du_1. \quad (4.3.4)
\end{aligned}$$

Припустимо, що $R_{\mu\nu}(u) = De^{-\alpha|u|}$ і впровадимо функції

$$C_l(\alpha, u) \frac{1}{T} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) e^{-\alpha|u_1-u|} \cos l \omega_0 u_1 du_1,$$

$$\tilde{C}_l(\alpha, u) \frac{1}{T} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) e^{-\alpha|u_1-u|} \cos l \omega_0 u_1 du_1,$$

$$S_l(\alpha, u) \frac{1}{T} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) e^{-\alpha|u_1+u|} \sin l \omega_0 u_1 du_1,$$

$$\tilde{S}_l(\alpha, u) \frac{1}{T} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) e^{-\alpha|u_1-u|} \sin l \omega_0 u_1 du_1.$$

На основі (4.3.4) для зміщень оцінок нульового і других конусних та синусних взаємкореляційних компонентів отримуємо:

$$\varepsilon [B_0^{(\xi\eta)}(u)] = -\frac{D}{2N} \sum_{l=0}^2 \left[[C_l(\alpha, u) + \tilde{C}_l(\alpha, u)] \cos \omega_0 u + [\tilde{S}_l(\alpha, u) - S_l(\alpha, u)] \sin \omega_0 u \right],$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon [\hat{C}_2^{(\xi\eta)}(u)] &= -\frac{D}{2N} \sum_{l=0}^2 \left[[C_l(\alpha, u) + \tilde{C}_l(\alpha, u)] \cos \omega_0 u + [S_l(\alpha, u) - \tilde{S}_l(\alpha, u)] \sin \omega_0 u \right] + \\
&+ 2[\tau_1(\alpha) + \tau_2(\alpha) \cos \omega_0 u],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon [\hat{S}_2^{(\xi\eta)}(u)] &= -\frac{D}{2N} \sum_{l=0}^2 \left[[S_l(\alpha, u) - \tilde{S}_l(\alpha, u)] \cos \omega_0 u - [C_l(\alpha, u)] \sin \omega_0 u \right] + \\
&+ 2\tau_2(\alpha) \sin \omega_0 u.
\end{aligned}$$

Якщо $u = 0$, то

$$\varepsilon [\hat{B}_0^{(\xi\eta)}(0)] = -\frac{D}{N} \sum_{l=0}^2 r_l(\alpha),$$

$$\varepsilon[\hat{S}_2^{(\xi\eta)}(0)] = 0, \quad \varepsilon[\hat{C}_2^{(\xi\eta)}(0)] = -\frac{D}{N}[r_0(\alpha) + 2r_1(\alpha) + 2r_2(\alpha)].$$

Залежність зміщення $\varepsilon[\hat{B}_0(u)]$ від зсуву u має вигляд зникаючих осциляцій. При цьому швидкість зникання цих осциляцій є меншою, ніж швидкість зникання кореляційних зв'язків. Складові з такою ж поведінкою присутні й у формулі для зміщень $\varepsilon[\hat{C}_2^{(\xi\eta)}(u)]$ і $\varepsilon[\hat{S}_2^{(\xi\eta)}(u)]$. Останні містять теж члени, які змінюються за зсувом періодично. Зазначені властивості зміщень оцінок взаємкореляційних компонентів, приводять до збільшення відносних значень зміщення оцінки взаємкореляційної функції з ростом зсуву. Виходячи з допустимої величини такого збільшення може бути вибране максимальне значення зсуву u_m , для якого ще слід оцінювати взаємкореляційну функцію. Це значення збільшується з ростом довжини відрізка реалізації θ .

Дисперсія оцінки взаємкореляційної функції (4.3.1) є періодичною функцією часу і може бути представлена у вигляді

$$D[\hat{b}_{\xi\eta}(t, u)] = \alpha_0 u + \sum_{n=2,4} [\alpha_n^c(u) \cos n\omega_0 t + \alpha_n^s(u) \sin n\omega_0 t]. \quad (4.3.5)$$

Для коефіцієнтів $\alpha_0(u)$, $\alpha_n^c(u)$ і $\alpha_n^s(u)$, приймаючи до уваги (4.1.16)–(4.1.19), знаходимо

$$\alpha_0(u) = \frac{2}{\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) \tilde{B}_0(u_1, u) (1 + 2 \cos 2\omega_0 u_1) du_1,$$

$$\alpha_2^c(u) = \frac{2}{\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) [\tilde{B}_2^c(u_1, u) (1 + \cos 2\omega_0 u_1) - \tilde{B}_2^s(u_1, u) \sin 2\omega_0 u_1] du_1, \quad (4.3.6)$$

$$\alpha_2^s(u) = \frac{2}{\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) [\tilde{B}_2^c(u_1, u) \sin 2\omega_0 u_1 + \tilde{B}_2^s(u_1, u) (1 + \cos 2\omega_0 u_1)] du_1, \quad (4.3.7)$$

$$\alpha_4^c(u) = \frac{2}{\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) [\tilde{B}_4^c(u_1, u) \cos 2\omega_0 u - \tilde{B}_4^s(u_1, u) \sin 2\omega_0 u_1] du_1, \quad (4.3.8)$$

$$\alpha_4^s(u) = \frac{2}{\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) [\tilde{B}_4^c(u_1, u) \sin 2\omega_0 u_1 + \tilde{B}_4^s(u_1, u) \cos 2\omega_0 u_1] du_1, \quad (4.3.9)$$

Величини $\tilde{B}_0(u_1, u)$, $\tilde{B}_n^s(n_1, u)$ і $\tilde{B}_n^c(n_1, u)$ в даному випадку визначаються співвідношеннями (3.4.12)–(3.4.16), врахувавши (3.4.12), для коефіцієнта $\alpha_0(u)$ отримуємо

$$\alpha_0(u) = \frac{1}{4\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) \left[R_\mu(u_1) R_\nu(u_1) + R_{\mu\nu}(u+u_1) R_{\mu\nu}(u-u_1) \right] \times \\ \times \left[2 + 3 \cos 2\omega_0 u_1 + (1 + 2 \cos 2\omega_0 u_1) \times \cos 2\omega_0 u + \cos 4\omega_0 u_1 \right] du_1,$$

тоді

$$\alpha_0(u) = \frac{1}{4N} \left[2 \left[D_1 D_2 r_0(\alpha_1 + \alpha_2) + D^2 \tilde{r}_0(\alpha, u) \right] + 3 \left[D_1 D_2 r_2(\alpha_1 \alpha_2) + D^2 \tilde{r}_2(\alpha, u) \right] + \right. \\ \left. + D_1 D_2 \left[r_0(\alpha_1 + \alpha_2) + 2r_2(\alpha_1 + \alpha_2) \right] \cos 2\omega_0 u + r_4(\alpha_1 + \alpha_2) \right] + \\ + D^2 \left[r \tilde{r}_2(\alpha, u) \right] \cos \omega_0 u + \tilde{r}_4(\alpha, u) \left. \right].$$

Вираз для $\alpha_0(u)$, як видно, містить три складові, поведінка кожної з яких є різною при змінах зсуву u . Одна з них є сталою:

$$\alpha_0^1(u) = \frac{D_1 D_2}{4N} (2r_0(\alpha_1 + \alpha_2) + 3r_2(\alpha_1 + \alpha_2) + r_4(\alpha_1 + \alpha_2)).$$

Друга зникає з ростом зсуву:

$$\alpha_0^{(2)}(u) = \frac{D^2}{4N} \left[2\tilde{r}_0(\alpha, u) + 3\tilde{r}_2(\alpha, u) + \tilde{r}_4(\alpha, u) + \left[\tilde{r}_0(\alpha, u) + \tilde{r}_2(\alpha, u) \right] \cos 2\omega_0 u \right],$$

а третя змінюється за зсувом періодично:

$$\alpha_0^{(3)}(u) = \frac{D_1 D_2}{4N} \left[r_0(\alpha_1 + \alpha_2) + 2r_2(\alpha_1 + \alpha_2) \right] \cos 2\omega_0 u.$$

Максимальне значення коефіцієнта $\alpha_0(u)$ приймає при $u = 0$:

$$\alpha_0(u) = \frac{1}{4N} \left[\frac{D_1 D_2 \left[3r_0(\alpha_1 + \alpha_2) + 5r_2(\alpha_1 + \alpha_2) + r_4(\alpha_1 + \alpha_2) \right] +}{+ D^2 \left[3r_0(2\alpha) + 5r_2(2\alpha) + r_4(2\alpha) \right]} \right].$$

Для великих зсувів маємо:

$$\tilde{\alpha}_0(u) = \frac{D_1 D_2}{4N} \left[\left[2 + \cos 2\omega_0 u \right] r_0(\alpha_1 + \alpha_2) + (3 + 2 \cos \omega_0 u) r_2(\alpha_1 + \alpha_2) + r_4(\alpha_1 + \alpha_2) \right].$$

Періодичний хвіст коефіцієнта $\alpha_0(u)$ зумовлений періодичною не стаціонарністю сигналу, властивості якої описуються другими кореляційними компонентами.

Його стала складова визначається тільки кореляційною функцією стаціонарного наближення сигналу. Виділяючи стаціонарну й нестаціонарну складову компонента $\tilde{B}_0(u_1, u)$ (формули (3.4.23)–(3.4.24)), отримуємо відповідні складові коефіцієнта $\alpha_0(u)$:

$$\begin{aligned}\alpha_0^{(c)}(u) &= \frac{1}{4\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) \left[R_u(u_1) R_v(u_1) (1 + \cos 2\omega_0 u_1) + \right. \\ &\quad \left. + R_{uv}(u - u_1) (\cos 2\omega_0 u + \cos 2\omega_0 u_1) \right] (1 + 2 \cos 2\omega_0 u_1) du_1 = \\ &= \frac{1}{4N} \left[D_1 D_2 [2r_0(\alpha_1 + \alpha_2) + 3r_2(\alpha_1 + \alpha_2) + r_4(\alpha_1 + \alpha_2)] + \right. \\ &\quad \left. + D^2 [\tilde{r}_0(\alpha, u) + \tilde{r}_2(\alpha, u) + [\tilde{r}_0(\alpha, u) + 2r_2(\alpha, u)] \cos 2\omega_0 u + \tilde{r}_4(\alpha, u)] \right], \\ \alpha_0^{(h)}(u) &= \frac{1}{4\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) [R_u(u_1) R_v(u_1) \cos 2\omega_0 u_1 + R_{uv}(u + u_1)] (1 + 2 \cos 2\omega_0 u_1) du_1 = \\ &= \frac{1}{4N} [D_1 D_2 [r_0(\alpha_1 + \alpha_2) + 2r_2(\alpha_1 + \alpha_2)] \cos 2\omega_0 u + D^2 [\tilde{r}_0(\alpha, u) + 2\tilde{r}_2(\alpha, u)]].\end{aligned}$$

Відношення $\frac{\alpha_0^{(h)}(u)}{\alpha_0^{(c)}(u)}$ визначає вплив нестаціонарності сигналу на величину

усередненої в часі дисперсії оцінки взаємкореляційної функції.

Величини $\alpha_0^{(c)}(u)$ і $\alpha_0^{(h)}(u)$ при $u = 0$ дорівнюють:

$$\begin{aligned}\alpha_0^{(c)}(0) &= \frac{1}{4N} \left[D_1 D_2 [2r_0(\alpha_1 + \alpha_2) + 3r_2(\alpha_1 + \alpha_2) + r_4(\alpha_1 + \alpha_2)] + \right. \\ &\quad \left. + D^2 [2r_0(2\alpha) + 3r_2(2\alpha) + r_4(2\alpha)] \right], \\ \alpha_0^{(h)}(0) &= \frac{1}{4N} [D_1 D_2 [r_0(\alpha_1 + \alpha_2) + 2r_2(\alpha_1 + \alpha_2)] + D^2 [r_0(2\alpha) + 2r_2(2\alpha)]].\end{aligned}$$

Оскільки $r_4(\alpha_1 + \alpha_2) < r_2(\alpha_1 + \alpha_2)$, $r_4(2\alpha) < r_2(2\alpha)$, то $\frac{\alpha_0^{(h)}(0)}{\alpha_0^{(c)}(0)} > 0.5$.

Таким чином, ігнорування нестаціонарності приводить до значної помилки при оцінці вірогідності кореляційної обробки. З ростом зсуву $\alpha_0^{(c)}(u)$ прямує до величини

$$\tilde{\alpha}_0^{(c)}(u) = \frac{D_1 D_2}{4N} [2r_0(\alpha_1 + \alpha_2) + 3r_2(\alpha_1 + \alpha_2) + r_4(\alpha_1 + \alpha_2)],$$

яка від зсуву u не залежить, а $\alpha_0^{(h)}(u)$ прямує до періодичної за зсувом функції

$$\tilde{\alpha}_0^{(n)}(u) = \frac{D_1 D_2}{4N} [r_0(\alpha_1 + \alpha_2) + 2r_2(\alpha_1 + \alpha_2)] \cos 2\omega_0 u.$$

Для вищих коефіцієнтів Фур'є дисперсії (4.3.5), приймаючи до уваги (4.3.6)–(4.3.9) отримуємо

$$\alpha_2^c(u) = \left[\frac{1}{2\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) \tilde{R}_{\mu\nu}(u_1, u) (1 + \cos 2\omega_0 u_1) du_1 \right] (1 + \cos 2\omega_0 u),$$

$$\alpha_2^s(u) = \left[\frac{1}{2\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) \tilde{R}_{\mu\nu}(u_1, u) (1 + \cos 2\omega_0 u_1) du_1 \right] \sin 2\omega_0 u,$$

$$\alpha_4^c(u) = \left[\frac{1}{4\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) \tilde{R}_{\mu\nu}(u_1, u) du_1 \right] \cos 2\omega_0 u,$$

$$\alpha_4^s(u) = \left[\frac{1}{4\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) \tilde{R}_{\mu\nu}(u_1, u) du_1 \right] \sin 2\omega_0 u.$$

При апроксимаціях маємо

$$\alpha_2^c(u) = \frac{1}{2N} \left[\frac{D_1 D_2 [\tau_0(\alpha_1 + \alpha_2) + \tau_2(\alpha_1 + \alpha_2)] +}{+D^2 [\tilde{\tau}_0(\alpha, u) + \tilde{\tau}_2(\alpha, u)]} \right] (1 + \cos 2\omega_0 u), \quad (4.3.10)$$

$$\alpha_2^s(u) = -\frac{1}{2N} \left[\frac{D_1 D_2 [\tau_0(\alpha_1 + \alpha_2) + \tau_2(\alpha_1 + \alpha_2)] +}{+D^2 [\tilde{\tau}_0(\alpha, u) + \tilde{\tau}_2(\alpha, u)]} \right] \sin 2\omega_0 u, \quad (4.3.11)$$

$$\alpha_4^c(u) = \frac{1}{4N} [D_1 D_2 \tau_0(\alpha_1 + \alpha_2) + D^2 \tilde{\tau}_0(\alpha, u)] \cos 2\omega_0 u, \quad (4.3.12)$$

$$\alpha_4^s(u) = -\frac{1}{4N} [D_1 D_2 \tau_0(\alpha_1 + \alpha_2) + D^2 \tilde{\tau}_0(\alpha, u)] \sin 2\omega_0 u. \quad (4.3.13)$$

При $u = 0$ ці співвідношення мають вигляд:

$$\alpha_2^c(0) = \frac{1}{N} [D_1 D_2 [\tau_0(\alpha_1 + \alpha_2) + \tau_2(\alpha_1 + \alpha_2)] + D [\tau_0(2\alpha)]], \quad \alpha_2^s(0) = 0,$$

$$\alpha_4^c(0) = \frac{1}{4N} [D_1 D_2 \tau_0(\alpha_1 + \alpha_2) + D^2 \tau_0(2\alpha)], \quad \alpha_4^s(0) = 0.$$

Всі коефіцієнти (4.3.10)–(4.3.13) при початковому зростанні зсуву u осциляційно зникають, однак швидкість таких зникань є меншою від швидкості зникання кореляційних зв'язків. Оскільки $\tilde{r}_l(\alpha, u) \rightarrow 0$ при $u \rightarrow \infty$, то для великих u , як впливає з рівнянь

$$\tilde{\alpha}_2^c(u) = \frac{D_1 D_2}{2N} [r_0(\alpha_1 + \alpha_2) + r_2(\alpha_1 + \alpha_2)] (1 + \cos 2\omega_0 u),$$

$$\tilde{\alpha}_2^s(u) = -\frac{D_1 D_2}{2N} [r_0(\alpha_1 + \alpha_2) + r_2(\alpha_1 + \alpha_2)] \sin 2\omega_0 u,$$

$$\tilde{\alpha}_4^c(u) = \frac{D_1 D_2}{4N} r_0(\alpha_1 + \alpha_2) \cos 2\omega_0 u,$$

$$\tilde{\alpha}_4^s(u) = -\frac{D_1 D_2}{4N} r_0(\alpha_1 + \alpha_2) \sin 2\omega_0 u,$$

вони змінюються періодично. Це означає, що дисперсія $D[\hat{b}_{\xi\eta}(t, u)]$ для великих u також має вигляд періодичних осциляцій, які відбуваються навколо певного сталого рівня. Очевидно, що амплітуди осциляцій, які і цей рівень, зменшуються з ростом числа періодів усереднення N .

Зазначені властивості дисперсії $D[\hat{b}_{\xi\eta}(t, u)]$ призводять до збільшення з ростом зсуву відносної середньоквадратичної похибки оцінювання $\left[D[\hat{b}_{\xi\eta}(t, u)] \right]^{\frac{1}{2}} / b_{\xi\eta}(t, u)$ і роблять неможливим обчислення взаємкореляційної функції для тих зсувів, які перевершують певне максимальне значення u_m , оскільки похибка поза межами цього інтервалу може досягати величини, при якій оцінювання втрачає будь-який сенс.

При аналізі зміщення дискретної компонентної оцінки взаємкореляційної функції будемо виходити з виразу

$$\varepsilon[\hat{b}_{\xi\eta}(t, jh)] = \varepsilon[\hat{B}_0^{(\xi\eta)}(jh)] + \varepsilon[\hat{C}_2^{(\xi\eta)}(jh)] \cos 2\omega_0 t + \varepsilon[\hat{S}_2^{(\xi\eta)}(jh)] \sin 2\omega_0 t,$$

при цьому

$$\varepsilon[\hat{B}_0^{(\xi\eta)}(jh)] = -\frac{1}{K} \left[3B_0^{(\xi\eta)}(jh) + \sum_{p=1}^{K-1} \left(1 - \frac{p}{K} \right) \left[B_0^{(\xi\eta)}[(p-j)h] + B_0^{(\xi\eta)}[(p+j)h] \right] \left(1 + 2 \cos \frac{2\pi}{M+1} p \right) \right],$$

$$\varepsilon[\hat{B}_2^{(\xi\eta)}(jh)] = -\frac{1}{K} \left[3B_2^{(\xi\eta)}(jh) + B_2^{(\xi\eta)}(0) \left(1 + e^{-i\frac{2\pi j}{M+1}} \right) + \sum_{p=1}^{K-1} \left(1 - \frac{p}{K} \right) \left[B_2^{(\xi\eta)}[(j-p)h] e^{i\frac{4\pi}{M+1} p} + B_2^{(\xi\eta)}[(j+p)h] e^{-i\frac{4\pi}{M+1} p} \right] \left(1 + \cos \frac{2\pi}{M+1} p \right) + \right]$$

$$+B_2^{(\xi\eta)}[ph]e^{-i\frac{4\pi}{M+1}p}\left(1+e^{-i\frac{2\pi}{M+1}(p+j)}\right)+B_2^{(\xi\eta)}[ph]\left(1+e^{-i\frac{2\pi}{M+1}(j-p)}\right)\Bigg].$$

Останні рівності справедливі, якщо $M \geq 4$. У цьому випадку зміщення не буде збільшене за рахунок ефекту накладання. Ця умова означає, що число M повинно бути більшим у два рази від номера найвищої гармоніки взаємкореляційної функції.

Приймаючи до уваги співвідношення (4.2.7) для зміщення оцінки нульового взаємкореляційного компонента отримуємо:

$$\begin{aligned} \varepsilon\left[\hat{B}_0^{(\xi\eta)}(jh)\right] &= -\frac{1}{2K}3R_{\mu\nu}(jh) + \sum_{p=1}^{K-1}\left(1-\frac{p}{K}\right)\left[R_{\mu\nu}[(j+p)h] + R_{\mu\nu}[(p-j)h]\right] \times \\ &\times \left(1 + \cos\frac{2\pi}{M+1}p + \cos\frac{4\pi}{M+1}p\right) \cos\frac{4\pi}{M+1}j + \\ &+ \left[R_{\mu\nu}[(p-j)h] - R_{\mu\nu}[(p+j)h]\right] \left(\sin\frac{2\pi}{M+1}p + \sin\frac{4\pi}{M+1}p\right) \sin\frac{2\pi}{M+1}j. \end{aligned}$$

Прийнявши, що $R_{\mu\nu}(jh) = De^{-\alpha|j|h}$, і ввівши функції

$$C_l^1(\alpha, jh) = \sum_{p=1}^{K-1}\left(1-\frac{p}{K}\right)e^{-i\alpha|p+j|h} \cos l \frac{2\pi}{M+1}p,$$

$$\tilde{C}_l^1(\alpha, jh) = \sum_{p=1}^{K-1}\left(1-\frac{p}{K}\right)e^{-i\alpha|p-j|h} \cos l \frac{2\pi}{M+1}p,$$

$$S_l^1(\alpha, jh) = \sum_{p=1}^{K-1}\left(1-\frac{p}{K}\right)e^{-i\alpha|p+j|h} \sin l \frac{2\pi}{M+1}p,$$

$$\tilde{S}_l^1(\alpha, jh) = \sum_{p=1}^{K-1}\left(1-\frac{p}{K}\right)e^{-i\alpha|p-j|h} \sin l \frac{2\pi}{M+1}p,$$

отримуємо

$$\varepsilon\left[\hat{B}_0^{(\xi\eta)}(jh)\right] = -\frac{D}{2K} \left[3e^{-\alpha|j|h} \cos\frac{2\pi}{M+1}jh + \sum_{l=0}^2 \left[\begin{aligned} &\left[C_l^1(\alpha, jh) + \tilde{C}_l^1(\alpha, jh)\right] \cos\frac{2\pi}{M+1}j + \\ &\left[\tilde{S}_l^1(\alpha, jh) - S_l^1(\alpha, jh)\right] \sin\frac{2\pi}{M+1}j \end{aligned} \right] \right].$$

Для нульового зсуву $j = 0$ оскільки $C_l^1(\alpha, 0) = \tilde{C}_l^1(\alpha, 0) = g_2(\alpha)$, маємо:

$$\varepsilon\left[B_0^{(\xi\eta)}(0)\right] = -\frac{D}{2K} \left[3 + 2 \sum_{l=0}^2 g_l(\alpha) \right].$$

3 формули

$$\begin{aligned}
\varepsilon \left[\hat{B}_2^{(\xi\eta)}(jh) \right] &= -\frac{1}{4K} \left[3R_{\mu\nu}(jh)e^{i\frac{2\pi}{M+1}j} + R_{\mu\nu}(0) \left(1 + e^{-i\frac{2\pi}{M+1}j} \right) \right] + \\
&+ \sum_{p=1}^{K-1} \left(1 - \frac{p}{K} \right) \left[R_{\mu\nu}[(p-j)h] + R_{\mu\nu}[(p+j)h] \right] \times \left(1 + \cos \frac{2\pi}{M+1}p + \cos \frac{4\pi}{M+1}p \right) \cos \frac{2\pi}{M+1}j + \\
&+ \left[R_{\mu\nu}[(p+j)h] - R_{\mu\nu}[(p-j)h] \right] \left(\sin \frac{2\pi}{M+1}p + \sin \frac{4\pi}{M+1}p \right) \times \sin \frac{2\pi}{M+1}j + \\
&+ R_{\mu\nu}(ph) \left[\cos \frac{2\pi}{M+1}p + \cos \frac{2\pi}{M+1}(2p+j) \right] + \\
&+ R_{\mu\nu}(ph) \left[\cos \frac{2\pi}{M+1}p + \cos \frac{2\pi}{M+1}(2p-j) \right] + \\
&+ i \left[R_{\mu\nu}[(p-j)h] + R_{\mu\nu}[(p+j)h] \right] \left(1 + \cos \frac{2\pi}{M+1}p + \cos \frac{4\pi}{M+1}p \right) \sin \frac{2\pi}{M+1}j + \\
&+ i \left[R_{\mu\nu}[(p-j)h] - R_{\mu\nu}[(p+j)h] \right] \left(\sin \frac{2\pi}{M+1}p + \sin \frac{4\pi}{M+1}p \right) \cos \frac{2\pi}{M+1}j - \\
&- i R_{\mu\nu}(ph) \left[\sin \frac{2\pi}{M+1}p + \sin \frac{2\pi}{M+1}(2p+j) \right] + \\
&+ i R_{\mu\nu}(ph) \left[\sin \frac{2\pi}{M+1}p + \sin \frac{2\pi}{M+1}(2p-j) \right]
\end{aligned}$$

знаходимо зміщення оцінок косинусного і синусного взаємкореляційних компонентів

$$\begin{aligned}
\varepsilon \left[\hat{C}_2^{(\xi\eta)} \right] &= -\frac{D}{2K} \left[1 + \left(1 + 3e^{-\alpha|j/h} \right) \cos \frac{2\pi}{M+1}j + \right. \\
&+ \sum_{l=0}^2 \left[\left[C_l^1(\alpha, jh) + \tilde{C}_l^1(\alpha, jh) \right] \cos \frac{2\pi}{M+1}j + \right. \\
&\left. \left. + \left[S_l^1(\alpha, jh) - \tilde{S}_l^1(\alpha, jh) \right] \sin \frac{2\pi}{M+1}j \right] + 2 \left[g_1(\alpha) + \right. \\
&\left. \left. + g_2(\alpha) \cos \frac{2\pi}{M+1}j \right] \right], \\
\varepsilon \left[\hat{S}_2^{(\xi\eta)} \right] &= -\frac{D}{2K} \left[\left(1 - 3e^{-\alpha|j/h} \right) \sin \frac{2\pi}{M+1}j + \right. \\
&+ \sum_{l=0}^2 \left[\left[S_l^1(\alpha, jh) - \tilde{S}_l^1(\alpha, jh) \right] \cos \frac{2\pi}{M+1}j - \right. \\
&\left. \left. - \left[C_l^1(\alpha, jh) + \tilde{C}_l^1(\alpha, jh) \right] \sin \frac{2\pi}{M+1}j \right] + 2g_2(\alpha) \sin \frac{2\pi}{M+1}j \right],
\end{aligned}$$

якщо $j = 0$, то

$$\varepsilon \left[\hat{C}_2^{(\xi n)}(0) \right] = -\frac{D}{2K} \left[5 + 2g_0(\alpha) + 4g_2(\alpha) \right], \quad \varepsilon \left[\hat{S}_2^{(\xi n)}(0) \right] = 0.$$

Різниця між зміщеннями дискретної і неперервної оцінок кореляційної функції, як бачимо, визнається різницею між інтегральними перетвореннями осциляційної зникаючої функції і відповідними інтегральними схемами. Очевидно, що ця різниця зменшується при зменшенні добутку αh . Обчислюючи зміщення для конкретних параметрів сигналу, можна знайти такі значення кроку дискретизації h , які задовольняють наперед задані умови.

Для уникнення присутності додаткових складових у виразі

$$D \left[\hat{b}_{\xi n}(t, jh) \right] = \alpha_0(jh) + \sum_{n=2;4} \left[\alpha_n^c(jh) \cos n\omega_0 t + \alpha_n^s(jh) \sin n\omega_0 t \right], \quad (4.3.14)$$

що означає дисперсію оцінки

$$\hat{b}_{\xi n}(t, jh) = \hat{B}_0^{(\xi n)}(jh) + \hat{C}_2^{(\xi n)}(jh) \cos 2\omega_0 t + \hat{S}_2^{(\xi n)}(jh) \sin 2\omega_0 t,$$

крок дискретизації треба вибирати згідно з умовою $h \leq \frac{T}{9}$, тобто число M

повинно бути в чотири рази більшим, ніж номер найвищої гармоніки кореляційної функції. В іншому випадку має місце ефект накладання другого роду, а саме дисперсія збільшується за рахунок появи додаткових складових такого m порядку, як основні. Якщо умова відсутності ефекту накладання виконується, то різниця між дисперсіями дискретної і неперервної оцінок визначається мірою наближення певних інтегральних перетворень відповідних інтегральних сум. Конкретні числові характеристики міри цього наближення можуть бути з використанням параметричного опису кореляційних компонентів.

При виконанні нерівності $h \leq \frac{T}{9}$ для коефіцієнтів подання (4.3.14) маємо:

$$\alpha_0(jh) = \frac{1}{K} \left[3\tilde{B}_0(0, jh) + \sum_{p=1}^{K-1} \left(1 - \frac{p}{K} \right) \tilde{B}_0(ph, jh) \left(1 + 2 \cos \frac{4\pi}{M+1} p \right) \right], \quad (4.3.15)$$

$$\alpha_2^c(jh) = \frac{2}{K} \left[\begin{array}{l} \tilde{B}_2^c(0, jh) + \sum_{p=1}^{K-1} \left(1 - \frac{p}{K}\right) \times \\ \times \left[\tilde{B}_2^c(ph, jh) \left(1 + \cos \frac{4\pi}{M+1} p\right) + \tilde{B}_2^s(ph, jh) \sin \frac{4\pi}{M+1} p \right] \end{array} \right], \quad (4.3.16)$$

$$\alpha_2^s(jh) = \frac{2}{K} \left[\begin{array}{l} \tilde{B}_2^s(0, jh) + \sum_{p=1}^{K-1} \left(1 - \frac{p}{K}\right) \times \\ \times \left[\tilde{B}_2^s(ph, jh) \left(1 + \cos \frac{4\pi}{M+1} p\right) + \tilde{B}_2^c(ph, jh) \sin \frac{4\pi}{M+1} p \right] \end{array} \right], \quad (4.3.17)$$

$$\alpha_4^c(jh) = \frac{1}{K} \left[\begin{array}{l} \tilde{B}_4^c(0, jh) + 2 \sum_{p=1}^{K-1} \left(1 - \frac{p}{K}\right) \times \\ \times \left[\tilde{B}_4^c(ph, jh) \cos \frac{4\pi}{M+1} p - \tilde{B}_4^s(ph, jh) \sin \frac{4\pi}{M+1} p \right] \end{array} \right], \quad (4.3.18)$$

$$\alpha_4^s(jh) = \frac{1}{K} \left[\begin{array}{l} \tilde{B}_4^s(0, jh) + 2 \sum_{p=1}^{K-1} \left(1 - \frac{p}{K}\right) \times \\ \times \left[\tilde{B}_4^s(ph, jh) \cos \frac{4\pi}{M+1} p + \tilde{B}_4^c(ph, jh) \sin \frac{4\pi}{M+1} p \right] \end{array} \right]. \quad (4.3.19)$$

Приймаючи до уваги, що

$$\tilde{B}_0(ph, jh) = \frac{1}{8} \tilde{R}_{\mu\nu}(ph, jh) \left(1 + \cos \frac{4\pi}{M+1} p + \cos \frac{4\pi}{M+1} j\right),$$

де $\tilde{R}_{\mu\nu}(ph, jh) = R_\mu(ph)R_\nu(ph) + R_{\mu\nu}[(p+j)h]R_{\mu\nu}[(j-p)h]$, для нульового коефіцієнта отримуємо

$$\alpha_0(jh) = \frac{1}{8K} \left[\begin{array}{l} 3 \left[R_\mu(0)R_\nu(0) + R_{\mu\nu}^2(jh) \right] \left(2 + \cos \frac{4\pi}{M+1} j\right) + \\ + 2 \sum_{p=1}^{K-1} \left(1 - \frac{p}{K}\right) \tilde{R}_{\mu\nu}(ph, jh) \left[\begin{array}{l} 2 + \cos \frac{4\pi}{M+1} j + \left(3 + 2 \cos \frac{4\pi}{M+1} j\right) \times \\ \times \cos \frac{4\pi}{M+1} p + \cos \frac{8\pi}{M+1} p \end{array} \right] \end{array} \right].$$

Для апроксимації (3.4.17) тоді маємо

$$\alpha_0(jh) = \frac{1}{8K} \left[\begin{aligned} & 3 \left(D_1 D_2 + D^2 e^{-2\alpha|jh} \right) \left(2 + \cos \frac{4\pi}{M+1} j \right) + \\ & + 2 D_1 D_2 \left[2g_0(\alpha_1 + \alpha_2) + 3g_2(\alpha_1 + \alpha_2) + \right. \\ & \left. + \left[g_0(\alpha_1 + \alpha_2) + 2g_2(\alpha_1 + \alpha_2) \right] \cos \frac{4\pi}{M+1} j + g_4(\alpha_1 + \alpha_2) \right] + \\ & + 2D^2 \left[2\tilde{g}_0(\alpha, jh) + 3\tilde{g}_2(\alpha, jh) + \right. \\ & \left. + \left[\tilde{g}_0(\alpha, jh) + 2\tilde{g}_2(\alpha, jh) \right] \cos \frac{4\pi}{M+1} j + \tilde{g}_4(\alpha, jh) \right] \end{aligned} \right].$$

При $j=0$, $\tilde{g}_i(\alpha, 0) = g_i(2\alpha)$, тому

$$\alpha_0(0) = \frac{1}{8K} \left[\begin{aligned} & 9(D_1 D_2 + D^2) + 2D_1 D_2 \left[\begin{aligned} & 3g_0(\alpha_1 + \alpha_2) + \\ & + 5g_2(\alpha_1 + \alpha_2)g_4(\alpha_1 + \alpha_2) \end{aligned} \right] + \\ & + 2D^2 \left[3g_0(2\alpha) + 5g_2(2\alpha) + g_4(2\alpha) \right] \end{aligned} \right]. \quad (4.3.21)$$

Для великих j маємо:

$$\alpha_0(0) = \frac{D_1 D_2}{8K} \left[\begin{aligned} & 3 \left(2 + \cos \frac{4\pi}{M+1} j \right) + 2 \left[\begin{aligned} & g_0(\alpha_1 + \alpha_2) + \\ & + 3g_2(\alpha_1 + \alpha_2) \end{aligned} \right] + 2g_4(\alpha_1 + \alpha_2) + \\ & + 2 \left[g_0(\alpha_1 + \alpha_2) + 2g_2(\alpha_1 + \alpha_2) \right] \cos \frac{4\pi}{M+1} j \end{aligned} \right]. \quad (4.3.22)$$

У виразі (4.3.15) виділимо стаціонарну й нестаціонарну частини:

$$\alpha_0^{(c)}(jh) = \frac{1}{8K} \left[\begin{aligned} & 3 \left[2D_1 D_2 + D^2 e^{-2\alpha|jh} \left(1 + \cos \frac{4\pi}{M+1} j \right) \right] + \\ & \left[\begin{aligned} & D_1 D_2 \left[2g_0(\alpha_1 + \alpha_2) + 3g_2(\alpha_1 + \alpha_2) + g_4(\alpha_1 + \alpha_2) \right] + \\ & + 2 \left[\begin{aligned} & \tilde{g}_0(\alpha, jh) + \\ & + \tilde{g}_2(\alpha, jh) + 2\tilde{g}_2(\alpha, j) \end{aligned} \right] \cos \frac{4\pi}{M+1} j + \tilde{g}_4(\alpha, jh) \end{aligned} \right] \end{aligned} \right], \quad (4.3.23)$$

$$\alpha_0^{(h)}(jh) = \frac{1}{8K} \left[\begin{aligned} & 3 \left(D_1 D_2 \cos \frac{4\pi}{M+1} j + D_2 e^{-2\alpha|jh} \right) + \\ & + 2 \left[\begin{aligned} & D_1 D_2 \left[g_0(\alpha_1 + \alpha_2) + 2g_2(\alpha_1 + \alpha_2) \right] \cos \frac{4\pi}{M+1} j + \\ & + D^2 \left[\tilde{g}_0(\alpha, jh) + 2\tilde{g}_2(\alpha, jh) \right]. \end{aligned} \right] \end{aligned} \right]. \quad (4.3.24)$$

Для нульових зсувів

$$\alpha_0^{(c)}(0) = \frac{1}{4K} \left[\begin{aligned} &3(D_1 D_2 + D^2) + \\ &+ 2D_1 D_2 [2g_0(\alpha_1 + \alpha_2) + 3g_2(\alpha_1 + \alpha_2)g_4(\alpha_1 + \alpha_2)] + \\ &+ D^2 [2g_0(2\alpha) + 3g_2(2\alpha) + g_4(2\alpha)] \end{aligned} \right], \quad (4.3.25)$$

$$\alpha_0^{(h)}(0) = \frac{1}{8K} \left[\begin{aligned} &3(D_1 D_2 + D^2) + \\ &+ 2D_1 D_2 [g_0(\alpha_1 + \alpha_2) + 2g_2(\alpha_1 + \alpha_2)g_4(\alpha_1 + \alpha_2)] + \\ &+ 2D^2 [g_0(2\alpha) + 2g_2(2\alpha) + g_4(2\alpha)] \end{aligned} \right], \quad (4.3.26)$$

а для великих

$$\alpha_0^{(c)}(jh) = \frac{D_1 D_2}{4K} [3 + 2g_0(\alpha_1 + \alpha_2) + 3g_2(\alpha_1 + \alpha_2) + g_4(\alpha_1 + \alpha_2)], \quad (4.3.27)$$

$$\alpha_0^{(h)}(jh) = \frac{D_1 D_2}{8K} \left[3 \cos \frac{4\pi}{M+1} j + 2 [g_0(\alpha_1 + \alpha_2) + 2g_2(\alpha_1 + \alpha_2)] \cos \frac{4\pi}{M+1} j \right]. \quad (4.3.28)$$

Зі співвідношень (4.3.20)–(4.3.28) випливає, що незалежні від зсуву складові коефіцієнта $\alpha_0(jh)$, як і в неперервному випадку, визначаються тільки стаціонарним наближенням сигналу, а складові, які змінюються за зсувом періодично – його не стаціонарністю. Відношення між $\alpha_0^{(h)}(jh)$ і $\alpha_0^{(c)}(jh)$ при переході до дискретного оцінювання суттєво не змінюється. А це означає, що не стаціонарність і в дискретному випадку істотно впливає на усереднену в часі величину дисперсії оцінки взаємкореляційної функції.

Використовуючи вирази

$$\tilde{B}_2^c(ph, jh) = \frac{1}{8} \tilde{R}_{uv}(ph, jh) \left[1 + \cos \frac{4\pi}{M+1} p + \cos \frac{4\pi}{M+1} j + \cos \frac{4\pi}{M+1} [(p+j)h] \right],$$

$$\tilde{B}_2^s(ph, jh) = -\frac{1}{8} \tilde{R}_{uv}(ph, jh) \left[\sin \frac{4\pi}{M+1} p + \sin \frac{4\pi}{M+1} j + \sin \frac{4\pi}{M+1} [(p+j)h] \right],$$

$$\tilde{B}_4^c(ph, jh) = \frac{1}{8} \tilde{R}_{uv}(ph, jh) \cos \frac{4\pi}{M+1} [(p+j)h],$$

$$\tilde{B}_4^s(ph, jh) = -\frac{1}{8} \tilde{R}_{uv}(ph, jh) \sin \frac{4\pi}{M+1} [(p+j)h],$$

і співвідношення (4.3.16)–(4.3.19), отримуємо формули для коефіцієнтів вищих номерів подання (4.3.14):

$$\alpha_2^c(jh) = \frac{1}{2K} \left[\begin{aligned} & \left[R_\mu(0)R_\nu(0) + R_{\mu\nu}^2(jh) \right] \left(1 + \cos \frac{4\pi}{M+1} j \right) + \\ & + \left[\sum_{p=1}^{K-1} \left(1 - \frac{p}{K} \right) \tilde{R}_{\mu\nu}(ph, jh) \left(1 + \cos \frac{4\pi}{M+1} p \right) \right] \left(1 + \cos \frac{4\pi}{M+1} j \right) \end{aligned} \right],$$

$$\alpha_2^s(jh) = -\frac{1}{2K} \left[\begin{aligned} & \left[R_\mu(0)R_\nu(0) + R_{\mu\nu}^2(jh) \right] \sin \frac{4\pi}{M+1} j + \\ & + \left[\sum_{p=1}^{K-1} \left(1 - \frac{p}{K} \right) \tilde{R}_{\mu\nu}(ph, jh) \left(1 + \cos \frac{4\pi}{M+1} p \right) \right] \sin \frac{4\pi}{M+1} j \end{aligned} \right],$$

$$\alpha_4^c(jh) = \frac{1}{8K} \left[\begin{aligned} & \left[R_\mu(0)R_\nu(0) + R_{\mu\nu}^2(jh) \right] \cos \frac{4\pi}{M+1} j + \\ & + 2 \left[\sum_{p=1}^{K-1} \left(1 - \frac{p}{K} \right) \tilde{R}_{\mu\nu}(ph, jh) \right] \cos \frac{4\pi}{M+1} j \end{aligned} \right],$$

$$\alpha_4^s(jh) = -\frac{1}{8K} \left[\begin{aligned} & \left[R_\mu(0)R_\nu(0) + R_{\mu\nu}^2(jh) \right] \sin \frac{4\pi}{M+1} j + \\ & + 2 \left[\sum_{p=1}^{K-1} \left(1 - \frac{p}{K} \right) \tilde{R}_{\mu\nu}(ph, jh) \right] \sin \frac{4\pi}{M+1} j \end{aligned} \right].$$

Звідси при апроксимаціях (3.4.18) маємо:

$$\alpha_2^c(jh) = \frac{1}{2K} \left[\begin{aligned} & D_1 D_2 + D^2 e^{-2\alpha|jh} + \\ & + D_1 D_2 [g_0(\alpha_1 + \alpha_2) + g_2(\alpha_1 + \alpha_2)] + \left(1 + \cos \frac{4\pi}{M+1} j \right), \\ & + D^2 [\tilde{g}_0(\alpha, jh) + \tilde{g}_2(\alpha, jh)] \end{aligned} \right],$$

$$\alpha_2^s(jh) = -\frac{1}{2K} \left[\begin{aligned} & D_1 D_2 + D^2 e^{-2\alpha|jh} + \\ & + D_1 D_2 [g_0(\alpha_1 + \alpha_2) + g_2(\alpha_1 + \alpha_2)] + \sin \frac{4\pi}{M+1} j, \\ & + D^2 [\tilde{g}_0(\alpha, jh) + \hat{g}_2(\alpha, jh)] \end{aligned} \right], \quad (4.3.29)$$

$$\alpha_4^c(jh) = \frac{1}{8K} \left[\begin{aligned} & D_1 D_2 + D^2 e^{-2\alpha|jh} + \\ & + 2D_1 D_2 g_0(\alpha_1 + \alpha_2) + 2D^2 \tilde{g}_0(\alpha, jh) \end{aligned} \right] \cos \frac{4\pi}{M+1} j, \quad (4.3.30)$$

$$\alpha_4^s(jh) = -\frac{1}{8K} \left[\begin{aligned} & D_1 D_2 + D^2 e^{-2\alpha|jh} + \\ & + 2D_1 D_2 g_0(\alpha_1 + \alpha_2) + 2D^2 g_0(\alpha, jh) \end{aligned} \right] \sin \frac{4\pi}{M+1} j. \quad (4.3.31)$$

Поведінка коефіцієнтів (4.3.29)–(4.3.31) при зміні зсуву, як видно, є такою самою, як аналогічних величин в неперервному випадку. Вони містять складові, які затихають з роком зсуву, а також періодичні складові. Періодичні складові при великих зсувах, коли

$$\alpha_2^c(jh) = \frac{D_1 D_2}{2K} [1 + g_0(\alpha_1 + \alpha_2) + g_2(\alpha_1 + \alpha_2)] \left(1 + \cos \frac{4\pi}{M+1} j\right),$$

$$\alpha_2^s(jh) = -\frac{D_1 D_2}{2K} [1 + g_0(\alpha_1 + \alpha_2) + g_2(\alpha_1 + \alpha_2)] \sin \frac{4\pi}{M+1} j,$$

$$\alpha_4^c(jh) = \frac{D_1 D_2}{8K} [1 + 2g_0(\alpha_1 + \alpha_2)] \cos \frac{4\pi}{M+1} j,$$

$$\alpha_4^s(jh) = -\frac{D_1 D_2}{8K} [1 + 2g_0(\alpha_1 + \alpha_2)] \sin \frac{4\pi}{M+1} j,$$

мають амплітуди, які є значними в порівнянні зі значеннями косинусних коефіцієнтів при $j = 0$:

$$\alpha_2^c(0) = \frac{1}{K} [D_1 D_2 [1 + g_0(\alpha_1 + \alpha_2) + g_2(\alpha_1 + \alpha_2)] + D^2 [1 + g_0(2\alpha) + g_2(2\alpha)]],$$

$$\alpha_4^c(0) = \frac{1}{8K} [D_1 D_2 [1 + 2g_0(\alpha_1 + \alpha_2)] + D^2 [1 + 2g_0(2\alpha)]].$$

Синусні коефіцієнти при $j = 0$ дорівнюють нулю і тоді

$$D[b_{\text{ш}}(t, 0)] = \frac{1}{8K} \left[\begin{aligned} &9(D_1 D_2 + D^2) + 2D_1 D_2 [3g_0(\alpha_1 + \alpha_2) + 5g_2(\alpha_1 + \alpha_2) + \\ &+ g_4(\alpha_1 + \alpha_2)] + 2D^2 [3g_0(2\alpha) + 5g_2(2\alpha) + g_4(2\alpha)] + \\ &+ 8 \left[\begin{aligned} &D_1 D_2 [1 + g_0(\alpha_1 + \alpha_2) + g_2(\alpha_1 + \alpha_2)] + \\ &D^2 [1 + g_0(2\alpha) + g_2(2\alpha)] \end{aligned} \right] \cos 2\omega_0 t + \\ &+ 8 \left[D_1 D_2 [1 + 2g_0(\alpha_1 + \alpha_2)] + D^2 [1 + 2g_0(2\alpha)] \right] \cos 4\omega_0 t \end{aligned} \right].$$

При зменшенні αh значення цієї функції наближається до величини яка визначає дисперсію неперервної оцінки взаємкореляційної функції.

Відмічені вище властивості дисперсії $D[\hat{b}_{\xi\eta}(t, jh)]$ приводить до збільшення з ростом зсуву відносно середньоквадратичної похибки оцінювання і перехід її для певних u_m через допустимий рівень, звідси випливає висновок про необхідність усічення корелограми.

4.4. Висновки до розділу 4

1. Проведено аналіз компонентних оцінок взаємкореляційної функції, які отримуються на основі тригонометричного полінома, коефіцієнти якого знаходяться на основі інтегральних перетворень Фур'є скінчених відрізків реалізацій сигналів. Компонентний метод оцінювання можна застосувати тоді, коли є відомим число гармонічних складових взаємкореляційної функції. Таке число може бути знайдене на основі результатів обробки реалізацій когерентним методом. Компонентні оцінки є ефективніші від когерентних, особливо при малому числі гармонік та швидкому зниканні кореляційних зв'язків. Ефективність компонентних оцінок падає при збільшенні числа гармонік і в асимптоті ці компонентні статистики переходять у когерентні. При скінченному числі гармонік різниця між похибками оцінювання компонентних та когерентних оцінок визначається формулами для статистичних характеристик, які отримані в розділі. Такі характеристики представлені рядами Фур'є, коефіцієнти яких визначаються інтегральними перетвореннями кореляційних компонентів. Показано, такі коефіцієнти для зміщення оцінки є періодичними функціями зсуву. Така залежність приводить до небажаної властивості – швидкого зростання відносної систематичної похибки з ростом зсуву, а це вимагає усічення корелограми. Встановлено, що з ростом зсуву збільшується також середньоквадратичне відхилення оцінок, тому точка усічення корелограми повинна вибиратися з використанням формул для статистичних характеристик як першого, так і другого порядків.

2. Отримані та проаналізовані формули для визначення статистичних характеристик дискретних компонентних оцінок взаємкореляційної функції. Показано, що вирішальний вплив на ефективність дискретних компонентних оцінок має гармонічний склад тієї чи іншої характеристики та швидкість зникання кореляційних зв'язків. Досліджені ефекти накладання першого і другого роду, отримані умови їх відсутності. При виконанні таких умов виведені формули для коефіцієнтів Фур'є зміщення та дискретизації дають можливість

обчислити систематичну похибку оцінки та її середньоквадратичне відхилення в залежності від кроку дискретизації h , величини вибірки K , точки корелограми і на цій основі провести обґрунтований вибір параметрів обробки.

3. Властивості статистичних характеристик компонентних оцінок взаємкореляційної функції конкретизовані для амплітудномодульованих сигналів, що дало можливість детальніше проаналізувати залежності статистичних похибок оцінювання від параметрів обробки, а для конкретних параметрів обробки отримані числові результати. Показано, що періодична залежність від зсуву похибок оцінювання зумовлена не стаціонарністю сигналів, а амплітуда періодичних осциляцій може бути зменшена відповідним вибором довжини реалізації та кроком дискретизації. За відсутності ефектів накладання першого і другого роду між похибками неперервних і дискретних оцінок можуть бути обчислені на основі виведення співвідношень і на цій основі вибраний той крок дискретизації, який забезпечує потрібну різницю між відповідними інтегралами і інтегральними сумами.

РОЗДІЛ 5

ОБЧИСЛЕННЯ ВЗАЄМОСПЕКТРАЛЬНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЕРІОДИЧНО КОРЕЛЬОВАНИХ ВИПАДКОВИХ СИГНАЛІВ ЗА ЕМПІРИЧНИМИ ДАНИМИ

ПКВП – це нестационарні випадкові процеси, їх спектральні властивості характеризуються двочастотною спектральною густиною $f(\omega_1, \omega_2)$. Для цього класу процесів двочастотна спектральна густина $f(\omega_1, \omega_2)$ зосереджена тільки на прямих $\omega_2 = \omega_1 - k\omega_0$, тобто

$$f(\omega_1, \omega_2) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k(\omega) f(\omega_2 - \omega_1 + k\omega_0),$$

то при емпіричному спектральному аналізі ПКВП нема потреби в обчисленні оцінок її залежності від обох аргументів. Такий аналіз може бути зведений тільки до знаходження оцінок спектральних компонентів $\hat{f}_k(\omega)$ або оцінок змінної спектральної густини $\hat{f}(\omega, t)$, коефіцієнтами Фур'є, якої вони є. Аналогічний підхід будемо використовувати і при взаємному спектральному аналізі.

5.1. Когерентний взаємоспектральний аналіз

При формуванні статистик змінної взаємоспектральної густини і взаємоспектральних компонентів будемо виходити з виразів, які визначають ці характеристики, використовуючи при цьому згладжувальні вікна $k(u)$. Відтак розглянемо статистику

$$\hat{f}_{\xi\eta}(t, u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{b}_{\xi\eta}(t, u) k(u) e^{-i\omega u} du, \quad (5.1.1)$$

де $k(-u) = k(u)$, $k(0) = 1$ і $k(u) = 0$ при $|u| > u_m$, u_m – точка усічення корелограми.

При визначенні взаємкореляційної функції будемо використовувати статистику

$$\hat{b}_{\xi\eta}(t, u) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \xi(t+nT)\eta(t+u+nT) - \hat{m}_{\xi}(t)\hat{m}_{\eta}(t+nT), \quad (5.1.2)$$

де

$$\hat{m}_{\xi}(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \xi(t+nT), \quad \hat{m}_{\eta}(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \eta(t+nT).$$

Оскільки [3, 17, 207]

$$E\hat{b}_{\xi\eta}(t, u) = b_{\xi\eta}(t, u) - \frac{1}{N} \sum_{n=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) b_{\xi\eta}(t, u+nT), \quad (5.1.3)$$

то

$$Ef_{\xi\eta}(\omega, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k(u) \left[b_{\xi\eta}(t, u) - \frac{1}{N} \sum_{n=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) b_{\xi\eta}(t, u+nT) \right] e^{-i\omega u} du.$$

Використовуючи подання

$$k(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\omega_2) e^{i\omega_2 u} d\omega_2, \quad (5.1.4)$$

$$b_{\xi\eta}(t, u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\eta}(\omega_1, t) e^{i\omega_1 u} d\omega_1,$$

отримуємо

$$\begin{aligned} Ef_{\xi\eta}(\omega, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\omega_2) f_{\xi\eta}(\omega_1, t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega_2 + \omega_1 - \omega)u} du \right] [1 - g(\omega_1, N)] d\omega_1 d\omega_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega_1, t) h(\omega_1 - \omega, u_m) [1 - g(\omega_1, N)] d\omega_1, \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

де

$$g(\omega, N) = \frac{1}{N} \sum_{n=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e^{i\omega nT}. \quad (5.1.6)$$

Функцію $g(\omega, N)$ подамо у вигляді

$$g(\omega, N) = \frac{1}{N^2} \sum_{m, n=0}^{N-1} e^{i\omega(m-n)T}$$

і врахуємо, що

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{i\omega n T} = \frac{e^{i\omega N \frac{T}{2}} \sin \frac{\omega}{2} NT}{e^{i\omega \frac{T}{2}} \sin \frac{\omega}{2} T}.$$

Тоді

$$g(\omega, N) = \sin^2 \frac{\omega}{2} NT / N^2 \sin^2 \frac{\omega}{2} T.$$

Функція $g(\omega, N)$ є періодичною з періодом ω_0 : $g(\omega + k\omega_0, N) = g(\omega)$. При цьому $g(k\omega_0, N) = 1$. Якщо $N \rightarrow \infty$, то для всіх $\omega \neq k\omega_0$, $k \in \mathbb{Z}$ $g(\omega, N)$ прямує до нуля.

Згладжуючи вікна вибираються так, що при великих u_m функції $\lambda(\omega)$ мають вигляд гострих піків на частоті $\omega = 0$. Якщо взаємоспектральна густина мало змінюється за частотою на інтервалі, де $\lambda(\omega)$ суттєво відрізняється від нуля, то

$$E\hat{f}_{\xi\eta}(\omega, t) = f_{\xi\eta}(\omega, t) - f_{\xi\eta}(\omega, t) \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\omega - \omega_1) g(\omega_1, N) d\omega_1.$$

Зміщення оцінки (5.1.5) при $N \rightarrow \infty$, оскільки функція $g(\omega_1, N)$ в асимптотиці вироджується в одиничні сигнали, прямує до нуля для всіх $\omega \in \mathbb{R}$.

Приймаючи до уваги формулу (5.1.6) і подання

$$\lambda(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k(u) e^{-i\omega u} du,$$

вираз для зміщення запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \varepsilon[\hat{f}_{\xi\eta}(\omega, t)] &= -f_{\xi\eta}(\omega, t) \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\omega - \omega_1) g(\omega_1, N) d\omega_1 = \\ &= -f_{\xi\eta}(\omega, t) \int_{-\infty}^{\infty} k(u) e^{-i\omega u} \left[\frac{1}{N} \sum_{n=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N} \right) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(u-nT)\omega_1} d\omega_1 \right] \right] du = \\ &= -\frac{f_{\xi\eta}(\omega, t)}{N} \sum_{n=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N} \right) e^{-i\omega n T} k(nT). \end{aligned}$$

Звідси випливає, що обумовлені скінченною довжиною відрізка реалізації зміщення будуть тим меншими, чим на меншому інтервалі $[-u_m, u_m]$ не рівним нулю є кореляційне вікно $k(u)$. При $u_{\max} \ll T$ величини зміщень будуть достатньо

малими. Однак при зменшенні u_m буде розширяться пік спектрального вікна $\lambda(\omega)$, що збільшує похибку. Котрою ми раніше нехтували, покладаючи

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\omega_1 - \omega) f_{\xi\eta}(\omega_1, t) d\omega_1 = f_{\xi\eta}(\omega, t).$$

Таким чином, намагання зменшити зміщення оцінок змінної взаємоспектральної густини приводить до двох протилежних вимог. Прийняти до уваги якесь одно з них чи відразу обидва, намагаючись при цьому знайти компромісне рішення – це залежить від конкретної задачі взаємо спектрального аналізу.

Дисперсії оцінки визначається формулою:

$$D[\hat{f}_{\xi\eta}(\omega, t)] = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-u_m}^{u_m} \int_{-u_m}^{u_m} R_{\hat{b}}(t, u_1, u_2) e^{i\omega(u_2 - u_1)} du_1 du_2, \quad (5.1.7)$$

де $R_{\hat{b}_{\xi\eta}}(t, u_1, u_2) = E\hat{b}_{\xi\eta}(t, u_1)\hat{b}_{\xi\eta}(t, u_2) - E\hat{b}_{\xi\eta}(t, u_1)E\hat{b}_{\xi\eta}(t, u_2)$. Когерентну оцінку кореляційної функції (5.1.2) можна представити у вигляді:

$$\begin{aligned} \hat{b}_{\xi\eta}(t, u) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\begin{array}{l} \left[\overset{\circ}{\xi}(t+nT) + m_{\xi}(t) \right] \left[\overset{\circ}{\eta}(t+u+nT) + m_{\eta}(t+nT) \right] - \\ - \left[\overset{\circ}{\hat{m}}_{\xi}(t) + m_{\xi}(t) \right] \left[\overset{\circ}{\hat{m}}_{\eta}(t+u) + m_{\eta}(t+u) \right] \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \overset{\circ}{\xi}(t+nT) \overset{\circ}{\eta}(t+u+nT) - \overset{\circ}{\hat{m}}_{\xi}(t) \overset{\circ}{\hat{m}}_{\eta}(t+nT). \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

Тут

$$\overset{\circ}{\hat{m}}_{\xi}(t) = \hat{m}_{\xi}(t) - \hat{m}_{\xi}(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [\overset{\circ}{\xi}(t+nT) - m_{\xi}(t+nT)] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \overset{\circ}{\xi}(t+nT),$$

$$\overset{\circ}{\hat{m}}_{\eta}(t) = \hat{m}_{\eta}(t+u) - \hat{m}_{\eta}(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\overset{\circ}{\eta}(t+u+nT) - m_{\eta}(t+u+nT) \right] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \overset{\circ}{\eta}(t+u+nT).$$

На основі співвідношення (5.1.8) для гауссових ПКВП в першому наближенні отримуємо:

$$\begin{aligned} R_{\hat{b}_{\xi\eta}}(t, u_1, u_2) &= \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{n,m=0}^{N-1} \overset{\circ}{\xi}(t+nT) \overset{\circ}{\eta}(t+u_1+nT) \overset{\circ}{\xi}(t+mT) \overset{\circ}{\eta}(t+u_2+nT) - b_{\xi\eta}(t, u_1) b_{\xi\eta}(t, u_2) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{N^2} \sum_{m,n=0}^{N-1} \left[b_{\xi}(t, (m-n)T) b_{\eta}(t+u_1, u_2 - u_1 + (m-n)T) + \right. \\
&\quad \left. + b_{\xi\eta}(t, u_2 + (m-n)T) b_{\xi\eta}(t, u_1 + (n-m)T) \right] = \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N} \right) \left[b_{\xi}(t, nT) b_{\eta}(t+u_1, u_2 - u_1 + nT) + b_{\xi\eta}(t, u_2 + nT) b_{\xi\eta}(t, u_1 - nT) \right].
\end{aligned}$$

Введемо в розгляд функцію

$$b_{\zeta}(t, nT, u_1, u_2) = b_{\xi}(t, nT) b_{\eta}(t+u_1, u_2 - u_1 + nT) + b_{\xi\eta}(t, u_2 + nT) b_{\xi\eta}(t, u_1 - nT).$$

Ця функція періодично змінюється за часом, том у її можна представити у вигляді ряду Фур'є:

$$b_{\zeta}(t, nT, u_1, u_2) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{B}_k^{(\xi\eta)}(nT, u_1, u_2) e^{ik\omega_0 t}.$$

Враховуючи, що

$$b_{\xi}(t, u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{B}_k^{(\xi)}(u) e^{ik\omega_0 t}, \quad b_{\eta}(t, u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{B}_k^{(\eta)}(u) e^{ik\omega_0 t}, \quad b_{\xi\eta}(t, u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{B}_k^{(\xi\eta)}(u) e^{ik\omega_0 t},$$

знаходимо

$$\tilde{B}_k^{(\xi\eta)}(nT, u_1, u_2) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{il\omega_0 u_1} \left[B_{k+l}^{(\xi)}(nT) \bar{B}_l^{(\eta)}(u_2 - u_1 + nT) + B_{k+l}^{(\xi\eta)}(u_2 + nT) \bar{B}_l^{(\eta\xi)}(nT - u_1) \right].$$

Відтак

$$R_{\hat{b}_{\xi\eta}}(t, u_1, u_2) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{ik\omega_0 t} \left[\frac{1}{N} \sum_{n=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N} \right) \tilde{B}_k^{(\xi\eta)}(nT, u_1, u_2) \right]$$

Вираз для дисперсії (5.1.7) тоді приймає вигляд

$$D \left[\hat{f}_{\xi\eta}(\omega, t) \right] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} D_k(\omega) e^{ik\omega_0 t}, \quad (5.1.9)$$

де

$$\begin{aligned}
D_l(\omega) &= \frac{1}{N} \sum_{n=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N} \right) \left[\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(u_1) k(u_2) \tilde{B}_k^{(\xi\eta)}(nT, u_1, u_2) e^{i\omega(u_2 - u_1)} du_1 du_2 \right] = \\
&= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left[\frac{1}{N} \sum_{n=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N} \right) \left[\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(u_1) k(u_2) \left[B_{l+k}^{(\xi)}(nT) \bar{B}_l^{(\eta)}(u_2 - u_1 + nT) + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + B_{l+k}^{(\xi\eta)}(u_2 + nT) \bar{B}_l^{(\eta\xi)}(nT - u_1) \right] e^{i\omega(u_2 - u_1)} e^{-il\omega_0 u_1} du_1 du_2 \right].
\end{aligned}$$

Виразимо кореляційні компоненти через спектральні

$$B_k^{(\xi)}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_k^{(\xi)}(\omega) e^{i\omega u} d\omega, \quad B_k^{(\eta)}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_k^{(\eta)}(\omega) e^{i\omega u} d\omega, \quad (5.1.10)$$

$$B_k^{(\xi\eta)}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_k^{(\xi\eta)}(\omega) e^{i\omega u} d\omega, \quad (5.1.11)$$

а функцію вікна $k(u)$ через вагову функцію (формула (5.1.6)). Після перетворень знаходимо

$$D_k(\omega) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\lambda(\omega_1 + \omega) \lambda(\omega_1 + \omega - l\omega_0) f_{k+l}^{(\xi)}(\omega_2) f_{-l}^{(\eta)}(\omega_1) g(\omega_1 + \omega_2, N) + \right. \\ \left. + \lambda(\omega + \omega_2) \lambda(\omega - \omega_1) f_{l+k}^{(\xi\eta)}(\omega_2) f_{-l}^{(\xi\eta)}(\omega_1) g(\omega_1 + \omega_2, N) \right] d\omega_1 d\omega_2.$$

Функція $\lambda(\omega)$ має гострі піки при нульовому значенні аргументу, тому можна вважати, що $\lambda(\omega_1 + \omega) \lambda(\omega_1 + \omega + l\omega_0) \approx 0$ для $l \neq 0$. Якщо на ширині спектрального вікна спектральні компоненти змінюються мало, то

$$D_k(\omega) \approx f_0^{(\eta)}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2(\omega_1 + \omega) f_k^{(\xi)}(\omega_2) g(\omega_1 + \omega_2, N) d\omega_1 d\omega_2 + \\ + \sum_{l \in \mathbb{Z}} f_{-l}^{(\xi\eta)}(\omega) f_{l+k}^{(\xi\eta)}(-\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\omega - \omega_1) \lambda(\omega + \omega_2) g(\omega_2 - \omega_1, N) d\omega_1 d\omega_2.$$

Першу складову цього виразу перепишемо у вигляді

$$D_l^{(1)}(\omega) = f_0^{(\eta)}(\omega) \frac{1}{N} \sum_{n=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N} \right) \int_{-\infty}^{\infty} f_k^{(\xi)}(\omega_2) e^{i\omega_2 n T} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2(\omega + \omega_1) e^{i\omega_1 n T} d\omega_1 \right] d\omega_2. \quad (5.1.12)$$

Зробивши заміну $\omega' = \omega + \omega_1$, маємо:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2(\omega + \omega_1) e^{i\omega_1 n T} d\omega_1 = e^{-i\omega n T} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2(\omega_1) e^{i\omega_1 n T} d\omega_1.$$

Тоді

$$D_l^{(1)}(\omega) = f_0^{(\eta)}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2(\omega_1) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_k^{(\xi)}(\omega_2) g(\omega_1 + \omega_2 - \omega, N) d\omega_2 \right] d\omega_1.$$

Врахувавши, що $g(\omega, N)$ при збільшенні N прямує до одиничних сигналів у точках $\omega = k\omega_0$, $k \in \mathbb{Z}$, внутрішній інтеграл перетворимо наступним чином:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_k^{(\xi)}(\omega_2) g(\omega_1 + \omega_2 - \omega, N) d\omega_2 &= \sum_{p \in \mathbb{Z}} \int_{(2p-1)\frac{\pi}{T}}^{(2p+1)\frac{\pi}{T}} f_k^{(\xi)}(\omega_2) g(\omega_1 + \omega_2 - \omega, N) d\omega_2 \approx \\ &\approx \sum_{p \in \mathbb{Z}} f_k^{(\xi)}(\omega - \omega_1 + p\omega_0) \int_{(2p-1)\frac{\pi}{T}}^{(2p+1)\frac{\pi}{T}} g(\omega_1 + \omega_2 - \omega, N) d\omega_2. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\int_{(2p-1)\frac{\pi}{T}}^{(2p+1)\frac{\pi}{T}} g(\omega_1 + \omega_2 - \omega, N) d\omega_2 = \frac{1}{N^2} \sum_{m,n=0}^{N-1} e^{i\omega_2(m-n)T} \int_{(2p-1)\frac{\pi}{T}}^{(2p+1)\frac{\pi}{T}} e^{i\omega_1(m-n)T} d\omega_1 = \begin{cases} \frac{2\pi}{T}, & m = n, \\ 0, & m \neq n, \end{cases}$$

то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_k^{(\xi)}(\omega - \omega_1 + p\omega_0) d\omega_2 \approx \frac{2\pi}{\theta} \sum_{p \in \mathbb{Z}} f_k^{(\xi)}(\omega - \omega_1 + p\omega_0).$$

Врахувавши наближену рівність

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_k^{(\xi)}(\omega - \omega_1 + p\omega_0) \lambda^2(\omega_1) d\omega_1 = f_k^{(\xi)}(\omega + p\omega_0) \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2(\omega_1) d\omega_1 = W(0) f_k^{(\xi)}(\omega + p\omega_0),$$

де

$$W(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k^2(u) e^{-i\omega u} du. \quad (5.1.13)$$

До співвідношення (5.1.13) легко приходимо, прийнявши до уваги подання

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2(\omega_1) d\omega_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(u_1) k(u_2) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_1(u_1+u_2)} d\omega_1 \right] du_1 du_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k^2(u) du.$$

Для другої складової виразу дисперсії знаходимо

$$\begin{aligned} D_k^{(2)}(\omega) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} f_{-l}^{(\xi\eta)}(\omega) f_{l+k}^{(\xi\eta)}(-\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(u_1) k(u_2) \left[\frac{1}{N} \sum_{n=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N} \right) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_2(u_1-nT)} d\omega_2 \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_1(u_2-nT)} d\omega_1 \right] \right] e^{-i\omega(u_1+u_2)} du_1 du_2 = \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} f_{-l}^{(\xi\eta)}(\omega) f_{l+k}^{(\xi\eta)}(-\omega) \left[\frac{1}{N} \sum_{n=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N} \right) k^2(nT) e^{-i2\omega nT} \right] = \end{aligned}$$

$$= \sum_{l \in \mathbb{Z}} f_{-l}^{(\xi\eta)}(\omega) f_{l+k}^{(\xi\eta)}(-\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} W(\omega_1) g(\omega_1 - 2\omega, N) d\omega_1 \right].$$

Останній інтеграл можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega_1) g(\omega_1 - 2\omega, N) d\omega_1 &= \sum_{p \in \mathbb{Z}} \int_{\frac{(2p-1)\pi}{T}}^{\frac{(2p+1)\pi}{T}} W(\omega_1) g(\omega_1 - 2\omega, N) d\omega_1 = \\ &= \sum_{p \in \mathbb{Z}} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} W(\omega_1 + p\omega_0) g(\omega_1 - 2\omega, N) d\omega_1. \end{aligned}$$

Прийемо наближено

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} W(\omega_1 + p\omega_0) g(\omega_1 - 2\omega, N) d\omega_1 = \sum_{p \in \mathbb{Z}} W(2\omega + p\omega_0) \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} g(\omega_1 - 2\omega, N) d\omega_1.$$

Оскільки

$$\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} g(\omega_1 - 2\omega, N) d\omega_1 = \frac{1}{N^2} \sum_{m,n=0}^{N-1} e^{-i2\omega(m-n)T} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} e^{i\omega_1(m-n)T} d\omega_1 = \begin{cases} \frac{2\pi}{T}, & m = n, \\ 0, & m \neq n, \end{cases}$$

то

$$D_l^{(2)}(\omega) = \frac{2\pi}{\theta} \sum_{p \in \mathbb{Z}} W(2\omega + p\omega_0) \sum_{l \in \mathbb{Z}} f_{-l}^{(\xi\eta)}(\omega) f_{l+k}^{(\xi\eta)}(-\omega).$$

Відтак, коефіцієнти Фур'є дисперсії оцінки (5.1.9) визначаються наближеною формулою

$$D_k(\omega) = \frac{2\pi}{\theta} \left[\begin{aligned} &f_0^{(n)}(\omega) W(0) \sum_{p \in \mathbb{Z}} f_k^{(\xi)}(\omega + p\omega_0) + \\ &+ \sum_{p \in \mathbb{Z}} W(2\omega + p\omega_0) \sum_{l \in \mathbb{Z}} f_{-l}^{(\xi\eta)}(\omega) f_{l+k}^{(\xi\eta)}(-\omega) \end{aligned} \right]. \quad (5.1.4)$$

Ці величини прямують до нуля при $\theta \rightarrow \infty$. Швидкість їх збіжності залежить як від спектральних характеристик даного ПКВП, так і від форми вибраного вікна, а саме, властивостей функції $W(\omega)$. Використовуючи (5.1.13), а також

формулу Пуассона $\frac{1}{T} \sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{il\omega_0 u} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \delta(u - lT)$, маємо

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}} W(2\omega - p\omega_0) = \frac{T}{2\pi} \sum_{p \in \mathbb{Z}} k^2(pT) e^{i2\omega pT}, \quad W(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-u_m}^{u_m} k^2(u) du.$$

Останній інтеграл є величиною, обернено пропорційною до так званої еквівалентної смуги частот спектрального аналізу Δf_e [11, 79, 199], так що

$$W(0) = \frac{1}{2\pi \Delta f_e}.$$

Еквівалентна смуга частот Δf_e , характеризуючи ширину

кореляційного вікна, має вирішальний вплив на точність оцінювання. Оскільки

для типових вікон величина $\frac{1}{\Delta f_e}$ приймає значення від $0.5u_m$ до $2u_m$ [5, 136], то

при $\frac{u_m}{\theta} \ll 1$ складові $D_k^{(1)}(\omega)$ будуть незначними за величиною. При такому ж

співвідношенні між u_m і θ малими будуть також і величини $D_k^{(2)}(\omega)$.

Таким чином, при заданій довжині відрізка реалізації θ дисперсія оцінки спектральної густини (5.1.1) буде зменшуватися зі зменшенням ширини кореляційного вікна. Так само поведуться і флуктуаційні складові зміщення оцінок. Однак регулярну складову зміщення, котра визначає роздільну здатність спектрального аналізу, можна зменшити, вже збільшуючи u_m . Наявність таких різних тенденцій в залежностях характеристик оцінок ускладнює обґрунтований вибір параметрів u_m і θ . Такий вибір слід проводити, виходячи з конкретної мети спектрального аналізу і сформованих на цій основі з використанням формул (5.1.5), (5.1.9) і (5.1.14) критеріїв якості оцінювання.

5.2. Оцінювання взаємоспектральних компонентів

Проводячи спектральну обробку реалізацій ПКВП, безумовно, не слід обмежуватися тільки обчисленнями змінної спектральної густини $f(\omega, t)$, оскільки вже сама періодичність цієї характеристики за часом припускає можливість деталізації спектральної структури цього класу процесів при

використанні коефіцієнтів розкладу її в ряд Фур'є – взаємоспектральних компонентів. Для даної частоти ω спектральні компоненти кількісно характеризують форму часової мінливості спектральної густини, а будучи одночасно перетвореннями Фур'є кореляційних компонентів, є носіями інформації про спектральні властивості стаціонарно зв'язаних модулюючих процесів, що формують даний ПКВП–сигнали.

Оцінки взаємоспектральних компонентів можуть бути отримані як на основі оцінок змінної кореляційної функції

$$\hat{f}_k^{(\xi\eta)}(\omega) = \frac{1}{T} \int_0^T \hat{f}_{\xi\eta}(\omega, t) e^{-ik\omega_0 t} dt, \quad (5.2.1)$$

так і оцінок кореляційних компонентів

$$\hat{f}_k^{(\xi\eta)}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k(u) \hat{B}_k^{(\xi\eta)}(u) e^{-i\omega u} du. \quad (5.2.2)$$

Приймаючи до уваги статистику (5.1.1), отримуємо

$$\begin{aligned} \hat{f}_k^{(\xi\eta)}(\omega) &= \frac{1}{T} \int_0^T e^{-ik\omega_0 t} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-u_m}^{u_m} k(u) \hat{b}_{\xi\eta}(t, u) e^{-i\omega u} du \right] dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega u} \left[\frac{1}{T} \int_0^T \hat{b}_{\xi\eta}(t, u) e^{-ik\omega_0 t} dt \right] du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k(u) \hat{B}_k^{(\xi\eta)}(u) e^{-i\omega u} du. \end{aligned}$$

Таким чином, статистики (5.2.1) і (5.2.2) співпадають. Тому розглянемо тільки одну з них, а саме (5.2.2).

Прийmemo, що

$$\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{T} \int_0^T \hat{b}_{\xi\eta}(t, u) e^{-ik\omega_0 t} dt, \quad (5.2.3)$$

де оцінка $\hat{b}_{\xi\eta}(t, u)$ визначається формулою (5.1.2). Приймаючи до уваги співвідношення (5.1.3), отримуємо

$$E\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(u) = B_k^{(\xi\eta)}(u) - \frac{1}{N} \sum_{n=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) B_k^{(\xi\eta)}(u + nT).$$

Звідси

$$E\hat{f}_k^{(\xi\eta)}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k(u) \left[B_k^{(\xi\eta)}(u) - \frac{1}{N} \sum_{n=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) B_k^{(\xi\eta)}(u + nT) \right] e^{-i\omega u} du.$$

Підставивши до цього виразу подання (5.1.4) і (5.1.11), отримуємо:

$$\begin{aligned} E\hat{f}_k^{(\xi\eta)}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\omega_1) f_k^{(\xi\eta)}(\omega_2) g(\omega_2, N) \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega) d\omega_1 d\omega_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\omega - \omega_1) f_k^{(\xi\eta)}(\omega_1) [1 - (\omega_1, N)] d\omega_1 \end{aligned}$$

Флуктуаційна складова цього виразу прямує до нуля при $N \rightarrow \infty$ і ця збіжність покращується зі збільшенням ширини спектрального вікна $\lambda(\omega)$. А для регулярної складової, припускаючи, що спектральні компоненти є досить гладкими функціями частоти, і використовуючи їх розклад у ряд Тейлора в околі точки ω

$$f_k^{(\xi\eta)}(\omega) = f_k^{(\xi\eta)}(\omega) - [f_k^{(\xi\eta)}(\omega)]' \omega_1 + [f_k^{(\xi\eta)}(\omega)]'' \frac{\omega_1^2}{2} - \dots,$$

у другому наближенні маємо

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_k^{(\xi\eta)}(\omega_1) \lambda(\omega - \omega_1) d\omega_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\omega_1) f_k^{(\xi\eta)}(\omega - \omega_1) d\omega_1 \approx \\ &\approx f_k^{(\xi\eta)}(\omega) + \left[\frac{1}{2} \int_{-\omega}^{\omega} \omega_1^2 \lambda(\omega_1) d\omega_1 \right] [f_k^{(\xi\eta)}(\omega)]''. \end{aligned}$$

Ідентичність цієї формули й аналогічного виразу для регулярної складової зміщення оцінки спектральної густини стаціонарного випадкового процесу дає можливість перенести на даний випадок усі ті висновки, які випливають з нього: а) менші зміщення мають оцінки більш гладких взаємокореляційних компонентів; б) оцінки мають занижені значення в області максимумів і завищені в області мінімумів; в) зміщення оцінок при зменшенні ширини спектрального вікна зменшується.

Проведемо тепер аналіз дисперсії оцінок (5.2.2)

$$D[\hat{f}_k^{(\xi\eta)}(\omega)] = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\hat{B}_k^{(\xi\eta)}}(u_1, u_2) k(u_1) k(u_2) e^{i\omega(u_2 - u_1)} du_1 du_2.$$

Тут $R_{\hat{B}_k^{(\xi\eta)}}(u_1, u_2) = EB_k^{(\xi\eta)}(u_1)\bar{B}_k^{(\xi\eta)}(u_2) - EB_k^{(\xi\eta)}(u_1)E\bar{B}_k^{(\xi\eta)}(u_2)$ – кореляційна функція оцінок кореляційних компонентів (5.2.3), які можна в першому наближенні представити у вигляді

$$\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \xi^\circ(t) \eta^\circ(t+u) e^{-ik\omega_0 t} dt.$$

Тоді

$$\begin{aligned} R_{\hat{B}_k^{(\xi\eta)}}(u_1, u_2) &= \frac{1}{\theta^2} \int_0^\theta \int_0^\theta E \xi^\circ(t) \eta^\circ(t+u_1) \xi^\circ(s) \eta^\circ(s+u_2) e^{ik\omega_0(s-t)} ds dt - B_k^{(\xi\eta)}(u_1) \bar{B}_k^{(\xi\eta)}(u_2) = \\ &= \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \int_0^\theta b_\zeta(t, s-t, u_1, u_2) e^{ik\omega_0(s-t)} ds dt, \end{aligned}$$

де

$$b_\zeta(t, s-t, u_1, u_2) = b_\xi(t, s-t) b_\eta(t+u_1, s-t+u_2-u_1) + b_{\xi\eta}(t, s-t+u_2) b_{\xi\eta}(s, t-s+u_1).$$

Подавши функцію $b_\zeta(t, s-t, u_1, u_2)$ у вигляді ряду Фур'є

$$b_\zeta(t, s-t, u_1, u_2) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \tilde{B}_l^{(\xi\eta)}(s-t, u_1, u_2) e^{il\omega_0 t},$$

маємо

$$\begin{aligned} R_{\hat{B}_k^{(\xi\eta)}}(u_1, u_2) &= \frac{1}{\theta^2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{il\omega_0 t} \int_0^\theta \int_0^\theta \tilde{B}_l^{(\xi\eta)}(s-t, u_1, u_2) e^{ik\omega_0(s-t)} = \\ &= \frac{1}{\theta^2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left[\int_{-\theta}^0 \tilde{B}_l(u, u_1, u_2) e^{ik\omega_0 u} f_l(-u, \theta) du + \int_0^\theta \tilde{B}_l(u, u_1, u_2) e^{ik\omega_0 u} f_l(0, \theta-u) du \right]. \end{aligned}$$

При цьому

$$f_l(u, \theta) = \frac{1}{\theta} \int_u^\theta e^{il\omega_0 u} du.$$

Нехтуючи складовими, що містять функцію $f_l(u, \theta)$, $l \neq 0$, як величинами вищого порядку малості, приходимо до виразу

$$R_{\hat{B}_k^{(\xi\eta)}}(u, u_1, u_2) = \frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^\theta \left(1 - \frac{|u|}{\theta}\right) \tilde{B}_k^{(\xi\eta)}(u, u_1, u_2) e^{ik\omega_0 u} du,$$

а звідси

$$D\left[\hat{f}_k^{(\xi\eta)}(\omega)\right] = \frac{1}{4\pi^2\theta} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(u_1)k(u_2) \left[\int_{-\theta}^{\theta} \left(1 - \frac{|u_1|}{\theta}\right) \tilde{B}_0(u, u_1, u_2) e^{ik\omega_0 u} du \right] e^{ik\omega_0(u_2 - u_1)} du_1 du_2.$$

Оскільки

$$\tilde{B}_0(u, u_1, u_2) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{-il\omega_0 u_1} \left[B_l^{(\xi)}(u) \bar{B}_l^{(\eta)}(u + u_2 - u_1) + B_l^{(\xi\eta)}(u + u_2) \bar{B}_l^{(\eta\xi)}(u - u_1) \right],$$

то

$$D\left[\hat{f}_k^{(\xi\eta)}(\omega)\right] = \frac{1}{\theta} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{-\theta}^{\theta} \left(1 - \frac{|u|}{\theta}\right) \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(u_1)k(u_2) \left[B_l^{(\xi\eta)}(u) B_{-l}^{(\xi\eta)}(u + u_2 - u_1) + \right. \right. \\ \left. \left. + B_l^{(\eta\xi)}(u + u_2) B_{-l}^{(\eta\xi)}(u - u_1) \right] e^{-il\omega_0 u_1} e^{-i\omega(u_2 - u_1)} du_1 du_2 \right\} e^{ik\omega_0 u} du.$$

Прийнявши до уваги (5.1.4), (5.1.10) і (5.1.11), знаходимо:

$$D\left[\hat{f}_k^{(\xi\eta)}(\omega)\right] = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[f_l^{(\xi)}(\omega_1) f_{-l}^{(\eta)}(\omega_2) \lambda(\omega + \omega_2) \lambda(\omega + \omega_0 + l\omega_0) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \varphi(\omega_1 + \omega_2 + k\omega_0, \theta) + \lambda(\omega + \omega_1) \lambda(\omega - \omega_2) \varphi(\omega_1 - \omega_2 + (k-l)\omega_0, \theta) \right] d\omega_1 d\omega_2 \right\}, \quad (5.2.4)$$

де

$$\varphi(\omega, \theta) = \frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} \left(1 - \frac{|u|}{\theta}\right) e^{i\omega u} du = \frac{1}{\theta^2} \int_0^{\theta} \int_0^{\theta} e^{i\omega(s-t)} ds dt = \frac{1}{\omega^2 \theta^2} (e^{i\omega\theta} - 1)(e^{-i\omega\theta} - 1) = \\ = \frac{2}{\theta^2 \omega^2} (1 - \cos \omega\theta) = \frac{\sin^2 \frac{\omega\theta}{2}}{\left(\frac{\omega\theta}{2}\right)^2}.$$

Для першої складової формули (5.2.4) в першому наближенні маємо:

$$D^{(1)}\left[\hat{f}_k^{(\xi\eta)}(\omega)\right] \approx f_0^{(\eta)}(\omega_2) \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2(\omega + \omega_2) f_0^{(\xi)}(\omega_1) \varphi(\omega_1 + \omega_2 + k\omega_0, \theta) d\omega_1 d\omega_2.$$

Можна також наближено прийняти, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_0^{(\xi)}(\omega_1) \varphi(\omega_1 + \omega_2 + k\omega_0) d\omega_1 \approx f_0^{(\xi)}(\omega_2 + k\omega_0) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega_1 + \omega_2 + k\omega_0) d\omega_1 = \\ = \frac{1}{\theta^2} \int_0^{\theta} \int_0^{\theta} e^{i(\omega_2 + k\omega_0)(s-t)} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_1(s-t)} d\omega_1 \right] = \frac{2\pi}{\theta} f_0^{(\xi)}(\omega_2 + k\omega_0),$$

а тоді

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2(\omega + \omega_2) f_0^{(\xi)}(\omega_2 + k\omega_0) d\omega_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2(\omega_1) f_0^{(\xi)}(\omega - \omega_1 - k\omega_0) d\omega_1 \approx \\ &\approx f_0^{(\xi)}(\omega - k\omega_0) \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2(\omega_1) d\omega_1 = W(0) f_0^{(\xi)}(\omega - k\omega_0). \end{aligned}$$

Відтак

$$D^{(1)} \left[\hat{f}_k^{(\xi\eta)}(\omega) \right] \approx \frac{2\pi}{\theta} W(0) f_0^{(\eta)}(\omega) f_0^{(\xi)}(\omega - k\omega_0).$$

Другу складову співвідношення (5.2.4) перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned} D^{(2)} \left[\hat{f}_k^{(\xi\eta)}(\omega) \right] &\approx \sum_{l \in \mathbb{Z}} f_l^{(\xi\eta)}(-\omega) f_{-l}^{(\xi\eta)}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\omega - \omega_2) \lambda(\omega + \omega_1) \times \\ &\times \left[\frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} \left(1 - \frac{|u|}{\theta} \right) e^{i(\omega_1 - \omega_2 + (k-l)\omega_0)u} du \right] d\omega_1 d\omega_2. \end{aligned}$$

Легко бачити, що

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\omega - \omega_2) \lambda(\omega + \omega_1) e^{i(\omega_1 - \omega_2)u} d\omega_1 d\omega_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(u_1) k(u_2) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_1(u+u_2)} d\omega_1 \right] \times \\ &\times \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_2(u+u_1)} d\omega_2 \right] e^{i\omega(u_1+u_2)} = k^2(u) e^{-i\omega_0 u}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} \left(1 - \frac{u_1}{\theta} \right) e^{i[(k-l)\omega_0 - 2\omega]u} e^{i2\omega_0 u} k^2(u) du &= \\ = \int_{-\infty}^{\infty} W^2(\omega_1) \left[\frac{1}{\theta^2} \int_0^{\theta} \int_0^{\theta} e^{i[\omega_1 - 2\omega + (k-l)\omega_0]s} ds dt \right] d\omega_1 &\approx W[2\omega - (k-l)\omega_0] \frac{2\pi}{\theta}, \end{aligned}$$

а тоді

$$D^{(2)} \left[\hat{f}_k^{(\xi\eta)}(\omega) \right] \approx \frac{2\pi}{\theta} \sum_{l \in \mathbb{Z}} f_l^{(\xi\eta)}(-\omega) f_{-l}^{(\xi\eta)}(\omega) W[2\omega - (k-l)\omega_0].$$

Приймаючи до уваги, що

$$f_{-l}^{(\xi\eta)}(\omega) = \overline{f_l^{(\eta\xi)}(\omega + l\omega_0)}, \quad f_l^{(\xi\eta)}(-\omega) = f_l^{(\eta\xi)}(\omega + l\omega_0),$$

для дисперсії оцінки (5.2.2) маємо

$$D \left[f_k^{(\xi\eta)}(\omega) \right] = \frac{2\pi}{\theta} \left[W(0) f_0^{(\xi)}(\omega - k\omega_0) f_0^{(\eta)}(\omega) + \sum_{l \in \mathbb{Z}} |f_l^{(\eta\xi)}(\omega + l\omega_0)|^2 W(2\omega - (k-l)\omega_0) \right]. \quad (5.2.5)$$

З цієї формули випливає, що дисперсії оцінок взаємоспектральних компонентів залежать від усіх тих спектральних компонентів, які містяться в розкладі в ряд Фур'є змінної спектральної густини ПКВП. Звідси випливає, що при визначенні похибки оцінювання навіть взаємоспектральної густини стаціонарного наближення ПКВП не можна обмежуватися тільки характеристиками цього наближення. Таким чином, статистичний аналіз стаціонарного наближення ПКВП аж ніяк не може бути проведений у рамках стаціонарної моделі, а тільки в рамках того ПКВП, наближенням якого воно є.

5.3. Властивості оцінок взаємоспектральних характеристик модульованих сигналів

Конкретизуємо формули (5.1.14) і (5.2.5) для найпростіших типів ПКВП – амплітудно- і фазомодульованого сигналів. У цих випадках змінна взаємоспектральна густина визначається формулою

$$f_{\xi\eta}(\omega, t) = f_0^{(\xi\eta)}(\omega) + f_{-2}^{(\xi\eta)}(\omega)e^{-i2\omega_0 t} + f_2^{(\xi\eta)}(\omega)e^{i2\omega_0 t}.$$

У виразі для дисперсії (5.1.9) відмінними від нуля будуть тільки коефіцієнти з номерами $k = 0, \pm 2, \pm 4$, а саме

$$D_0(\omega) = \frac{2\pi}{\theta} \left[f_0^{(\eta)} W(0) \sum_{p \in \mathbb{Z}} f_0^{(\xi)}(\omega + p\omega_0) + \left[\left[f_0^{(\xi\eta)}(\omega) \right]^2 + \left| f_2^{(\xi\eta)}(\omega) \right|^2 + \left| f_2^{(\eta\xi)}(\omega + 2\omega_0) \right|^2 \right] \sum_{p \in \mathbb{Z}} W(2\omega + p\omega_0) \right], \quad (5.3.1)$$

$$D_2(\omega) = \frac{2\pi}{\theta} \left[f_0^{(\eta)} W(0) \sum_{p \in \mathbb{Z}} f_2^{(\xi)}(\omega + p\omega_0) + \sum_{p \in \mathbb{Z}} W(2\omega + p\omega_0) \left[f_0^{(\xi\eta)}(\omega) f_2^{(\eta\xi)}(\omega + 2\omega_0) + f_2^{(\xi\eta)}(\omega) \overline{f_0^{(\xi\eta)}(\omega)} \right] \right], \quad (5.3.2)$$

$$D_4(\omega) = \frac{2\pi}{\theta} f_2^{(\xi\eta)}(\omega) f_2^{(\eta\xi)}(\omega + 2\omega_0) \sum_{p \in \mathbb{Z}} W(2\omega + p\omega_0). \quad (5.3.3)$$

Очевидно, що $D_{-2}(\omega) = \bar{D}_2(\omega)$, $D_{-4}(\omega) = \bar{D}_4(\omega)$. Відмітимо, що у виразах (5.3.1)–(5.3.3) враховані рівності

$$f_2^{(\xi\eta)}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_{-2}^{(\xi\eta)}(u) e^{i\omega u} du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{B}_2^{(\xi\eta)}(u) e^{i\omega u} du = \bar{f}_2^{(\xi\eta)}(\omega),$$

$$f_{-2}^{(\xi\eta)}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{B}_{-2}^{(\xi\eta)}(u) e^{i\omega u} du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{B}_2^{(\eta\xi)}(u) e^{i(\omega+2\omega_0)u} du = \bar{f}_2^{(\eta\xi)}(\omega + 2\omega_0),$$

$$f_2^{(\xi\eta)}(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_2^{(\xi\eta)}(-u) e^{-i\omega u} du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_2^{(\eta\xi)}(u) e^{-i(\omega+2\omega_0)u} du = f_2^{(\eta\xi)}(\omega + 2\omega_0).$$

Вирази для спектральних компонентів $f_0^{(\xi)}(\omega)$, $f_0^{(\eta)}(\omega)$, $f_0^{(\xi\eta)}(\omega)$, $f_2^{(\xi)}(\omega)$, $f_2^{(\eta)}(\omega)$ та $f_2^{(\xi\eta)}(\omega)$ легко отримуємо, задавши самі сигнали та кореляційні функції модулюючих процесів. Так, для амплітудно-модульованих сигналів маємо $\xi(t) = \mu(t) \cos \omega_0 t$ і $\eta(t) = \nu(t) \cos \omega_0 t$ маємо

$$b_{\xi}(t, u) = B_0^{(\xi)}(u) + C_2^{(\xi)}(u) \cos 2\omega_0 t + S_2^{(\xi)}(u) \sin 2\omega_0 t, \quad (5.3.4)$$

$$b_{\eta}(t, u) = B_0^{(\eta)}(u) + C_2^{(\eta)}(u) \cos 2\omega_0 t + S_2^{(\eta)}(u) \sin 2\omega_0 t, \quad (5.3.5)$$

$$b_{\xi\eta}(t, u) = B_0^{(\xi\eta)}(u) + C_2^{(\xi\eta)}(u) \cos 2\omega_0 t + S_2^{(\xi\eta)}(u) \sin 2\omega_0 t, \quad (5.3.6)$$

де

$$B_0^{(\xi)}(u) = C_2^{(\xi)}(u) = \frac{1}{2} R_{\mu}(u) \cos \omega_0 u, \quad S_2^{(\xi)}(u) = -\frac{1}{2} R_{\mu}(u) \sin \omega_0 u,$$

$$B_0^{(\eta)}(u) = C_2^{(\eta)}(u) = \frac{1}{2} R_{\nu}(u) \cos \omega_0 u, \quad S_2^{(\eta)}(u) = -\frac{1}{2} R_{\nu}(u) \sin \omega_0 u,$$

$$B_0^{(\xi\eta)}(u) = C_2^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{2} R_{\mu\nu}(u) \cos \omega_0 u, \quad S_2^{(\xi\eta)}(u) = -\frac{1}{2} R_{\mu\nu}(u) \sin \omega_0 u,$$

$$\overset{\circ}{\mu}(t) = \mu(t) - m_{\mu}, \quad \overset{\circ}{\nu}(t) = \nu(t) - m_{\nu}, \quad m_{\mu} = E\mu(t), \quad m_{\nu} = E\nu(t).$$

Комплексні кореляційні компоненти мають вигляд:

$$B_2^{(\xi)}(u) = \frac{1}{2} [C_2^{(\xi)}(u) - S_2^{(\xi)}(u)] = \frac{1}{4} R_{\mu}(u) e^{i\omega_0 u},$$

$$B_2^{(\eta)}(u) = \frac{1}{2} [C_2^{(\eta)}(u) - S_2^{(\eta)}(u)] = \frac{1}{4} R_{\nu}(u) e^{i\omega_0 u},$$

$$B_2^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{2} \left[C_2^{(\xi\eta)}(u) - S_2^{(\xi\eta)}(u) \right] = \frac{1}{4} R_{\mu\nu}(u) e^{i\omega_0 u}.$$

Для спектральних компонентів тоді отримуємо:

$$f_0^{(\xi)}(\omega) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\mu}(u) e^{-i\omega u} \cos \omega_0 u du = \frac{1}{4\pi} \left[f_{\mu}(\omega - \omega_0) + f_{\mu}(\omega + \omega_0) \right],$$

$$f_2^{(\xi)}(\omega) = \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\mu}(u) e^{-i(\omega - \omega_0)u} du = \frac{1}{4\pi} f_{\mu}(\omega - \omega_0),$$

$$f_0^{(\eta)}(\omega) = \frac{1}{2} \left[f_{\nu}(\omega - \omega_0) + f_{\nu}(\omega + \omega_0) \right], \quad f_2^{(\eta)}(\omega) = \frac{1}{4} f_{\nu}(\omega - \omega_0),$$

$$f_0^{(\xi\eta)}(\omega) = \frac{1}{2} \left[f_{\mu\nu}(\omega - \omega_0) + f_{\mu\nu}(\omega + \omega_0) \right], \quad f_2^{(\xi\eta)}(\omega) = \frac{1}{4} f_{\mu\nu}(\omega - \omega_0).$$

Для найпростішої моделі амплітудно- і фазомодульованих сигналів, а саме квадратурної, коли

$$\xi(t) = \mu_c(t) \cos \omega_0 t + \mu_s(t) \sin \omega_0 t, \quad \eta(t) = \nu_c(t) \cos \omega_0 t + \nu_s(t) \sin \omega_0 t,$$

авто- та взаємкореляційні функції також визначаються співвідношеннями (5.3.4)–(5.3.6), однак тепер авто- та взаємкореляційні компоненти мають вигляд:

$$B_0^{(\xi)}(u) = \frac{1}{2} \left[R_{\mu_c}(u) + R_{\mu_s}(u) \right] \cos \omega_0 u + R_{\mu_c \mu_s}^{-}(u) \sin \omega_0 u, \quad (5.3.7)$$

$$C_2^{(\xi)}(u) = \frac{1}{2} \left[R_{\mu_c}(u) - R_{\mu_s}(u) \right] \cos \omega_0 u + R_{\mu_c \mu_s}^{+}(u) \sin \omega_0 u,$$

$$S_2^{(\xi)}(u) = R_{\mu_c \mu_s}^{+}(u) \cos \omega_0 u + \frac{1}{2} \left[R_{\mu_s}(u) - R_{\mu_c}(u) \right] \sin \omega_0 u,$$

$$B_0^{(\eta)}(u) = \frac{1}{2} \left[R_{\nu_c}(u) + R_{\nu_s}(u) \right] \cos \omega_0 u + R_{\nu_c \nu_s}^{-}(u) \sin \omega_0 u, \quad (5.3.8)$$

$$C_2^{(\eta)}(u) = \frac{1}{2} \left[R_{\nu_c}(u) - R_{\nu_s}(u) \right] \cos \omega_0 u + R_{\nu_c \nu_s}^{+}(u) \sin \omega_0 u,$$

$$S_2^{(\eta)}(u) = R_{\nu_c \nu_s}^{+}(u) \cos \omega_0 u + \frac{1}{2} \left[R_{\nu_s}(u) - R_{\nu_c}(u) \right] \sin \omega_0 u,$$

$$B_0^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{2} \left[R_{\mu_c \nu_c}(u) + R_{\mu_s \nu_s}(u) \right] + \frac{1}{2} \left[R_{\mu_c \nu_s}(u) - R_{\mu_s \nu_c}(u) \right] \sin \omega_0 u, \quad (5.3.9)$$

$$C_2^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{2} \left[R_{\mu_c \nu_c}(u) - R_{\mu_s \nu_s}(u) \right] \cos \omega_0 u + \frac{1}{2} \left[R_{\mu_c \nu_s}(u) + R_{\mu_s \nu_c}(u) \right] \sin \omega_0 u,$$

$$S_2^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{2} \left[R_{\mu_c \nu_s}(u) + R_{\mu_s \nu_c}(u) \right] \cos \omega_0 u + \frac{1}{2} \left[R_{\mu_s \nu_s}(u) - R_{\mu_c \nu_c}(u) \right] \sin \omega_0 u.$$

Автокореляційні компоненти, як видно, визначаються авто- та взаємокореляційними функціями квадратурних складових кожного з процесів, а взаємокореляційними функціями квадратурних складових різних процесів. Знаками “+” і “-” в останніх складових позначені парна й непарна частини відповідних взаємокореляційних функцій.

Для комплексно значних кореляційних компонентів знаходимо:

$$B_2^{(\xi)}(u) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} [R_{\mu_c}(u) - R_{\mu_s}(u)] - iR_{\mu_c\mu_s}(u) \right] e^{i\omega_0 u},$$

$$B_2^{(\eta)}(u) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} [R_{v_c}(u) - R_{v_s}(u)] - iR_{v_cv_s}(u) \right] e^{i\omega_0 u},$$

$$B_2^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{4} \left[R_{\mu_cv_c}(u) - R_{\mu_sv_s}(u) - i[R_{\mu_cv_s}(u) + R_{\mu_sv_c}(u)] \right] e^{i\omega_0 u}.$$

Приймаючи до уваги ці вирази, а також співвідношення (5.3.7)–(5.3.9), які визначають нульові кореляційні компоненти, для спектральних компонентів маємо

$$f_0^{(\xi)}(\omega) = \frac{1}{4} \left[f_{\mu_c}(\omega + \omega_0) + f_{\mu_c}(\omega - \omega_0) + f_{\mu_s}(\omega + \omega_0) + f_{\mu_s}(\omega - \omega_0) \right] + \\ + \frac{1}{2} \left[\text{Im} f_{\mu_c\mu_s}(\omega + \omega_0) - \text{Im} f_{\mu_c\mu_s}(\omega - \omega_0) \right],$$

$$f_0^{(\eta)}(\omega) = \frac{1}{4} \left[f_{v_c}(\omega + \omega_0) + f_{v_c}(\omega - \omega_0) + f_{v_s}(\omega + \omega_0) + f_{v_s}(\omega - \omega_0) \right] + \\ + \frac{1}{2} \left[\text{Im} f_{v_cv_s}(\omega + \omega_0) - \text{Im} f_{v_cv_s}(\omega - \omega_0) \right],$$

$$f_0^{(\xi\eta)}(\omega) = \frac{1}{4} \left[f_{\mu_cv_c}(\omega + \omega_0) + f_{\mu_sv_s}(\omega + \omega_0) + f_{\mu_sv_s}(\omega - \omega_0) \right] + \\ - i \left[f_{\mu_cv_s}(\omega - \omega_0) - f_{\mu_cv_s}(\omega + \omega_0) - f_{\mu_sv_c}(\omega - \omega_0) + f_{\mu_sv_c}(\omega + \omega_0) \right],$$

$$f_2^{(\xi)}(\omega) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} [f_{\mu_c}(\omega - \omega_0) - f_{\mu_s}(\omega + \omega_0)] - i \text{Re} f_{\mu_c\mu_s}(\omega - \omega_0) \right],$$

$$f_2^{(\eta)}(\omega) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} [f_{v_c}(\omega - \omega_0) - f_{v_s}(\omega + \omega_0)] - i \text{Re} f_{v_cv_s}(\omega - \omega_0) \right],$$

$$f_2^{(\xi\eta)}(\omega) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} [f_{\mu_cv_c}(\omega - \omega_0) - f_{\mu_sv_s}(\omega + \omega_0)] - i [f_{\mu_cv_s}(\omega - \omega_0) - f_{\mu_sv_c}(\omega - \omega_0)] \right].$$

Конкретизуючи вигляд авто- та взаємкореляційних функцій модулюючих процесів та підставляючи отримані вирази у співвідношення (5.1.9) і (5.1.14) можемо проаналізувати залежність дисперсії оцінки взаємоспектральної густини від довжини реалізації, точки усічення корелограми, форми вибраного вікна та параметрів сигналу та опрацювати на цій основі рекомендації по вибору параметрів взаємоспектральної обробки реалізацій сигналів.

Аналогічний аналіз може бути проведений при оцінюванні взаємоспектральних компонентів, вирази для оцінок котрих у випадку амплітудно- та фазомодульованих сигналів мають вигляд

$$D[\hat{f}_0^{(\xi\eta)}(\omega)] = \frac{2\pi}{\theta} \left[W(0) f_0^{(\xi)}(\omega) f_0^{(\eta)}(\omega) + W(2\omega) |f_0^{(\xi\eta)}(\omega)|^2 + \right. \\ \left. + W[2(\omega - \omega_0)] |f_{-2}^{(\eta\xi)}(\omega - 2\omega_0)|^2 + W[2(\omega + \omega_0)] |f_2^{(\eta\xi)}(\omega + 2\omega_0)|^2 \right], \quad (5.3.10)$$

$$D[\hat{f}_2^{(\eta\xi)}(\omega)] = \frac{2\pi}{\theta} \left[W(0) f_0^{(\eta)}(\omega) f_0^{(\xi)}(\omega - 2\omega_0) + |f_0^{(\eta\xi)}(\omega)| W[2(\omega - \omega_0)] - \right. \\ \left. + |f_{-2}^{(\eta\xi)}(\omega - 2\omega_0)|^2 W[2(\omega - 2\omega_0)] + |f_2^{(\eta\xi)}(\omega + 2\omega_0)|^2 W(2\omega), \quad (5.3.11) \right.$$

Складові величини (5.3.10) і (5.3.11) як бачимо, є подібними, а відрізняються вони лише відповідними частотними зсувами.

5.4. Когерентний взаємоспектральний аналіз часових рядів

Оцінку змінної взаємоспектральної густини на основі дискретних даних побудуємо, змінюючи інтегральне перетворення (5.1.1) на інтегральну суму, використовуючи при цьому формулу прямокутників. Тоді

$$\hat{f}_{\xi\eta}(\omega, \Delta t) = \frac{\Delta u}{2\pi} \sum_{r=-L}^{L-1} k(r\Delta u) \hat{b}_{\xi\eta}(t, r\Delta u) e^{-i\omega r\Delta u}, \quad L = \frac{u_m}{\Delta u}.$$

Якщо оцінка взаємної кореляційної функції обчислюється за формулою

$$\hat{b}_{\xi\eta}(t, \Delta u) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \xi(t + nT) \eta(t + r\Delta u + nT) - \hat{m}_{\xi}(t) \hat{m}_{\eta}(t + r\Delta u)$$

то

$$E\hat{f}_{\xi\eta}(\omega, t) = \frac{\Delta u}{2\pi} \sum_{r=-L}^{L-1} k(r\Delta u) b(t, r\Delta u) e^{-i\omega r\Delta u} - \\ - \frac{1}{N} \sum_{n=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) \left[\frac{\Delta u}{2\pi} \sum_{r=-L}^{L-1} k(r\Delta u) b(t, r\Delta u + nT) e^{-i\omega r\Delta u} \right].$$

Підставляючи в цей вираз подання

$$k(r\Delta u) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\omega_1) e^{i\omega_1 r\Delta u} d\omega_1, \quad (5.4.1) \\ b_{\xi\eta}(t, r\Delta u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\eta}(\omega_2, t) e^{i\omega_2 r\Delta u} d\omega_2,$$

знаходимо

$$E\hat{f}_{\xi\eta}(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\omega_1) \hat{f}_{\xi\eta}(\omega_2, t) [1 - g(\omega_2, N)] \left[\frac{\Delta u}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i(\omega_1 + \omega_2 - \omega)n\Delta u} \right] d\omega_1 d\omega_2.$$

Використавши формулу Пуассона

$$\frac{\Delta u}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i(\omega_1 + \omega_2 - \omega)n\Delta u} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta\left(\omega_1 - \omega + \omega_2 + n \frac{2\pi}{\Delta u}\right), \quad (5.4.2)$$

Приходимо до співвідношення

$$E\hat{f}_{\xi\eta}(\omega, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\left(\omega - \omega_1 + n \frac{2\pi}{\Delta u}\right) f_{\xi\eta}(\omega_1, t) [1 - g(\omega_1, N)] d\omega_1. \quad (5.4.3)$$

Дискретність даних, як бачимо, спричиняє появу членів як у систематичній, так і у стохастичній складовій зміщення. Значення цих додаткових членів визначається значенням взаємної спектральної густини сигналу поза частотним інтервалом

$\left[-\frac{\pi}{\Delta u}, \frac{\pi}{\Delta u}\right]$. Розкладемо функцію $f\left(\omega - \omega_1 + n \frac{2\pi}{\Delta u}\right)$ в ряд Тейлора в околах точок

$\omega + n \frac{2\pi}{\Delta u}$. Для систематичної складової виразу (5.4.3) з точністю до другого

порядку тоді маємо:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\omega_1) f_{\xi\eta}\left(\omega - \omega_1 + n \frac{2\pi}{\Delta u}, t\right) d\omega_1 = \\ = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[f\left(\omega + n \frac{2\pi}{\Delta u}, t\right) + \left[\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_1^2 \lambda(\omega_1) d\omega_1 \right] f''\left(\omega + n \frac{2\pi}{\Delta u}, t\right) + \dots \right].$$

Як бачимо, на значення змінної спектральної густини $f_{\xi\eta}(\omega, t)$ на частотах $\omega \in \left[-\frac{\pi}{\Delta u}, \frac{\pi}{\Delta u}\right]$ будуть накладатися ті значення цієї величини, котрі відповідають частотам, що не належать до цього інтервалу. Ефект накладання відбивається і на значеннях члена, який визначається другою похідною взаємної спектральної густини, що принципово може змінити поведінку оцінки в області екстремальних значень. Спотворення значень оцінки буде відсутнє, коли $f_{\xi\eta}(\omega, t)$ відмінна від нуля тільки в певному інтервалі частот $\omega \in [-\omega_{\max}, \omega_{\max}]$ і при цьому $\Delta u < \pi/\omega_{\max}$. При такому кроці дискретизації Δu регулярна складова зміщення дорівнює відповідній складовій неперервної оцінки. Повністю співпадають тоді і випадкові складові дискретної і неперервної оцінок. У загальному випадку в першому наближенні для зміщення маємо:

$$\varepsilon \left[\hat{f}_{\xi\eta}(\omega, t) \right] = \sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{il\omega_0 t} \left[\sum_{\substack{r \in \mathbb{Z} \\ r \neq 0}} f_l \left(\omega + r \frac{2\pi}{\Delta u} \right) - \frac{1}{N} \sum_{r \in \mathbb{Z}} f_l \left(\omega + r \frac{2\pi}{\Delta u} \right) \times \right. \\ \left. \times \left[\sum_{n=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N} \right) k(nT) e^{i \left(\omega + r \frac{2\pi}{\Delta u} \right) nT} \right] \right].$$

Дисперсія оцінки $\hat{f}_{\xi\eta}(\omega, t)$ визначається формулою

$$D \left[\hat{f}_{\xi\eta}(\omega, t) \right] = \frac{(\Delta u)^2}{4\pi^2} \sum_{r, s \in \mathbb{Z}} k(r\Delta u) k(s\Delta u) R_{\hat{b}_{\xi\eta}}(t, r\Delta u, s\Delta u) e^{i\omega(s-r)\Delta u}, \quad (5.4.4)$$

де

$$R_{\hat{b}_{\xi\eta}}(t, r\Delta u, s\Delta u) = E \hat{b}_{\xi\eta}(t, r\Delta u) \hat{b}_{\xi\eta}(t, s\Delta u) - E \hat{b}_{\xi\eta}(t, r\Delta u) E \hat{b}_{\xi\eta}(t, s\Delta u).$$

Для гауссових ПКВП у першому наближенні

$$R_{\hat{b}_{\xi\eta}}(t, r\Delta u, s\Delta u) = \frac{1}{N} \sum_{n=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N} \right) b_{\zeta}(t, nT, r\Delta u, s\Delta u),$$

при цьому

$$b_{\zeta}(t, nT, r\Delta u, s\Delta u) =$$

$$= b_{\xi}(t, nT) b_{\eta}(t + r\Delta u, (s - r)\Delta u + nT) + b_{\xi\eta}(t, s\Delta u + nT) b_{\xi\eta}(t, r\Delta u - nT).$$

Представимо останню функцію у вигляді ряду Фур'є:

$$b_{\xi}(t, nT, r\Delta u, s\Delta u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{B}_k(nT, r\Delta u, s\Delta u) e^{ik\omega_0 t}.$$

Тоді

$$D[\hat{f}_{\xi\eta}(\omega, t)] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{ik\omega_0 t} \left[\frac{1}{N} \sum_{n=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N} \right) \left[\frac{(\Delta u)^2}{4\pi^2} \sum_{r, s \in \mathbb{Z}} k(r\Delta u) k(s\Delta u) \tilde{B}_k(nT, r\Delta u, s\Delta u) e^{i\omega(s-r)\Delta u} \right] \right].$$

Ввівши функції

$$D_k[\omega] = \frac{1}{N} \sum_{n=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N} \right) \left[\frac{(\Delta u)^2}{4\pi^2} \sum_{r, s \in \mathbb{Z}} k(r\Delta u) k(s\Delta u) \tilde{B}_k(nT, r\Delta u, s\Delta u) e^{i\omega(s-r)\Delta u} \right],$$

вираз для дисперсії (5.4.4) перепишемо у вигляді

$$D[\hat{f}_{\xi\eta}(\omega, t)] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} D_k(\omega) e^{ik\omega_0 t}.$$

Прийmemo до уваги, що

$$\tilde{B}_k(nT, r\Delta u, s\Delta u) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left[B_{l+k}^{(\xi)}(nT) \bar{B}_l^{(\eta)}(u_2 - u_1 + nT) + B_{l+k}^{(\xi\eta)}(u_2 + nT) \bar{B}_l^{(\eta\xi)}(nT - u_1) \right] e^{-il\omega_0 r\Delta u},$$

а також подання (5.4.1), (5.1.10) і (5.1.11). Після перетворень знаходимо

$$\begin{aligned} D_l(\omega) = & \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{p, q \in \mathbb{Z}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\left(\omega + \omega_1 + p \frac{2\pi}{\Delta u} + l\omega_0\right) \lambda\left(\omega + \omega_1 - q \frac{2\pi}{\Delta u}\right) \times \right. \\ & \times f_{k+l}^{(\xi)}(\omega_2) f_{-l}^{(\eta)}(\omega_1) g(\omega_1 + \omega_2, N) + \lambda\left(\omega - \omega_1 + p \frac{2\pi}{\Delta u}\right) \lambda\left(\omega + \omega_2 - q \frac{2\pi}{\Delta u}\right) \times \\ & \left. \times f_{k+l}^{(\xi\eta)}(\omega_2) f_{-l}^{(\eta\xi)}(\omega_1) g(\omega_2 - \omega_1, N) \right] d\omega_1 d\omega_2. \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

Якщо на ширині спектрального вікна $\lambda(\omega)$ спектральні компоненти змінюються мало, а останні мають вигляд гострих піків, першу складову цього виразу наближено подамо у вигляді:

$$D_k(\omega) \approx f_0^{(\eta)}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2(\omega_1 + \omega) f_k^{(\xi)}(\omega_2) g(\omega_1 + \omega_2, N) d\omega_1 d\omega_2 +$$

$$+ \sum_{l \in \mathbb{Z}} f_{-l}^{(\xi\eta)}(\omega) f_{l+k}^{(\xi\eta)}(-\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\omega - \omega_1) \lambda(\omega + \omega_2) g(\omega_2 - \omega_1, N) d\omega_1 d\omega_2.$$

Першу складову цього виразу перепишемо у вигляді

$$D_k^{(1)}(\omega) \approx \sum_{p \in \mathbb{Z}} f_0^{(n)}\left(\omega + \frac{2\pi}{\Delta u}\right) \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} f_k^{(\xi)}(\omega_2) \left[\frac{1}{N} \sum_{n=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e^{i\omega_1 n T} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2\left(\omega + \omega_1 + p \frac{2\pi}{\Delta u}\right) d\omega_1 e^{i\omega_1 n T} \right] d\omega_2.$$

Легко бачити, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2\left(\omega_1 + \omega - p \frac{2\pi}{\Delta u}\right) e^{i\omega_1 n T} d\omega_1 = e^{-i\left(\omega + p \frac{2\pi}{\Delta u}\right) n T} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_1 n T} \lambda^2(\omega_1) d\omega_1.$$

Для внутрішнього інтегралу отримуємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} g\left(\omega_1 + \omega_2 - \omega + p \frac{2\pi}{\Delta u}\right) f_k^{(\xi)}(\omega_2) d\omega_2 = \\ = \sum_{q \in \mathbb{Z}} \int_{\frac{(2q-1)\pi}{T}}^{\frac{(2q+1)\pi}{T}} f_k^{(\xi)}(\omega_2) g\left(\omega_1 + \omega_2 - \omega + p \frac{2\pi}{\Delta u}\right) d\omega_2 = \frac{2\pi}{\theta} \sum_{q \in \mathbb{Z}} f_k^{(\xi)}\left(\omega - \omega_1 + q\omega_0 + p \frac{2\pi}{\Delta u}\right).$$

Після перетворення інтегралу по частоті ω_1

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2(\omega_1) f_k^{(\xi)}\left(\omega - \omega_1 + q\omega_0 + p \frac{2\pi}{\Delta u}\right) d\omega_1 \approx \\ \approx f_k^{(\xi)}\left(\omega + q\omega_0 + p \frac{2\pi}{\Delta u}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2(\omega_1) d\omega_1 = W(0) f_l\left(\omega + q\omega_0 + p \frac{2\pi}{\Delta u}\right),$$

Приходимо до наближеного співвідношення

$$D_k^{(1)}(\omega) \approx \frac{2\pi}{\theta} W(0) \sum_{p \in \mathbb{Z}} f_0^{(n)}\left(\omega - p \frac{2\pi}{\Delta u}\right) \sum_{q \in \mathbb{Z}} f_0^{(\xi)}\left(\omega + q\omega_0 + p \frac{2\pi}{\Delta u}\right).$$

У випадку малих змін взаємоспектральних компонентів на ширині спектрального вікна для другої складової коефіцієнтів (5.4.5) наближено маємо:

Для другої складової отримуємо:

$$D_k^{(2)}(\omega) = \sum_{p, q \in \mathbb{Z}} f_{k+l}^{(\xi\eta)}\left(-\omega - q \frac{2\pi}{\Delta u}\right) f_{-l}^{(\xi\eta)}\left(-\omega - p \frac{2\pi}{\Delta u}\right) \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \left(\omega + \omega_1 + p \frac{2\pi}{\Delta u} \right) \lambda \left(\omega + \omega_2 + q \frac{2\pi}{\Delta u} \right) g(\omega_2 - \omega_1, N) d\omega_1 d\omega_2.$$

Приймаючи, в свою чергу, що

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \left(\omega - \omega_1 - p \frac{2\pi}{\Delta u} \right) \lambda \left(\omega + \omega_2 - q \frac{2\pi}{\Delta u} \right) g(\omega_2 - \omega_1, N) d\omega_1 d\omega_2 = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega_1) g \left(\omega_1 - 2\omega + p \frac{2\pi}{\Delta u} + q \frac{2\pi}{\Delta u} \right) d\omega_1 \approx \frac{2\pi}{\theta} W \left(2\omega + n\omega_0 - (p+q) \frac{2\pi}{\Delta u} \right), \end{aligned}$$

отримуємо

$$\begin{aligned} D_k(\omega) = & \frac{2\pi}{\theta} \left[W(0) \sum_{p \in \mathbb{Z}} f_0^{(\xi)} \left(\omega - p \frac{2\pi}{\Delta u} \right) \sum_{q \in \mathbb{Z}} f_k^{(\xi)} \left(\omega + q\omega_0 - p \frac{2\pi}{\Delta u} \right) + \right. \\ & \left. + \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{p, q \in \mathbb{Z}} f_{k+l}^{(\xi n)} \left(-\omega - q \frac{2\pi}{\Delta u} \right) f_{-l}^{(\xi n)} \left(\omega - p \frac{2\pi}{\Delta u} \right) \sum_{n \in \mathbb{Z}} W \left(2\omega - (p+q) \frac{2\pi}{\Delta u} + n\omega_0 \right) \right]. \quad (5.4.6) \end{aligned}$$

З цього співвідношення випливає, що дисперсія дискретної оцінки взаємної спектральної густини залежить як від значень взаємних спектральних компонентів на частоті ω , для якої вона оцінюється, так і від значень на частотах, зсунутих відносно ω на величини, кратні $\frac{2\pi}{\Delta u}$. Величини $D_k(\omega)$ містять всі ті

складові, які попадають в область ненульових значень взаємної спектральної густини. Якщо $\Delta u < \frac{\pi}{\omega_{\max}}$, то у виразі (5.4.6) присутня тільки та складова, яка

відповідає $p=q=0$. Вона є такою самою, як у неперервному випадку. Якщо умова $\Delta u < \frac{\pi}{\omega_{\max}}$ не виконується, то різниця між дисперсіями неперервної і

дискретної оцінок буде ставати все істотнішою при збільшенні Δu і при таких

Δu , коли поза інтервалом $\left[-\frac{\pi}{\Delta u}, \frac{\pi}{\Delta u} \right]$ взаємна спектральна густина є досить

значною по величині, статистична точність дискретної оцінки буде істотно меншою від точності неперервної.

Конкретизуємо формулу (5.4.6) для випадків амплітудно-і фазомодульованих сигналів, коли взаємна спектральна густина містить тільки нульову і другі спектральні компоненти

$$f_{\xi\eta}(\omega, t) = f_0^{(\xi\eta)}(\omega) + f_{-2}^{(\xi\eta)}(\omega)e^{-i2\omega_0 t} + f_2^{(\xi\eta)}(\omega)e^{i2\omega_0 t}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} D_0(\omega) = & \frac{2\pi}{\theta} \left[W(0) \sum_{p \in \mathbb{Z}} f_0^{(\eta)} \left(\omega - p \frac{2\pi}{\Delta u} \right) \sum_{q \in \mathbb{Z}} f_0^{(\xi)} \left(\omega + q\omega_0 - p \frac{2\pi}{\Delta u} \right) + \right. \\ & + \sum_{p, q \in \mathbb{Z}} \left[f_0^{(\xi\eta)} \left(-\omega - q \frac{2\pi}{\Delta u} \right) f_0^{(\xi\eta)} \left(\omega - p \frac{2\pi}{\Delta u} \right) + f_2^{(\xi\eta)} \left(-\omega - q \frac{2\pi}{\Delta u} \right) f_{-2}^{(\xi\eta)} \left(\omega - p \frac{2\pi}{\Delta u} \right) + \right. \\ & \left. \left. + f_{-2}^{(\xi\eta)} \left(-\omega - q \frac{2\pi}{\Delta u} \right) f_2^{(\xi\eta)} \left(\omega - p \frac{2\pi}{\Delta u} \right) \right] \sum_{n \in \mathbb{Z}} W \left(2\omega - (p+q) \frac{2\pi}{\Delta u} + n\omega_0 \right) \right], \quad (5.4.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2(\omega) = & \frac{2\pi}{\theta} \left[W(0) \sum_{p \in \mathbb{Z}} f_0^{(\eta)} \left(\omega - p \frac{2\pi}{\Delta u} \right) \sum_{q \in \mathbb{Z}} f_2^{(\xi)} \left(\omega + q\omega_0 - p \frac{2\pi}{\Delta u} \right) + \right. \\ & + \sum_{p, q \in \mathbb{Z}} \left[f_2^{(\xi\eta)} \left(-\omega - q \frac{2\pi}{\Delta u} \right) f_0^{(\xi\eta)} \left(\omega - p \frac{2\pi}{\Delta u} \right) + f_0^{(\xi\eta)} \left(-\omega - q \frac{2\pi}{\Delta u} \right) f_2^{(\xi\eta)} \left(\omega - p \frac{2\pi}{\Delta u} \right) \right] \times \\ & \left. \times \sum_{n \in \mathbb{Z}} W \left(2\omega - (p+q) \frac{2\pi}{\Delta u} + n\omega_0 \right) \right], \quad (5.4.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_4(\omega) = & \frac{2\pi}{\theta} \left[\sum_{p, q \in \mathbb{Z}} \left[f_2^{(\xi\eta)} \left(-\omega - q \frac{2\pi}{\Delta u} \right) f_2^{(\xi\eta)} \left(\omega - p \frac{2\pi}{\Delta u} \right) \right] \times \right. \\ & \left. \times \sum_{n \in \mathbb{Z}} W \left(2\omega - (p+q) \frac{2\pi}{\Delta u} + n\omega_0 \right) \right] \quad (5.4.9) \end{aligned}$$

Очевидно, що $D_{-2}(\omega) = D_2^*(\omega)$, $D_{-4}(\omega) = D_4^*(\omega)$. Всі інші коефіцієнти ряду дорівнюють нулю. При відсутності накладання, коли $\Delta u < \frac{\pi}{\omega_{\max}}$, вирази (5.4.7)–(5.4.9) значно спрощуються і збігаються з (5.3.1)–(5.3.3).

Вирази для взаємних спектральних компонентів, коли відомі взаємно кореляційні функції модулюючих процесів. Підставляючи ці вирази у виведені формули, можемо проаналізувати залежності дисперсії оцінки взаємоспектральної густини від кроку дискретизації Δu і на цій основі обґрунтувати вибір цієї величини.

5.5. Дискретні оцінки взаємоспектральних компонентів

Розглянемо оцінку

$$\hat{f}_k^{(\xi\eta)}(\omega) = \frac{\Delta u}{2\pi} \sum_{n=-L}^{L-1} k(n\Delta u) \hat{B}_k(n\Delta u) e^{-i\omega n\Delta u}, \quad (5.5.1)$$

що є дискретним наближенням інтегрального перетворення (5.2.2). Будемо вважати, що кореляційні компоненти обчислюються за формулою:

$$\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(n\Delta u) = \frac{1}{k} \sum_{p=0}^{K-1} \left[\xi(p\Delta t) \eta(p\Delta t + n\Delta u) - \hat{m}_\xi(p\Delta t) \hat{m}_\eta(p\Delta t + n\Delta u) \right] e^{-ik \frac{2\pi}{M+1} p}. \quad (5.5.2)$$

При виконанні умови $\Delta t \leq \frac{T}{2N_2 + 1}$ ефект накладання відсутній і тоді

$$E\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(n\Delta u) = B_k^{(\xi\eta)}(n\Delta u) - \frac{1}{N} \sum_{n=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N} \right) B_k^{(\xi\eta)}(n\Delta u).$$

Звідси

$$\begin{aligned} E\hat{f}_k^{(\xi\eta)}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\omega_1) f_k^{(\xi\eta)}(\omega_2) \left[\frac{\Delta u}{2\pi} \sum_{r \in Z} e^{i(\omega_1 + \omega_2 - \omega)r\Delta u} \right] (1 - g(\omega_2, N)) d\omega_1 d\omega_2 = \\ &= \sum_{p \in Z} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\left(\omega - \omega_1 + p \frac{2\pi}{\Delta u}\right) f_k^{(\xi\eta)}(\omega_1) [1 - g(\omega_1, N)] d\omega_1. \end{aligned}$$

Спектральне вікно $\lambda\left(\omega - \omega_1 + p \frac{2\pi}{\Delta u}\right)$ має гострий пік в точці $\omega_1 = \omega + p \frac{2\pi}{\Delta u}$. Якщо

на ширині цього піку взаємні спектральні компоненти змінюються мало, то можемо наближено прийняти, що

$$E\hat{f}_k^{(\xi\eta)}(\omega) = \sum_{p \in Z} f_k^{(\xi\eta)}\left(\omega - p \frac{2\pi}{\Delta u}\right) \left[1 - \frac{1}{N} \sum_{n=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N} \right) k(nT) e^{i\left(\omega - p \frac{2\pi}{\Delta u}\right)nT} \right].$$

Як бачимо, при переході до дискретного оцінювання стохастична складова зміщення не зазнає принципів змін. Вона прямує до нуля при зростанні N , хоча швидкість її збіжності до нуля зменшується при зростанні Δu . Систематична складова зміщення суттєво змінюється через накладання на значення компонентів

на частоті ω їх значень на частотах $\omega - p \frac{2\pi}{\Delta u}$, $p \in Z$. Цього ефекту можна уникнути, якщо вибрати $\Delta u < \frac{\pi}{\omega_{\max}}$.

Для дисперсії оцінки (5.5.1) маємо

$$D[\hat{f}_k^{(\xi\eta)}(\omega)] = \frac{(\Delta u)^2}{4\pi^2} \sum_{z,s \in Z} k(r\Delta u)k(s\Delta u)R_{\hat{B}_k}(r\Delta u, s\Delta u)e^{i\omega(s-r)\Delta u}, \quad (5.5.3)$$

де $R_{\hat{B}_k}(r\Delta u, s\Delta u)$ – кореляційна функція оцінки (5.5.2):

$$R_{\hat{B}_k}(r\Delta u, s\Delta u) = EB_k^{(\xi\eta)}(r\Delta u)B_k^{(\xi\eta)}(s\Delta u) - EB_k^{(\xi\eta)}(r\Delta u)\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(s\Delta u).$$

Виходячи з (5.5.2), в першому наближенні отримуємо:

$$R_{\hat{B}_k}(r\Delta u, s\Delta u) = \frac{1}{k^2} \sum_{m,n=0}^{k-1} b_{\xi}(n\Delta t, (m-n)\Delta t, r\Delta u, s\Delta u)e^{ik\omega_0(m-n)\Delta t},$$

при цьому

$$\begin{aligned} b_{\xi}[n\Delta t, (m-n)\Delta t, r\Delta u, s\Delta u] &= \\ &= b_{\xi}[n\Delta t, (m-n)\Delta t]b_{\eta}[n\Delta t + r\Delta u, (m-n)\Delta t + (s-r)\Delta u] + \\ &+ b_{\xi\eta}[n\Delta t, (m-n)\Delta t + s\Delta u]b_{\xi\eta}[n\Delta t + r\Delta u, (m-n)\Delta t - r\Delta u]. \end{aligned}$$

Подамо останню функцію у вигляді ряду Фур'є:

$$b_{\xi}[n\Delta t, (m-n)\Delta t, r\Delta u, s\Delta u] = \sum_{l \in Z} \tilde{B}_l[(m-n)\Delta t, r\Delta u, s\Delta u]e^{i\frac{2\pi}{N+1}nl}.$$

Тоді

$$R_{\hat{B}_k^{(\xi\eta)}}(r\Delta u, s\Delta u) = \frac{1}{k^2} \sum_{l \in Z} \sum_{m,n=0}^{k-1} e^{il\frac{2\pi}{m+1}n} \tilde{B}_l[(m-n)\Delta t, r\Delta u, s\Delta u]e^{il\frac{2\pi}{m+1}(m-n)}.$$

Ввівши новий індекс сумування $p = m - n$ і змінивши його порядок, знаходимо:

$$\begin{aligned} R_{\hat{B}_k^{(\xi\eta)}}(r\Delta u, s\Delta u) &= \frac{1}{k^2} \sum_{l \in Z} \sum_{p=-n}^{K-n-1} e^{il\frac{2\pi}{m+1}n} \tilde{B}_l[(m-n)\Delta t, r\Delta u, s\Delta u]e^{ik\frac{2\pi}{M+1}p} = \\ &= \frac{1}{K} \sum_{l \in Z} \left[\sum_{p=-K+1}^0 \tilde{B}_l[p\Delta t, r\Delta u, s\Delta u]e^{ik\frac{2\pi}{M+1}p} f_l(-p, K-1) + \right. \\ &\left. + \sum_{p=1}^{K-1} \tilde{B}_l(p\Delta t, r\Delta u, s\Delta u)e^{ik\frac{2\pi}{M+1}p} f_l(K-p-1) \right], \end{aligned}$$

Якщо складовими, які містять функції $f_l(-p, K-1)$ і $f_l(0, K-p-1)$ при $l \neq 0$, знехтувати, то для дисперсії (5.5.3) тоді маємо:

$$D[\hat{f}_k^{(\xi\eta)}(\omega)] = \frac{1}{K} \sum_{l \in Z} \sum_{p=-K+1}^{K-1} \left(1 - \frac{|p|}{K}\right) \left[\frac{(\Delta u)^2}{(4\pi)^2} \sum_{r,s \in Z} k(r\Delta u)k(s\Delta u) \times \right. \\ \left. \times \left[\begin{array}{l} B_l^{(\xi)}(p\Delta t)B_{-l}^{(\xi)}[(s-r)\Delta u + p\Delta t] + \\ + B_l^{(\xi\eta)}(s\Delta u + p\Delta t)B_{-l}^{(\eta\xi)}(p\Delta t - r\Delta u) \end{array} \right] e^{-il\omega_0 r\Delta u} e^{i\omega(s-r)\Delta u} \right] e^{ik\omega_0 p n}.$$

У частотній області цей вираз набуває вигляду:

$$D[\hat{f}_k^{(\xi\eta)}(\omega)] = \sum_{s,r \in Z} \left[\sum_{l \in Z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[f_l^{(\xi)}(\omega_2) f_{-l}^{(\eta)}(\omega_1) \lambda\left(\omega + \omega_1 + l\omega_0 + r\frac{2\pi}{\Delta u}\right) \lambda\left(\omega + \omega_1 - s\frac{2\pi}{\Delta u}\right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times g_{\Delta t}(\omega_1 + \omega_2 + k\omega_0, K) + f_l^{(\xi\eta)}(\omega_1) f_{-l}^{(\eta\xi)}(\omega_2) \lambda\left(\omega + \omega_1 - s\frac{2\pi}{\Delta u}\right) \lambda\left(\omega - \omega_2 + r\frac{2\pi}{\Delta u}\right) \times \right. \right. \\ \left. \left. g_{\Delta t}(\omega_1 - \omega_2 + (k-1)\omega_0, K) \right] d\omega_1 d\omega_2, \quad (5.5.4)$$

де

$$g_{\Delta t}(\omega, k) = \frac{1}{K} \sum_{q=0}^{K-1} \left(1 - \frac{q}{K}\right) e^{i\omega q h}.$$

При гостровершинних спектральних вікнах для першої складової цього виразу можна наближено прийняти, що

$$D_1[\hat{f}_k^{(\xi\eta)}(\omega)] = \sum_{l \in Z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_0^{(\eta)}(\omega_1) f_0^{(\xi)}(\omega_2) \lambda^2\left(\omega_1 + \omega + 2\frac{2\pi}{\Delta u}\right) \times \\ \times g_n(\omega_1 + \omega_2 + k\omega_0, K) d\omega_1 d\omega_2 = \sum_{l \in Z} f_0^{(\eta)}\left(\omega - r\frac{2\pi}{\Delta u}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2(\omega_1) \times \\ \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_0^{(\xi)}(\omega_2) \varphi_{\Delta t}(\omega_1 + \omega_2 + k\omega_0 - \omega) \varphi_{\Delta t}(\omega - \omega_1 - \omega_2 - k\omega_0) d\omega_2 \right] d\omega_1,$$

де

$$\varphi_{\Delta t}(\omega) = \frac{1}{K} \sum_{q=0}^{K-1} e^{i\omega q \Delta t}.$$

Подавши внутрішній інтеграл у вигляді суми

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_0^{(\xi)}(\omega_2) \varphi_{\Delta t}(\omega_1 + \omega_2 - \omega + k\omega_0) \varphi_{\Delta t}(\omega - \omega_1 - \omega_2 - k\omega_0) d\omega_2 =$$

$$= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{-\frac{\pi}{\Delta t}}^{\frac{\pi}{\Delta t}} f_0^{(\xi)}\left(\omega_2 - l \frac{2\pi}{\Delta t}\right) \left[\frac{1}{K^2} \sum_{p,q=0}^{K-1} e^{i(\omega_1 + \omega_2 - \omega + k\omega_0)(p-q)\Delta t} \right] d\omega_2,$$

після перетворень приходимо до співвідношення:

$$D_1[\hat{f}_k^{(\xi\eta)}(\omega)] = \frac{2\pi}{\theta} W(0) \sum_{r,s \in \mathbb{Z}} f_0^{(\eta)}\left(\omega - r \frac{2\pi}{\Delta u}\right) f_0^{(\xi)}\left(\omega - k\omega_0 - s \frac{2\pi}{\Delta u}\right). \quad (5.5.5)$$

При малій ширині спектрального вікна для другої складової формули (5.5.5) наближено маємо:

$$D_l[f_k^{(\xi\eta)}(\omega)] = \sum_{s,r \in \mathbb{Z}} f_l^{(\xi\eta)}\left(-\omega + s \frac{2\pi}{\Delta u}\right) f_{-l}^{(\xi\eta)}\left(\omega + r \frac{2\pi}{\Delta u}\right) \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\left(\omega - \omega_2 + r \frac{2\pi}{\Delta u}\right) \lambda\left(\omega + \omega_1 - s \frac{2\pi}{\Delta u}\right) \times$$

$$\times \lambda\left(\omega + \omega_1 - s \frac{2\pi}{\Delta u}\right) g_{\Delta t}(\omega_1 - \omega_2 + (k-l)\omega_0, K) d\omega_1 d\omega_2 \quad (5.5.6)$$

Для подвійного інтегралу легко знаходимо:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\left(\omega - \omega_2 + r \frac{2\pi}{\Delta u}\right) \lambda\left(\omega + \omega_1 - s \frac{2\pi}{\Delta u}\right) g_{\Delta t}(\omega_1 - \omega_2 + (k-l)\omega_0, K) d\omega_1 d\omega_2 =$$

$$= \frac{1}{K^2} \sum_{p,q=0}^{K-1} e^{-i[2\omega - (k-l)\omega_0]} (q-p) h \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega_1) e^{i\omega_1(q-p)\omega_1} d\omega_1 \approx$$

$$\approx \frac{2\pi}{\theta} \sum_{s \in \mathbb{Z}} W\left(2\omega - (k-l)\omega_0 + s \frac{2\pi}{\Delta t}\right). \quad (5.5.7)$$

Приймаючи до уваги вирази (5.5.5)–(5.5.7), для дисперсії оцінки (5.5.1) отримуємо:

$$D[\hat{f}_k^{(\xi\eta)}(\omega)] = \frac{2\pi}{\theta} \left[\sum_{s,r \in \mathbb{Z}} f_0^{(\eta)}\left(\omega - r \frac{2\pi}{\Delta u}\right) f_0^{(\xi)}\left(\omega - k\omega_0 - s \frac{2\pi}{\Delta t}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{s \in \mathbb{Z}} f_l^{(\xi\eta)}\left(-\omega + s \frac{2\pi}{\Delta u}\right) f_{-l}\left(\omega - s \frac{2\pi}{\Delta u}\right) \sum_{r \in \mathbb{Z}} W\left(2\omega + k\omega_0 + 2 \frac{2\pi}{\Delta t}\right) \right].$$

Дисперсія оцінки (5.5.1), як видно, залежить від кроку дискретизації за зсувом Δu , що вибирається при зміні інтегралу (5.2.2) інтегральною сумою (5.5.1), а

також кроку дискретизації за часом Δt – інтервалу між відліками сигналів, на основі котрих сформовані дискретні оцінки взаємкореляційних компонентів. Залежність від величини Δt є відображенням впливу статистичної похибки оцінювання взаємкореляційних компонентів. Похибки оцінювання при дискретному й неперервному оцінюванні відрізняться мало, якщо $\Delta t < \frac{\pi}{\omega_{\max}}$ і

$$\Delta u < \frac{\pi}{\omega_{\max}}.$$

5.6. Компонентний взаємспектральний аналіз

Застосуємо корелограмний метод Блекмана-Т'юкі для оцінювання взаємспектральної густини ПКВП-сигналів у випадку, коли взаємкореляційна функція обчислюється з використанням компонентного методу. Оцінка взаємкореляційної густини тоді має вигляд

$$\hat{f}_{\xi\eta}(\omega, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k(u) \hat{b}_{\xi\eta}(t, u) e^{-i\omega u} du, \quad (5.6.1)$$

де

$$\hat{b}_{\xi\eta}(t, u) = \sum_{r=-N_2}^{N_2} \hat{B}_r^{(\xi\eta)}(u) e^{ir\omega_0 t}, \quad (5.6.2)$$

при цьому

$$\hat{B}_r^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta [\xi(s) - \hat{m}_\xi(s)] [\eta(s+u) - \hat{m}_\eta(s+u)] e^{-ir\omega_0 s} ds,$$

$$\hat{m}_\xi(t) = \sum_{l=-N_1}^{N_1} e^{il\omega_0 t} \left[\frac{1}{\theta} \int_0^\theta \xi(s) e^{-il\omega_0 s} ds \right], \quad \hat{m}_\eta(t) = \sum_{l=-N_1}^{N_1} e^{il\omega_0 t} \left[\frac{1}{\theta} \int_0^\theta \eta(s) e^{-il\omega_0 s} ds \right].$$

Використавши статистику

$$\hat{f}_r^{(\xi\eta)}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k(u) \hat{B}_r^{(\xi\eta)}(t, u) e^{-ir\omega_0 u} du$$

і підставляючи формулу (5.6.2) у (5.6.1), компонентну оцінку можна переписати у вигляді

$$\hat{f}_{\xi\eta}(\omega, t) = \sum_{r=-N_2}^{N_2} e^{ir\omega_0 t} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k(u) \hat{B}_r(u) e^{-ir\omega_0 u} du \right] = \sum_{r=-N_2}^{N_2} \hat{f}_r^{(\xi\eta)}(\omega) e^{ir\omega_0 t}.$$

Оскільки

$$E\hat{b}_{\xi\eta}(t, u) = b_{\xi\eta}(t, u) - \frac{1}{\theta} \sum_{r=-N_2}^{N_2} \left[\int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) \left[h(N_1, u_1) \left[B_r^{(\xi\eta)}(u_1 + u) e^{-ir\omega_0 u_1} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + B_r^{(\eta\xi)}(u_1 - u) e^{ir\omega_0 u} \right] + B_r^{(\eta\xi)}(u_1) \tilde{h}_r(N_1, u, u_1) + B_r^{(\xi\eta)}(u_1) \tilde{\tilde{h}}_r(N_1, u, u_1) \right] du_1 \right],$$

де

$$h(N_1, u_1) = \sum_{l=-N_1}^{N_1} e^{il\omega_0 u_1}, \quad \tilde{h}(N_1, u, u_1) = e^{-ir\omega_0 u_1} \sum_{l \in \bar{M}} e^{il\omega_0 u}, \\ \tilde{\tilde{h}}_l(N_1, u, u_1) = \sum_{l \in \bar{M}} e^{il\omega_0(u - u_1)}, \quad (5.6.5)$$

то

$$E\hat{f}_{\xi\eta}(\omega, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega u} k(u) \left[b_{\xi\eta}(t, u) - \frac{1}{\theta} \sum_{r=-N_2}^{N_2} e^{ir\omega_0 t} \left[\int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) \left[B_r^{(\xi\eta)}(u_1 + u) e^{-ir\omega_0 u_1} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + B_r^{(\eta\xi)}(u_1 - u) e^{ir\omega_0 u} \right] h(N_1, u_1) + B_r^{(\eta\xi)}(u_1) \tilde{h}_r(N_1, u, u_1) + B_r^{(\xi\eta)}(u_1) \tilde{\tilde{h}}_r(N_1, u, u_1) \right] du_1 \right] du.$$

Прийнявши до уваги представлення

$$k(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\omega_1) e^{i\omega_1 u} d\omega_1, \quad B_k^{(\xi\eta)}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_k^{(\xi\eta)}(\omega_2) e^{i\omega_2 u} d\omega_2, \\ b_{\xi\eta}(t, u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\eta}(\omega_2, t) e^{-i\omega_2 u} d\omega_2, \quad (5.6.6)$$

для перших трьох складових цього виразу знаходимо

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega u} k(u) b_{\xi\eta}(t, u) du = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\eta}(\omega_1, t) \lambda(\omega_2) \delta(\omega_2 - \omega + \omega_1) d\omega_1 d\omega_2 = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\eta}(\omega, t) \lambda(\omega - \omega_1) d\omega_1,$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\theta} \sum_{r=-N_2}^{N_2} e^{ir\omega_0 t} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega u} k(u) \left[\int_0^{\theta} \left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) \left[B_r^{(\xi\eta)}(u_1 + u) e^{-ir\omega_0 u_1} \sum_{l=-N_1}^{N_1} e^{il\omega_0 u_1} \right] du_1 \right] du \right] = \\
& = \sum_{r=-N_2}^{N_2} e^{ir\omega_0 t} \left[\sum_{l=-N_1}^{N_1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\omega_1) f_l^{(\xi\eta)}(\omega_2) \varphi_0[\omega_2 + (1-l)\omega_0] \delta(\omega_1 - \omega + \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \right] = \\
& = \sum_{r=-N_2}^{N_2} e^{ir\omega_0 t} \left[\sum_{l=-N_1}^{N_1} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\omega - \omega_1) f_l^{(\xi\eta)}(\omega_1) \varphi_0[\omega_1 + (l-r)\omega_0] d\omega_1 \right], \\
& \frac{1}{\theta} \sum_{r=-N_2}^{N_2} e^{ir\omega_0 t} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega u} k(u) \left[\int_0^{\theta} \left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) \left[B_r^{(\xi\eta)}(u_1 - u) e^{-ir\omega_0 u_1} \sum_{l=-N_1}^{N_1} e^{il\omega_0 u_1} \right] du_1 \right] du \right] = \\
& = \sum_{r=-N_2}^{N_2} e^{ir\omega_0 t} \left[\sum_{l=-N_1}^{N_1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\omega_1) f_l^{(\xi\eta)}(\omega_2) \varphi_0[\omega_2 + l\omega_0] \delta(\omega_1 - \omega - \omega_2 + 2\omega_0) d\omega_1 d\omega_2 \right] = \\
& = \sum_{r=-N_2}^{N_2} e^{ir\omega_0 t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\omega + \omega_1 - r\omega_0) f_l^{(\xi\eta)}(\omega_1) \varphi_0(\omega_1 + l\omega_0) d\omega_1 \right].
\end{aligned}$$

Тут позначено

$$\varphi_0(\omega, \theta) = \frac{1}{\theta} \int_0^{\theta} \left(1 - \frac{u}{\theta}\right) e^{i\omega u} du.$$

З врахуванням співвідношень (5.6.4) і (5.6.5) також маємо

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\theta} \sum_{r=-N_2}^{N_2} e^{ir\omega_0 t} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega u} k(u) \left[\int_0^{\theta} \left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) B_r^{(\eta\xi)}(u_1) \tilde{h}(N_1, u, u_1) du_1 \right] du \right] = \\
& = \sum_{r=-N_2}^{N_2} e^{ir\omega_0 t} \sum_{l \in M} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\omega_1) f_r^{(\eta\xi)}(\omega_2) \varphi_0[\omega_2 + (l-r)\omega_0, \theta] \delta(\omega_1 - \omega + l\omega_0) d\omega_1 d\omega_2 \right] = \\
& = \sum_{r=-N_2}^{N_2} e^{ir\omega_0 t} \sum_{l \in M} \lambda(\omega - l\omega_0) \int_{-\infty}^{\infty} f_r^{(\eta\xi)}(\omega_1) \varphi_0[\omega_1 + (l-r)\omega_0, \theta] d\omega_1, \\
& \frac{1}{\theta} \sum_{r=-N_2}^{N_2} e^{ir\omega_0 t} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega u} k(u) \left[\int_0^{\theta} \left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) B_r^{(\eta\xi)}(u_1) \tilde{h}(N_1, u, u_1) du_1 \right] du \right] = \\
& = \sum_{r=-N_2}^{N_2} e^{ir\omega_0 t} \sum_{l \in \bar{M}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\omega_1) f_r^{(\eta\xi)}(\omega_2) \varphi_0(\omega_2 - l\omega_0) \delta(\omega_1 - \omega + l\omega_0) d\omega_1 d\omega_2 \right] = \\
& = \sum_{r=-N_2}^{N_2} e^{ir\omega_0 t} \left[\sum_{l \in \bar{M}} \lambda(\omega - l\omega_0) \int_{-\infty}^{\infty} f_r^{(\eta\xi)}(\omega_1) \varphi_0(\omega_1 - l\omega_0, \theta) d\omega_1 \right].
\end{aligned}$$

Відтак

$$\begin{aligned}
 Ef_{\xi\eta}^{\hat{}}(\omega, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\eta}(\omega_1, t) \lambda(\omega - \omega_1) d\omega_1 - \sum_{r=-N_2}^{N_2} e^{ir\omega_0 t} \left[\sum_{l=-N_1}^{N_1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left[\lambda(\omega - \omega_1) f_r^{(\xi\eta)}(\omega_1) \times \right. \right. \right. \\
 &\times \varphi_0 \left[\omega_1 + (l-r)\omega_0, \theta \right] + \lambda(\omega + \omega_1 - r\omega_0) f_r^{(\eta\xi)}(\omega_1) \varphi_0(\omega_1 + l\omega_0, \theta) \left. \right] d\omega_1 + \sum_{l \in M} \lambda(\omega - l\omega_0) \times \\
 &\times \int_{-\infty}^{\infty} \left[f_r^{(\xi\eta)}(\omega_1) \varphi_0(\omega_1 - l\omega_0, \theta) + f_r^{(\eta\xi)}(\omega_1) \varphi_0 \left[\omega_1 + (l-r)\omega_0, \theta \right] d\omega_1 \right]. \quad (5.6.7)
 \end{aligned}$$

Чим вужчим буде спектральне вікно $\lambda(\omega)$, тим на меншу величину перша складова цієї формули буде відрізнятися від взаємоспектральної густини $f_{\xi\eta}(\omega, t)$ на ширині спектрального вікна, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\eta}(\omega_1, t) \lambda(\omega - \omega_1) d\omega_1 \approx f_{\xi\eta}(\omega, t).$$

Для другої та третьої складової при тій же умові наближено отримуємо:

$$\begin{aligned}
 &\sum_{r=-N_2}^{N_2} e^{ir\omega_0 t} \left[\sum_{l=-N_1}^{N_1} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\lambda(\omega - \omega_1) f_r^{(\xi\eta)}(\omega_1) \varphi \left[\omega_1 + (l-r)\omega_0, \theta \right] + \right. \right. \\
 &\left. \left. + \lambda(\omega + \omega_1 - 2\omega_0) f_r^{(\eta\xi)}(\omega_1) \varphi_0(\omega_1 + l\omega_0, \theta) \right] d\omega_1 \right] = \\
 &= \sum_{r=-N_2}^{N_2} e^{ir\omega_0 t} \sum_{l=-N_1}^{N_1} \left[f_r^{(\xi\eta)}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\theta} \int_0^{\theta} \left(1 - \frac{u}{\theta} \right) e^{i(l-r)\omega_0 u} e^{-i\omega u} k(u_1) \delta(u_1 - u) du \right] du_1 + \right. \\
 &\left. + f_r^{(\eta\xi)}(-\omega + r\omega_0) \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\theta} \int_0^{\theta} \left(1 - \frac{u}{\theta} \right) e^{i\omega_0 u} e^{i(\omega - r\omega_0)u_1} k(u_1) \delta(u + u_1) du \right] du_1 \right] = \\
 &= \sum_{r=-N_2}^{N_2} e^{ir\omega_0 t} \left[\frac{2f_r^{(\xi\eta)}(\omega)}{\theta} \int_0^{4m} \left(1 - \frac{4}{\theta} \right) k(u) e^{-i(\omega + l\omega_0)u} \sum_{l=-N_1}^{N_1} \cos l\omega_0 u du \right]. \quad (5.6.8)
 \end{aligned}$$

Тут враховано, що $f_r^{(\eta\xi)}(-\omega + r\omega_0) = f_r^{(\xi\eta)}(\omega)$. З отриманого співвідношення випливає, що названі складові зміщення $\varepsilon \left[\hat{f}_{\xi\eta}(\omega, t) \right] = Ef_{\xi\eta}^{\hat{}}(\omega, t) - f_{\xi\eta}(\omega, t)$ зменшується, якщо зменшується φ_m , однак останнє приводить до розширення спектрального вікна, а отже до збільшення систематичної похибки оцінювання, котрою ми нехтували вище.

Для двох останніх складових виразу (5.6.7) можна наближено прийняти, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_r^{(\xi\eta)}(\omega_1) \varphi_0(\omega_1 - l\omega_0, \theta) d\omega_1 \approx$$

$$\approx f_r^{(\xi\eta)}(l\omega_0) \left[\frac{2\pi}{\theta} \int_0^{\theta} \left(1 - \frac{u}{\theta}\right) e^{-il\omega_0 u} \delta(u) du \right] = \frac{2\pi}{\theta} f_r^{(\xi\eta)}(l\omega_0), \quad (5.6.9)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_r^{(\xi\eta)}(\omega_1) \varphi_0[\omega_1 + (l-r)\omega_0, \theta] d\omega_1 \approx$$

$$\approx f_r^{(\eta\xi)}[(r-l)\omega_0] \left[\frac{2\pi}{\theta} \int_0^{\theta} \left(1 - \frac{u}{\theta}\right) e^{i(l-r)\omega_0 u} \delta(u) du \right] = \frac{2\pi}{\theta} f_r^{(\eta\xi)}(l\omega_0). \quad (5.6.10)$$

Прийнявши до уваги співвідношення (5.6.8)–(5.6.10) для зміщення оцінки (5.6.1) маємо:

$$\varepsilon \left[\hat{f}_{\xi\eta}(\omega, t) \right] \approx \frac{2}{\theta} \left[\sum_{r=-N_2}^{N_2} e^{ir\omega_0 t} \left[\int_0^{u_m} \left(1 - \frac{u}{\theta}\right) k(u) e^{-i(\omega+r\omega_0)u} h(N_1, u) du \right] f_r^{(\xi\eta)}(\omega) + \right. \\ \left. + 2\pi \sum_{l \in M} \lambda(\omega - l\omega_0) f_r^{(\eta\xi)}(l\omega_0) \right].$$

Ця величина, як видно, залежить від взаємоспектральних компонентів сигналів, точки усічення корелограми φ_m , форми кореляційного вікна, а також числа гармонічних складових, які містять ряди Фур'є для математичних сподівань сигналів. Останню залежність характеризують вагова функція $h(N_1, u)$, а також зважені значення взаємоспектральних компонентів в точках $l\omega_0$.

Обчислимо тепер дисперсію оцінки (5.6.1), яка визначається формулою

$$D \left[\hat{f}_{\xi\eta}(\omega, t) \right] = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(u_1) k(u_2) R_{\hat{b}_{\xi\eta}}(t, u_1, u_2) e^{i\omega(u_2 - u_1)} du_1 du_2, \quad (5.6.11)$$

де

$$R_{\hat{b}_{\xi\eta}}(t, u_1, u_2) = E \hat{b}_{\xi\eta}(t, u_1) \hat{b}_{\xi\eta}(t, u_2) - E \hat{b}_{\xi\eta}(t, u_1) E \hat{b}_{\xi\eta}(t, u_2).$$

Для компонентної оцінки

$$R_{\hat{b}_{\xi\eta}}(t, u_1, u_2) = E \left[\hat{b}_{\xi\eta}(t, u_1) - E \hat{b}_{\xi\eta}(t, u_1) \right] \left[\hat{b}_{\xi\eta}(t, u_2) - E \hat{b}_{\xi\eta}(t, u_2) \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= E \left[\begin{array}{c} \sum_{r=-N_2}^{N_2} \hat{B}_r^{(\xi\eta)}(u_1) e^{ir\omega_0 t} - \\ - \sum_{r=-N_2}^{N_2} E \hat{B}_r^{(\xi\eta)}(u_1) e^{ir\omega_0 t} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \sum_{r=-N_2}^{N_2} \hat{B}_r^{(\xi\eta)}(u_2) e^{ir\omega_0 t} - \\ - \sum_{r=-N_2}^{N_2} E \hat{B}_r^{(\xi\eta)}(u_2) e^{ir\omega_0 t} \end{array} \right] = \\
&= \sum_{r,p=-N_2}^{N_2} E \hat{B}_r^{(\xi\eta)}(u_1) \overline{\hat{B}_p^{(\xi\eta)}(u_2)} e^{i(r-p)\omega_0 t}, \quad (5.6.12)
\end{aligned}$$

де

$$\hat{B}_r^{(\xi\eta)}(u) = \hat{B}_r^{(\xi\eta)}(u) - E \hat{B}_r^{(\xi\eta)}(u).$$

При обчисленні дисперсії будемо нехтувати складовими, які зумовлені попереднім обчисленням оцінок математичних сподівань сигналів, що є величинами вищого порядку малості. Тоді

$$\hat{B}_r^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \xi^\circ(t) \eta^\circ(t+u) e^{-ir\omega_0 t} dt \quad (5.6.13)$$

і

$$E \hat{B}_r^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta b_{\xi\eta}(t, u) e^{-ir\omega_0 t} dt.$$

Якщо $\theta = NT$, N – натуральне число, то $E \hat{B}_r^{(\xi\eta)}(u) = B_r^{(\xi\eta)}(u)$. На основі (5.6.13)

для гауссових сигналів знаходимо

$$E \hat{B}_r^{(\xi\eta)}(u_1) \overline{\hat{B}_p^{(\xi\eta)}(u_2)} = \frac{1}{\theta^2} \int_0^\theta \int_0^\theta b_\zeta(s_1, s_2 - s_1, u_1, u_2) e^{i(p s_2 - r s_1)\omega_0} ds_1 ds_2,$$

де

$$\begin{aligned}
b_\zeta(s_1, s_2 - s_1, u_1, u_2) &= b_\xi(s_1, s_2 - s_1) b_\eta(s_1 + u_1, s_2 - s_1 + u_2 - u_1) + \\
&+ b_{\xi\eta}(s_1, s_2 - s_1 + u_2) b_{\eta\xi}(s_1 + u_1, s_2 - s_1 - u_1)
\end{aligned}$$

Введемо нову зміню інтегрування $u = s_2 - s_1$ і змінимо його порядок:

$$\begin{aligned}
E \hat{B}_r^{(\xi\eta)}(u_1) \overline{\hat{B}_p^{(\xi\eta)}(u_2)} &= \frac{1}{\theta^2} \int_0^\theta \int_{-s_1}^{\theta-s_1} b_\zeta(s_1, u, u_1, u_2) e^{i\omega_0[p(u+s_1)-rs_1]} du ds_1 = \\
&= \frac{1}{\theta^2} \left[\int_{-\theta-u}^0 \int_0^\theta b_\zeta(s_1, u, u_1, u_2) e^{i\omega_0(p-r)s} e^{i\omega_0 pu} ds du + \int_0^{\theta-u} \int_0^\theta b_\zeta(s_1, u, u_1, u_2) e^{i\omega_0(p-r)s} e^{i\omega_0 pu} ds du \right]. \quad (5.6.14)
\end{aligned}$$

Представимо функцію $b_\zeta(s_1, u, u_1, u_2)$ у вигляді ряду Фур'є

$$b_\zeta(s_1, u, u_1, u_2) = \sum_{l=-2N_2}^{2N_2} \tilde{B}_l(u, u_1, u_2) e^{il\omega_0 s}. \quad (5.6.15)$$

Для знаходження коефіцієнтів $\tilde{B}_l(u, u_1, u_2)$ використаємо подання

$$b_\xi(s, u) = \sum_{n=-N_2}^{N_2} B_n^{(\xi)}(u) e^{in\omega_0 s}, \quad b_\eta(s + u_1, u + u_2 - u_1) = \sum_{m=-N_2}^{N_2} B_m^{(\eta)}(u + u_2 - u_1) e^{im\omega_0(s+u_1)},$$

$$b_{\xi\eta}(s, u + u_2) = \sum_{n=-N_2}^{N_2} B_n^{(\xi)}(u + u_2) e^{in\omega_0 s}, \quad b_{\eta\xi}(s + u_1, u - u_1) = \sum_{m=-N_2}^{N_2} B_m^{(\eta\xi)}(u - u_1) e^{im\omega_0(s+u_1)}.$$

Тоді

$$b_\zeta(s, u, u_1, u_2) = \sum_{m, n=-N_2}^{N_2} e^{-im\omega_0 u_1} \left[B_n^{(\xi)}(u) \overline{B_m^{(\eta)}}(u + u_2 - u_1) + B_n^{(\xi\eta)}(u + u_2) \overline{B_m^{(\eta\xi)}}(u - u_1) \right] e^{i\omega_0(n-m)s} =$$

$$= \sum_{m=-N_2}^{N_2} \sum_{k=-N_2-m}^{N_2-m} e^{-im\omega_0 u_1} \left[B_{k+m}^{(\xi)}(u) \overline{B_m^{(\eta)}}(u + u_2 - u_1) + B_{k+m}^{(\xi\eta)}(u + u_2) \overline{B_m^{(\eta\xi)}}(u - u_1) \right] e^{ik\omega_0 s} =$$

$$= \sum_{k=-N_2}^{-1} e^{ik\omega_0 s} \sum_{m=-k-N_2}^{N_2} \left[B_{k+m}^{(\xi)}(u) \overline{B_m^{(\eta)}}(u + u_2 - u_1) + B_{k+m}^{(\xi\eta)}(u + u_2) \overline{B_m^{(\eta\xi)}}(u - u_1) \right] e^{-im\omega_0 u_1} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{2N_2} e^{ik\omega_0 s} \sum_{m=-N_2}^{N_2-k} \left[B_k^{(\xi)}(u) \overline{B_m^{(\eta)}}(u + u_2 - u_1) + B_{k+m}^{(\xi\eta)}(u + u_2) \overline{B_m^{(\eta\xi)}}(u - u_1) \right] e^{-im\omega_0 u_1}.$$

Відтак

$$\tilde{B}_k(u, u_1, u_2) = \begin{cases} \sum_{m=-N_2}^{N_2-k} e^{-im\omega_0 u_1} \left[B_{k+m}^{(\xi)}(u) \overline{B_m^{(\eta)}}(u + u_2 - u_1) + B_{k+m}^{(\xi\eta)}(u + u_2) \overline{B_m^{(\eta\xi)}}(u - u_1) \right], & k \geq 0, \\ \sum_{m=-k-N_2}^{N_2} e^{-im\omega_0 u_1} \left[B_k^{(\xi)}(u) \overline{B_m^{(\eta)}}(u + u_2 - u_1) + B_{k+m}^{(\xi\eta)}(u + u_2) \overline{B_m^{(\eta\xi)}}(u - u_1) \right], & k < 0. \end{cases} \quad (5.6.16)$$

Очевидно, що $\tilde{B}_{-k}(u, u_1, u_2) = \overline{\tilde{B}_k(u, u_1, u_2)}$, тому подальший аналіз проводимо тільки для $k \geq 0$. Підставляючи ряд (5.6.16) у співвідношення (5.6.14), отримуємо

$$E \hat{B}_r^{(\xi\eta)}(u_1) \hat{B}_p^{(\xi\eta)}(u_2) = \frac{1}{\theta} \sum_{k=-2N_2}^{2N_2} \left[\int_{-\theta}^0 \tilde{B}_k(u, u_1, u_2) e^{i\omega_0 p u} f_{l+p-r}(-u, \theta) du + \int_{-\theta}^0 \tilde{B}_l(u, u_1, u_2) e^{i\omega_0 p u} f_{l+p-r}(0, \theta - u) du \right],$$

$$f_{l+p-r}(0, \theta - u) = \frac{1}{\theta} \int_0^{\theta-u} e^{i(l+p-r)\omega_0 s} ds.$$

Функції $f_{l+p-r}(0, \theta - u)$ і $f_{l+p-r}(-u, \theta)$ з ростом θ швидко зникають. Приймаючи до уваги тільки ті складові, для яких $l = r - p$, маємо

$$E \hat{B}_r^{(\xi n)}(u_1) \overline{\hat{B}_p^{(\xi n)}(u_2)} = \frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^0 \left(1 - \frac{|u|}{\theta}\right) \tilde{B}_{r-p}(u, u_1, u_2) e^{i\omega_0 p u} du.$$

Вираз для кореляційної функції (5.6.12), враховуючи останнє співвідношення і ввівши новий індекс сумування $k = l - p$, перепишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} R_{\hat{b}_{\xi n}}(t, u_1, u_2) &= \sum_{p=-N_2}^{N_2} \sum_{k=-N_2-p}^{N_2-p} e^{ik\omega_0 t} \left[\frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^0 \left(1 - \frac{|u|}{\theta}\right) \tilde{B}_k(u, u_1, u_2) e^{i\omega_0 p u} du \right] = \\ &= \sum_{k=-2N_2}^{-1} e^{ik\omega_0 t} \sum_{p=-k-N_2}^{N_2} \left[\frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^0 \left(1 - \frac{|u|}{\theta}\right) \tilde{B}_k(u, u_1, u_2) e^{i\omega_0 p u} du \right] + \\ &+ \sum_{k=0}^{2N_2} e^{ik\omega_0 t} \sum_{p=-N_2}^{N_2-k} \left[\frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^0 \left(1 - \frac{|u|}{\theta}\right) \tilde{B}_k(u, u_1, u_2) e^{i\omega_0 p u} du \right]. \end{aligned}$$

Для дисперсії (5.6.11) тоді маємо:

$$D[\hat{f}_{\xi n}(\omega, t)] = \sum_{n=-2N_2}^{2N_2} D_n(\omega) e^{in\omega_0 t}.$$

Легко бачити, що $D_{-n}(\omega) = \overline{D_{-n}(\omega)}$, а для $n \geq 0$ коефіцієнти визначаються формулою:

$$\begin{aligned} D_n(\omega) &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{p=-N_2}^{N_2-n} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(u_1) k(u_2) \left[\frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^0 \left(1 - \frac{|u|}{\theta}\right) \tilde{B}_n(u, u_1, u_2) e^{i\omega_0 p u} du \right] \times \\ &\times e^{i\omega(u_2-u_1)} du_1 du_2. \end{aligned}$$

Після підстановки сюди співвідношення (5.6.16), яке визначає величини $\tilde{B}_n(u, u_1, u_2)$ через авто- та взаємкореляційні компоненти сигналів, отримуємо:

$$\begin{aligned} D_n(\omega) &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{p, m=-N_2}^{N_2-n} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(u_1) k(u_2) \left[\frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^0 \left(1 - \frac{|u|}{\theta}\right) e^{ip\omega_0 u} \left[B_{m+n}^{(\xi)}(u) \overline{B_m^{(\xi)}(u+u_2-u_1)} \right] + \right. \right. \\ &\left. \left. + B_{m+n}^{(\xi n)}(u+u_2) \overline{B_m^{(n\xi)}(u-u_1)} \right] du \right] e^{-im\omega_0 u_1} e^{i\omega(u_2-u_1)} du_1 du_2. \end{aligned} \quad (5.6.17)$$

Використовуючи подання

$$k(u_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\omega_1) e^{i\omega_1 u_1} d\omega_1, \quad k(u_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\omega_2) e^{i\omega_2 u_2} d\omega_2,$$

$$B_{m+n}^{(\xi)}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{m+n}(\omega_3) e^{i\omega_3 u} d\omega_3, \quad B_m^{(\eta)}(u + u_2 - u_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_m^{(\eta)}(\omega_4) e^{i\omega_4(u+u_2-u_1)} d\omega_4,$$

$$B_{m+n}^{(\xi\eta)}(u + u_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{m+n}^{(\xi\eta)}(\omega_3) e^{i\omega_3(u+u_2)} d\omega_3, \quad B_m^{(\xi\eta)}(u - u_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_m^{(\eta\xi)}(\omega_4) e^{i\omega_4(u-u_1)} d\omega_4,$$

запишемо вираз (5.6.17) у частотній області

$$D_n(\omega) = \sum_{p,m=-N_2}^{N_2-n} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\lambda(\omega_1) \lambda(\omega_2) \left[f_{m+n}^{(\xi)}(\omega_3) f_{-m}^{(\eta)}(\omega_4) \left[\frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} \left(1 - \frac{|u|}{\theta} \right) e^{i(\omega_3+\omega_4+p\omega_0)u} du_0 \right] \times \right. \right. \right. \\ \times \delta(\omega_1 - \omega - \omega_4 - m\omega_0) \delta(\omega_2 + \omega + \omega_4) + f_{m+n}^{(\xi\eta)}(\omega_3) f_{-m}^{(\xi\eta)}(\omega_4) \times \\ \left. \left. \left. \times \left[\frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} \left(1 - \frac{|u|}{\theta} \right) e^{i([p-m]\omega_0 + \omega_3 - \omega_4)u} du_0 \right] \delta(\omega_1 - \omega + \omega_4) \delta(\omega_2 + \omega_3 + \omega) \right] \right] d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 d\omega_4 = \right. \\ = \sum_{p,m=-N_2}^{N_2-n} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\lambda(\omega + \omega_1 + m\omega_0) \lambda(\omega + \omega_1) f_{m+n}^{(\xi)}(\omega_2) f_{-m}^{(\eta)}(\omega_1) \varphi(\omega_1 + \omega_2 + p\omega_0, \theta) + \right. \right. \\ \left. \left. + \lambda(\omega - \omega_1) \lambda(\omega + \omega_2) f_{m+n}^{(\xi\eta)}(\omega_2) f_{-m}^{(\xi\eta)}(\omega_1) \varphi(\omega_2 - \omega_1 + (p-m)\omega_0, \theta) \right] d\omega_1 d\omega_2. \quad (5.6.18) \right.$$

Тут введемо позначення

$$\varphi(\omega_0, \theta) = \frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} \left(1 - \frac{|u|}{\theta} \right) e^{i\omega_0 u} du.$$

Зауважимо, що при перетворенні другої складової виразу (5.6.18) враховано, що

$B_{-m}^{(\eta\xi)}(u - u_1) = B_{-m}^{(\xi\eta)}(u_1 - u) e^{-im\omega_0 u}$. При вузькому спектральному вікні для першої складової наближено маємо:

$$D_n^{(1)}(\omega) \approx f_0^{(n)}(\omega) \sum_{p=-N_2}^{N_2-n} \int_{-\infty}^{\infty} f_n^{(\xi)}(\omega_2) \lambda^2(\omega_1 + \omega) \varphi(\omega_1 + \omega_2 + p\omega_0, \theta) d\omega_1 d\omega_2 \approx \\ \approx f_0^{(\eta)}(\omega) \sum_{p=-N_2}^{N_2-n} \int_{-\infty}^{\infty} f_n^{(\xi)}(\omega_1 - p\omega_0) \lambda^2(\omega_1 + \omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega_1 + \omega_2 + p\omega_0, \theta) d\omega_2 \right] d\omega_1 \approx$$

$$\approx f_0^{(\eta)}(\omega) \sum_{p=-N_2}^{N_2-n} f_n^{(\xi)}(\omega - p\omega_0) \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2(\omega_1 + \omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega_1 + \omega_2 + p\omega_0, \theta) d\omega_2 \right] d\omega_1.$$

Оскільки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega_1 + \omega_2 + p\omega_0, \theta) d\omega_2 = \frac{2\pi}{\theta^2} \int_0^\theta \int_0^\theta e^{i(\omega_1 + p\omega_0)(s-t)} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(s-t)} d\omega_2 \right] = \frac{2\pi}{\theta},$$

тоді

$$D_n^{(1)}(\omega) \approx \frac{2\pi}{\theta} W(0) \sum_{p=-N_2}^{N_2-n} f_0^{(\eta)}(\omega) f_n^{(\xi)}(\omega - p\omega_0).$$

Для другої складової виразу знаходимо

$$\begin{aligned} D_n^{(2)}(\omega) &\approx \sum_{p,m=-N_2}^{N_2-n} f_{m+n}^{(\xi\eta)}(-\omega) f_{-m}^{(\xi\eta)}(\omega) \times \\ &\times \frac{1}{\theta} \left[\int_{-\theta}^{\theta} \left(1 - \frac{|u|}{\theta} \right) e^{i(p-m)\omega_0 u} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\omega - \omega_1) \lambda(\omega + \omega_2) e^{i(\omega_2 - \omega_1)u} d\omega_1 d\omega_2 \right] du \right] \approx \\ &\approx \sum_{p,m=-N_2}^{N_2-n} \left[f_{m+n}^{(\xi\eta)}(-\omega) f_{-m}^{(\xi\eta)}(\omega) \left[\frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} \left(1 - \frac{|u|}{\theta} \right) e^{i[(p-m)\omega_0 - 2\omega]u} k^2(u) du \right] \right]. \end{aligned}$$

Врахувавши подання

$$k^2(u) = \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega_1) e^{i\omega_1 u} du$$

наближено маємо

$$\begin{aligned} D_n^{(2)}(\omega) &\approx \sum_{p,m=-N_2}^{N_2-n} f_{m+n}^{(\xi\eta)}(-\omega) f_{-m}^{(\xi\eta)}(\omega) W[2\omega - (p-m)\omega_0] \int_{-\infty}^{\infty} \varphi[\omega_1 - 2\omega + (p-m)\omega_0] d\omega_1 = \\ &= \frac{2\pi}{\theta} \sum_{p,m=-N_2}^{N_2-n} f_{m+n}^{(\xi\eta)}(-\omega) f_{-m}^{(\xi\eta)}(\omega) W[2\omega - (p-m)\omega_0]. \end{aligned}$$

Підсумовуючи результати проведеного вище аналізу, приходимо до наступного виразу для коефіцієнтів Фур'є дисперсії оцінки (5.6.1):

$$D_n(\omega) \approx \frac{2\pi}{\theta} \left[\sum_{p=-N_2}^{N_2-n} \left[W(0) f_0^{(\xi n)}(\omega) f_n^{(\xi n)}(\omega - p\omega_0) + \sum_{m=-N_2}^{N_2-n} f_{m+n}^{(\xi n)}(\omega) f_{-m}^{(\xi n)}(\omega - p\omega_0) W[2\omega - (p-m)\omega_0] \right] \right].$$

Середнє значення дисперсії

$$D_0(\omega) \approx \frac{2\pi}{\theta} \left[\sum_{p=-N_2}^{N_2} \left[W(0) f_0^{(\eta)}(\omega) f_0^{(\xi)}(\omega - p\omega_0) + \sum_{m=-N_2}^{N_2} |f_m^{(\xi \eta)}(\omega)|^2 W[2\omega - (p-m)\omega_0] \right] \right].$$

залежить, як видно, не тільки від нульових, а також всіх інших взаємоспектральних компонентів сигналів, що містить взаємоспектральна густина. У формулі для коефіцієнтів Фур'є дисперсії оцінки взаємоспектральної густини при когерентному методі число таких компонентів є необмеженим, що спричиняє при широкосмугових ПКВП-сигналах більші абсолютні значення останніх.

Якщо миттєва взаємоспектральна густина має вигляд

$$f_{\xi \eta}(\omega, t) = f_0^{(\xi \eta)}(\omega) + f_{-2}^{(\xi \eta)}(\omega) e^{-i2\omega_0 t} + f_2^{(\xi \eta)}(\omega) e^{i2\omega_0 t},$$

а також

$$f_{\xi}(\omega, t) = f_0^{(\xi)}(\omega) + f_{-2}^{(\xi)}(\omega) e^{-i2\omega_0 t} + f_2^{(\xi)}(\omega) e^{i2\omega_0 t},$$

$$f_{\eta}(\omega, t) = f_0^{(\eta)}(\omega) + f_{-2}^{(\eta)}(\omega) e^{-i2\omega_0 t} + f_2^{(\eta)}(\omega) e^{i2\omega_0 t},$$

то, приймаючи до уваги, що

$$f_{-m}^{(\xi \eta)}(\omega) = \overline{f_m^{(\eta \xi)}(\omega + m\omega_0)}, \quad f_m^{(\xi \eta)}(-\omega) = f_m^{(\eta \xi)}(\omega + m\omega_0),$$

отримуємо:

$$D_0(\omega) \approx \frac{2\pi}{\theta} \left[W(0) f_0^{(\xi)}(\omega) \left[f_0^{(\eta)}(\omega) + f_0^{(\eta)}(\omega + 2\omega_0) + f_0^{(\eta)}(\omega - 2\omega_0) \right] + \sum_{p=0, \pm 2} \left[|f_0^{(\xi \eta)}(\omega)|^2 W(2\omega - p\omega_0) + |f_{-2}^{(\eta \xi)}(\omega - 2\omega_0)|^2 W(2\omega - (p+2)\omega_0) + |f_2^{(\eta \xi)}(\omega + 2\omega_0)|^2 W[2\omega - (p-2)\omega_0] \right] \right],$$

$$D_2(\omega) \approx \frac{2\pi}{\theta} \left[W(0) \left[f_0^{(\eta)}(\omega) f_2^{(\xi)}(\omega) + f_0^{(\eta)}(\omega) f_2^{(\xi)}(\omega + 2\omega_0) \right] + \right.$$

$$+ \sum_{p=0, \pm 2} \left[f_2^{(\xi_n)}(-\omega) f_0^{(\xi_n)}(\omega) W(2\omega - p\omega_0) + f_0^{(\xi_n)}(-\omega) f_2^{(\xi_n)}(\omega) W[2\omega - (p+2)\omega_0] \right],$$

$$D_4(\omega) \approx \frac{2\pi}{\theta} f_2^{(\xi_n)}(-\omega) f_{-2}^{(\xi_n)}(\omega) W(2\omega).$$

Коефіцієнти Фур'є дисперсії оцінки взаємо спектральної густини такого типу сигналів дорівнюють нулю. Очевидно, що $D_{-2}(\omega) = \overline{D_2(\omega)}$, $D_{-4}(\omega) = \overline{D_4(\omega)}$. Конкретні числові значення цих коефіцієнтів можуть бути обмежені при використанні наведених співвідношень і апроксимаційних виразів для спектральних компонентів.

5.7. Дискретні компоненти оцінки спектральної густини

При аналізі даного типу оцінок вважатимемо, що компоненти оцінки взаємкореляційної функції також обчислюються за дискретними даними й що виконуються умови відсутності ефектів накладання як першого, так і другого родів. Це означає, що $h \leq \frac{T}{2N_1}$, $h \leq \frac{T}{4N_2 + 1}$, де N_1 і N_2 – номери найвищих гармонічних складових в рядах Фур'є для математичних сподівань та кореляційних функцій сигналів.

Відтак, розглянемо оцінку

$$\hat{f}_{\xi_n}(\omega, t) = \frac{\Delta u}{2\pi} \sum_{n \in Z} k(n\Delta u) \hat{b}_{\xi_n}(t, n\Delta u) e^{-i\omega n \Delta u}, \quad (5.7.1)$$

де

$$\hat{b}_{\xi_n}(t, n\Delta u) = \sum_{k=-N_2}^{N_2} \hat{B}_k^{(\xi_n)}(n\Delta u) e^{ik\omega_0 t},$$

і

$$\hat{B}_k^{(\xi_n)}(n\Delta u) = \frac{1}{K} \sum_{p=0}^{K-1} [\xi(ph) - \hat{m}_\xi(ph)] [\eta(ph + n\Delta u) - \hat{m}_\eta(ph + n\Delta u)] e^{-ik\omega_0 ph},$$

$$\hat{m}_\xi(ph) = \sum_{k=-N_1}^{N_1} e^{ik\omega_0 ph} \left[\frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} \xi(nh) e^{-ik\omega_0 nh} \right], \quad \hat{m}_\eta(ph) = \sum_{k=-N_1}^{N_1} e^{ik\omega_0 ph} \left[\frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} \eta(nh) e^{-ik\omega_0 ph} \right].$$

Покладемо для спрощення, що $h = \Delta u$. Для математичного сподівання оцінки (5.7.1), прийнявши до уваги (5.6.3), тоді маємо

$$\begin{aligned} E\hat{f}_{\xi\eta}(\omega, t) &= \frac{\Delta u}{2\pi} \sum_{n \in Z} e^{-i\omega n \Delta u} k(n \Delta u) \left[b_{\xi\eta}(t, n \Delta u) - \frac{1}{K} \sum_{k=-N_2}^{N_2} e^{ik\omega_0 t} \left[(2N_1 + 1) B_k^{(\xi\eta)}(n \Delta u) + \right. \right. \\ &+ B_k^{(\xi\eta)}(0) \sum_{l \in \bar{M}} e^{il\omega_0 n \Delta u} + \sum_{r=1}^{K-1} \left(1 - \frac{r}{K} \right) \left[B_k^{(\xi\eta)}[(n-r)\Delta u] e^{ik\omega_0 r \Delta u} + B_k^{(\xi\eta)}[(r+n)\Delta u] e^{-ik\omega_0 r \Delta u} \right] \times \\ &\times \tilde{h}(N_1, r) + B_k^{(\xi\eta)}(r \Delta u) \tilde{h}'(N_1, n, r) + B_k^{(\xi\eta)}(r \Delta u) \tilde{h}'(N_1, n, r), \end{aligned} \quad (5.7.2)$$

при цьому

$$\begin{aligned} \tilde{h}(N_1, z) &= 1 + 2 \sum_{l=1}^{N_1} \cos l \frac{2\pi}{M+1} r, \\ \tilde{h}'(N_1, n, r) &= e^{-ik \frac{2\pi}{M+1} r} \sum_{l \in \bar{M}} e^{il \frac{2\pi}{M+1} (r+n)}, \quad \tilde{h}'(N_1, n, r) = \sum_{l \in \bar{M}} e^{il \frac{2\pi}{M+1} (n-r)}. \end{aligned}$$

Підставимо у співвідношення (5.7.2) замість кореляційного вікна, взаємкореляційної функції та взаємо кореляційних компонентів їх подання у вигляді інтегралів Фур'є, тобто вирази (5.6.6) і використаємо формулу Пуассона (5.4.2). Тоді

$$\begin{aligned} E\hat{f}_{\xi\eta}(\omega, t) &= \sum_{n \in Z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\omega_1) \left[f_{\xi\eta}(\omega_2, t) \delta\left(\omega_1 - \omega + \omega_2 - n \frac{2\pi}{\Delta u}\right) + \right. \\ &+ \frac{1}{K} \sum_{k=-N_2}^{N_2} e^{ik\omega_0 t} \left[(2N_1 + 1) f_k^{(\xi\eta)}(\omega_2) \delta\left(\omega_1 - \omega + \omega_2 - n \frac{2\pi}{\Delta u}\right) + \right. \\ &+ \sum_{l \in \bar{M}} \delta\left(\omega_1 - \omega + l\omega_0 - n \frac{2\pi}{\Delta u}\right) f_k^{(\xi\eta)}(\omega_2) + \\ &+ f_k^{(\xi\eta)}(\omega_2) \delta\left(\omega_1 - \omega + l\omega_0 - n \frac{2\pi}{\Delta u}\right) \sum_{l=-N_1}^{N_1} \tilde{\Phi}_0[(l+k)\omega_0 - \omega_2, K] + \\ &+ f_k^{(\xi\eta)}(\omega_2) \delta\left(\omega_1 - \omega + \omega_2 - n \frac{2\pi}{\Delta u}\right) \sum_{l=-N_1}^{N_1} \tilde{\Phi}_0[\omega_2 + (l-k)\omega_0, K] + \\ &+ f_k^{(\xi\eta)}(\omega_2) \delta\left(\omega_1 - \omega + l\omega_0 - n \frac{2\pi}{\Delta u}\right) \sum_{l \in \bar{M}} \tilde{\Phi}_0[\omega_2 + (l-k)\omega_0, K] + \\ &+ f_k^{(\xi\eta)}(\omega_2) \delta\left(\omega_1 - \omega + l\omega_0 - n \frac{2\pi}{\Delta u}\right) \sum_{l \in \bar{M}} \tilde{\Phi}_0(\omega_2 - l\omega_0) \left. \right] d\omega_1 d\omega_2 = \\ &= \sum_{n \in Z} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(\omega_1, t) \left[\lambda\left(\omega - \omega_1 + n \frac{2\pi}{\Delta u}\right) - \frac{1}{K} \left[(2N + 1) \lambda\left(\omega - \omega_1 + n \frac{2\pi}{\Delta u}\right) + \right. \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{l \in \bar{M}} \lambda \left(\omega - l\omega_0 + n \frac{2\pi}{\Delta u} \right) \Bigg] + \sum_{l=-N_2}^{N_2} e^{ik\omega_0 t} \left[\lambda \left(\omega - \omega_1 + n \frac{2\pi}{\Delta u} \right) f_k^{(\xi\eta)}(\omega_1) \times \right. \\
& \times \sum_{l=-N_1}^{N_1} \left[\tilde{\varphi}_0 \left[\omega_1 + (l-k)\omega_0, K \right] + \tilde{\varphi}_0 \left[(l+k)\omega_0 - \omega_1, K \right] \right] + \\
& \left. + \sum_{l \in \bar{M}} \lambda \left(\omega - l\omega_0 + n \frac{2\pi}{\Delta u} \right) \left[f_k^{(\xi\eta)}(\omega_1) \tilde{\varphi}_0 \left[\omega_1 + (l-k)\omega_0, K \right] + \tilde{\varphi}_0(\omega_1 - l\omega_0, K) \right] \right] d\omega_1.
\end{aligned}$$

Тут позначено

$$\tilde{\varphi}_0 = \frac{1}{K} \sum_{r=1}^{K-1} \left(1 - \frac{r}{K} \right) e^{i\omega r \Delta u}.$$

Отриманий вираз в порівнянні з неперервним випадком містить додаткові складові, які зумовлені ефектом накладання. Цих складових можна позбутися тільки у випадку, коли взаємоспектральна густина сигналів відрізняється від нуля в обмеженій смузі $[-\omega_m, \omega_m]$. Це матиме місце за умови $\Delta u < \pi/\omega_m$.

Проаналізуємо тепер дисперсію оцінки (5.7.1), яка має вигляд:

$$D \left[\hat{f}_{\xi\eta}(\omega, t) \right] = \frac{(\Delta u)^2}{4\pi^2} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} k(n\Delta u) k(m\Delta u) R_{\hat{b}_{\xi\eta}}(t, n\Delta u, m\Delta u) e^{i\omega(m-n)\Delta u},$$

де

$$R_{\hat{b}_{\xi\eta}}(t, n\Delta u, m\Delta u) = \sum_{r, p=-N_2}^{N_2} E \hat{B}_r^{\circ(\xi\eta)}(n\Delta u) \hat{B}_p^{\circ(\xi\eta)}(m\Delta u) e^{i(r-p)\omega_0 t}.$$

У першому наближенні маємо

$$\hat{B}_r^{\circ(\xi\eta)}(n\Delta u) = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \xi^{\circ}(kh) \eta^{\circ}(kh + \Delta u) e^{-ir\omega_0 kh}, \quad (5.7.3)$$

а тоді

$$E \hat{B}_l^{\circ(\xi\eta)}(n\Delta u) = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} b_{\xi\eta}(kh, n\Delta u) e^{-ir\omega_0 kh}.$$

Оцінка (5.7.3) буде незміщеною за умови $h \leq \frac{T}{2N_2 + 1}$.

Для гауссових сигналів

$$E \hat{B}_r^{\circ(\xi\eta)}(n\Delta u) \overline{\hat{B}_p^{\circ(\xi\eta)}(m\Delta u)} = \frac{1}{K^2} \sum_{k, l=0}^{K-1} b_{\xi} \left[kh, (l-k)h, n\Delta u, m\Delta u \right] e^{i\omega_0(pl-kr)h},$$

де

$$b_{\zeta} [kh, (l-k)h, n\Delta u, m\Delta u] = b_{\zeta} (kh, (l-k)h) b_{\eta} (kh + n\Delta u, (l-k)h + (m-n)\Delta u) + \\ + b_{\xi\eta} (kh, (l-k)h + m\Delta u) b_{\eta\xi} (kh + n\Delta u, (l-k)h - n\Delta u).$$

Після введення нового індекса сумування $q = l - k$ та зміни його порядку отримуємо

$$E \hat{B}_r^{(\xi\eta)}(n\Delta u) \overline{\hat{B}_p^{(\xi\eta)}(m\Delta u)} = \frac{1}{K^2} \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{q=-K}^{K-q-1} b_{\zeta} [kh, qh, n\Delta u, m\Delta u] e^{i\omega_0 [p(k+q)-rk]h} = \\ = \frac{1}{K^2} \left[\sum_{q=-K+1}^{-1} \sum_{k=-q}^{K-1} \left[b_{\zeta} (kh, qh, n\Delta u, m\Delta u) e^{i\omega_0 [p(k+q)-rk]h} \right] + \right. \\ \left. + \sum_{q=0}^{K-1} \sum_{k=0}^{K-q-1} \left[b_{\zeta} (kh, qh, n\Delta u, m\Delta u) e^{i\omega_0 [p(k+q)-rk]h} \right] \right].$$

Підставивши сюди ряд

$$b_{\zeta} (kh, qh, n\Delta u, m\Delta u) = \sum_{\zeta=-2N_2}^{2N_2} \tilde{B}_{\zeta} (qh, n\Delta u, m\Delta u) e^{i\zeta\omega_0 kh},$$

знаходимо

$$E \hat{B}_r^{(\xi\eta)}(n\Delta u) \overline{\hat{B}_p^{(\xi\eta)}(m\Delta u)} = \frac{1}{K^2} \left[\sum_{\zeta=-2N_2}^{2N_2} \left[\sum_{q=-K+1}^{-1} \tilde{B}_{\zeta} (qh, n\Delta u, m\Delta u) \tilde{f}_{s+p-r}(-q, K-1) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{q=0}^{K-1} \tilde{B}_{\zeta} (qh, n\Delta u, m\Delta u) \tilde{f}_{s+p-r}(0, K-q-1) \right] \right],$$

де

$$\tilde{f}_{s+p-r}(a, b) = \frac{1}{K} \sum_{k=a}^b e^{i\omega_0 (s+p-r)kh}.$$

Нехтуючи складовими вищого порядку малості, приходимо до виразу

$$E \hat{B}_r^{(\xi\eta)}(n\Delta u) \overline{\hat{B}_p^{(\xi\eta)}(m\Delta u)} = \frac{1}{K} \sum_{q=-K+1}^{K-1} \left(1 - \frac{|q|}{K} \right) \tilde{B}_{r-p} (qh, n\Delta u, m\Delta u) e^{i\omega_0 qh},$$

а звідси

$$R_{\hat{b}_{\xi\eta}}(t, n\Delta u, m\Delta u) = \sum_{r,p=-N_2}^{N_2} e^{i(r-p)\omega_0 t} \left[\frac{1}{K} \sum_{q=-K+1}^{K-1} \left(1 - \frac{|q|}{K} \right) \tilde{B}_{r-p} (qh, n\Delta u, m\Delta u) e^{ip\omega_0 qh} \right] =$$

$$= \sum_{k=-2N_2}^{-1} e^{ik\omega_0 t} \sum_{p=-k-N_2}^{N_2} \left[\frac{1}{K} \sum_{q=-K+1}^{K-1} \left(1 - \frac{|q|}{K} \right) \tilde{B}_k(qh, n\Delta u, m\Delta u) e^{ip\omega_0 qh} \right] +$$

$$+ \sum_{k=0}^{2N_2} e^{ik\omega_0 t} \sum_{p=-N_2}^{N_2-k} \left[\frac{1}{K} \sum_{q=-K+1}^{K-1} \left(1 - \frac{|q|}{K} \right) \tilde{B}_k(qh, n\Delta u, m\Delta u) e^{ip\omega_0 qh} \right].$$

Відтак

$$D[\hat{f}_{\xi\eta}(\omega, t)] = \sum_{k=-2N_2}^{2N_2} D_k(\omega) e^{ik\omega_0 t}.$$

При цьому для $k \geq 0$

$$D_k(\omega) = \frac{(\Delta u)^2}{4\pi^2} \sum_{m, n \in Z} k(n\Delta u) k(m\Delta u) \times$$

$$\times \left[\sum_{p=-N_2}^{N_2-k} \left[\frac{1}{K} \sum_{q=-K+1}^{K-1} \left(1 - \frac{|q|}{K} \right) \tilde{B}_k(qh, n\Delta u, m\Delta u) e^{ip\omega_0 qh} \right] \right] e^{i\omega(m-n)\Delta u}.$$

Після підстановки сюди співвідношення

$$\tilde{B}_k(qh, n\Delta u, m\Delta u) = \sum_{r=-N_2}^{N_2-k} e^{-ir\omega_0 n\Delta u} \left[B_{l+k}^{(\xi)}(qh) \bar{B}_r^{(\eta)}(qh + (m-n)\Delta u) + \right.$$

$$\left. + B_{r+k}^{(\xi\eta)}(qh + m\Delta u) \bar{B}_r^{(\eta\xi)}(qh - n\Delta u) \right],$$

врахування інтегральних представлень (5.6.6) і формули Пуассона (5.4.2) отримуємо

$$D_k(\omega) = \sum_{m, n \in Z} \sum_{p, l=-N_2}^{N_2-k} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\omega_1) \lambda(\omega_2) \left[f_{r+k}^{(\xi)}(\omega_3) f_{-r}^{(\eta)}(\omega_4) \times \right. \right.$$

$$\times \tilde{\varphi}(\omega_3 + \omega_4 + p\omega_0, K) \delta\left(\omega_2 + \omega + \omega_4 - m \frac{2\pi}{\Delta u}\right) \delta\left(\omega_1 - \omega - \omega_4 - r\omega_0 - n \frac{2\pi}{\Delta u}\right) +$$

$$\left. + f_{k+r}^{(\xi\eta)}(\omega_3) f_{-r}^{(\eta\xi)}(\omega_4) \tilde{\varphi}[\omega_3 - \omega_4 + (p-r)\omega_0, K] \delta\left(\omega_1 - \omega + \omega_4 - n \frac{2\pi}{\Delta u}\right) \times \right.$$

$$\left. \times \delta\left(\omega_2 + \omega + \omega_3 - n \frac{2\pi}{\Delta u}\right) \right] d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 d\omega_4 =$$

$$= \sum_{m, n \in Z} \sum_{p, r=-N_2}^{N_2-k} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\lambda\left(\omega + \omega_1 + r\omega_0 + n \frac{2\pi}{\Delta u}\right) \lambda\left(\omega + \omega_1 - m \frac{2\pi}{\Delta u}\right) f_{-r}^{(\eta)}(\omega_1) f_{r+k}^{(\xi)}(\omega_2) \times \right.$$

$$\begin{aligned} & \times \tilde{\varphi}(\omega_1 + \omega_2 + p\omega_0, K) + \lambda \left(\omega - \omega_1 + n \frac{2\pi}{\Delta u} \right) \lambda \left(\omega + \omega_2 - m \frac{2\pi}{\Delta u} \right) f_{-r}^{(\xi\eta)}(\omega_1) f_{l+k}^{(\xi\eta)}(\omega_2) \times \\ & \times \tilde{\varphi}(\omega_2 - \omega_1 + (p-r)\omega_0, K) \Big] d\omega_1 d\omega_2, \end{aligned} \quad (5.7.4)$$

де

$$\tilde{\varphi}(\omega, k) = \frac{1}{K} \sum_{q=-K+1}^{K-1} \left(1 - \frac{|q|}{K} \right) e^{i\omega q h}.$$

Зауважимо, що при перетворенні другої складової цього виразу використано рівність

$$B_{-r}^{(\eta\xi)}(qh - r\Delta u) e^{-ir\omega_0 n \Delta u} = B_{-r}^{(\eta\xi)}(n\Delta u - qh) e^{-ir\omega_0 q h}.$$

Припустимо, що спектральне вікно $\lambda(\omega)$ є настільки вузьким, що змінами взаємо спектральної густини на його ширині можна знехтувати. Для першої складової виразу (5.7.4) тоді наближено маємо:

$$\begin{aligned} D_k^{(1)}(\omega) & \approx \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_0^{(n)} \left(\omega + n \frac{2\pi}{\Delta u} \right) \sum_{p=-N_2}^{N_2-k} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \left(\omega + \omega_1 + n \frac{2\pi}{\Delta u} \right) \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} f_k^{(\xi)}(\omega_2) \tilde{\varphi}(\omega_1 + \omega_2 + p\omega_0, K) d\omega_1 d\omega_2 = \\ & = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_0^{(n)} \left(\omega + n \frac{2\pi}{\Delta u} \right) \sum_{p=-N_2}^{N_2-K} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2(\omega_1) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_k^{(\xi)}(\omega_2) \tilde{\varphi}(\omega_1 + \omega_2 - \omega + p\omega_0, K) d\omega_2 \right] d\omega_1. \end{aligned}$$

Внутрішній інтеграл перетворимо наступним чином:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} f_k^{(\xi)}(\omega_2) \tilde{\varphi}(\omega_1 + \omega_2 - \omega + p\omega_0, k) d\omega_2 = \\ & = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{\left(l - \frac{1}{2}\right) \frac{2\pi}{h}}^{\left(l + \frac{1}{2}\right) \frac{2\pi}{h}} f_k^{(\xi)}(\omega_2) \tilde{\varphi}(\omega_1 + \omega_2 - \omega + p\omega_0, K) d\omega_2 = \\ & = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} f_k^{(\xi)} \left(\omega_2 + l \frac{2\pi}{h} \right) \tilde{\varphi}(\omega_2 + \omega_1 - \omega + p\omega_0, K) d\omega_2 \approx \\ & \approx \sum_{l \in \mathbb{Z}} f_k^{(\xi)} \left(-\omega_1 + \omega - p\omega_0 + l \frac{2\pi}{h} \right) \left[\frac{1}{K^2} \sum_{q,s=0}^{K-1} e^{i(\omega_1 - \omega + p\omega_0)(s-q)h} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} e^{i\omega_2(s-q)h} d\omega_2 \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{2\pi}{\Theta} \sum_{l \in \mathbb{Z}} f_k^{(\xi)} \left(\omega - \omega_1 - p\omega_0 + l \frac{2\pi}{h} \right).$$

Тут покладено $h = \Delta u$. Поклавши наближено

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2(\omega_1) f_k^{(\xi)} \left(\omega - \omega_1 - p\omega_0 + l \frac{2\pi}{h} \right) d\omega_1 \approx W(0) f_k^{(\xi)} \left(\omega - p\omega_0 + l \frac{2\pi}{\Delta u} \right)$$

отримуємо:

$$D_k^{(1)}(\omega) \approx \frac{2\pi}{\Theta} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{p=-N_2}^{N_2-k} f_0^{(\eta)} \left(\omega + n \frac{2\pi}{\Delta u} \right) f_k^{(\xi)} \left(\omega - p\omega_0 + n \frac{2\pi}{\Delta u} \right).$$

Для другої складової можна наближено прийняти:

$$\begin{aligned} D_k^{(2)}(\omega) &\approx \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \sum_{p, r=-N_2}^{N_2-k} f_{-r}^{(\xi n)} \left(\omega - n \frac{2\pi}{\Delta u} \right) f_{l+k}^{(\xi n)} \left(-\omega + m \frac{2\pi}{\Delta u} \right) \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \left(\omega - \omega_1 + n \frac{2\pi}{\Delta u} \right) \lambda \left(\omega + \omega_2 - m \frac{2\pi}{\Delta u} \right) \tilde{\varphi} \left[\omega_2 - \omega_1 + (p-r)\omega_0, K \right] d\omega_1 d\omega_2. \end{aligned}$$

Легко бачити, що

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \left(\omega - \omega_1 + n \frac{2\pi}{\Delta u} \right) \lambda \left(\omega + \omega_2 - m \frac{2\pi}{\Delta u} \right) \tilde{\varphi} \left[\omega_2 - \omega_1 + (p-l)\omega_0, k \right] d\omega_1 d\omega_2 = \\ &= \frac{1}{K^2} \sum_{s, q=0}^{K-1} k^2 [(s-q)h] e^{i[(p-r)\omega_0 - 2\omega](s-q)h} = \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} W \left(\omega_1 + l \frac{2\pi}{h} \right) \left[\frac{1}{K^2} \sum_{s, q=0}^{K-1} e^{-i[2\omega - \omega_1 - (p-r)\omega_0](s-q)h} \right] \approx \frac{2\pi}{\Theta} \sum_{l \in \mathbb{Z}} W \left[2\omega - (p-l)\omega_0 - l \frac{2\pi}{h} \right]. \end{aligned}$$

На основі виведеного співвідношення приходимо до наближеної формули:

$$\begin{aligned} D_k(\omega) &\approx \frac{2\pi}{\Theta} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{p=-N_2}^{N_2-k} \left[W(0) f_0^{(\eta)} \left(\omega + n \frac{2\pi}{\Delta u} \right) f_k^{(\xi)} \left(\omega - p\omega_0 + n \frac{2\pi}{\Delta u} \right) + \right. \\ &\left. + \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{l=-N_2}^{N_2-k} \left[f_{-l}^{(\xi \eta)} \left(\omega - n \frac{2\pi}{\Delta u} \right) f_{l+k}^{(\xi \eta)} \left(-\omega + m \frac{2\pi}{\Delta u} \right) \sum_{l \in \mathbb{Z}} W \left[2\omega - (p-r)\omega_0 + l \frac{2\pi}{h} \right] \right] \right]. \end{aligned}$$

Як випливає з отриманого виразу, дисперсії неперервної та дискретної оцінок є

близькими за величиною, якщо $h < \frac{\pi}{\omega_m}$ і $\Delta u < \frac{\pi}{\omega_m}$. В іншому випадку завдяки

ефекту накладання дисперсія дискретної оцінки може бути суттєво більшою.

Очевидно, що різниця між ними залежить від властивостей сигналів, які обробляються, а особливо від гармонічного складу взаємо спектральної густини та ширини смуги частот, в якій вона відрізняється від нуля.

5.8. Висновки до розділу 5

1. Розроблені теоретичні основи емпіричного непараметричного спектрального аналізу ПКВП-сигналів. Для оцінювання змінної взаємоспектральної густини обґрунтовано корелограмний метод, який є узагальненням на випадок взаємозв'язаних ПКВП методу Тьюкі. Оцінка взаємоспектральної густини знаходиться при такому підході на основі згладженого перетворення оцінки взаємокореляційної функції. Показано, що зміщення оцінки взаємоспектральної густини при когерентному оцінюванні взаємокореляційної функції містить дві складові, одна з яких зменшується, а друга збільшується при розширенні спектрального вікна. Дисперсія оцінки збільшується при збільшенні ширини вікна. Наявність таких різних тенденцій в залежностях характеристик оцінок ускладнює обґрунтований вибір параметрів обробки – точки усічення корелограми і довжини реалізації. Такий вибір слід проводити, виходячи з конкретної мети спектрального аналізу і сформованих з використанням отриманих в розділі формул для складових середньоквадратичної похибки оцінювання. Такі формули представлені рядами Фур'є, коефіцієнти яких виражені через авто- та взаємоспектральні компоненти сигналів.

2. Проведено аналіз властивостей оцінок взаємоспектральних компонентів, які отримуються на основі перетворень Фур'є оцінок взаємоспектральної густини. Спектральні компоненти кількісно характеризують форму часової мінливості спектральної густини, а будучи одночасно перетворенням Фурє взаємокореляційних компонентів, є носіями інформації про спектральні властивості стаціонарно зв'язаних модулюючих процесів, що формують дані ПКВП-сигнали. Показано, що виділена флуктуаційна складова систематичної

похибки асимптотично прямує до нуля при збільшенні довжини реалізації, і ця збіжність покращується зі збільшенням ширини спектрального вікна. Регулярна складова похибки буде меншою для більш гладких взаємоспектральних компонентів і для меншої ширини спектрального вікна. З виведених асимптотичних формул для дисперсії оцінок взаємоспектральних компонентів випливає, що вона залежить від усіх тих компонентів, які містяться в ряді Фур'є взаємоспектральної густини. Звідси випливає, що при визначенні похибки оцінювання навіть взаємоспектральної густини стаціонарного наближення ПКВП не можна обмежуватися тільки характеристиками цього наближення. Таким чином, емпіричний взаємоспектральний аналіз стаціонарного наближення ПКВП аж ніяк не може бути проведений в рамках стаціонарних моделей, а тільки в рамках тих ПКВП, наближеннями яких вони є.

3. Властивості когерентних корелограмних оцінок взаємоспектральних характеристик конкретизовані для амплітудно- і фазомодульованих сигналів. Отримані асимптотичні формули для коефіцієнтів Фур'є дисперсії оцінки взаємоспектральної густини, а також дисперсії оцінок взаємоспектральних компонентів, які виражають залежності цих величин від спектральних компонентів, довжини реалізації, форми вибраного вікна, точки усічення корелограми. Обчислення, проведені для конкретних параметрів сигналів, дають змогу оцінити похибку оцінювання і на цій основі опрацювати рекомендації по вибору параметрів взаємоспектральної обробки ПКВП-сигналів.

4. З метою дослідження впливу інтервалу дискретизації на точність оцінювання проведено аналіз оцінок взаємоспектральної густини та взаємоспектральних компонентів за дискретними даними. Встановлено, що як систематичні похибки, так середньоквадратичні відхилення оцінок взаємоспектральних характеристик залежить як від значень цих характеристик на частоті, для яких вони оцінюються, так і від значень на частотах, зсунутих відносно неї на величини, кратні до $2\pi / \Delta U$, де ΔU – інтервал дискретизації за зсувом, тобто мають місце ефекти накладання. Вирази для похибок містять всі ті складові, які попадають в область ненульових значень взаємоспектральних

характеристик. Ефектив накладання можна позбутися тільки у випадку, коли спектри сигналу є обмеженими за частотою. Якщо $\Delta U < \pi / \omega_{\max}$, де ω_{\max} – верхня частина сигналу, то похибки будуть близькими до похибок неперервних оцінок. Якщо умова $\Delta U < \pi / \omega_{\max}$, де ω_{\max} не виконується, то різниця між дисперсіями неперервними та дискретними оцінками буде ставати все істотною при збільшенні ΔU і при таких ΔU , коли поза інтервалом $[-(\pi / \Delta U), \pi / \Delta U]$ спектральні характеристики є значними за величиною, статистична похибка дискретної оцінки буде суттєво більшою від похибки неперервної.

5. Розвинуто компонентний метод взаємоспектрального аналізу, при якому оцінка взаємкореляційної функції у вигляді тригонометричного полінома. Проведено аналіз як неперервних, так і дискретних оцінок взаємоспектральної густини. Отримані прості асимптотичні вирази для зміщення та дисперсії оцінки. Остання представлена у вигляді тригонометричного полінома. На основі цих виразів виконано порівняльний аналіз ефективності когерентних оцінок, а також дискретного й компонентного оцінювання. У формулі для коефіцієнтів Фур'є дисперсії оцінки взаємоспектральної густини при когерентному методі число компонентів є необмеженими, тому при широкосмугових ПКВП – сигналах абсолютні значення останніх будуть більшими. Конкретні числові значення коефіцієнтів Фур'є дисперсій оцінок обох типів можуть бути обчислені при використанні отриманих співвідношень і апроксимаційних виразів для спектральних компонентів. Вирази для дискретних компонентних оцінок взаємоспектральної густини отримані в припущенні, що при знаходженні взаємкореляційної функції відсутні ефекти накладання першого і другого роду. Формули для статистичних характеристик дискретної взаємоспектрально густини в порівнянні з неперервним випадком містять додаткові складові, які зумовлені ефектом накладання. Цих складових можна позбутися тільки у випадку, коли взаємоспектральна густина сигналів відрізняється від нуля в обмеженій смузі $[-\omega_{\max}, \omega_{\max}]$ за умови $\Delta U < \pi / \omega_{\max}$.

РОЗДІЛ 6

**ВЗАЄМОКОРЕЛЯЦІЙНИЙ АНАЛІЗ ПКВ СИГНАЛІВ
ПРИ НЕВІДОМОМУ ПЕРІОДІ НЕСТАЦІОНАРНОСТІ**

Застосування статистичних методів спектрального аналізу стаціонарних випадкових процесів для розв'язування задачі про виявлення прихованих періодичностей теоретично обґрунтовано Н. Вінером і А. Я. Хінчиним [90, 224, 245, 246], а Дж. Т'юкі [243] розробив практичні методи оцінювання густини потужності за експериментальними даними. Вони ґрунтувалися на використанні перетворень Фур'є згладженої оцінки кореляційної функції. Відсутністю такого згладжування і були пояснені “погані” асимптотичні властивості періодограми. З тих пір задача про виявлення прихованих періодичностей формулюється і розв'язується в рамках методів спектрального оцінювання випадкових процесів [176, 223, 226, 247].

Пошук прихованих періодичностей у рамках моделі у вигляді стаціонарних випадкових процесів зводиться до виявлення вірогідних піків спектральної густини потужності [8, 80, 186, 192, 201, 206, 228, 234, 237, 241, 244]. При такому підході для інтерпретації локально максимальних значень оцінок спектральної густини необхідні апріорні відомості про структуру часового ряду. Якщо припустити, що ряд описується моделлю $\xi(t) = f(t) + \eta(t)$, то такі піки обов'язково будуть появлятися у точках, які відповідають частотам гармонічних складових періодичної функції. Однак використання методів спектрального аналізу стаціонарних випадкових процесів не є коректним, оскільки процес $\xi(t) = f(t) + \eta(t)$ не є стаціонарним. Пікові значення оцінок спектральної густини на частотах гармонік функції $f(t)$ зовсім не характеризують потужність останніх, а лише свідчать про можливу їх присутність. Труднощі по інтерпретації результатів спектрального оцінювання виникають також із-за того, що виявлені піки можуть бути результатом вузькосмуговості самого випадкового процесу

$\eta(t)$. Тому виникає ідея задачу аналізу складових $f(t)$ і $\eta(t)$ формулювати і розв'язувати окремо [245]. І тут логічно повстає питання про те, чому пошук прихованих періодичностей завжди обмежувався найпростішою моделлю $\xi(t) = f(t) + \eta(t)$, тобто лише окремим випадком ПКВП. Необхідність розв'язування задачі виявлення прихованих періодичностей у новому формулюванні стає ще більш очевидною, якщо прийняти до уваги результати статистичної обробки методами ПКВП. Ці результати показують, що багатьом процесам властива нестационарність як першого, так і другого порядків [34, 182, 193, 194, 203, 34, 54, 55, 59, 215, 230]. При цьому виявляється, що нестационарна структура прихованої періодичності не завжди проявляється в оцінках стаціонарних характеристик, що отримані за допомогою методів статистичної обробки стаціонарних часових рядів. Формулювання задачі виявлення прихованих періодичностей у термінах статистичного оцінювання імовірнісних характеристик ПКВП з невідомим періодом корельованості дає можливість позбутися протиріч традиційних підходів, розділяючи пошук детермінованих періодичних коливань і закономірностей періодичної мінливості властивостей флуктуаційних процесів. Власне в такій постановці задача виявлення прихованих періодичностей була сформульована в роботах [84, 131–133, 238–240], а потім розвинута в [28, 29, 38, 57, 58, 139, 163]. Подібний підхід до цієї задачі поданий пізніше в роботах [189, 198, 202, 248, 250]. Нижче подамо аналіз розроблених нами методів.

Взаємозалежність нестационарних властивостей двох ПКВ сигналів проявляється у періодичних змінах в часі їх взаємкореляційних зв'язків. Тому для виявлення цієї взаємозалежності доцільно використовувати оцінки тих величин, які є чутливими до таких змін. У даному розділі покажемо, що формування таких оцінок може бути проведено як за когерентним, так і за компонентним методом з тією особливістю, що замість істинного значення періоду в них використовується деяка пробна величина, так званий пробний період [50, 58, 113, 114, 120, 123, 175, 184]. При цьому метою нашого аналізу буде дослідження залежностей побудованих статистик від цього пробного періоду.

6.1. Визначення періоду та оцінювання взаємкореляційної функції за допомогою симетричного когерентного усереднення

Розглянемо статистику

$$\hat{b}_{\xi\eta}(t, u, \tau) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \overset{\circ}{\xi}(t+n\tau) \overset{\circ}{\eta}(t+u+n\tau), \quad (6.1.1)$$

де τ - пробний період і $E \overset{\circ}{\xi}(t) = E \overset{\circ}{\eta}(t) = 0$. Її математичне сподівання:

$$S(t, u, \tau) = E \hat{b}_{\xi\eta}(t, u, \tau) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N b_{\xi\eta}(t+n\tau, u). \quad (6.1.2)$$

Перша й друга частинні похідні цієї функції по τ визначаються співвідношеннями:

$$\frac{\partial S(t, u, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N n \frac{\partial b_{\xi\eta}(t, u, \tau)}{\partial \tau},$$

$$\frac{\partial^2 S(t, u, \tau)}{\partial \tau^2} = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N n^2 \frac{\partial^2 b_{\xi\eta}(t, u, \tau)}{\partial t^2}.$$

Якщо $\tau = kT$, $k \in Z$, то

$$\left[\frac{\partial S(t, u, \tau)}{\partial \tau} \right]_{\tau=kT} = \frac{\partial b_{\xi\eta}(t, u)}{\partial t} \left[\frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N n \right] = 0,$$

$$\left[\frac{\partial^2 S(t, u, \tau)}{\partial \tau^2} \right]_{\tau=kT} = \frac{\partial^2 b_{\xi\eta}(t, u)}{\partial t^2} \left[\frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N n^2 \right] = \frac{1}{3} N(N+1) \frac{\partial^2 b_{\xi\eta}(t, u)}{\partial t^2}.$$

В останньому виразі враховано, що

$$\sum_{n=-N}^N n^2 = 2 \sum_{n=1}^N n^2 = \frac{N}{3} (N+1)(2N+1).$$

Якщо $\frac{\partial^2 b_{\xi\eta}(t, u)}{\partial t^2} \neq 0$, то величина $S(t, u, kT) = b_{\xi\eta}(t, u)$ є екстремальними значеннями детермінованої складової статистики (6.1.1).

Враховавши ряд Фур'є

$$b_{\xi\eta}(t, u) = \sum_{k \in Z} B_k^{(\xi\eta)}(u) e^{ik\omega_0 t}$$

математичне сподівання (6.1.2) для довільних τ представимо у вигляді:

$$S(t, u, \tau) = \sum_{k \in Z} B_k^{(\xi\eta)}(u) H_\tau(k\omega_0) e^{ik\omega_0 t},$$

де $H_\tau(\omega)$ - передавальна функція так званого фільтра Бюй-Балло [176, 247]:

$$H_\tau(\omega) = \frac{\sin(2N+1)\frac{\omega\tau}{2}}{(2N+1)\sin\frac{\omega\tau}{2}}.$$

Залежність від частоти ω цієї функції має вигляд гребінки з висотою зубців, що дорівнює одиниці і шириною, яка зменшується зі збільшенням N .

Флуктуаційна складова перетворення (6.1.1) має вигляд:

$$N(t, u, \tau) = \hat{b}_{\xi\eta}(t, u, \tau) - S(t, u, \tau) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \zeta^\circ(t+n\tau, u),$$

де $\zeta(t, u) = \xi^\circ(t)\eta^\circ(t+u)$. Її середньоквадратичне значення:

$$EN^2(t, u, \tau) = \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{m,n=-N}^N b_\zeta(t+n\tau, (m-n)\tau, u)$$

при цьому $b_\zeta(t, s-t, u)$ - кореляційна функція випадкового процесу $\zeta(t, u)$:

$$b_\zeta(t, s-t, u) = E\zeta(t, u)\zeta(s, u) - E\zeta(t, u)E\zeta(s, u).$$

Для гаусових взаємозв'язаних ПКВП:

$$b_\zeta(t, s-t, u) = b_\zeta(t, s-t)b_\eta(t+u, s-t) + b_{\xi\eta}(t, s-t+u)b_{\eta\xi}(t+u, s-t-u).$$

У цьому випадку

$$EN^2(t, u, \tau) = \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{m,n=-N}^N \left[b_\zeta(t+n\tau, (m-n)\tau)b_\eta(t+u+n\tau, (m-n)\tau) + b_{\xi\eta}(t+n\tau, u+(m-n)\tau)b_{\eta\xi}(t+u+n\tau, (m-n)\tau-u) \right].$$

В останньому виразі введемо новий індекс сумування $r = m - n$ і змінимо його порядок (рис. 6.1):

$$EN^2(t, u, \tau) = \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{n=-N}^N \sum_{r=-N-n}^{N-n} b_\zeta(t+n\tau, r\tau, u) = \frac{1}{(2N+1)^2} \left[\sum_{n=-N}^N b_\zeta(t+n\tau, r\tau, u) + \sum_{r=-2N}^{-1} \sum_{n=-N-r}^N b_\zeta(t+n\tau, r\tau, u) + \sum_{r=1}^{2N} \sum_{n=-N}^{N-r} b_\zeta(t+n\tau, r\tau, u) \right].$$

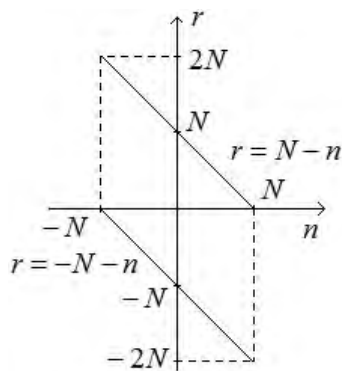


Рис. 6.1. Зміна порядку сумування.

Другу складову перетворимо наступним чином:

$$\begin{aligned} \sum_{r=-2N}^{-1} \sum_{n=-N-r}^N b_{\zeta}(t+n\tau, r\tau, u) &= \sum_{r=1}^{2N} \sum_{n=-N+r}^N b_{\zeta}(t+n\tau, -r\tau, u) = \\ &= \sum_{r=1}^{2N} \sum_{n=-N+r}^N b_{\zeta}(t+(n-r)\tau, r\tau, u) = \sum_{r=1}^{2N} \sum_{n=-N}^{N-r} b_{\zeta}(t+n\tau, r\tau, u). \end{aligned}$$

Тут враховано, що $b_{\zeta}(t, -r\tau, u) = b_{\zeta}(t - r\tau, r\tau, u)$ і введено новий індекс сумування $p = n - r$.

Відтак

$$EN^2(t, u, \tau) = \frac{1}{(2N+1)^2} \left[\sum_{n=-N}^N b_{\zeta}(t+n\tau, 0, u) + 2 \sum_{r=1}^{2N} \sum_{n=-N}^{N-r} b_{\zeta}(t+n\tau, r\tau, u) \right].$$

Функція $b_{\zeta}(t, r\tau, u)$ є періодичною за часом і її можна подати у вигляді ряду Фур'є:

$$b_{\zeta}(t+n\tau, r\tau, u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{B}_k(r\tau, u) e^{ik\omega_0(t+n\tau)}.$$

Тоді

$$EN^2(t, u, \tau) = \frac{1}{2N+1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{ik\omega_0 t} \left[\tilde{B}_k(0, u) f_k(-N, N) + 2 \sum_{r=1}^{2N} \tilde{B}_k(r\tau, u) f_k(-N, N-r) \right],$$

де

$$f_k(-N, N-r) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N-r} e^{ik\omega_0 n\tau}.$$

Припустимо, що виконуються граничні рівності

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} B_k^{(\xi, \eta)}(u) = 0, \quad \lim_{|u| \rightarrow \infty} B_k^{(\xi \eta)}(u) = 0, \quad k \in Z. \quad (6.1.3)$$

За таких умов

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} \tilde{B}_k(u_1, u) = 0,$$

а тоді $D[\hat{b}(t, u, \tau)] \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Це означає, що функціонал $\hat{b}_{\xi\eta}(t, u, \tau)$ в середньоквадратичному збігається до $S(t, u, \tau)$. Відтак, при великих N точки екстремумів функціоналу $\hat{b}_{\xi\eta}(t, u, \tau)$ будуть близькими до відповідних точок детермінованої складової $S(t, u, \tau)$. Тоді оцінку періоду \hat{T} можна шукати як точку першого ($k=1$) абсолютного екстремуму функціоналу $\hat{b}_{\xi\eta}(t, u, \tau) = S(t, u, \tau) + N(t, u, \tau)$. Аналіз збіжності цієї оцінки проведемо на основі розв'язків рівняння

$$\frac{\partial S(t, u, \tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial N(t, u, \tau)}{\partial \tau} = 0, \quad (6.1.4)$$

яка є необхідною умовою існування цього екстремуму.

Рівняння (6.1.4) запишемо у вигляді

$$\frac{\partial \tilde{S}(t, u, \tau)}{\partial \tau} + \gamma \frac{\partial \tilde{N}(t, u, \tau)}{\partial \tau} = 0, \quad (6.1.5)$$

де

$$\gamma = \frac{\sqrt{EN^2(t, u, T)}}{S(t, u, T)},$$

$$\tilde{S}(t, u, \tau) = \frac{S(t, u, \tau)}{S(t, u, T)},$$

$$\tilde{N}(t, u, \tau) = \frac{N(t, u, \tau)}{\sqrt{EN^2(t, u, T)}}.$$

При виконанні умов (6.1.4) величина $\gamma \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, а при великих N є достатньо малою величиною. Тому для знаходження розв'язків рівняння (6.1.5) можна використати метод малого параметра [123, 134].

Застосовуючи цей метод, представимо розв'язок рівняння (6.1.5) у вигляді ряду за степенями малого параметра γ :

$$\hat{T} = T + \gamma T_1 + \gamma^2 T_2 + \gamma^3 T_3 + \dots,$$

а його ліву сторону представимо рядом Тейлора:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \tilde{S}(t, u, \tau)}{\partial \tau} + \gamma \frac{\partial \tilde{N}(t, u, \tau)}{\partial \tau} \right]_{\tau=\hat{T}} &= \left[\frac{\partial \tilde{S}(t, u, \tau)}{\partial \tau} + \gamma \frac{\partial \tilde{N}(t, u, \tau)}{\partial \tau} \right]_{\tau=T} + \\ &+ \left[\frac{\partial^2 \tilde{S}(t, u, \tau)}{\partial \tau^2} + \gamma \frac{\partial^2 \tilde{N}(t, u, \tau)}{\partial \tau^2} \right]_{\tau=T} (\hat{T} - T) + \left[\frac{\partial^3 \tilde{S}(t, u, \tau)}{\partial \tau^3} + \gamma \frac{\partial^3 \tilde{N}(t, u, \tau)}{\partial \tau^3} \right]_{\tau=T} (\hat{T} - T)^2 + \dots \end{aligned}$$

ввівши позначення

$$s_i = \left[\frac{\partial^i \tilde{S}(t, u, \tau)}{\partial \tau^i} \right]_{\tau=T}, \quad n_i = \left[\frac{\partial^i \hat{N}(t, u, \tau)}{\partial \tau^i} \right]_{\tau=T},$$

тоді маємо:

$$\begin{aligned} s_1 + \gamma n_1 + (s_2 + \gamma n_2)(\gamma T_1 + \gamma^2 T_2 + \gamma^3 T_3 + \dots) + (s_3 + \gamma n_3)(\gamma T_1 + \gamma^2 T_2 + \gamma^3 T_3 + \dots) + \\ + (s_4 + \gamma n_4)(\gamma T_1 + \gamma^2 T_2 + \gamma^3 T_3 + \dots) + \dots = 0. \end{aligned} \quad (6.1.6)$$

Легко бачити, що

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{(2N+1)b_{\xi\eta}(t, u)} \sum_{n=-N}^N n \frac{\partial b_{\xi\eta}(t+nT, u)}{\partial t} = 0, \\ s_3 &= \frac{1}{(2N+1)b_{\xi\eta}(t, u)} \sum_{n=-N}^N n^3 \frac{\partial b_{\xi\eta}(t+nT, u)}{\partial t} = 0. \end{aligned}$$

Прирівнюючи коефіцієнти рівняння (6.1.6) при однакових степенях γ до нуля, отримуємо:

$$n_1 + s_2 T_1 = 0, \quad n_2 T_1 + s_2 T_2 = 0, \quad s_2 T_2 + \frac{n_3}{2} T_1^2 + \frac{s_4}{6} T_1^3 n_2 T_2 = 0,$$

а звідси

$$T_1 = \frac{n_1}{s_2}, \quad T_2 = \frac{n_1 n_2}{s_2^2}, \quad T_3 = \frac{1}{s_2^3} \left(n_1^2 n_2 + \frac{1}{2} n_3 n_1^2 - \frac{1}{6} \frac{s_4 n_1^3}{s_2} \right).$$

У першому наближенні $\hat{T} = T - \gamma \frac{n_1}{s_2}$. Математичне сподівання величини n_1 дорівнює нулю, тому в першому наближенні оцінка періоду є незміщеною. Дисперсія оцінки в першому наближенні визначається виразом:

$$D[\hat{T}] = E[\hat{T} - T]^2 = \gamma^2 \frac{En_1^2}{s_2^2} = \frac{1}{s_2^2 b_{\xi\eta}^2(t, u)} E \left[\frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \frac{\partial \dot{\zeta}(t+n\tau, u)}{\partial \tau} \right]_{\tau=T}^2.$$

Враховуючи, що

$$\left[\frac{\partial \dot{\zeta}(t+n\tau, u)}{\partial \tau} \right]_{\tau=T} \left[\frac{\partial \dot{\zeta}(t+m\tau, u)}{\partial \tau} \right]_{\tau=T} = \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \dot{\zeta}(t+nx, u) \dot{\zeta}(t+my, u) \right]_{\substack{x=T \\ y=T}},$$

знаходимо

$$\begin{aligned} D[\hat{T}] &= \frac{1}{s_2^2 b_{\xi\eta}^2(t, u)} \left[\frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{m, n=-N}^N E \left[\frac{\partial \dot{\zeta}(t+n\tau)}{\partial \tau} \right]_{\tau=T} \left[\frac{\partial \dot{\zeta}(t+m\tau)}{\partial \tau} \right]_{\tau=T} \right] = \\ &= 9 \left[N(N+1)(2N+1) \frac{\partial^2 b_{\xi\eta}(t, u)}{\partial t^2} \right]^{-2} \sum_{m, n=-N}^N \left[\frac{\partial^2 b_{\xi\eta}(t+nx, my-nx, u)}{\partial x \partial y} \right]_{\substack{x=T \\ y=T}} \end{aligned} \quad (6.1.7)$$

Прийнявши до уваги ряд

$$b_{\xi}(t+nx, my-nx, u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{B}_k(my-nx, u) e^{ik\omega_0(t+nx)},$$

маємо

$$\frac{\partial^2 b_{\xi}(t+nx, my-nx, u)}{\partial x \partial y} = mn \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[ik\omega_0 \tilde{B}'_k(my-nx, u) e^{ik\omega_0(t+nx)} - \tilde{B}''_k(my-nx, u) e^{ik\omega_0(t+nx)} \right].$$

Порівнюючи цей вираз зі співвідношеннями

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 b_{\xi}(s, v, u)}{\partial v \partial s} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} ik\omega_0 \frac{\partial \tilde{B}_k(v, u)}{\partial v} e^{ik\omega_0 s}, \\ \frac{\partial^2 b_{\xi}(s, v, u)}{\partial v^2} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\partial^2 \tilde{B}_k(v, u)}{\partial v^2} e^{ik\omega_0 s}, \end{aligned}$$

приходимо до рівності

$$\left[\frac{\partial^2 b_\xi(t+nx, my-nx, u)}{\partial x \partial y} \right]_{\substack{x=T \\ y=T}} = mn \left[\frac{\partial^2 b_\xi(s, v, u)}{\partial v \partial s} - \frac{\partial^2 b_\xi(s, v, u)}{\partial v^2} \right]_{\substack{s=t \\ v=(m-n)T}}.$$

Виходячи з цієї рівності, оцінимо порядок дисперсії оцінки періоду в першому

наближенні. Позначимо $f_1(t, (m-n)T, u) = \left[\frac{\partial^2 b_\xi(s, v, u)}{\partial v \partial s} - \frac{\partial^2 b_\xi(s, v, u)}{\partial v^2} \right]_{\substack{s=t \\ v=(m-n)T}}$ для

подвійної суми формули (6.1.7). Тоді маємо:

$$\begin{aligned} \sum_{m, n=-N}^N mn f_1(t, (m-n)T, u) &= \sum_{n=-N}^N \sum_{l=-N-n}^{N-n} n(l+n) f_1(t, lT) = \\ &= \sum_{l=-2N}^0 f_1(t, lT) \sum_{n=-N-l}^N n(l+n) + \sum_{l=1}^{2N} f_1(t, lT) \sum_{n=-N}^{N-l} n(l+n) = \\ &= \frac{N}{3}(N+1)(2N+1) f_1(t, 0) + \sum_{l=1}^{2N} [f_1(t, lT) + f_1(t, -lT)] \sum_{n=-N}^{N-l} (n+l)n. \end{aligned}$$

Тут враховано, що

$$\sum_{n=-N-l}^N n(l+n) = \sum_{n=-N+l}^N (n-l)n = \sum_{m=-N}^{N-l} (m+l)m.$$

Оскільки

$$\left| \sum_{n=-N}^{N-l} n(n+l) \right| \leq \sum_{n=-N}^{N-l} |n(n+1)| \leq N(N+1)(2N+1),$$

то на основі (6.1.7) приходимо до висновку, що дисперсія оцінки періоду в першому наближенні має порядок $O(N^{-3})$.

Більш точні формули для зміщення й дисперсії оцінки періоду отримуємо, враховуючи вищі наближення T_2, T_3, \dots . Знайдемо формулу для зміщення в

другому наближенні, приймаючи до уваги, що $T_2 = \frac{n_1 n_2}{s_2^2}$. Для похідних

флуктуаційної складової статистики (6.1.1) маємо

$$\frac{\partial^l N(t, u, \tau)}{\partial \tau^l} = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \frac{\partial^l \zeta(t + n\tau, u)}{\partial \tau^l}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} E \left[\frac{\partial \tilde{N}(t, u, \tau)}{\partial \tau} \right]_{\tau=T} \left[\frac{\partial^2 N(t, u, \tau)}{\partial \tau^2} \right]_{\tau=T} &= \\ &= \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{m, n=-N}^N E \left[\frac{\partial \dot{\zeta}(t+n\tau, u)}{\partial \tau} \right]_{\tau=T} \left[\frac{\partial^2 \dot{\zeta}(t+n\tau, u)}{\partial \tau^2} \right]_{\tau=T}. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\left[\frac{\partial \dot{\zeta}(t+n\tau, u)}{\partial \tau} \right]_{\tau=T} \left[\frac{\partial^2 \dot{\zeta}(t+n\tau, u)}{\partial \tau^2} \right]_{\tau=T} = \left[\frac{\partial^3}{\partial x \partial y} \dot{\zeta}(t+nx, u) \dot{\zeta}(t+ny, u) \right]_{\substack{x=T \\ y=T}},$$

то

$$En_1 n_2 = \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{m, n=-N}^N \left[\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} b_{\zeta}(t+nx, my-nx, u) \right]_{\substack{x=T \\ y=T}}.$$

Відтак, зміщення оцінки періоду в другому наближенні визначається формулою

$$\begin{aligned} \varepsilon[\hat{T}] &= \gamma^2 \frac{En_1 n_2}{s_2^2} = 9 \left[N(N+1)(2N+1) \frac{\partial^2 b_{\zeta_n}(t, u)}{\partial t^2} \right]^{-2} \times \\ &\times \sum_{m, n=-N}^N \left[\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} b_{\zeta}(t+nx, my-nx, u) \right]_{\substack{x=T \\ y=T}}. \end{aligned} \quad (6.1.8)$$

Враховуючи співвідношення

$$\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} b_{\zeta}(t+nx, my-nx) = m^2 n \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{ik\omega_0(t+nx)} \begin{bmatrix} ik\omega_0 \left[\frac{\partial^2 \tilde{B}_k(v, u)}{\partial v^2} \right]_{v=my-nx} \\ - \left[\frac{\partial^3 \tilde{B}_k(v, u)}{\partial v^3} \right]_{v=my-nx} \end{bmatrix},$$

а також

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 b_{\zeta}(s, v, u)}{\partial s \partial v^2} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} ik\omega_0 \frac{\partial^2 \tilde{B}_k(v, u)}{\partial v^2} e^{ik\omega_0 s}, \\ \frac{\partial^3 b_{\zeta}(s, v, u)}{\partial v^3} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\partial^3 \tilde{B}_k(v, u)}{\partial v^3} e^{ik\omega_0 s}, \end{aligned}$$

приходимо до рівності

$$\left[\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} b_\zeta(t + nx, my - nx) \right]_{\substack{x=T \\ y=T}} = m^2 n f_2(t, (m-n)T, u),$$

де

$$f_2(t, (m-n)T, u) = \left[\frac{\partial^3 b_\zeta(s, v, u)}{\partial s \partial v^2} - \frac{\partial^3 b_\zeta(s, v, u)}{\partial v^3} \right]_{\substack{s=t \\ v=(m-n)T}}.$$

Після перетворень отримуємо:

$$\begin{aligned} \sum_{m,n=-N}^N m^2 n f_2(t, (m-n)T, u) &= \frac{N^2}{2} (N^2 + 2N + 1) f_2(t, 0, u) + \\ &+ \sum_{l=1}^{2N} \left[n(n+l)^2 f_2(t, lT, u) + f_2(t, -lT, u) n^2 (n+l) \right]. \end{aligned}$$

Легко бачити, що останній вираз має порядок $O(N^4)$. Тому в другому наближенні $\varepsilon[\hat{T}] \sim O(N^{-2})$.

Формули як для зміщення, так і для дисперсії, отримані з врахуванням вищих наближень є громіздкими, тому тут ми їх не наводимо. Зауважимо тільки, що аналіз цих формул показує, що вони мають вищий порядок малості, ніж величини (6.1.7) і (6.1.8).

Таким чином, оцінки періоду взаємонестационарності, що знаходяться як точки екстремальних значень статистики (6.1.1), при виконанні умов (6.1.3) є асимптотично незміщеними й слухними. При скінченних довжинах відрізків реалізацій сигналів їх зміщення та дисперсії в першому наближенні визначаються формулами (6.1.7) і (6.1.8). Ці формули можуть бути використані для побудови тестів для виявлення взаємозалежності між нестационарними властивостями сигналів.

Числові значення величин (6.1.7) і (6.1.8) можуть бути отримані при переході до конкретних моделей сигналів. Обчислимо, як приклад, дисперсію оцінки періоду взаємозв'язаних амплітудно-модульованих сигналів:

$$\xi(t) = \mu(t) \cos \omega_0 t,$$

$$\eta(t) = \nu(t) \cos \omega_0 t.$$

Випадковий процес $\zeta(t, u) = \overset{\circ}{\xi}(t)\overset{\circ}{\eta}(t+u)$ тоді визначається формулою:

$$\zeta(t, u) = \overset{\circ}{\mu}(t)\overset{\circ}{\nu}(t+u)\cos\omega_0 t \cos\omega_0(t+u),$$

де $\overset{\circ}{\mu}(t) = \mu(t) - m_\mu$, $\overset{\circ}{\nu}(t) = \nu(t) - m_\nu$, $m_\mu = E\mu(t)$, $m_\nu = E\nu(t)$. Його математичне сподівання і кореляційна функція дорівнюють:

$$m_\zeta(t, u) = E\zeta(t, u) = R_{\mu\nu}(u)\cos\omega_0 t \cos\omega_0(t+u),$$

$$\begin{aligned} b_\zeta(t, s-t, u) &= E[\zeta(t, u) - m_\zeta(t, u)][\zeta(s, u) - m_\zeta(s, u)] = \\ &= [R_\mu(s-t)R_\nu(s-t) + R_{\mu\nu}(s-t+u)R_{\nu\mu}(s-t-u)], \end{aligned}$$

при цьому $R_\mu(s-t) = E\overset{\circ}{\mu}(t)\overset{\circ}{\mu}(s)$, $R_\nu(s-t) = E\overset{\circ}{\nu}(t)\overset{\circ}{\nu}(s)$, $R_{\mu\nu}(s-t) = E\overset{\circ}{\mu}(t)\overset{\circ}{\nu}(s)$.

Тоді

$$\begin{aligned} b_\zeta(t+nx, my-nx, u) &= \left[R_\mu(my-nx)R_\nu(my-nx) + \right. \\ &\quad \left. + R_{\mu\nu}(my-nx, +u)R_{\nu\mu}(my-nx, -u) \right] \times \\ &\quad \times \cos\omega_0(t+nx)\cos\omega_0(t+mx)\cos\omega_0(t+nx+u)\cos\omega_0(t+mx+u). \end{aligned}$$

Друга мішана похідна цієї функції при $u=0$ і $R_{\mu\nu}(s-t) = R_{\nu\mu}(s-t)$ має вигляд:

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial^2 b_\zeta(t+nx, my-nx, 0)}{\partial x \partial y} \right]_{\substack{x=T \\ y=T}} = \\ &= mn \left[\omega_0^2 [R_\mu((m-n)T)R_\nu((m-n)T) + R_{\mu\nu}^2((m-n)T)] \sin^2 2\omega_0 t - \right. \\ &\quad - [R_\mu''((m-n)T)R_\nu((m-n)T) + 2R_\mu'((m-n)T)R_\nu'((m-n)T) + \\ &\quad + R_\nu''((m-n)T)R_\mu((m-n)T) + 2[R_{\mu\nu}'((m-n)T)]^2 + \\ &\quad \left. + 2R_{\mu\nu}((m-n)T)R_{\mu\nu}''((m-n)T)] \cos^4 \omega_0 t \right]. \end{aligned}$$

Припустимо, що авто- та взаємкореляційні зв'язки швидко зникають до нуля на інтервалі, який є меншим від періоду нестационарності, і в подвійній сумі формули (6.1.7) врахуємо тільки ті складові, для яких $m=n$. Приймаючи до уваги, що

$$\left[\frac{\partial^2 b_{\xi\eta}(t, 0)}{\partial t^2} \right] = 4\omega_0^4 R_{\mu\nu}^2(0) \cos^2 2\omega_0 t,$$

для дисперсії оцінки періоду в цьому випадку отримуємо:

$$\begin{aligned} D[\hat{T}] &= \frac{3}{4} \left[N(N+1)(2N+1)\omega_0^4 R_{\mu\nu}^2(0) \cos^2 2\omega_0 t \right]^{-1} \times \\ &\times \left[\omega_0^2 \left[R_\mu(0)R_\nu(0) + R_{\mu\nu}^2(0) \right] \sin^2 2\omega_0 t - \right. \\ &- \left[R_\mu''(0)R_\nu(0) + 2R_\mu'(0)R_\nu'(0) + R_\nu''(0)R_\mu(0) + 2 \left[R_{\mu\nu}'(0) \right]^2 + \right. \\ &\left. \left. + 2R_{\mu\nu}(0)R_{\mu\nu}''(0) \right] \cos^4 \omega_0 t \right]. \end{aligned}$$

Припустимо, що $R_\nu(u) = D_\nu e^{-\alpha_\nu u^2}$, $R_\mu(u) = D_\mu e^{-\alpha_\mu u^2}$, $R_{\mu\nu}(u) = D_{\mu\nu} e^{-\alpha_{\mu\nu} u^2}$. Тоді

$$\begin{aligned} D[\hat{T}] &= \frac{3 \cos^2 \omega_0 t}{2D_{\mu\nu}^2 \omega_0^4 N(N+1)(2N+1) \cos^2 2\omega_0 t} \times \\ &\times \left[2\omega_0^2 \left[D_\mu D_\nu + D_{\mu\nu}^2 \right] \sin^2 \omega_0 t + \left[D_\mu D_\nu (\alpha_\mu + \alpha_\nu) + 2D_{\mu\nu}^2 \right] \cos^2 \omega_0 t \right]. \end{aligned}$$

Якщо $t = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, то

$$D[\hat{T}] = \frac{3 \left[D_\mu D_\nu (\alpha_\mu + \alpha_\nu) + 2D_{\mu\nu}^2 \alpha_{\mu\nu} \right]}{2D_{\mu\nu}^2 \omega_0^4 N(N+1)(2N+1)}.$$

Дисперсія у цьому випадку є пропорційною до декрементів зникання автокореляційних і взаємокореляційних зв'язків, а також до відношення $\frac{D_\mu D_\nu}{D_{\mu\nu}}$.

6.2. Покомпонентні оцінки періоду

Розглянемо тепер оцінки періоду, які визначаються за допомогою перетворень:

$$\hat{C}_k^{(\xi\eta)}(u, \tau) = \frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} \dot{\xi}(t) \dot{\eta}(t+u) \cos k\omega_\tau t dt, \quad \omega_\tau = \frac{2\pi}{\tau}, \quad (6.2.1)$$

$$\hat{S}_k^{(\xi\eta)}(u, \tau) = \frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} \xi(t) \overset{\circ}{\eta}(t+u) \sin k\omega_\tau t dt. \quad (6.2.2)$$

Детерміновані складові цих перетворень мають вигляд:

$$M_k^c(u, \tau) = E\hat{C}_k^{(\xi\eta)}(u, \tau) = \frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} E \xi(t) \overset{\circ}{\eta}(t+u) \cos k\omega_\tau t dt = \frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} b_{\xi\eta}(t, u) \cos k\omega_\tau t dt,$$

$$M_k^s(u, \tau) = E\hat{S}_k^{(\xi\eta)}(u, \tau) = \frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} E \xi(t) \overset{\circ}{\eta}(t+u) \sin k\omega_\tau t dt = \frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} b_{\xi\eta}(t, u) \sin k\omega_\tau t dt.$$

Подавши взаємкореляційну функцію у вигляді ряду Фур'є:

$$b_{\xi\eta}(t, u) = B_0^{(\xi\eta)}(u) + \sum_{k \in N} \left[C_k^{(\xi\eta)}(u) \cos k\omega_0 t + S_k^{(\xi\eta)}(u) \sin k\omega_0 t \right],$$

отримуємо:

$$M_k^c(u, \tau) = B_0^{(\xi\eta)}(u) \left[\frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} \cos k\omega_\tau t dt \right] + \sum_{l \in N} \left[C_l^{(\xi\eta)}(u) \left[\frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} \cos k\omega_\tau t \cos l\omega_0 t dt \right] + \right.$$

$$\left. + S_l^{(\xi\eta)}(u) \left[\frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} \sin l\omega_0 t \cos k\omega_\tau t dt \right] \right] = 2B_0^{(\xi\eta)}(u) I_0(k\omega_\tau, \theta) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{\infty} \left[C_l^{(\xi\eta)}(u) I_0[(l\omega_0 + k\omega_\tau), \theta] + S_l^{(\xi\eta)}(u) I_0[(l\omega_0 - k\omega_\tau), \theta] \right],$$

$$M_k^s(u, \tau) = B_0^{(\xi\eta)}(u) \left[\frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} \sin k\omega_\tau t dt \right] + \sum_{l=1}^{\infty} \left[C_l^{(\xi\eta)}(u) \left[\frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} \cos l\omega_0 t \sin k\omega_\tau t dt \right] + \right.$$

$$\left. + S_l^{(\xi\eta)}(u) \left[\frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} \sin l\omega_0 t \cos k\omega_\tau t dt \right] \right] = \sum_{l=1}^{\infty} S_l^{(\xi\eta)}(u) \left[I_0[(l\omega_0 - k\omega_\tau), \theta] + I_0[(l\omega_0 + k\omega_\tau), \theta] \right],$$

де $I_0(\omega, \theta) = \frac{\sin \omega \theta}{\omega \theta}$. Функція $I_0(\omega, \theta)$ при $\omega = 0$ дорівнює одиниці для всіх

значень θ , а при $\omega \neq 0 \lim_{\theta \rightarrow \infty} I_0(\omega, \theta) = 0$. Для $k > 0$ рівність $k\omega_\tau + l\omega_0 = 0$ не

виконується ні для яких $\tau > 0$, а рівність $k\omega_\tau - l\omega_0 = 0$ виконується для тих τ , які

визначаються формулою $\tau_l = \frac{kT}{l}$. Якщо $k = l$, то точками скачків функції

$I_0(l\omega_0 - k\omega_\tau)$ будуть $\tau_1 = T$, $\tau_2 = \frac{T}{2}$, $\tau_3 = \frac{T}{3}$, ..., а їх величини визначаються,

відповідно, кореляційними компонентами $C_l^{(\xi\eta)}(u)$, $S_l^{(\xi\eta)}(u)$. Відтак, маємо:

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} M_k^c(u, \tau) = \begin{cases} C_l^{(\xi\eta)}(u) \text{ для } \tau_l = \frac{kT}{l}, k > 0, \\ 0 \text{ для } \tau \neq \tau_l, \end{cases}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} M_k^s(u, \tau) = \begin{cases} S_l^{(\xi\eta)}(u) \text{ для } \tau_l = \frac{kT}{l}, k > 0, \\ 0 \text{ для } \tau \neq \tau_l. \end{cases}$$

Серед усіх значень пробного періоду τ_l виділимо ті, які відповідають випадку $l = k$. Тоді $\tau_l = T$. Значення детермінованих складових при таких значеннях пробного періоду

$$M_k^c(u, T) = 2B_0 I_0(k\omega_0, \theta) + C_k^{(\xi\eta)}(u) + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{\infty} C_l^{(\xi\eta)}(u) [I_0[(l+k)\omega_0, \theta] + I_0[(l-k)\omega_0, \theta]],$$

$$M_k^s(u, T) = S_k^{(\xi\eta)}(u) + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{\infty} S_l^{(\xi\eta)}(u) [I_0[(l-k)\omega_0, \theta] - I_0[(l+k)\omega_0, \theta]]$$

при великих θ будуть незначно відрізнятися від значень кореляційних компонентів $C_k^{(\xi\eta)}$ і $S_k^{(\xi\eta)}$. В асимптотиці маємо:

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} M_k^c(u, T) = C_k^{(\xi\eta)}(u),$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} M_k^s(u, T) = S_k^{(\xi\eta)}(u).$$

Флуктуаційні складові статистик (6.2.1) і (6.2.2) визначаються співвідношеннями:

$$N_k^c(u, \tau) = \hat{C}_k^{(\xi\eta)}(u, \tau) - M_k^c(u, \tau) = \frac{1}{\theta} \int_{-0}^{\theta} [\dot{\xi}(t) \dot{\eta}(t+u) - b_{\xi\eta}(t, u)] \cos k\omega_\tau t dt,$$

$$N_k^s(u, \tau) = \hat{S}_k^{(\xi\eta)}(u, \tau) - M_k^s(u, \tau) = \frac{1}{\theta} \int_{-0}^{\theta} [\dot{\xi}(t) \dot{\eta}(t+u) - b_{\xi\eta}(t, u)] \sin k\omega_\tau t dt.$$

Для середньоквадратичних значень тоді отримуємо:

$$E[N_k^c(u, \tau)]^2 = \frac{1}{\theta^2} \int_{-0}^{\theta} \int_{-0}^{\theta} E \left[\dot{\xi}(t) \dot{\eta}(t+u) - b_{\xi\eta}(t, u) \right] \left[\dot{\xi}(s) \dot{\eta}(s+u) - b_{\xi\eta}(s, u) \right] \times$$

$$\times \cos k\omega_\tau t \cos k\omega_\tau s ds dt = \frac{1}{\theta^2} \int_{-\theta}^{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} b_\zeta(t, s-t, u) \cos k\omega_\tau t \cos k\omega_\tau s dt ds, \quad (6.2.3)$$

$$E[N_k^s(u, \tau)]^2 = \frac{1}{\theta^2} \int_{-\theta}^{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} b_\zeta(t, s-t, u) \sin k\omega_\tau t \sin k\omega_\tau s dt ds, \quad (6.2.4)$$

де $b_\zeta(t, s-t, u)$ - кореляційна функція процесу $\zeta(t, u) = \overset{\circ}{\xi}(t)\overset{\circ}{\eta}(t+u)$:

$$\begin{aligned} b_\zeta(t, s-t, u) &= E\zeta(t, u)\zeta(s, u) - m_\zeta(t, u)m_\zeta(s, u) = \\ &= E\overset{\circ}{\xi}(t)\overset{\circ}{\eta}(t+u)\overset{\circ}{\xi}(s)\overset{\circ}{\eta}(s+u) - b_{\xi\eta}(t, u)b_{\xi\eta}(s, u). \end{aligned}$$

Для взаємозв'язаних гаусових процесів:

$$\begin{aligned} E\overset{\circ}{\xi}(t)\overset{\circ}{\eta}(t+u)\overset{\circ}{\xi}(s)\overset{\circ}{\eta}(s+u) &= b_{\xi\eta}(t, u)b_{\xi\eta}(s, u) + b_\xi(t, s-t)b_\eta(t+u, s-t) + \\ &E\overset{\circ}{\xi}(t)\overset{\circ}{\eta}(t+u)\overset{\circ}{\xi}(s)\overset{\circ}{\eta}(s+u) + b_{\xi\eta}(t, s-t+u)b_{\eta\xi}(t+u, s-t-u). \end{aligned}$$

Тоді

$$b_\zeta(t, s-t, u) = b_\xi(t, s-t)b_\eta(t+u, s-t) + b_{\xi\eta}(t, s-t+u)b_{\eta\xi}(t+u, s-t-u). \quad (6.2.5)$$

У подвійному інтегралі (6.2.3) зробимо заміну змінної інтегрування $u_1 = s-t$ і змінимо його порядок (рис. 6.2):

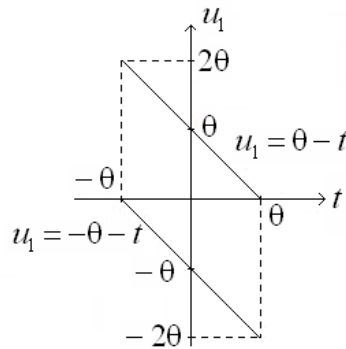


Рис. 6.2. Зміна порядку сумування.

$$\begin{aligned} E[N_k^c(u, \tau)]^2 &= \frac{1}{\theta^2} \int_{-\theta}^{\theta} \int_{-\theta-t}^{\theta} b_\zeta(t, u_1, u) \cos k\omega_\tau t \cos k\omega_\tau (t+u) du_1 dt = \\ &= \frac{1}{\theta^2} \int_{-\theta}^{2\theta} \left[\int_{-\theta+u_1}^{\theta-u_1} b_\zeta(t, -u_1, u) \cos k\omega_\tau t \cos k\omega_\tau (t-u_1) dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\theta}^{\theta-u_1} b_\zeta(t, u_1, u) \cos k\omega_\tau t \cos k\omega_\tau (t+u_1) dt \right] du_1 = \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\theta^2} \int_0^{2\theta} \int_{-\theta}^{\theta-u_1} b_\zeta(t, u_1, u) \cos k\omega_\tau t \cos k\omega_\tau (t + u_1) dt du_1. \quad (6.2.6)$$

В останньому перетворенні використано рівність $b_\zeta(t, -u_1, u) = b_\zeta(t - u_1, u_1, u)$, яка впливає зі співвідношення (6.2.5), а також у першому інтегралі зроблено заміну $s = t - u_1$.

Після аналогічних перетворень виразу (6.2.4) знаходимо:

$$E[N_k^s(u, \tau)]^2 = \frac{2}{\theta^2} \int_0^{2\theta} \int_{-\theta}^{\theta-u_1} b_\zeta(t, u_1, u) \sin k\omega_\tau t \sin k\omega_\tau (t + u_1) dt du_1. \quad (6.2.7)$$

Функція (6.2.5) є періодичною за часом і може бути представлена рядом Фур'є:

$$b_\zeta(t, u_1, u) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \tilde{B}_l(u_1, u) e^{il\omega_0 t}. \quad (6.2.8)$$

Коефіцієнти Фур'є $\tilde{B}_k(u_1, u)$ легко знаходяться на основі рядів Фур'є авто- та взаємкореляційних функцій процесів $\xi(t)$ і $\eta(t + u)$.

Підставляючи ряд (6.2.8) у формули (6.2.6) і (6.2.7), після інтегрування по t отримуємо:

$$\begin{aligned} E[N_k^c(u, \tau)]^2 &= \frac{1}{\theta} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\theta} \tilde{B}_l(u_1, u) \left[f_{l\omega_0}(-\theta, \theta - u_1) \cos k\omega_\tau u_1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left[e^{ik\omega_\tau u_1} f_{l\omega_0 + 2k\omega_\tau}(-\theta, \theta - u_1) + e^{-ik\omega_\tau u_1} f_{l\omega_0 - 2k\omega_\tau}(-\theta, \theta - u_1) \right] \right] du_1, \\ E[N_k^s(u, \tau)]^2 &= \frac{1}{\theta} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\theta} \tilde{B}_l(u_1, u) \left[f_{l\omega_0}(-\theta, \theta - u_1) \cos k\omega_\tau u_1 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left[e^{ik\omega_\tau u_1} f_{l\omega_0 + 2k\omega_\tau}(-\theta, \theta - u_1) + e^{-ik\omega_\tau u_1} f_{l\omega_0 - 2k\omega_\tau}(-\theta, \theta - u_1) \right] \right] du_1, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} f_{l\omega_0}(-\theta, \theta - u_1) &= \frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta-u_1} e^{il\omega_0 t} dt, \\ f_{l\omega_0 \pm 2k\omega_\tau}(-\theta, \theta - u_1) &= \frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta-u_1} e^{i(l\omega_0 \pm 2k\omega_\tau)t} dt. \end{aligned}$$

При $l \neq 0$ і $l\omega_0 \pm 2k\omega_\tau \neq 0$ ці функції при великих θ будуть досить малими, а при $l = 0$ і $l\omega_0 \pm 2k\omega_\tau = 0$ маємо:

$$f_0(-\theta, \theta - u_1) = 2 \left(1 - \frac{u_1}{2\theta} \right).$$

Тоді для деякого l , що є розв'язком рівняння $l\omega_0 - 2k\omega_\tau = 0$, у першому наближенні отримуємо:

$$E \left[N_k^c(u, \tau) \right]^2 = \frac{1}{\theta} \int_0^{2\theta} \left(1 - \frac{u_1}{2\theta} \right) \left[2\tilde{B}_0(u_1, u) \cos k\omega_\tau u_1 + \right. \\ \left. + \tilde{B}_l^c(u_1, u) \cos k\omega_\tau u_1 - \tilde{B}_l^s(u_1, u) \sin k\omega_\tau u_1 \right] du_1, \quad (6.2.9)$$

$$E \left[N_k^s(u, \tau) \right]^2 = \frac{1}{\theta} \int_0^{2\theta} \left(1 - \frac{u_1}{2\theta} \right) \left[2\tilde{B}_0(u_1, u) \cos k\omega_\tau u_1 - \right. \\ \left. - \tilde{B}_l^c(u_1, u) \cos k\omega_\tau u_1 + \tilde{B}_l^s(u_1, u) \sin k\omega_\tau u_1 \right] du_1. \quad (6.2.10)$$

Тут враховано, що

$$e^{ik\omega_\tau u_1} \tilde{B}_{-l}(u_1, u) + e^{-ik\omega_\tau u_1} \tilde{B}_l(u_1, u) = \tilde{B}_l^c(u_1, u) \cos k\omega_\tau u_1 - \tilde{B}_l^s(u_1, u) \sin k\omega_\tau u_1.$$

Якщо $l\omega_0 \pm 2k\omega_\tau \neq 0$, то в першому наближенні:

$$E \left[N_k^c(u, \tau) \right]^2 = \frac{2}{\theta} \int_0^{2\theta} \left(1 - \frac{u_1}{2\theta} \right) \tilde{B}_0(u_1, u) \cos k\omega_\tau u_1 du_1. \quad (6.2.11)$$

З отриманих співвідношень (6.2.9)–(6.2.11) випливає, що при зниканні кореляційних зв'язків з ростом зсуву, а саме виконанні граничних рівностей (6.2.3), маємо:

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} E \left[\hat{C}_k^{(\xi\eta)}(u, \tau) - M_k^c(u, \tau) \right]^2 = \lim_{\theta \rightarrow \infty} E \left[N_k^c(u, \tau) \right]^2 = 0, \\ \lim_{\theta \rightarrow \infty} E \left[\hat{S}_k^{(\xi\eta)}(u, \tau) - M_k^s(u, \tau) \right]^2 = \lim_{\theta \rightarrow \infty} E \left[N_k^s(u, \tau) \right]^2 = 0.$$

Таким чином, функціонали $\hat{C}_k^{(\xi\eta)}(u, \tau)$ і $\hat{S}_k^{(\xi\eta)}(u, \tau)$ у середньоквадратичному збігаються, відповідно, до $M_k^c(u_1, u)$ і $M_k^s(u_1, u)$. Опираючись на цей результат, ми можемо задачу оцінювання періоду нестационарності T звести до пошуку точок екстремальних значень функціоналів (6.2.1) і (6.2.2). Аналіз властивостей таких оцінок проведений на основі розв'язків нелінійних рівнянь

$$\frac{d\hat{C}_k^{(\xi\eta)}(u, \tau)}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\hat{S}_k^{(\xi\eta)}(u, \tau)}{d\tau} = 0,$$

які є необхідними умовами існування екстремумів. Ці рівняння подамо у вигляді

$$\frac{dM_k^{c,s}(u, \tau)}{d\tau} + \frac{dN_k^{c,s}(u, \tau)}{d\tau} = 0 \quad (6.2.12)$$

і введемо величини

$$\begin{aligned} \tilde{M}_k^{c,s}(u, \tau) &= \frac{M_k^{c,s}(u, \tau)}{M_k^{c,s}(u, T)}, \\ \tilde{N}_k^{c,s}(u, \tau) &= \frac{N_k^{c,s}(u, \tau)}{\sqrt{E[N_k^{c,s}(u, T)]^2}}, \\ \gamma_{c,s} &= \frac{\sqrt{E[N_k^{c,s}(u, T)]^2}}{M_k^{c,s}(u, T)}. \end{aligned}$$

Рівняння (6.2.12) тоді можна переписати наступним чином:

$$\frac{d\tilde{M}_k^{c,s}(u, \tau)}{d\tau} + \gamma_{c,s} \frac{d\tilde{N}_k^{c,s}(u, \tau)}{d\tau} = 0. \quad (6.2.13)$$

Зі збільшенням довжини відрізка реалізації θ введені величини $\gamma_{c,s}$ прямують до нуля, а це означає, що при достатньо великих θ їх можна вважати малими параметрами. Для знаходження розв'язків нелінійних рівнянь тоді може бути використаний метод малого параметра [134]. Користуючись цим методом, представимо розв'язки рівнянь (6.2.13) у вигляді степеневих рядів за малими параметрами $\gamma_{c,s}$:

$$\hat{T}_{c,s} = T_0^{c,s} + \gamma_{c,s} T_1^{c,s} + \gamma_{c,s}^2 T_2^{c,s} + \gamma_{c,s}^3 T_3^{c,s} + \dots \quad (6.2.14)$$

Ліву частину рівнянь (6.2.13) представимо рядом Тейлора:

$$\begin{aligned} &\left[\frac{d\tilde{M}_k^{c,s}(u, \tau)}{d\tau} + \gamma_{c,s} \frac{d\tilde{N}_k^{c,s}(u, \tau)}{d\tau} \right]_{\tau=T} + \left[\frac{d^2\tilde{M}_k^{c,s}(u, \tau)}{d\tau^2} + \gamma_{c,s} \frac{d^2\tilde{N}_k^{c,s}(u, \tau)}{d\tau^2} \right]_{\tau=T} (\hat{T} - T) + \\ &+ \left[\frac{d^3\tilde{M}_k^{c,s}(u, \tau)}{d\tau^3} + \gamma_{c,s} \frac{d^3\tilde{N}_k^{c,s}(u, \tau)}{d\tau^3} \right]_{\tau=T} (\hat{T} - T)^2 + \dots = 0. \end{aligned}$$

Ввівши позначення

$$s_i^{c,s} = \left[\frac{d^i \tilde{M}_k^{c,s}(u, \tau)}{d\tau^i} \right]_{\tau=T}, \quad n_i^{c,s} = \left[\frac{d^i \tilde{N}_k^{c,s}(u, \tau)}{d\tau^i} \right]_{\tau=T},$$

і підставивши до рівняння (6.2.13) степеневий ряд (6.2.14), отримуємо:

$$s_1^{c,s} + s_2^{c,s} (T_0^{c,s} - T) + \left[n_1^{c,s} + n_2^{c,s} (T_0^{c,s} - T) + s_2^{c,s} T_2^{c,s} \right] \gamma_{c,s} + \left(s_2^{c,s} T_2^{c,s} + n_2^{c,s} T_1^{c,s} \right) \gamma_{c,s}^2 + \dots$$

Отримане рівняння виконується тоді і тільки тоді, коли дорівнюють нулю коефіцієнти при відповідних степенях малих параметрів γ_c і γ_s :

$$s_1^{c,s} + s_2^{c,s} \Delta T_{c,s} + \frac{1}{2} s_3^{c,s} \Delta T_{c,s}^2 + \dots = 0,$$

$$n_1^{c,s} + s_2^{c,s} T_1^{c,s} + n_2^{c,s} \Delta T_{c,s} + s_3^{c,s} \Delta T_{c,s} T_1^{c,s} + \dots = 0,$$

$$s_2^{c,s} T_2^{c,s} + n_2^{c,s} T_1^{c,s} + \frac{1}{2} s_3^{c,s} (T_1^{c,s})^2 + s_3^{c,s} \Delta T_{c,s} T_2^{c,s} + \dots = 0,$$

.....

Тут $\Delta T_{c,s} = T_0^{c,s} - T$. Перше рівняння визначає різниці $\Delta T_{c,s}$. У лінійному

наближенні $\Delta T_{c,s} = -\frac{s_1^{c,s}}{s_2^{c,s}}$. З другого рівняння отримуємо перше наближення, а з

третього – друге:

$$T_1^{c,s} = -\frac{n_1^{c,s} + n_2^{c,s} \Delta T_{c,s} + \frac{1}{2} n_3^{c,s} \Delta T_{c,s}}{s_2^{c,s} + s_3^{c,s} \Delta T_{c,s}},$$

$$T_2^{c,s} = -\frac{\left(n_2^{c,s} + \frac{s_3^{c,s}}{2} T_1^{c,s} + n_3^{c,s} \Delta T_{c,s} \right) T_1^{c,s}}{s_2^{c,s} + s_3^{c,s} \Delta T_{c,s}}.$$

З врахуванням другого наближення для зміщення оцінок маємо:

$$\varepsilon \left[\hat{T}_{c,s} \right] = E \hat{T}_{c,s} - T = -\frac{s_1^{c,s}}{s_2^{c,s}} + \gamma_{c,s} E T_1^{c,s} + \gamma_{c,s}^2 E T_2^{c,s}.$$

Оскільки в першому наближенні $E T_1^{c,s} = -\frac{E n_1^{c,s}}{s_2^{c,s}} = 0$, то в цьому випадку:

$$\varepsilon \left[\hat{T}_{c,s} \right] = -\frac{s_1^{c,s}}{s_2^{c,s}}.$$

Швидкість росту похідних $s_i^{c,s}$ визначається інтегралами

$$\left[\frac{d^i M_k^{c,s}}{d\tau^i} \right]_{\tau=T} \sim \frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} t^i b_{\xi\eta}(t, u) \begin{cases} \cos k\omega_0 t \\ \sin k\omega_0 t \end{cases} dt.$$

Легко бачити, що $s_1^{c,s} \sim O(1)$, а $s_2^{c,s} \sim O(\theta^2)$. Звідси випливає, що зміщення оцінок періоду в першому наближенні мають порядок $O(\theta^{-2})$.

Дисперсії оцінок періоду в першому наближенні визначаються формулою

$$D[\hat{T}_{c,s}] = \frac{E(n_1^{c,s})^2}{(s_2^{c,s})^2}.$$

З виразів

$$\left[\frac{d\tilde{N}_k^{c,s}(u, \tau)}{d\tau} \right]_{\tau=T} = \frac{2\pi k}{\theta T^2} \int_{-\theta}^{\theta} t \zeta^\circ(t) \sin k\omega_0 t dt, \quad (6.2.15)$$

$$\left[\frac{d\tilde{M}_k^{c,s}(u, \tau)}{d\tau} \right]_{\tau=T} = \frac{2\pi k}{\theta T^2} \int_{-\theta}^{\theta} t \zeta^\circ(t) \cos k\omega_0 t dt, \quad (6.2.16)$$

випливає, що $E(n_1^{c,s})^2 \sim O(\theta^{-1})$. Тоді дисперсії оцінок періоду в першому наближенні мають порядок $O(\theta^{-3})$.

Проаналізуємо детальніше формули для зміщення й дисперсії оцінок періоду в першому наближенні. Перша та друга похідні нормованих детермінованих складових функціоналів (6.2.1) і (6.2.2) визначаються формулами:

$$s_1^c = \frac{2\pi k}{\theta T^2 M_k^c(u, T)} \int_{-\theta}^{\theta} t b_{\xi\eta}(t, u) \sin k\omega_0 t dt,$$

$$s_1^s = -\frac{2\pi k}{\theta T^2 M_k^s(u, T)} \int_{-\theta}^{\theta} t b_{\xi\eta}(t, u) \cos k\omega_0 t dt,$$

$$s_2^c = -\frac{2\pi k}{\theta T^3 M_k^s(u, T)} \left[2 \int_{-\theta}^{\theta} t b_{\xi\eta}(t, u) \sin k\omega_0 t dt + k\omega_0 \int_{-\theta}^{\theta} t^2 b_{\xi\eta}(t, u) \cos k\omega_0 t dt \right],$$

$$s_2^s = \frac{2\pi k}{\theta T^3 M_k^c(u, T)} \left[2 \int_{-\theta}^{\theta} t b_{\xi\eta}(t, u) \cos k\omega_0 t dt - k\omega_0 \int_{-\theta}^{\theta} t^2 b_{\xi\eta}(t, u) \sin k\omega_0 t dt \right].$$

Для зміщень тоді отримуємо:

$$\varepsilon[\hat{T}_c] = \frac{T \int_{-\theta}^{\theta} t b_{\xi\eta}(t, u) \sin k\omega_0 t dt}{2 \int_{-\theta}^{\theta} t b_{\xi\eta}(t, u) \sin k\omega_0 t dt + k\omega_0 \int_{-\theta}^{\theta} t^2 b_{\xi\eta}(t, u) \cos k\omega_0 t dt},$$

$$\varepsilon[\hat{T}_s] = \frac{T \int_{-\theta}^{\theta} tb_{\xi\eta}(t, u) \cos k\omega_0 t dt}{2 \int_{-\theta}^{\theta} tb_{\xi\eta}(t, u) \cos k\omega_0 t dt - k\omega_0 \int_{-\theta}^{\theta} t^2 b_{\xi\eta}(t, u) \sin k\omega_0 t dt}.$$

Приймаючи до уваги співвідношення (6.2.15) і (6.2.16), знаходимо в першому наближенні дисперсії оцінок:

$$D[\hat{T}_c] = \frac{T^2 \int_{-\theta}^{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} tsb_{\zeta}(t, s-t, u) \sin k\omega_0 t \sin k\omega_0 s dt ds}{\left[2 \int_{-\theta}^{\theta} tb_{\xi\eta}(t, u) \sin k\omega_0 t dt + k\omega_0 \int_{-\theta}^{\theta} t^2 b_{\xi\eta}(t, u) \cos k\omega_0 t dt \right]^2}, \quad (6.2.17)$$

$$D[\hat{T}_s] = \frac{T^2 \int_{-\theta}^{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} tsb_{\zeta}(t, s-t, u) \cos k\omega_0 t \cos k\omega_0 s dt ds}{\left[2 \int_{-\theta}^{\theta} tb_{\xi\eta}(t, u) \cos k\omega_0 t dt - k\omega_0 \int_{-\theta}^{\theta} t^2 b_{\xi\eta}(t, u) \cos k\omega_0 t dt \right]^2}. \quad (6.2.18)$$

Представивши взаємкореляційну функцію у вигляді ряду Фур'є, для зміщень оцінок періоду знаходимо:

$$\begin{aligned} \varepsilon[\hat{T}_c] = T & \left[2B_0^{(\xi\eta)}(u) I_1(k\omega_0\theta) + \sum_{l=1}^{\infty} C_l^{(\xi\eta)}(u) \left[\begin{array}{c} I_1[(k+l)\omega_0, \theta] + \\ + I_1[(l-k)\omega_0, \theta] \end{array} \right] \right] \times \\ & \times \left[2B_0^{(\xi\eta)}(u) \left[\begin{array}{c} 2I_1(k\omega_0, \theta) + \\ + k\omega_0 I_2(k\omega_0, \theta) \end{array} \right] + \sum_{l=1}^{\infty} C_l^{(\xi\eta)} \left[\begin{array}{c} 2 \left[\begin{array}{c} I_1[(l+k)\omega_0, \theta] + \\ + I_1[(k-l)\omega_0, \theta] \end{array} \right] + \\ + l\omega_0 \left[\begin{array}{c} I_2[(l+k)\omega_0, \theta] + \\ + I_2[(l-k)\omega_0, \theta] \end{array} \right] \end{array} \right] \right]^{-1}, \quad (6.2.19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon[\hat{T}_s] = T & \left[\sum_{l=1}^{\infty} S_l^{(\xi\eta)}(u) \left[\begin{array}{c} I_1[(l+k)\omega_0, \theta] + \\ + I_1[(l-k)\omega_0, \theta] \end{array} \right] \right] \left[\sum_{l \in N} S_l^{(\xi\eta)}(u) \left[\begin{array}{c} 2 \left[\begin{array}{c} I_1[(k+l)\omega_0, \theta] + \\ + I_1[(k+l)\omega_0, \theta] \end{array} \right] - \\ - l\omega_0 \sum_{l=1}^{\infty} S_l^{(\xi\eta)}(u) \left[\begin{array}{c} I_2[(l-k)\omega_0, \theta] - \\ - I_2[(l+k)\omega_0, \theta] \end{array} \right] \end{array} \right] \right]^{-1}, \quad (6.2.20) \end{aligned}$$

де

$$I_1(k\omega_0, \theta) = (k\omega_0)^{-2} \sin k\omega_0\theta - \theta(k\omega_0)^{-1} \cos k\omega_0\theta, \quad I_2(0, \theta) = \frac{\theta^3}{3},$$

$$I_2(k\omega_0, \theta) = \theta^2(k\omega_0)^{-1} \sin k\omega_0\theta + 2\theta(k\omega_0)^{-2} \cos k\omega_0\theta - 2(k\omega_0)^{-3} \sin k\omega_0\theta.$$

Зміщення $\varepsilon[\hat{T}_c]$ визначається тільки нульовим і косинусним взаємкореляційними компонентами, а $\varepsilon[\hat{T}_s]$ - тільки синусними. Як випливає з формул (6.2.19) і (6.2.20), ці величини мають порядок $O(\theta^{-2})$.

Подвійні інтеграли, які входять у вирази для дисперсій, зведемо до повторних, зробивши заміну $u_1 = s - t$. Підставляючи до формул (6.2.17) і (6.2.18) ряду Фур'є для кореляційних функцій $b_{\xi\eta}(t, u)$ і $b_{\zeta}(t, u_1, u)$, після перетворень знаходимо:

$$\begin{aligned} D[\hat{T}_c] &= [2B_0(u)[J_1(k\omega_0, \theta) + k\omega_0 J_2(k\omega_0, \theta)] + \\ &+ \sum_{l=1}^{\infty} C_l^{(\xi\eta)}(u) \left[2 \left[\begin{array}{c} I_1[(l+k)\omega_0, \theta] + \\ + I_1[(k-l)\omega_0, \theta] \end{array} \right] + k\omega_0 \left[\begin{array}{c} I_2[(l+k)\omega_0, \theta] + \\ + I_2[(l-k)\omega_0, \theta] \end{array} \right] \right]^{-1} \times \\ &\times T^2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[\int_0^{2\theta} \tilde{B}_l(u_1, u) \left[\cos k\omega_0 u_1 g_k(\theta, u_1) - \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c} g_{l+2k}(\theta, u_1) e^{ik\omega_0 u_1} + \\ + g_{l-2k}(\theta, u_1) e^{-ik\omega_0 u_1} \end{array} \right] \right] du_1 \right], \\ D[\hat{T}_s] &= T^2 \left[\sum_{l=1}^{\infty} S_l^{(\xi\eta)}(u) \left[2 \left[\begin{array}{c} I_1[(l+k)\omega_0, \theta] + \\ + I_1[(l-k)\omega_0, \theta] \end{array} \right] - k\omega_0 \left[\begin{array}{c} I_2[(k-l)\omega_0, \theta] - \\ - I_2[(k+l)\omega_0, \theta] \end{array} \right] \right]^{-1} \times \right. \\ &\left. \times \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[\int_0^{2\theta} \tilde{B}_l(u_1, u) \left[\cos k\omega_0 u_1 g_k(\theta, u_1) + \frac{1}{2} [g_{l+2k}(\theta, u_1) + g_{l-2k}(\theta, u_1)] \right] du_1 \right], \right. \end{aligned}$$

де

$$g_0(\theta, u) = \frac{2}{3} \theta^3 - \theta^2 u + \frac{u^3}{6},$$

$$g_k(\theta, u) = e^{ik\omega_0(\theta-u)} \left[-i(k\omega_0)^{-1} (\theta-u)^2 + \left[\begin{array}{c} 2(k\omega_0)^{-2} - \\ -iu(k\omega_0)^{-1} \end{array} \right] (\theta-u) + 2i(k\omega_0)^{-3} + u(k\omega_0)^{-2} \right] -$$

$$-e^{-ik\omega_0\theta} \left[-i\theta^2 (k\omega_0)^{-1} + \left[\begin{array}{c} 2(k\omega_0)^{-2} - \\ -iu(k\omega_0)^{-1} \end{array} \right] \theta + 2i(k\omega_0)^{-3} + u(k\omega_0)^{-2} \right].$$

Припустимо, що взаємкореляційні зв'язки сигналу зникають до нуля на інтервалі, що є набагато меншим від довжини відрізка реалізації θ , і для великих θ покладемо $g_0(\theta, u) \approx \frac{2}{3}\theta^3$. Знехтуємо також складовими, що містять функції $g_k(\theta, u)$. У знаменниках теж залишимо тільки складові, що найшвидше ростуть при збільшенні θ , тобто складові, які залежать від взаємкореляційних компонентів $C_k^{(\xi\eta)}(u)$ і $S_k^{(\xi\eta)}(u)$. Тоді маємо:

$$D[\hat{T}_c] = \frac{12\pi^2}{k^2\omega_0^4\theta^3 [C_k^{(\xi\eta)}(u)]^2} \int_0^{2\theta} \left[\begin{array}{c} 2\tilde{B}_0(u_1, u) \cos k\omega_0 u_1 - \\ -B_{2k}^c(u_1, u) \cos k\omega_0 u_1 + \tilde{B}_{2k}^s(u_1, u) \sin k\omega_0 u_1 \end{array} \right] du_1, \quad (6.2.21)$$

$$D[\hat{T}_s] = \frac{12\pi^2}{k^2\omega_0^4\theta^3 [S_k^{(\xi\eta)}(u)]^2} \int_0^{2\theta} \left[\begin{array}{c} 2B_0(u_1, u) \cos k\omega_0 u_1 + \\ +\tilde{B}_{2k}^c(u_1, u) \cos k\omega_0 u_1 - \tilde{B}_{2k}^s(u_1, u) \sin k\omega_0 u_1 \end{array} \right] du_1. \quad (6.2.22)$$

Величини дисперсій, як бачимо, обернено пропорційні до квадратів косинусних та синусних взаємкореляційних компонентів, за якими оцінюється період, та квадратів їх номерів. Вони мають порядок $O(\theta^{-3})$ і в основному визначаються нульовим компонентом $\tilde{B}_0(u_1, u)$ та компонентами тих номерів, які вдвічі більші за номери кореляційних компонентів, які використовуються при формуванні оцінюючих функціоналів. Відрізняються дисперсії тільки знаками тих членів, які залежать від компонентів вищих номерів. При виконанні умов (6.1.3) $D[\hat{T}_c] \rightarrow 0$ і $D[\hat{T}_s] \rightarrow 0$ при $\theta \rightarrow \infty$. Отримані вирази будуть тим точнішими, чим більшою є довжина реалізації θ .

Конкретизуємо отримані формули для зміщень та дисперсій оцінок періоду для взаємозв'язаних амплітудно-модульованих сигналів

$$\xi(t) = \mu(t) \cos \omega_0 t, \quad \eta(t) = \nu(t) \cos \omega_0 t. \quad (6.2.23)$$

Поклавши $k=2$ у перетвореннях (6.2.1) і (6.2.2) для детермінованих складових матимемо

$$M_2^c(u, \tau) = 2B_0^{(\xi\eta)}(u)I_0(2\omega_\tau, \theta) + C_2^{(\xi\eta)}(u) \left[I_0(2(\omega_\tau - \omega_0), \theta) + I_0(2(\omega_\tau + \omega_0), \theta) \right],$$

$$M_2^s(u, \tau) = S_2^{(\xi\eta)}(u) \left[I_0(2(\omega_\tau - \omega_0), \theta) + I_0(2(\omega_\tau + \omega_0), \theta) \right].$$

Тут враховано, що для амплітудно-модульованих сигналів (6.2.23) взаємнокореляційна функція має вигляд:

$$b_{\xi\eta}(t, u) = B_0^{(\xi\eta)}(u) + C_2^{(\xi\eta)}(u) \cos 2\omega_0 t + S_2^{(\xi\eta)}(u) \sin 2\omega_0 t.$$

В асимптотиці

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} M_2^c(u, \tau) = \begin{cases} C_2^{(\xi\eta)}(u), & \tau = T, \\ 0, & \tau \neq T, \end{cases}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} M_2^s(u, \tau) = \begin{cases} S_2^{(\xi\eta)}(u), & \tau = T, \\ 0, & \tau \neq T. \end{cases}$$

При скінчених θ екстремуми функціоналів $\hat{C}_2^{(\xi\eta)}(u, \tau) = M_2^c(u, \tau) + N_2^c(u, \tau)$ і $\hat{S}_2^{(\xi\eta)}(u, \tau) = M_2^s(u, \tau) + N_2^s(u, \tau)$ будуть зміщені відносно точки $\tau = T$ і ці зміщення, як впливає з вищевикладеного, в першому наближенні визначаються першою та другою похідними детермінованими складових. Приймаючи до уваги співвідношення (6.2.19) і (6.2.20), а також формули

$$B_0^{(\xi\eta)}(u) = C_2^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{2} R_{\mu\nu}(u) \cos \omega_0 u,$$

$$S_2^{(\xi\eta)}(u) = -\frac{1}{2} R_{\mu\nu}(u) \sin \omega_0 u,$$

для таких зміщень маємо:

$$\varepsilon \left[\hat{T}_c \right] = \frac{T \left[2I_1(2\omega_0, \theta) + I_1(4\omega_0, \theta) \right]}{4 \left[\begin{array}{l} \omega_0 I_2(2\omega_0, \theta) + \\ + I_1(2\omega_0, \theta) \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{l} I_1(4\omega_0, \theta) + \\ + I_1(4\omega_0, \theta) \end{array} \right] + \omega_0 \left[\begin{array}{l} I_2(4\omega_0, \theta) + \\ + I_2(0, \theta) \end{array} \right]},$$

$$\varepsilon \left[\hat{T}_s \right] = \frac{TI_1(4\omega_0, \theta)}{2I_1(4\omega_0, \theta) - 2\omega_0 \left[I_2(0, \theta) - I_2(4\omega_0, \theta) \right]}.$$

З отриманих виразів випливає, що зміщення $\varepsilon[\hat{T}_c]$ і $\varepsilon[\hat{T}_s]$ у першому наближенні не залежать від жодних параметрів сигналу, крім періоду T . Враховуючи, що при

$$\theta = NT \quad I_1(l\omega_0, NT) = -NT(l\omega_0)^{-1}, \quad I_2(l\omega_0, NT) = 2NT(l\omega_0)^{-1}, \quad I_1(0, NT) = 0,$$

$$I_2(0, NT) = \frac{\theta^3}{3}, \text{ отримуємо наближені формули:}$$

$$\varepsilon[\hat{T}_c] \approx -\frac{15T}{32\pi^2 N^2}, \quad \varepsilon[\hat{T}_s] \approx -\frac{3T}{32\pi^2 N^2},$$

праві частини яких мають порядок $O(N^{-2})$.

Конкретизуємо тепер формули для дисперсій оцінок. Виходячи зі співвідношення (6.2.5), для кореляційної функції $b_\zeta(t, s-t, u)$ амплітудно-модульованих сигналів (6.2.23) маємо:

$$b_\zeta(t, s-t, u) = \left[R_\mu(s-t)R_\nu(s-t) + R_{\mu\nu}(s-t+u)R_{\nu\mu}(s-t-u) \cos \omega_0 t \cos \omega_0 s \cos \omega_0 t \times \right. \\ \left. \times \cos \omega_0(t+u) \cos \omega_0(s+u) \right]. \quad (6.2.24)$$

Враховавши тотожність:

$$\cos \omega_0 t \cos \omega_0 s \cos \omega_0(t+u) \cos \omega_0(s+u) = \\ = \frac{1}{8} \left[1 + \cos 2\omega_0 u + \cos 2\omega_0 u_1 + \left[1 + \cos 2\omega_0 u_1 + \cos 2\omega_0 u + \cos 2\omega_0(u+u_1) \right] \cos 2\omega_0 t - \right. \\ \left. - \left[\sin 2\omega_0 u + \sin 2\omega_0 u_1 + \sin 2\omega_0(u_1+u) \right] \sin 2\omega_0 t + \right. \\ \left. + \cos 2\omega_0(u+u_1) \cos 4\omega_0 t - \sin 2\omega_0(u+u_1) \sin 4\omega_0 t \right]$$

отримуємо наступну формулу для кореляційної функції

$$b_\zeta(t, u_1, u) = \tilde{B}_0^{(\xi n)}(u_1, u) + \tilde{B}_0^c(u_1, u) \cos 2\omega_0 t + \tilde{B}_0^s(u_1, u) \sin 2\omega_0 t + \\ + \tilde{B}_4^c(u_1, u) \cos 4\omega_0 t + \tilde{B}_2^s(u_1, u) \sin 4\omega_0 t,$$

де

$$\tilde{B}_0(u_1, u) = \frac{1}{8} \tilde{R}_\zeta(u_1, u) [1 + \cos 2\omega_0 u + \cos 2\omega_0 u_1], \quad (6.2.25)$$

$$\tilde{B}_2^c(u_1, u) = \frac{1}{8} \tilde{R}_\zeta(u_1, u) [1 + \cos 2\omega_0 u + \cos 2\omega_0 u_1 + \cos 2\omega_0(u_1+u)], \quad (6.2.27)$$

$$\tilde{B}_2^s(u_1, u) = -\frac{1}{8} \tilde{R}_\zeta(u_1, u) [\sin 2\omega_0 u + \sin 2\omega_0 u_1 + \sin 2\omega_0(u_1+u)], \quad (6.2.28)$$

$$\tilde{B}_4^c(u_1, u) = \frac{1}{8} \tilde{R}_\zeta(u_1, u) \cos 2\omega_0(u_1 + u), \quad (6.2.29)$$

$$\tilde{B}_4^s(u_1, u) = -\frac{1}{8} \tilde{R}_\zeta(u_1, u) \sin 2\omega_0(u_1 + u), \quad (6.2.30)$$

при цьому $\tilde{R}_\zeta(u_1, u) = R_\mu(u_1)R_\nu(u_1) + R_{\mu\nu}(u_1 + u)R_{\nu\mu}(u_1 - u)$. Підставляючи вирази (6.2.25)–(6.2.30) до співвідношень (6.2.21) і (6.2.22) при $k = 2$, отримуємо:

$$D[\hat{T}_c] = \frac{3\pi^2}{2\omega_0^4\theta^3 R_{\mu\nu}^2(u) \cos^2 \omega_0 u} \int_0^{2\theta} [R_\mu(u_1)R_\nu(u_1) + R_{\mu\nu}(u + u_1)R_{\nu\mu}(u_1 - u)] \times \\ \times [1 - \cos 2\omega_0 u + 2(1 + \cos 2\omega_0 u) \cos 2\omega_0 u_1 + \cos 4\omega_0 u_1] du_1,$$

$$D[\hat{T}_s] = \frac{3\pi^2}{2\omega_0^4\theta^3 R_{\mu\nu}^2(u) \sin^2 \omega_0 u} \int_0^{2\theta} [R_\mu(u_1)R_\nu(u_1) + R_{\mu\nu}(u + u_1)R_{\nu\mu}(u_1 - u)] \times \\ \times [(1 + \cos 2\omega_0 u)(1 + 2 \cos 2\omega_0 u_1) + \cos 4\omega_0 u_1] du_1.$$

Покладемо, що $R_\mu(u) = D_\mu e^{-\alpha_\mu u^2}$, $R_\nu(u) = D_\nu e^{-\alpha_\nu u^2}$, $R_{\mu\nu}(u) = D_{\mu\nu} e^{-\alpha_{\mu\nu} u^2}$. Тоді

$$R_\mu(u_1)R_\nu(u_1) + R_{\mu\nu}(u_1 + u)R_{\nu\mu}(u_1 - u) = D_\mu D_\nu e^{-(\alpha_\mu + \alpha_\nu)u_1^2} + D_{\mu\nu}^2 e^{-2\alpha_{\mu\nu} u^2} e^{-2\alpha_{\mu\nu} u_1^2}.$$

Ввівши функцію

$$r_l(\alpha, \theta) = \int_0^{2\theta} e^{-\alpha u} \cos l\omega_0 u du,$$

приходимо до наступних виразів для дисперсій оцінок періоду:

$$D[\hat{T}_c] = \frac{3}{8\pi\omega_0 N^3 D_{\mu\nu} (1 + \cos 2\omega_0 u)} \left[D_\mu D_\nu e^{2\alpha_{\mu\nu} u^2} \left[r_0(\alpha_\mu + \alpha_\nu, \theta)(1 - \cos 2\omega_0 u) + \right. \right. \\ \left. \left. + 2r_2(\alpha_\mu + \alpha_\nu, \theta)(1 + \cos 2\omega_0 u) + r_4(\alpha_\mu + \alpha_\nu, \theta) \right] + \right. \\ \left. + D_{\mu\nu}^2 \left[r_0(2\alpha_{\mu\nu}, \theta)(1 - \cos 2\omega_0 u) + 2r_2(2\alpha_{\mu\nu}, \theta)(1 + \cos 2\omega_0 u) + r_4(2\alpha_{\mu\nu}, \theta) \right] \right], \quad (6.2.31)$$

$$D[\hat{T}_s] = \frac{3}{8\pi\omega_0 N^3 D_{\mu\nu}^2 (1 - \cos 2\omega_0 u)} \left[D_\mu D_\nu e^{2\alpha_{\mu\nu} u^2} \left[\left[r_0(\alpha_\mu + \alpha_\nu, \theta) + 2r_2(\alpha_\mu + \alpha_\nu, \theta) \right] \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (1 + \cos 2\omega_0 u) + r_4(\alpha_\mu + \alpha_\nu, \theta) \right] + \right. \\ \left. + D_{\mu\nu}^2 \left[\left[r_0(2\alpha_{\mu\nu}, \theta) + 2r_2(2\alpha_{\mu\nu}, \theta) \right] (1 + \cos 2\omega_0 u) + r_4(2\alpha_{\mu\nu}, u) \right] \right]. \quad (6.2.32)$$

З отриманих виразів випливає, що в обох випадках дисперсія оцінок періоду залежить як від потужності флуктуаційних змін обох сигналів і швидкості зникання їх кореляційних зв'язків, так і від величини і швидкості зникання їх взаємних кореляцій. Залежність складових обох виразів, які залежить тільки від параметрів взаємних кореляцій, має осциляційний характер, при цьому при заданій довжині відрізка реалізації θ амплітуди осциляцій є постійними. Амплітуди осциляцій складових, які визначаються параметрами автокореляцій обох сигналів експоненційно росте зі збільшенням зсуву u . Найменшою дисперсія (6.2.31) буде при $u = 0$. У цьому випадку вона визначається формулою:

$$D[\hat{T}_c] = \frac{3}{16\pi\omega_0 N^3 D_{\mu\nu}^2} \left[D_\mu D_\nu \left[\begin{array}{l} 4r_2(\alpha_\mu + \alpha_\nu, \theta) + \\ + r_4(\alpha_\mu + \alpha_\nu, \theta) \end{array} \right] + D_{\mu\nu}^2 \left[\begin{array}{l} 4r_2(2\alpha_{\mu\nu}, \theta) + \\ + r_4(2\alpha_{\mu\nu}, \theta) \end{array} \right] \right].$$

Функції $r_k(\alpha, \theta)$ при $\theta = NT$ мають вигляд:

$$r_k(\alpha, NT) = \frac{1}{\alpha^2 T^2 + 4k^2 \pi^2} \left[\alpha T - \frac{\alpha^2 T^2 - 4k^2 \pi^2}{N(\alpha^2 T^2 + 4k^2 \pi^2)} \right].$$

При великому N

$$r_k(\alpha, NT) = \frac{\alpha T}{\alpha^2 T^2 + 4k^2 \pi^2} = \frac{\alpha}{T(\alpha^2 + k^2 \omega_0^2)}.$$

Якщо $\alpha \gg k\omega_0$, то $r_l(\alpha, NT) \approx (\alpha T)^{-1}$. Тоді

$$D[\hat{T}_c] = \frac{15}{32\pi^2 N^3} \left[\frac{1}{2\alpha_{\mu\nu}} + \frac{D_\mu D_\nu}{D_{\mu\nu}^2} \frac{1}{\alpha_\mu + \alpha_\nu} \right]. \quad (6.2.33)$$

Як бачимо, для великих декрементів зникання авто- та взаємкореляційна дисперсія (6.2.31) зростає з їх збільшенням. Ця величина залежить також від

відношення $\frac{D_\mu D_\nu}{D_{\mu\nu}^2}$, при його збільшенні вона також зростає.

Якщо $\alpha \ll k\omega_0$, то

$$D[\hat{T}_c] \approx \frac{3}{32\pi^2 \omega_0^2 N^3} \left[2\alpha_{\mu\nu} + \frac{D_\mu D_\nu}{D_{\mu\nu}^2} (\alpha_\mu + \alpha_\nu) \right]. \quad (6.2.34)$$

Відтак, в області малих значень декрементів зникання дисперсія оцінки періоду (6.2.31) лінійно зростає з їх збільшенням.

У точках $u_k = (2k+1)\frac{T}{4}$, $k \in Z$, дисперсія (6.2.32) приймає нескінченно великі значення. Очевидно, такі зсуви не можуть використовуватися при оцінюванні періоду. При використанні функціоналу (6.2.1) з цієї ж причини слід виключити точки $u_k = k\frac{T}{2}$, $k \in Z$. У першому випадку вказані зсуви відповідають нульовим значенням взаємкореляційного компонента $C_2^{(\xi\eta)}(u)$, а в другому – взаємкореляційного компонента $S_2^{(\xi\eta)}(u)$. Перше максимальне значення знаменник (6.2.31) приймає в точці $u = \frac{T}{4}$. Тоді

$$D[\hat{T}_s] = \frac{3}{16\pi\omega_0 N^3} \left[r_4(2\alpha_{\mu\nu}, NT) + \frac{D_\mu D_\nu}{D_{\mu\nu}^2} r_4(\alpha_\mu + \alpha_\nu, T) e^{\frac{\alpha_{\mu\nu} T^2}{8}} \right].$$

Враховуючи наближення функцій $r_k(\alpha, NT)$ для малих і великих значень декрементів зникання кореляційних зв'язків відповідно отримуємо:

$$D[\hat{T}_s] = \frac{3}{32\pi^2 N^3} \left(\frac{1}{2\alpha_{\mu\nu}} + \frac{D_\mu D_\nu}{D_{\mu\nu}^2} \frac{e^{\frac{\alpha_{\mu\nu} T^2}{8}}}{\alpha_\mu + \alpha_\nu} \right) \quad (6.2.35)$$

при $\alpha_\mu \gg k\omega_0$, $\alpha_\nu \gg k\omega_0$, $\alpha_{\mu\nu} \gg k\omega_0$,

$$D[\hat{T}_s] = \frac{3}{512\pi^2 \omega_0^2 N^3} \left(2\alpha_{\mu\nu} + \frac{D_\mu D_\nu}{D_{\mu\nu}^2} (\alpha_\mu + \alpha_\nu) \right) \quad (6.2.36)$$

при $\alpha_\mu \ll k\omega_0$, $\alpha_\nu \ll k\omega_0$, $\alpha_{\mu\nu} \ll k\omega_0$.

При виведенні останнього виразу прийнято, що $e^{\alpha_{\mu\nu} \frac{T^2}{8}} \approx 1$. Як бачимо, залежність дисперсій (6.2.35) і (6.2.36) від авто- та взаємкореляційних параметрів сигналів (6.2.23) є подібною до залежностей дисперсій (6.2.33) і (6.2.34).

6.3. Виявлення прихованих періодичностей у взаємозв'язках за дискретним даними

Статистики для оцінювання періоду за дискретними даними сформуємо, замінюючи інтегральні перетворення (6.2.1) та (6.2.2) інтегральними сумами:

$$\hat{C}_k^{(\xi\eta)}(jh, \tau) = \frac{2}{2K+1} \sum_{n=-K}^K \overset{\circ}{\xi}(nh) \overset{\circ}{\eta}[(n+j)h] \cos k\omega_\tau nh, \quad (6.3.1)$$

$$\hat{S}_k^{(\xi\eta)}(jh, \tau) = \frac{2}{2K+1} \sum_{n=-K}^K \overset{\circ}{\xi}(nh) \overset{\circ}{\eta}[(n+j)h] \sin k\omega_\tau nh. \quad (6.3.2)$$

Тут $h = \frac{\theta}{2K}$. Математичні сподівання перетворень (6.3.1) та (6.3.2) мають вигляд:

$$M_k^c(jh, \tau) = E\hat{C}_k^{(\xi\eta)}(jh, \tau) = \frac{2}{2K+1} \sum_{n=-K}^K b_{\xi\eta}(nh, jh) \cos k\omega_\tau nh,$$

$$M_k^s(jh, \tau) = E\hat{S}_k^{(\xi\eta)}(jh, \tau) = \frac{2}{2K+1} \sum_{n=-K}^K b_{\xi\eta}(nh, jh) \sin k\omega_\tau nh.$$

Підставляючи в ці співвідношення ряд Фур'є

$$b_{\xi\eta}(nh, jh) = B_0^{(\xi\eta)}(jh) + \sum_{l \in N} \left[C_l^{(\xi\eta)}(jh) \cos l\omega_0 nh + S_l^{(\xi\eta)}(jh) \sin l\omega_0 nh \right] \quad (6.3.3)$$

і враховуючи, що

$$\sum_{n=-K}^K \sin l\omega_0 nh \cos k\omega_\tau nh = 0,$$

знаходимо

$$M_k^c(jh, \tau) = \frac{1}{2K+1} \left[2B_0^{(\xi\eta)}(jh) H_0(k\omega_\tau, K) + \sum_{l \in N} \left[C_l^{(\xi\eta)}(jh) \left[H_0(l\omega_0 - k\omega_\tau, K) + H_0(l\omega_0 + k\omega_\tau, K) \right] \right] \right], \quad (6.3.4)$$

$$M_k^s(jh, \tau) = \frac{1}{2K+1} \sum_{l \in N} S_l^{(\xi\eta)}(jh) \left[H_0(l\omega_0 - k\omega_\tau, K) + H_0(l\omega_0 + k\omega_\tau, K) \right], \quad (6.3.5)$$

де

$$H_0(\omega, K) = \sum_{n=-K}^K \cos \omega nh = 1 + 2 \sum_{n=1}^K \cos \omega nh = \frac{\sin \omega \left(k + \frac{1}{2} \right) h}{\sin \frac{\omega}{2} h}.$$

Легко бачити, що при $\frac{\omega}{2}h = r\pi$, $r \in Z$, функція $H_0(\omega, K)$ дорівнює $2K + 1$. Це означає, що одиничні значення функція $(2K + 1)^{-1} H_0(l\omega_0 \pm k\omega_\tau, K)$ при заданих τ і h прийматиме для всіх l , які задовольняють рівняння $(l\omega_0 \pm k\omega_\tau)\frac{h}{2} = r\pi$, $r \in Z$, тобто матиме місце зумовлене дискретизацією явище накладання. Цього явища можна позбутися тільки у випадку, коли число гармонічних складових взаємкореляційної функції N_2 є скінченним. Рівняння $(l\omega_0 \pm k\omega_\tau)\frac{h}{2} = r\pi$ не матиме розв'язків ні для яких $l \leq N_2$ і $r \neq 0$, якщо крок дискретизації вибирати так, щоб задовольнялася нерівність $h < \frac{\tau T}{N_2(\tau + T)}$. Оскільки період є невідомим,

то цю умову можна замінити умовою $h \leq \frac{\tau}{2N_2 + 1}$. У цьому випадку

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M_k^c(jh, \tau) = \begin{cases} C_l^{(\xi\eta)}(jh) \text{ для } \tau_l = \frac{kT}{l}, \\ 0, \tau_l \neq \frac{kT}{l}, \end{cases}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M_k^s(jh, \tau) = \begin{cases} S_l^{(\xi\eta)}(jh) \text{ для } \tau_l = \frac{kT}{l}, \\ 0, \tau_l \neq \frac{kT}{l}. \end{cases}$$

Виберемо $l = k$. При $\tau = T$ вирази (6.3.4) і (6.3.5) приймають вигляд:

$$\begin{aligned} M_k^s(jh, T) &= \frac{1}{2K + 1} \left[2B_0^{(\xi\eta)}(jh) H_0(k\omega_0, K) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l \in N} \left[C_l^{(\xi\eta)}(jh) \left[H_0[(l - k)\omega_0, K] + H_0[(l + k)\omega_0, K] \right] \right] \right], \\ M_k^s(jh, T) &= \frac{1}{2K + 1} \sum_{l \in N} S_l^{(\xi\eta)}(jh) \left[H_0[(l - k)\omega_0, K] + H_0[(l + k)\omega_0, K] \right]. \end{aligned}$$

Накладання буде відсутнє при умові: $h < \frac{T}{2N_\tau}$. Тоді

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M_k^c(jh, T) = C_k^{(\xi^n)}(jh),$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M_k^s(jh, T) = S_k^{(\xi^n)}(jh).$$

Флуктуаційні складові перетворень (6.3.1) і (6.3.2) мають вигляд:

$$N_k^c(jh, \tau) = \hat{C}_k^{(\xi^n)}(\tau) - M_k^c(jh, \tau) = \frac{2}{2K+1} \sum_{n=-K}^K \overset{\circ}{\zeta}(nh, jh) \cos k\omega_\tau nh,$$

$$N_k^s(jh, \tau) = \hat{S}_k^{(\xi^n)}(\tau) - M_k^s(jh, \tau) = \frac{2}{2K+1} \sum_{n=-K}^K \overset{\circ}{\zeta}(nh, jh) \sin k\omega_\tau nh.$$

Звідси для середньоквадратичних значень цих складових знаходимо:

$$E[N_k^c(jh, \tau)]^2 = -\frac{4}{(2K+1)^2} \sum_{m, n=-K}^K b_\zeta(nh, (m-n)h, jh) \cos k\omega_\tau nh \cos k\omega_\tau mh, \quad (6.3.6)$$

$$E[N_k^s(jh, \tau)]^2 = -\frac{4}{(2K+1)^2} \sum_{m, n=-K}^K b_\zeta(nh, (m-n)h, jh) \sin k\omega_\tau nh \sin k\omega_\tau mh, \quad (6.3.7)$$

де $b_\zeta(nh, (m-n)h, jh)$ - кореляційна функція процесу $\zeta(nh, jh)$:

$b_\zeta(nh, (m-n)h, jh) = E \overset{\circ}{\zeta}(nh, jh) \overset{\circ}{\zeta}(mh, jh)$. У подвійній сумі виразу (6.3.6) введемо

новий індекс сумування і змінимо його порядок (рис. 6.3)

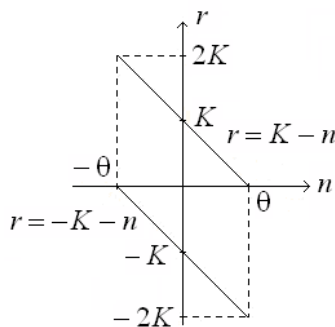


Рис. 6.3. Зміна порядку сумування

$$\begin{aligned} & \sum_{m, n=-K}^K b_\zeta(nh, (m-n)h, jh) \cos k\omega_\tau nh \cos k\omega_\tau mh = \\ & = \sum_{n=-K}^K \sum_{r=-K+n}^{K-n} b_\zeta(nh, rh, jh) \cos k\omega_\tau nh \cos k\omega_\tau (r+n)h = \sum_{n=-K}^K b_\zeta(nh, 0, jh) \cos^2 k\omega_\tau nh + \\ & + \sum_{r=-2K}^{-1} \sum_{n=-K-r}^K b_\zeta(nh, rh, jh) \cos k\omega_\tau nh \cos k\omega_\tau (n+r)h + \\ & + \sum_{r=1}^{2K} \sum_{n=-K}^{K-r} b_\zeta(nh, rh, jh) \cos k\omega_\tau nh \cos k\omega_\tau (n+r)h. \end{aligned}$$

Для гаусових взаємозв'язаних процесів:

$$b_{\zeta}(nh, rh, jh) = b_{\zeta}(nh, (m-n)h)b_{\eta}((n+j)h, (m-n)h) + \\ + b_{\xi\eta}(nh, (m-n+j)h)b_{\eta\xi}((n+j)h, (m-n-j)).$$

З цього виразу випливає, що $b_{\zeta}(nh, -rh, jh) = b_{\zeta}((n-r)h, rh, jh)$. Використовуючи цю рівність, отримуємо:

$$\begin{aligned} & \sum_{r=-2K}^{-1} \sum_{n=-K-r}^K b_{\zeta}(nh, rh, jh) \cos k\omega_{\tau}nh \cos k\omega_{\tau}(n+r)h = \\ & = \sum_{r=1}^{2K} \sum_{n=-K+r}^K b_{\zeta}(nh, -rh, jh) \cos k\omega_{\tau}nh \cos k\omega_{\tau}(n-r)h = \\ & = \sum_{r=1}^{2K} \sum_{n=-K+r}^K b_{\zeta}((n-r)h, rh, jh) \cos k\omega_{\tau}nh \cos k\omega_{\tau}(n-r)h = \\ & = \sum_{r=1}^{2K} \sum_{n=-K}^{K-r} b_{\zeta}(nh, rh, jh) \cos k\omega_{\tau}(n+r)h \cos k\omega_{\tau}nh. \end{aligned}$$

Відтак

$$E[N_k^c(jh, \tau)]^2 = \frac{2}{(2K+1)^2} \left[\sum_{n=-K}^K b_{\zeta}(nh, 0, jh)(1 + \cos 2k\omega_{\tau}nh) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{r=1}^{2K} \sum_{n=-K}^{K-r} b_{\zeta}(nh, rh, jh) [\cos k\omega_{\tau}rh + \cos k\omega_{\tau}(2n+r)h] \right] \quad (6.3.8)$$

Після аналогічних перетворень вразу (6.3.7) знаходимо:

$$E[N_k^s(jh, \tau)] = \frac{2}{(2K+1)^2} \left[\sum_{n=-K}^K b_{\zeta}(nh, 0, jh)(1 - \cos 2k\omega_{\tau}nh) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{r=1}^{2K} \sum_{n=-K}^{K-r} b_{\zeta}(nh, rh, jh) [\cos k\omega_{\tau}rh - \cos k\omega_{\tau}(2n+r)h] \right]. \quad (6.3.9)$$

Прийнявши до уваги ряд Фур'є:

$$b_{\zeta}(nh, rh, jh) = \sum_{p=-2N_2}^{2N_2} \tilde{B}_p(rh, jh) e^{ip\omega_0nh},$$

для окремих складових співвідношень (6.3.7) і (6.3.8) отримуємо:

$$\sum_{n=-K}^K b_{\zeta}(nh, 0, jh) = \sum_{p=-2N_2}^{2N_2} \tilde{B}_p(0, jh) L_{p\omega_0}^{(0)}(-K, K),$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=-K}^K b_{\zeta}(nh, 0, jh) \cos k\omega_{\tau} nh = \\
& = \frac{1}{2} \sum_{p=-2N_2}^{2N_2} \tilde{B}_p(0, jh) \left[L_{p\omega_0}^{(0)} + 2k\omega_{\tau}(-K, K) + L_{p\omega_0}^{(0)} - 2k\omega_{\tau}(-K, K) \right], \\
& \sum_{r=1}^{2K} \sum_{n=-K}^{K-r} b_{\zeta}(nh, rh, jh) \cos k\omega_{\tau} rh = \sum_{p=-2N_2}^{2N_2} \sum_{r=1}^{2K} \tilde{B}_p(rh, jh) L_{p\omega_0}^{(0)}(-K, K-r) \cos k\omega_{\tau} rh, \\
& \sum_{r=1}^{2K} \sum_{n=-K}^{K-r} b_{\zeta}(nh, rh, jh) \cos k\omega_{\tau} (2n+r)h = \\
& = \frac{1}{2} \sum_{p=-2N_2}^{2N_2} \sum_{r=1}^{2K} \tilde{B}_p(rh, jh) \left[e^{ik\omega_{\tau}rh} L_{p\omega_0+2k\omega_{\tau}}^{(0)}(-K, K-r) + e^{-ik\omega_{\tau}rh} L_{p\omega_0-2k\omega_{\tau}}^{(0)}(-K, K-r) \right],
\end{aligned}$$

де

$$L_{\omega}^{(0)}(-K, K) = \sum_{n=-K}^K -e^{i\omega nh}, \quad L_{\omega}^{(0)}(-K, K-r) = \sum_{n=-K}^{n-K} e^{i\omega nh}.$$

Тоді

$$\begin{aligned}
E[N_k^c(jh, \tau)] &= \frac{2}{(2K+1)^2} \sum_{p=-2N_2}^{2N_2} \left[\tilde{B}_p(0, jh) \left[L_{p\omega_0}^{(0)}(-K, K) - \frac{1}{2} \left[L_{p\omega_0+2k\omega_{\tau}}^{(0)}(-K, K) + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + L_{p\omega_0-2k\omega_{\tau}}^{(0)}(-K, K) \right] + 2 \sum_{r=1}^{2k} \tilde{B}_p(rh, jh) \left[L_{p\omega_0}^{(0)}(-K, K-r) \cos k\omega_{\tau} rh - \frac{1}{2} \left[e^{ik\omega_{\tau}rh} \times \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \times L_{p\omega_0+2k\omega_{\tau}}^{(0)}(-K, K-r) + e^{-ik\omega_{\tau}rh} L_{p\omega_0-2k\omega_{\tau}}^{(0)}(-K, K-r) \right] \right] \right], \tag{6.3.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[N_k^s(jh, \tau)]^2 &= \frac{2}{(2K+1)^2} \sum_{p=-2N_2}^{2N_2} \left[\tilde{B}_p(0, jh) \left[L_{p\omega_0}^{(0)}(-K, K) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{2} \left[L_{p\omega_0+2k\omega_{\tau}}^{(0)}(-K, K) + L_{p\omega_0-2k\omega_{\tau}}^{(0)}(-K, K) \right] + 2 \sum_{r=1}^{2k} \tilde{B}_p(rh, jh) \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times \left[L_{p\omega_0}^{(0)}(-K, K-r) \cos k\omega_{\tau} rh - \frac{1}{2} \left[e^{ik\omega_{\tau}rh} L_{p\omega_0+2k\omega_{\tau}}^{(0)}(-K, K-r) \right] \right] \right] \right]. \tag{6.3.11}
\end{aligned}$$

З отриманих співвідношень випливає, що при виконанні граничних умов (6.3.3) середньоквадратичні значення флуктуаційних складових прямують до нуля при $k \rightarrow \infty$. Однак в загальному випадку у виразах (6.3.10) і (6.3.11) із-за ефекту накладання другого роду [162] можуть проявлятися додаткові складові того ж

самого порядку малості, що й основних членів. Це відбуватиметься у випадку, коли існують такі значення $p \in [-2N_2, 2N_2]$, які задовільнятимуть рівняння:

$$p\omega_0 h = 2\pi q, \quad (p\omega_0 - 2k\omega_\tau)h = 2\pi q, \quad (p\omega_0 + 2h\omega_\tau)h = 2\pi q, \quad q \in Z.$$

Для таких p

$$L_{p\omega_0}(-K, K) = 2K + 1, \quad L_{p\omega_0 \mp 2k\omega_\tau}(-K, K) = 2K + 1, \quad L_{p\omega_0 \pm 2h\omega_\tau}(-K, K - r) = 2K + 1,$$

і тоді

$$\begin{aligned} E[N_k^c(jh, \tau)]^2 &= \frac{2}{2K+1} \left[\sum_{p \in P_1} [\tilde{B}_p(0, jh) + \frac{1}{2} \sum_{p \in P_2^+} \tilde{B}_p(0, jh) + \frac{1}{2} \sum_{p \in P_2^-} \tilde{B}_p(o, jh) + \right. \\ &+ 2 \sum_{r=1}^{2K} \left(1 - \frac{r}{2K+1}\right) \left[\sum_{p \in P_1} B_p(rh, jh) \cos k\omega_\tau rh + \frac{1}{2} \sum_{p \in P_2^+} e^{ik\omega_\tau rh} \tilde{B}_p(rh, jh) + \right. \\ &\left. \left. + \sum_{p \in P_2^-} e^{-ik\omega_\tau rh} \tilde{B}_p(ph, jh) \right] \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[N_k^s(jh, \tau)]^2 &= \frac{2}{2K+1} \left[\sum_{p \in P_1} [\tilde{B}_p(0, jh) - \frac{1}{2} \sum_{p \in P_2^+} \tilde{B}_p(0, jh) - \frac{1}{2} \sum_{p \in P_2^-} \tilde{B}_p(o, jh) + \right. \\ &+ 2 \sum_{r=1}^{2K} \left(1 - \frac{r}{2K+1}\right) \left[\sum_{p \in P_2^+} e^{ik\omega_\tau rh} \tilde{B}_p(rh, jh) - \frac{1}{2} \left[\sum_{p \in P_2^+} e^{ik\omega_\tau rh} \tilde{B}_p(rh, jh) + \right. \right. \\ &\left. \left. + \sum_{p \in P_2^-} e^{-ik\omega_\tau rh} \tilde{B}_p(rh, jh) \right] \right] \right]. \end{aligned}$$

Тут P_1 множина значень $p \in [-2N_2, 2N_2]$, що задовольняє рівняння $p\omega_0 = 2\pi q$,

$$P_2^+ = \{p \in [-2N_2, 2N_2] : (p\omega_0 + k\omega_\tau)h = 2\pi q, q \in Z\},$$

$$P_2^- = \{p \in [-2N_2, 2N_2] : (p\omega_0 - k\omega_\tau)h = 2\pi q, q \in Z\}.$$

Множина P_1 складатиметься тільки з одного нульового елемента $p=0$, якщо

$h < \frac{T}{2N_2}$. А якщо $h < \frac{T}{2N_2(T+\tau)}$, то до множини P_2^+ входить тільки елемент,

що задовільняє рівняння $p\omega_0 + k\omega_\tau = 0$, а до множини P_2^- - елемент, що задовільняє рівняння $p\omega_0 - k\omega_\tau = 0$. Наведені нерівності є умовою відсутності

ефектів накладання другого роду. Якщо $\tau = T$, то такою умовою є нерівність $h < \frac{T}{4N_2}$. У цьому випадку в першому наближенні

$$E[N_k^c(jh, T)]^2 = \frac{1}{2K+1} \left[2\tilde{B}_0(0, jh) + B_2^c(0, jh) + 2 \sum_{r=1}^{2K} \left[2\tilde{B}_0(rh, jh) \cos k\omega_0 rh + \tilde{B}_{2k}^c(rh, jh) \cos k\omega_0 rh - \tilde{B}_{2k}^s(rh, jh) \sin k\omega_0 rh \right] \right],$$

$$E[N_k^s(jh, T)]^2 = \frac{1}{2K+1} \left[2\tilde{B}_0(0, jh) - \tilde{B}_2^c(0, jh) + 2 \sum_{r=1}^{2K} \left[2\tilde{B}_0(rh, jh) \cos k\omega_0 rh - \tilde{B}_{2k}^c(rh, jh) \cos k\omega_0 rh + \tilde{B}_{2k}^s(rh, jh) \sin k\omega_0 rh \right] \right].$$

Ці величини при великих K будуть досить малими, тому для аналізу властивостей оцінок періоду, які знаходяться за екстремальними значеннями функціоналів (6.1.1) і (6.1.2), можна скористатися методом малого параметра і обчислення зміщення та дисперсій оцінок провести на основі наведених в попередньому підрозділі формул, підставляючи до них формули для величин, які визначають дискретними перетвореннями (6.3.1) і (6.3.2).

Для похідних їх детермінованих складових маємо:

$$\frac{dM_k^c(jh, \tau)}{d\tau} = \frac{4\pi kh}{(2K+1)\tau^2} \sum_{n=-K}^K nb_{\xi\eta}(nh, jh) \sin k\omega_\tau nh,$$

$$\frac{dM_k^s(jh, \tau)}{d\tau} = -\frac{4\pi kh}{(2K+1)\tau^2} \sum_{n=-K}^K nb_{\xi\eta}(nh, jh) \cos k\omega_\tau nh,$$

$$\frac{d^2 M_k^c(jh, \tau)}{d\tau^2} = -\frac{4\pi kh}{(2K+1)\tau^3} \left[\begin{array}{l} 2 \sum_{n=-K}^K nb_{\xi\eta}(nh, jh) \sin k\omega_\tau nh + \\ + kh\omega_\tau \sum_{n=-K}^K n^2 b_{\xi\eta}(nh, jh) \cos k\omega_\tau nh \end{array} \right], \quad (6.3.12)$$

$$\frac{d^2 M_k^s(jh, \tau)}{d\tau^2} = \frac{4\pi kh}{(2K+1)\tau^3} \left[\begin{array}{l} 2 \sum_{n=-K}^K nb_{\xi\eta}(nh, jh) \cos k\omega_\tau nh - \\ - kh\omega_\tau \sum_{n=-K}^K n^2 b_{\xi\eta}(nh, jh) \sin k\omega_\tau nh \end{array} \right]. \quad (6.3.13)$$

Для зміщень $\varepsilon[\hat{T}_c] = -\frac{s_1^c}{s_2^c}$ і $\varepsilon[\hat{T}_s] = -\frac{s_1^s}{s_2^s}$ тоді отримуємо:

$$\varepsilon\left[\hat{T}_c\right] = \frac{T \sum_{n=-K}^K nb_{\xi\eta}(nh, jh) \sin k\omega_0 nh}{2 \sum_{n=-K}^K nb_{\xi\eta}(nh, jh) \sin k\omega_0 nh + k\omega_0 h \sum_{n=-K}^K n^2 b_{\xi\eta}(nh, jh) \cos k\omega_0 nh},$$

$$\varepsilon\left[\hat{T}_s\right] = \frac{T \sum_{n=-K}^K nb_{\xi\eta}(nh, jh) \cos k\omega_0 nh}{2 \sum_{n=-K}^K nb_{\xi\eta}(nh, jh) \cos k\omega_0 nh - k\omega_0 h \sum_{n=-K}^K n^2 b_{\xi\eta}(nh, jh) \sin k\omega_0 nh}.$$

Після підстановки до них співвідношень ряду Фур'є (6.3.3) знаходимо:

$$\varepsilon\left[\hat{T}_c\right] = T \left[B_0^{(\xi\eta)}(jh) H_1(k\omega_0 K) + \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathbb{N}} \left[C_l^{(\xi\eta)}(jh) \left[\begin{array}{c} H_1[(k-l)\omega_0, K]^+ \\ + H_1[(k+l)\omega_0, K] \end{array} \right] \right] \right] \times$$

$$\times \left[B_0^{(\xi\eta)}(jh) [2H_1(k\omega_0, K) + k\omega_0 h H_2(k\omega_0, K)] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathbb{N}} C_l^{(\xi\eta)}(jh) \left[2 \left[\begin{array}{c} H_1((k-l)\omega_0, K)^+ \\ + H_1((k+l)\omega_0, K) \end{array} \right] + k\omega_0 h \left[\begin{array}{c} H_2[(k-l)\omega_0, K]^+ \\ + H_2[(k+l)\omega_0, K] \end{array} \right] \right] \right]^{-1}, \quad (6.3.14)$$

$$\varepsilon\left[\hat{T}_s\right] = T \sum_{l \in \mathbb{N}} S_l^{(\xi\eta)}(jh) \left[\begin{array}{c} H_1[(l+k)\omega_0, K]^+ \\ + H_1[(k-l)\omega_0, K] \end{array} \right] \times$$

$$\left[\sum_{l \in \mathbb{N}} \left[S_l^{(\xi\eta)}(jh) \left[2 \left[\begin{array}{c} H_1[(k-l)\omega_0, K]^+ \\ + H_1[(l+k)\omega_0, K] \end{array} \right] - k\omega_0 h \left[\begin{array}{c} H_2[(k-l)\omega_0, K]^- \\ - H_2[(l+k)\omega_0, K] \end{array} \right] \right] \right] \right]^{-1}, \quad (6.3.15)$$

де

$$H_1(k\omega_0, K) = \sum_{n=-K}^K n \sin k\omega_0 nh,$$

$$H_2(k\omega_0, K) = \sum_{n=-K}^K n^2 \cos k\omega_0 nh.$$

Порівнюючи отримані вирази (6.3.14) і (6.3.15) з (6.2.19) і (6.2.20), приходимо до висновку, що різниця між дискретними й неперервними оцінками періоду визначається різницею між сумами $H_i(k\omega_0, K)$ і інтегралами $I_i(k\omega_0, \theta)$.

Обчислимо тепер дисперсії оцінок періоду $D[\hat{T}_{c,s}] = \frac{E(n_1^{c,s})^2}{(s_2^{c,s})^2}$. Похідні

флуктуаційних складових функціоналів визначаються виразом:

$$\frac{dN_k^c(jh, \tau)}{d\tau} = \frac{4\pi kh}{(2K+1)\tau^2} \sum_{n=-K}^K n \overset{\circ}{\zeta}(nh, jh) \sin k\omega_\tau nh,$$

$$\frac{dN_k^s(jh, \tau)}{d\tau} = -\frac{4\pi kh}{(2K+1)\tau^2} \sum_{n=-K}^K n \overset{\circ}{\zeta}(nh, jh) \cos k\omega_\tau nh.$$

Враховуючи співвідношення (6.3.12) і (6.3.13), отримуємо

$$D[\hat{T}_c] = \frac{T^2 \sum_{m,n=-K}^K mnb_\zeta[nh, (m-n)h, jh] \sin k\omega_0 nh \sin k\omega_0 mh}{\left[2 \sum_{n=-K}^K nb_{\zeta\eta}(nh, jh) \sin k\omega_0 nh + k\omega_0 h \sum_{n=-K}^K n^2 b_{\zeta\eta}(nh, jh) \cos k\omega_0 nh \right]^2},$$

$$D[\hat{T}_s] = \frac{T^2 \sum_{m,n=-K}^K mnb_\zeta[nh, (m-n)h, jh] \cos k\omega_0 nh \cos k\omega_0 mh}{\left[2 \sum_{n=-K}^K nb_{\zeta\eta}(nh, jh) \cos k\omega_0 nh - k\omega_0 h \sum_{n=-K}^K n^2 b_{\zeta\eta}(nh, jh) \sin k\omega_0 nh \right]^2}.$$

Подвійні суми, які визначають чисельники останніх формул, приймаючи до уваги ряд Фур'є для кореляційної функції $b_\zeta(nh, (m-n)h, jh)$ перепишемо наступним чином:

$$\begin{aligned} & \sum_{m,n=-K}^K mnb_\zeta[nh, (m-n)h, jh] \sin k\omega_0 nh \sin k\omega_0 mh = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{l=-2N_2}^{2N_2} \left[\tilde{B}_l(0, jh) \left[L_{l\omega_0}^{(2)}(-K, K) - \frac{1}{2} \left[L_{(l+2k)\omega_0}^{(2)}(-K, K) + L_{(l-2k)\omega_0}^{(2)}(-K, K) \right] \right] + \right. \\ & + 2 \sum_{p=1}^{2K} \tilde{B}_l(ph, jh) \left[L_{l\omega_0}^{(2)}(-K, K-p) + pL^{(1)}(-K, K-p) \right] - \\ & - \frac{1}{2} \left[e^{ik\omega_0 ph} \left[L_{(l+2k)\omega_0}^{(2)}(-K, K-p) + pL_{(l+2k)}^{(1)}(-K, K-p) \right] + \right. \\ & \left. + e^{-ik\omega_0 ph} \left[L_{(l+2k)}^{(2)}(-K, K-p) + pL_{(l-2k)\omega_0}^{(1)}(-K, K-p) \right] \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m,n=-k}^K mnb_{\zeta} [nh, (m-n)h, jh] \cos k\omega_0 nh \cos k\omega_0 mh = \\
& = \frac{1}{2} \sum_{l=-2N_2}^{2N_2} \left[\tilde{B}_l(0, jh) \left[L_{l\omega_0}^{(2)}(-K, K) + \frac{1}{2} \left[L_{(l+2k)\omega_0}^{(2)}(-K, K) + L_{(l-2k)\omega_0}^{(2)}(-K, K) \right] \right] + \right. \\
& + 2 \sum_{p=1}^{2K} \tilde{B}_l(ph, jh) \left[\cos k\omega_0 ph \left[L_{l\omega_0}^{(2)}(-K, K-p) + pL_{l\omega_0}^{(1)}(-K, K-p) \right] + \right. \\
& + \frac{1}{2} \left[e^{ik\omega_0 ph} \left[L_{(l+2k)\omega_0}^{(2)}(-K, K-p) + pL_{(l+2k)\omega_0}^{(1)}(-K, K-p) \right] + \right. \\
& \left. \left. \left. + e^{-ik\omega_0 ph} \left[L_{(l-2k)\omega_0}^{(2)}(-K, K-p) + pL_{(l-2k)\omega_0}^{(1)}(-K, K-p) \right] \right] \right] \right].
\end{aligned}$$

Тут

$$L_{\omega}^{(1)}(-K, K-p) = \sum_{n=-K}^{K-p} ne^{i\omega nh}, \quad L_{\omega}^{(2)}(-K, K-p) = \sum_{n=-K}^{K-p} n^2 e^{i\omega nh}.$$

Покладемо $T = (M+1)h$, M - натуральне число. Тоді в асимптотиці маємо:

$$\begin{aligned}
& \sum_{m,n=-K}^K mnb_{\zeta} (nh, (m-n)h, jh) \sin k\omega_0 nh \sin k\omega_0 mh = \frac{1}{2} \left[\sum_{q \in Q_1} \tilde{B}_{q(M+1)}(0, jh) L_{q(M+1)}^{(2)}(-K, K) - \right. \\
& - \frac{1}{2} \left[\sum_{q \in Q_2^+} \tilde{B}_{-2k+q(M+1)}(0, jh) L_{q(M+1)}^{(2)}(-K, K) + \sum_{q \in Q_2^-} \tilde{B}_{2k+q(M+1)}(0, jh) L_{q(M+1)}^{(2)}(-K, K) \right] \right] + \\
& + \sum_{p=1}^{2K} \left[\sum_{q \in Q_1} \tilde{B}_{q(M+1)}(ph, jh) \cos k\omega_0 ph \left[L_{q(M+1)}^{(2)}(-K, K-p) + pL_{q(M+1)}^{(1)}(-K, K-p) \right] - \right. \\
& - \frac{1}{2} \left[\sum_{q \in Q_2^-} \tilde{B}_{-2k+q(M+1)}(ph, jh) e^{ik\omega_0 ph} \left[L_{q(M+1)}^{(2)}(-K, K-p) + pL_{q(M+1)}^{(1)}(-K, K-p) \right] + \right. \\
& \left. \left. \left. + \sum_{q \in Q_2^+} \tilde{B}_{2k+q(M+1)}(ph, jh) e^{-ik\omega_0 ph} \left[L_{q(M+1)}^{(2)}(-K, K-p) + pL_{q(M+1)}^{(1)}(-K, K-p) \right] \right] \right] \right],
\end{aligned}$$

$$\sum_{m,n=-k}^K mnb_{\zeta} (nh, (m-n)h, jh) \cos nk\omega_0 nh \cos k\omega_0 mh =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\sum_{q \in Q_1} \tilde{B}_{q(M+1)}(0, jh) L_{q(M+1)}^{(2)}(-K, K) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \left[\sum_{q \in Q_2^+} \tilde{B}_{-2k+q(M+1)}(0, jh) L_{q(M+1)}^{(2)}(-K, K) + \sum_{q \in Q_2^-} \tilde{B}_{2k+q(M+1)}(0, jh) L_{q(M+1)}^{(2)}(-K, K) \right] + \\
& + \sum_{p=1}^{2k} \left[\tilde{B}_{q(M+1)}(ph, jh) \cos k\omega_0 ph \left[L_{q(M+1)}^{(2)}(-K, K-p) + pL_{q(M+1)}^{(1)}(-K, K-p) \right] + \right. \\
& \left. + \sum_{q \in Q_2^+} B_{2k+q(M+1)}(ph, jh) e^{-ik\omega_0 ph} \left[L_{q(M+1)}^{(2)}(-K, K-p) + pL_{q(M+1)}^{(1)}(-K, K-p) \right] \right],
\end{aligned}$$

де Q_1 - множина тих значень q , при яких $q(M+1) \in [-2N_2, 2N_2]$, Q_1^- - множина тих значень q , при яких $-2k + q(M+1) \in [-2N_2, 2N_2]$, Q_1^+ - множина тих значень q , при яких $2k + q(M+1) \in [-2N_2, 2N_2]$. Як видно, отримані співвідношення містять додаткові складові, які зумовлені ефектом накладання. Ці складові збільшують похибки оцінювання, тому є небажаними. Легко бачити, що накладання відсутнє, якщо $M \geq 4N_2$. Приймаючи, що в першому наближенні

$$\begin{aligned}
& \left[2 \sum_{n=-K}^K nb_{\xi\eta}(nh, jh) \sin k\omega_0 nh + k\omega_0 h \sum_{n=-K}^K n^2 b_{\xi\eta}(nh, jh) \cos k\omega_0 nh \right]^2 \approx \\
& \approx \frac{1}{4} k^2 \omega_0^2 h^2 \left[C_k^{(\xi\eta)}(jh) \right]^2 H_2^2(0, K), \\
& \left[2 \sum_{n=-K}^K nb_{\xi\eta}(nh, jh) \cos k\omega_0 nh - k\omega_0 h \sum_{n=-K}^K n^2 b_{\xi\eta}(nh, jh) \sin k\omega_0 nh \right]^2 \approx \\
& \approx \frac{1}{4} k^2 \omega_0^2 h^2 \left[S_k^{(\xi\eta)}(jh) \right]^2 H_2^2(0, K),
\end{aligned}$$

і припустивши, що взаємкореляційні зв'язки сигналів зникають до нуля на інтервалі, що є набагато меншим від довжини реалізації, в цьому випадку приходимо до виразів:

$$\begin{aligned}
D[\hat{T}_c] = & \frac{T^2}{\left[C_k^{(\xi\eta)}(jh) \right]^2 k^2 \omega_0^2 h^2 H_2^2(0, K)} \left[2\tilde{B}_0(0, jh) - \tilde{B}_{2k}^c(0, jh) + 2 \sum_{p=1}^{2K} \left[2\tilde{B}_0(ph, jh) \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times \cos k\omega_0 ph - \tilde{B}_{2k}^c(ph, jh) \cos k\omega_0 ph + \tilde{B}_{2k}^s(ph, jh) \sin k\omega_0 ph \right] \right], \quad (6.3.16)
\end{aligned}$$

$$D[\hat{T}_s] = \frac{T^2}{\left[S_k^{(\xi\eta)}(jh)\right]^2 k^2 \omega_0^2 h^2 H_2(0, K)} \left[2\tilde{B}_0(0, jh) + \tilde{B}_{2k}^c(0, jh) + 2 \sum_{p=1}^{2K} \left[2\tilde{B}_0(ph, jh) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \cos k\omega_0 ph + \tilde{B}_{2k}^c(ph, jh) \cos k\omega_0 ph - \tilde{B}_{2k}^s(ph, jh) \sin k\omega_0 ph \right] \right]. \quad (6.3.17)$$

Отримані співвідношення (6.3.16) та (6.3.17) дають можливість порівняти дисперсії дискретних оцінок періоду з відповідними дисперсіями неперервних оцінок, тобто (6.2.21) і (6.2.22). Різниця між дисперсіями визначається різницею між інтегральними перетвореннями і відповідними сумами. Числові результати, які визначають таку різницю можуть бути отримані при переході до конкретних моделей сигналів.

Припустимо, що взаємокореляційна функція сигналів визначається формулою

$$b_{\xi\eta}(t, u) = B_0^{(\xi\eta)}(u) + C_2^{(\xi\eta)}(u) \cos 2\omega_0 t + S_2^{(\xi\eta)}(u) \sin 2\omega_0 t.$$

Зміщення в цьому випадку мають вигляд:

$$\varepsilon[\hat{T}_c] = T \left[B_0^{(\xi\eta)}(jh) H_1(2\omega_0, K) + \frac{1}{2} C_2^{(\xi\eta)}(jh) H_1(4\omega_0, K) \right] \times \\ \times \left[2B_0^{(\xi\eta)}(jh) \left[\begin{array}{l} H_1(2\omega_0, K) + \\ + \omega_0 h H_2(2\omega_0, K) \end{array} \right] + C_2^{(\xi\eta)}(jh) \left[\begin{array}{l} H_1(4\omega_0, K) + \\ + \omega_0 h [H_2(0, K) + H_2(4\omega_0, K)] \end{array} \right] \right]^{-1}, \\ \varepsilon[\hat{T}_s] = \frac{T}{2} H_1(4\omega_0, K) \left[H_1(4\omega_0, K) - 2\omega_0 h [H_2(0, K) - H_2(4\omega_0, K)] \right]^{-1}.$$

У першому наближенні

$$\varepsilon[\hat{T}_c] = \frac{T \left[B_0^{(\xi\eta)}(jh) H_1(2\omega_0, K) + \frac{1}{2} C_2^{(\xi\eta)}(jh) H_1(4\omega_0, K) \right]}{C_2^{(\xi\eta)}(jh) \omega_0 h H_2(0, K)}, \\ \varepsilon[\hat{T}_s] = \frac{TH_1(4\omega_0, K)}{2\omega_0 h H_2(0, K)}. \quad (6.3.18)$$

Для амплітудно-модульованих сигналів

$$\xi(t) = \mu(t) \cos \omega_0 t, \quad \eta(t) = \nu(t) \sin \omega_0 t \quad (6.3.19)$$

нульовий $B_0^{(\xi\eta)}(u)$ і косинусний $C_2^{(\xi\eta)}(u)$ є рівними:

$$B_0^{(\xi\eta)}(u) = C_2^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{2} R_{\mu\nu}(u) \cos \omega_0 t.$$

Тому в цьому випадку:

$$\varepsilon[\hat{T}_c] = \frac{T}{\omega_0 h H_2(0, K)} \left[H_1(2\omega_0, k) + \frac{1}{2} H_1(4\omega_0, K) \right]. \quad (6.3.20)$$

Обидва зміщення (6.3.18) і (6.3.19), як видно, не залежать від взаємокореляційних компонентів.

Дисперсії оцінок періоду взаємозв'язаних сигналів (6.3.19) визначаються співвідношеннями:

$$D[\hat{T}_c] = \frac{T^2}{4\omega_0^2 h^2 [C_2^{(\xi\eta)}(jh)]^2 H_2(0, K)} \left[2\tilde{B}_0(0, jh) - \tilde{B}_4^c(0, jh) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{p=1}^{2K} \left[2\tilde{B}_0(ph, jh) \cos 2\omega_0 ph - \tilde{B}_4^c(ph, jh) \cos 2\omega_0 ph + \tilde{B}_4^s(ph, jh) \sin 2\omega_0 ph \right] \right],$$

$$D[\hat{T}_s] = \frac{T^2}{4\omega_0^2 h^2 [S_2^{(\xi\eta)}(jh)]^2 H_2(0, K)} \left[2\tilde{B}_0(0, jh) + \tilde{B}_4^c(0, jh) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{p=1}^{2K} \left[2\tilde{B}_0(ph, jh) \cos 2\omega_0 ph + \tilde{B}_4^c(ph, jh) \cos 2\omega_0 ph - \tilde{B}_4^s(ph, jh) \sin 2\omega_0 ph \right] \right].$$

Прийнявши до уваги, що

$$\tilde{B}_0(0, jh) = \frac{1}{8} R_\zeta(0, jh) (2 + \cos 2\omega_0 jh),$$

$$\tilde{B}_4^c(0, jh) = \frac{1}{8} R_\zeta(0, jh) \cos 2\omega_0 jh,$$

$$\tilde{B}_0(ph, jh) = \frac{1}{8} R_\zeta(ph, jh) (1 + \cos 2\omega_0 ph + \cos 2\omega_0 jh),$$

$$\tilde{B}_4^c(ph, jh) = \frac{1}{8} R_\zeta(ph, jh) \cos 2\omega_0 (p+j)h,$$

$$\tilde{B}_4^s(ph, jh) = -\frac{1}{8} R_\zeta(ph, jh) \sin 2\omega_0 (p+j)h,$$

де $R_\zeta(ph, jh) = R_\mu(ph)R_\nu(jh) + R_{\mu\nu}((p+j)h)R_{\mu\nu}((j-p)h)$, знаходимо:

$$D[\hat{T}_c] = \frac{T^2 \left[R_\zeta(0, jh)(4 + \cos 2\omega_0 jh) + 2 \sum_{p=1}^{2K} R_\zeta(ph, jh) \begin{bmatrix} 1 - \cos 2\omega_0 jh + \\ + 2(1 + \cos 2\omega_0 jh) - \\ - \cos 2\omega_0 ph + \cos 4\omega_0 p \end{bmatrix} \right]}{8\omega_0^2 h^2 H_2(0, K) R_{\mu\nu}^2(jh) \cos^2 \omega_0 jh},$$

$$D[\hat{T}_s] = \frac{T^2}{8\omega_0^2 h^2 H_2(0, K) R_{\mu\nu}^2(jh) \sin^2 \omega_0 jh} \left[R_\zeta(0, jh)(4 + 3 \cos 2\omega_0 jh) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{p=1}^{2K} R_\zeta(ph, jh) \left[(1 + \cos 2\omega_0 jh)(1 + 2 \cos 2\omega_0 ph) + \cos 4\omega_0 ph \right] \right].$$

Покладемо $R_\mu(u) = D_\mu e^{-\alpha_\mu u^2}$, $R_\nu(u) = D_\nu e^{-\alpha_\nu u^2}$, $R_{\mu\nu}(u) = D_{\mu\nu} e^{-\alpha_{\mu\nu} u^2}$. Тоді

$$R_\zeta(0, jh) = D_\mu D_\nu + D_{\mu\nu}^2 e^{-2\alpha_{\mu\nu}(jh)^2},$$

$$R_\zeta(ph, jh) = D_\mu D_\nu e^{-(\alpha_\mu + \alpha_\nu)(jh)^2} + D_{\mu\nu}^2 e^{-2\alpha_{\mu\nu}(jh)^2} e^{-2\alpha_{\mu\nu}(ph)^2}.$$

Позначивши

$$q_l(\alpha, K) = \sum_{p=1}^{2K} e^{-\alpha ph} \cos l\omega_0 ph.$$

Для дисперсій отримаємо:

$$D[\hat{T}_c] = \frac{T^2 e^{2\alpha_{\mu\nu}(jh)^2}}{8\omega_0^2 h^2 D_{\mu\nu}^2 H_2(0, K) \cos^2 \omega_0 jh} \left[\left(D_\mu D_\nu + D_{\mu\nu}^2 e^{-2\alpha_{\mu\nu}(jh)^2} \right) (4 + \cos 2\omega_0 jh) + \right. \\ + 2 \left[(1 - \cos 2\omega_0 jh) \left[D_\mu D_\nu q_0(\alpha_\mu + \alpha_\nu, K) + D_{\mu\nu}^2 e^{-2\alpha_{\mu\nu}(jh)^2} q_0(2\alpha_{\mu\nu}, K) \right] + \right. \\ \left. + 2(1 + \cos 2\omega_0 jh) \left[D_\mu D_\nu q_0(\alpha_\mu + \alpha_\nu, K) + D_{\mu\nu}^2 e^{-2\alpha_{\mu\nu}(jh)^2} q_2(2\alpha_{\mu\nu}, K) \right] + \right. \\ \left. \left. + D_\mu D_\nu q_4(\alpha_\mu + \alpha_\nu, K) + D_{\mu\nu}^2 e^{-2\alpha_{\mu\nu}(jh)^2} q_4(2\alpha_{\mu\nu}, K) \right] \right], \quad (6.3.21)$$

$$D[\hat{T}_s] = \frac{T^2 e^{2\alpha_{\mu\nu}(jh)^2}}{8\omega_0^2 h^2 D_{\mu\nu}^2 H_2(0, K) \sin^2 \omega_0 jh} \left[(4 + 3 \cos 2\omega_0 jh) \left(D_\mu D_\nu + D_{\mu\nu}^2 e^{-2\alpha_{\mu\nu}(jh)^2} \right) + \right. \\ + 2 \left[(1 + \cos 2\omega_0 jh) \left[D_\mu D_\nu \left[q_0(\alpha_\mu + \alpha_\nu, K) + 2q_2(\alpha_\mu + \alpha_\nu, K) \right] + D_{\mu\nu}^2 e^{-2\alpha_{\mu\nu}(jh)^2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left[q_0(2\alpha_{\mu\nu}, K) + 2q_2(2\alpha_{\mu\nu}, K) \right] + D_\mu D_\nu q_4(\alpha_\mu + \alpha_\nu, K) + D_{\mu\nu}^2 e^{-2\alpha_{\mu\nu}(jh)^2} q_4(2\alpha_{\mu\nu}, K) \right] \right].$$

При $j = 0$ дисперсія (6.3.21) приймає вигляд:

$$D[\hat{T}_c] = \frac{T^2}{8\omega_0^2 h^2 D_{\mu\nu}^2 H_2(0, K)} \left[5(D_\mu D_\nu + D_{\mu\nu}^2) + 4 \left[D_\mu D_\nu q_2(\alpha_\mu + \alpha_\nu, K) + D_{\mu\nu}^2 q_2(2\alpha_{\mu\nu}, K) \right] + D_\mu D_\nu q_4(\alpha_\nu + \alpha_\mu, K) + D_{\mu\nu}^2 q_4(2\alpha_{\mu\nu}, K) \right].$$

Проведення обчислень на підставі виведених тут формул і порівняння отриманих результатів з результатами кількісного аналізу неперервних оцінок дає змогу обґрунтувати вибір потрібного кроку дискретизації при використанні функціоналів (6.3.1) і (6.3.2).

6.4. Висновки до розділу 6

1. Проведено аналіз взаємкореляційних статистик, які формуються на основі значень реалізацій ПКВП-сигналів, що відбираються через так званий пробний період. Показано, що такі статистики мають селективні властивості по відношенню до періоду не стаціонарності і точки екстремальних значень можуть розглядатися як оцінки періоду. Величини цих екстремумів визначаються значеннями взаємкореляційних функцій для вибраних моментів часу. Аналіз таких оцінок проведений на основі розв'язків певного типу нелінійних рівнянь, які отримуються за допомогою методу малого параметру. Значення цього параметра зменшується зі збільшенням відрізків реалізацій сигналів, коли виконуються умови слушності оцінок взаємкореляційних функцій. Показано, що отримані в такий спосіб оцінки періоду взаємної нестационарності є асимптотично незміщеними і слушними, і встановлено, що зміщення оцінки має період $O(N^{-2})$, а дисперсія - $O(N^{-3})$; формули, отримані в першому наближенні для зміщення та дисперсії оцінки періоду дають можливість обчислити середньоквадратичну похибку оцінювання в залежності від довжини реалізації і параметрів, які описують авто- та взаємкореляційну структуру сигналу. Встановлено, що результати такого методу оцінювання суттєво залежать від вибору початкової

точки когерентного усереднення реалізацій і найкращі результати отримуються у випадку, коли початкова точка відповідає екстремальному значенню взаємкореляційної функції та максимальному значенню її другої похідної.

2. Досліджено селективні властивості перетворення Фур'є взаємкореляційного добутку ПКВП-сигналів, де замість істинного значення періода взаємної не стаціонарності використовується деяка пробна величина. Доведено, що точки екстремальних значень таких перетворень можуть розглядатися як оцінки періоду, а величини екстремумів – як оцінки відповідних взаємкореляційних компонентів. Властивості таких оцінок періоду проаналізовані на основі розв'язків відповідних нелінійних рівнянь, отриманих методом малого параметра.

3. Доведено, що такі компонентні оцінки періоду є асимптотично збіжними і слухними, а їх зміщення і дисперсія мають відповідно порядок $O(\theta^{-2}; \theta^{-3})$. У першому наближенні отримані асимптотичні формули, для цих величин, які описують залежності цих величин від довжини реалізації та авто- і взаємкореляційних компонентів. Встановлено, що дисперсії оцінок є обернено пропорційними до добутку номера взаємкореляційного компонента, який оцінюється, на його абсолютне значення. Проведено аналіз зміщень і дисперсій оцінок періоду амплітудо модульованих сигналів. Встановили їх залежності від параметрів, які описують авто- та взаємкореляційну структуру модулюючих процесів.

4. Проаналізовано компонентні оцінки періоду, що знаходяться за допомогою дискретних перетворень Фур'є. З використанням методу малого параметра виведено асимптотичні формули для зміщення й дисперсії оцінок періоду. Показано, що перехід від неперервного до дискретного оцінювання не змінює принципових властивостей оцінок, тобто для довільних кроків дискретизації вони залишаються асимптотично незміщеними й слухними. Однак величина кроку дискретизації впливає на швидкість збіжності оцінок, яка значно зменшується при наявності ефектів накладання як першого, так і другого роду. Виведено умови відсутності ефектів накладання і показано, що при їх виконанні

різниця між статичними похибками неперервних і дискретних оцінок визначається тільки швидкістю загасання кореляційних зв'язків. Отримано формули, що визначають статистичні характеристики оцінок від числа відліків, кроку дискретизації та параметрів модульованих сигналів, які дають змогу оцінити статистичні похибки обробки, а також вирішити зворотну задачу – вибрати такі параметри обробки, які забезпечують наперед задану похибку.

РОЗДІЛ 7

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ СИМУЛЬОВАНИХ ВІБРАЦІЙНИХ СИГНАЛІВ ІЗ ЗАДАНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ПКВ СИГНАЛІВ

7.1. Математичне і алгоритмічне забезпечення для обробки вібраційних сигналів

Задачі взаємного статистичного аналізу вібраційних сигналів, з використанням сучасних методів взаємокореляційного та взаємоспектрального аналізів як у стаціонарному припущенні, так і з використанням періодично нестационарних властивостей сигналів, що дає змогу виявляти дефекти обертових вузлів на ранніх етапах їх зародження та встановлення діагностичних ознак вирішуються за алгоритмом, який представлений на рис. 7.1.

Теоретичною основою для обґрунтування алгоритмів обробки та створення програмного продукту стали оригінальні результати в області теорії й аналізу стохастичних коливань [207, 211, 212, 217], у тому числі й виявлення прихованих періодичностей [60, 131, 134, 214]. Для обчислення оцінок характеристик коливань використовуються когерентний [207] і компонентний [208] методи, метод найменших квадратів [116, 130, 144], методи лінійної гребінчастої та смугової фільтрації [211, 212].

Для виділення модулюючих стаціонарних компонентів сигналів використовуються два методи. Перший з них полягає в частотному зсуві сигналу на величину, кратну основній частоті відповідного циклу і подальшій низькочастотній фільтрації. У другому методі за допомогою смугової фільтрації виділяються складові, спектри яких зосереджені в діапазонах шириною, що дорівнює основній частоті, а далі з використанням перетворення Гілберта знаходяться огинаючі цих складових.

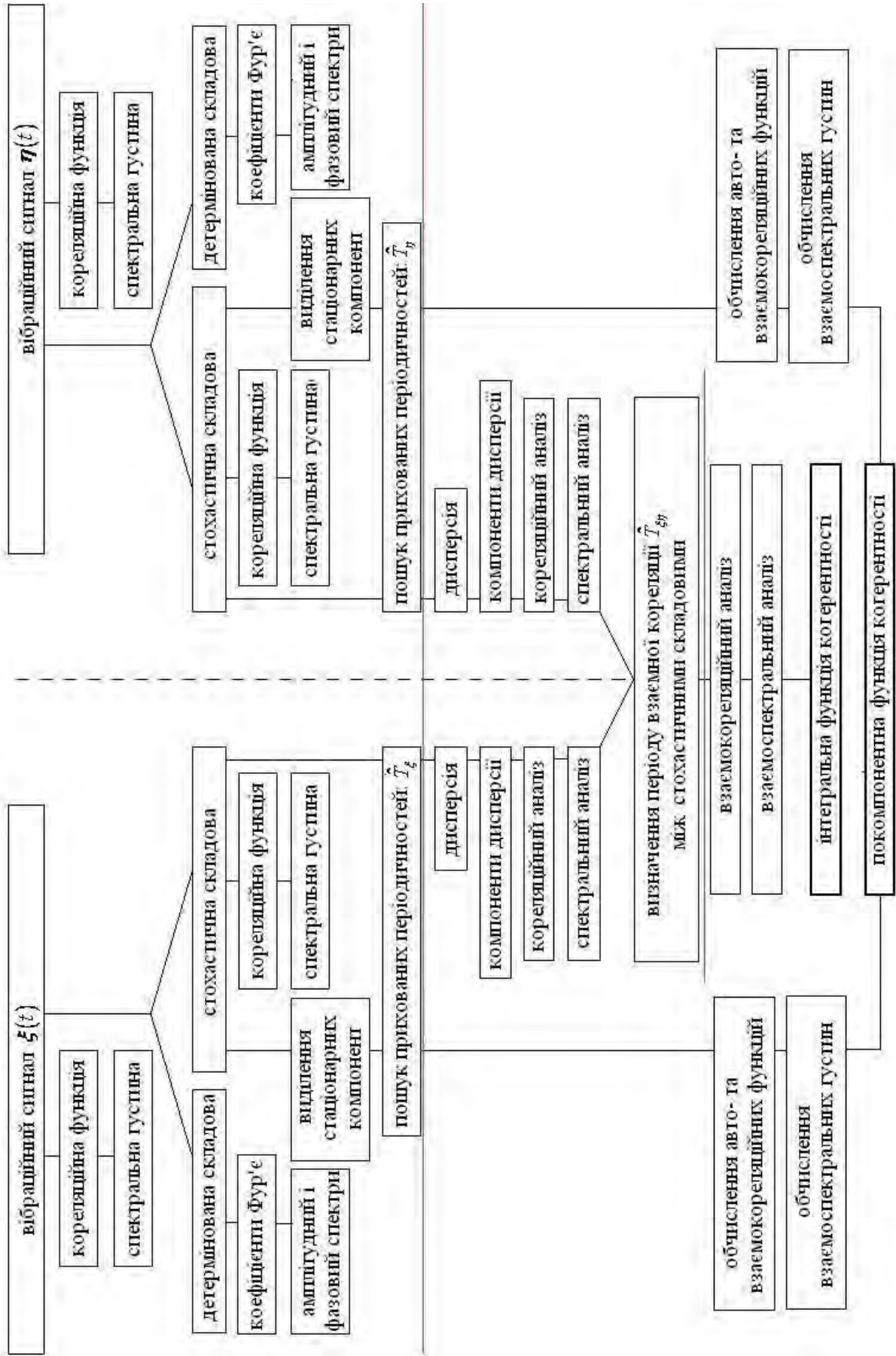


Рис. 7.1. Алгоритм взаємного статистичного аналізу вібраційних сигналів.

Такі перетворення сигналів дають можливість провести аналіз імовірнісних характеристик як самих огинаючих гармонічних складових ПКВП, так і дослідити їх взаємкореляційні і взаємспектральні характеристики.

Перший етап обробки вібросигналів полягає в їх розділенні на детерміновану та стохастичну складові. Аналіз детермінованої складової базується на оригінальних методах виявлення й аналізу прихованих періодичностей. З детермінованою складовою вібросигналів, як правило, пов'язані макродефекти механічних систем, такі як дисбаланс, ексцентриситет, не співвісність, биття, зачеплення і т. п. Висновки про дефектність обертового вузла приймаються на основі аналізу амплітудного та фазового спектрів цієї складової. Випадкова складова містить інформацію про нестационарні та нелінійні властивості вібраційного сигналу, які пов'язані з силами тертя, зміною в'язкості мастил, шорсткістю поверхні і т. п. Аналіз випадкової складової, в тому числі характеристик її періодичної нестационарності, дозволяє виявляти дефекти на ранніх стадіях їх розвитку. Періодична нестационарність випадкової складової зумовлена стохастичною модуляцією гармонік [53, 56, 165, 166, 173]. Ця модуляція здебільшого не є вузькосмуговою, тому вона не завжди буде проявлятися в пікових значеннях оцінок спектральної густини потужності стаціонарного наближення сигналу.

Відповідно до зазначеного, модель вібраційного сигналу $\zeta(t)$ складних машинних комплексів має вигляд

$$\zeta(t) = s(t) + \eta(t),$$

де $s(t)$ – детерміновані складова сигналу, $\eta(t) = \xi(t) + \varepsilon(t)$ – випадкова складова сигналу, де в свою чергу $\xi(t)$ – періодично нестационарна складова, $\varepsilon(t)$ – стаціонарний фоновий шум, при цьому випадкові процеси $\varepsilon(t)$ і $\eta(t)$ є некорельованими. Детермінована складова $s(t)$ описується майже періодичною функцією

$$s(t) = \sum_{k=-M}^M c_k e^{i\omega_k t},$$

де M – число гармонічних складових, c_k – їх комплексні амплітуди, а ω_k – частоти. Моделлю нестационарної складової $\xi(t)$ є ПКВП, для якого справедливе гармонічне представлення

$$\xi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \xi_k(t) e^{ik\omega_0 t}, \quad (7.1.1)$$

де $\xi_k(t)$ – стаціонарно зв'язані випадкові процеси, які описують стохастичну амплітудну й фазову модуляції основних гармонічних складових ПКВП. Саме кореляційні та спектральні характеристики модулюючих процесів $\xi_k(t)$ є носіями інформації про типи дефектів обертових вузлів. Діагностичні ознаки можуть будуватися безпосередньо на основі цих характеристик або з використанням імовірнісних характеристик сформованого стаціонарними компонентами $\xi_k(t)$ періодично корельованих випадкових процесів.

Математичне сподівання ПКВП $m(t) = E\xi(t)$ і кореляційна функція $b(t, u) = E\overset{\circ}{\xi}(t)\overset{\circ}{\xi}(t+u)$, $\overset{\circ}{\xi}(t) = \xi(t) - m(t)$, є періодичними функціями часу

$$m(t) = m(t+T),$$

$$b(t, u) = b(t+T, u)$$

і можуть бути представлені рядами Фур'є:

$$m(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} m_k e^{ik\omega_0 t},$$

$$b(t, u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} B_k(u) e^{ik\omega_0 t}.$$

Періодично змінюється за часом і миттєва спектральна густина ПКВП – перетворення Фур'є кореляційної функції:

$$f(\omega, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b(t, u) e^{-i\omega u} du = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k(\omega) e^{ik\omega_0 t}.$$

Тут

$$f_k(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_k(u) e^{-i\omega u} du.$$

Величини $B_k(u)$ і $f_k(\omega)$ відповідно, називають кореляційними і спектральними компонентами. Нульові компоненти $B_0(u)$ і $f_0(\omega)$ описують властивості стаціонарного наближення ПКВП, тобто усереднені кореляційні зв'язки і усереднену за часом спектральну густину потужності флуктуаційних коливань.

Коефіцієнти Фур'є математичного сподівання ПКВП m_k є математичним сподіваннями модулюючих процесів $\xi_k(t)$ у представленні (7.1.1), тобто $m_k = E\xi_k(t)$, а кореляційні та спектральні компоненти визначаються авто- та взаємкореляційними функціями і відповідними спектральними густинами цих процесів

$$B_k(u) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} R_{n-k,n}(u) e^{in\omega_0 u}, \quad (7.1.2)$$

$$f_k(u) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_{n-k,n}(\omega - n\omega_0), \quad (7.1.3)$$

де $R_{kl}(u) = \overline{E\overset{\circ}{\xi}_k(t)\overset{\circ}{\xi}_l(t+u)}$, $\overset{\circ}{\xi}_k(t) = \xi_k(t) - m_k$, “ $\bar{}$ ” – знак спряження, а

$$f_{k,l}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{kl}(u) e^{-i\omega u} du.$$

Як впливає зі співвідношень (7.1.2) і (7.1.3), випадковий процес (7.1.1) є ПКВП тоді і тільки тоді, коли модулюючі різні гармонічні складові процеси є корельованими. А це означає, що їхні спектри повинні перекриватися.

Для виявлення стохастичної модуляції й ідентифікації типу можливого дефекту на початковому етапі досліджень використовуються діагностичні параметри, які описують періодичну нестаціонарність першого та другого порядків. Для визначення ступеня цієї нестаціонарності вибрані коефіцієнти Фур'є математичного сподівання m_k та кореляційні компоненти $B_k(u)$ і введені в розгляд прості діагностичні ознаки

$$I_1 = \frac{1}{2} \frac{\sum_{k=1}^{N_1} |m_k|^2}{\hat{B}_0(0)},$$

$$I_2 = \frac{\sum_{k=1}^{N_2} |B_k(0)|}{B_0(0)},$$

де N_1 – кількість коефіцієнтів Фур'є математичного сподівання, а N_2 – кількість кореляційних компонент. Перша величина визначається відношенням потужності регулярних змін вібраційного сигналу до середньої потужності його флуктуаційних змін, а друга – відношення коливної потужності флуктуацій до їх середньої потужності. Введені ознаки періодичної нестационарності мають властивості міри. Вони монотонно зростають при збільшенні потужності регулярних і флуктуаційних коливань вібросигналу. У випадку стаціонарного випадкового сигналу, коли $m_k \equiv 0$ і $B_k(u) \equiv 0$ для всіх $k \neq 0$, діагностичні параметри I_1 та I_2 дорівнюють нулю.

Очевидно, що дефекти механізмів теж можуть позначатися на характері зникання кореляційних зв'язків модулюючих стохастичних процесів. Для відображення цього ефекту вибрано параметри

$$I_3^{(k)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |B_k(u)| du}{\int_{-\infty}^{\infty} |B_0(u)| du}, \quad k = \overline{1, N_2},$$

які називають мірами періодичної корельованості. Для стаціонарного випадку теж маємо $I_3^{(k)} = 0$.

Подібні властивості вібраційного сигналу, але вже в частотній області, описує так звана функція спектральної когерентності

$$C_k(\omega) = \frac{|f_k(\omega)|}{f_0(\omega)}, \quad k = \overline{1, N_2}.$$

Нормування спектральних компонентів дає можливість підкреслити зв'язок між енергетично слабкими компонентами від незначних дефектів на фоні компонентів, які не мають відношення до ідентифікації дефекту, однак мають істотну більшу потужність.

Доцільним є також використання функціоналу спектральної когерентності

$$I_4^{(k)} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} C_k(\omega) d\omega,$$

однак його визначення вимагає великого обсягу обчислень.

Для виявлення певного типу дефектів досить ефективними є ознаки, сформовані на основі кореляційних і спектральних характеристик стаціонарних компонентів ПКВП-моделі вібросигналів, у тому числі нормовані взаємкореляційні функції

$$r_{kl}(u) = \frac{R_{ll}(u)}{R_{nk}(0)R_{ll}(0)}$$

та функції когерентності

$$\gamma_{kl}^2(\omega) = \frac{|f_{kl}(\omega)|^2}{f_{kk}(\omega)f_{ll}(\omega)}.$$

Таким чином, можна сформулювати загальну методологічну схему, яка використовується для аналізу вібраційних сигналів при встановленні стану обертових механізмів, і полягає в наступному:

- вібраційний сигнал аналізують класичними методами теорії статистики стаціонарних випадкових процесів, роблять висновки про загальну структуру вібрації, прив'язують відповідні спектральні піки до частот обертання елементів механізму;

- наявні піки спектральної густини описують детермінованим складником вібраційного сигналу та вузькосмуговими процесами, класифікувати які трудно класичними методами обробки. Тому для розділення детермінованого та випадкового складників використовують методи статистики ПКВП і адаптивної фільтрації;

- після вилучення детермінованої складової досліджують її амплітудний і фазовий спектри, на їх основі встановлюють типи дефектів механізму;

- методом найменших квадратів виділяють періодично нестаціонарну складову вібраційного процесу;

- на основі аналізу стохастичної складової виявляють часові зміни статистик другого порядку, які вказують на модуляційну природу випадкового процесу й дають можливість стверджувати про присутність у механізмі дефектів, що розвиваються;

- з використанням імовірнісних характеристик періодичної нестационарності – кореляційної функції у ПКВП-наближенні, її амплітудно-фазових характеристик, спектральної густини та її компонентів описують стан механізму;

- для уточнення типу дефекту виділяють стаціонарні компоненти періодично нестационарної складової вібросигналу;

- проводиться визначення періоду та оцінювання взаємкореляційної функції за допомогою симетричного когерентного усереднення (може бути проведено як за когерентним, так і за компонентним методом з тією різницею, що замість істинного значення періоду в них використовується деяка пробна величина, так званий пробний період);

- проводять її авто- та взаємкореляційний і взаємспектральний аналізи;

- визначення функцій когерентності.

Таким чином, використання методів ПКВ сигналів і їх узагальнення відкриває нові можливості якісного та кількісного аналізу вібраційних сигналів, породжених різноманітними механізмами, з метою діагностики останніх. Методи виділення детермінованого складника і його аналіз уможливають виявлення фазових змін процесів у механізмах. Адаптивні методи оцінювання параметрів мінімізують втручання людини у процес обробки і їх слід використовувати в автоматизованих діагностичних системах. Методи виділення періодично нестационарної складової дають можливість відокремлювати ті характеристики процесу, які відповідають за дефектні відгуки системи, мінімізуючи тим самим шумові характеристики. Дослідження взаємкореляційних і взаємспектральних характеристик ПКВ сигналів є теоретичною основою для фізичної інтерпретації їх властивостей. Для опису стохастичних зв'язків стаціонарних випадкових сигналів у частотній області широко використовується функція когерентності, яка визначається взаємспектральними характеристиками окремих випадкових

процесів, які модулюють несучі гармоніки ПНВ сигналу. Покомпонентна функцією когерентності дає змогу детальніше проаналізувати взаємозв'язаність ПНВС, уникаючи при цьому впливу переносу частот, який виникає при модуляції, для встановлення типів дефектів.

З допомогою комп'ютерної симуляції проведемо аналіз вібраційних сигналів підшипника кочення отриманих на основі його математичної моделі у вигляді системи нелінійних диференціальних рівнянь 2-го порядку [225, 233]

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \sum_{j=1}^{N_b} k \left[x \cos \theta_j + y \sin \theta_j - \Pi_i \right]^2 \cos \theta_j = W + F_u \cos \omega t,$$

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + \sum_{j=1}^{N_b} k \left[x \cos \theta_j + y \sin \theta_j - \Pi_i \right]^2 \sin \theta_j = F_u \sin \omega t.$$

Розглянемо вібраційні сигнали у взаємоперпендикулярних напрямках, як для бездефектного підшипника кочення так і з дефектами на зовнішньому і внутрішньому кільцях.

Для симулювання цих вібраційних відгуків вибрано наступні параметри: маса валу $m = 0.6$ кг, модуль Юнга для сталі $E = 2.1 \cdot 10^8$ Дж/м, частота обертання валу $\omega_0 = 80$ Гц, радіус внутрішнього кільця підшипника $r = 0.023$ м, зовнішнього – $R = 0.046$ м, радіус тіла кочення $r_b = 0.00398$ м, кількість тіл кочення $N_b = 8$. Для оцінювання ймовірнісних характеристик вібраційних сигналів взято довжину реалізації довжиною 100 періодів обертання валу з кількістю 300 точок на період. Така довжина реалізації дозволяє оцінювати ці характеристики з похибкою не більше 10% [30, 34, 162, 214].

7.2. Взаємний аналіз симульованих вібраційних сигналів підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці

На реалізаціях вібраційних сигналів від підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці (рис. 7.2 а, б) бачимо чіткі викиди, які відповідають накочуванню тіл кочення на дефект. Частота таких ударів відповідає частоті перекочування тіл кочення по зовнішньому кільці і для даного підшипника рівна $\omega_{out} = 283.5 \text{ Гц}$. З рис. 7.2 також видно, що амплітуді викидів притаманний випадковий характер. З наведених графіків добре видно, що амплітуди викидів на вертикальній складовій вібрації значно переважають амплітуди викидів на горизонтальній складовій, що зумовлено силою тяжіння валу.

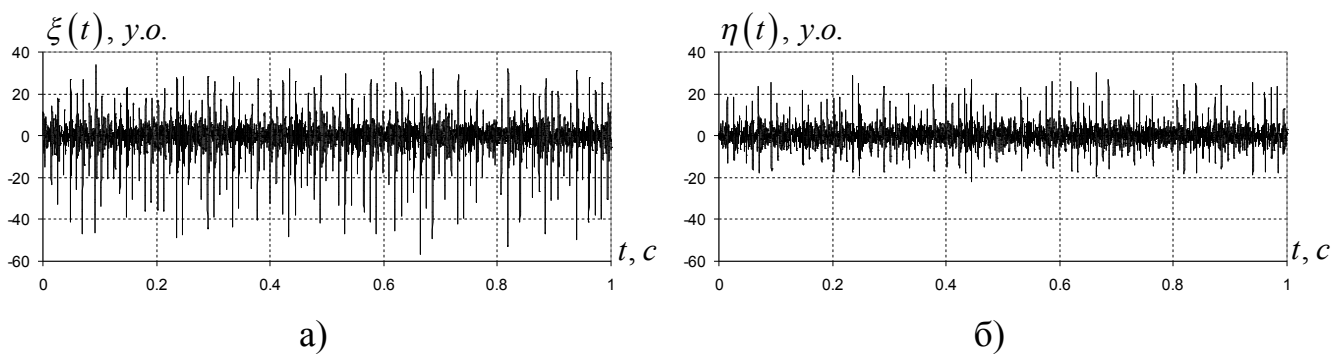


Рис. 7.2. Вібраційні сигнали вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці.

Кореляційні функції (рис. 7.3) в стаціонарному наближенні вібраційних сигналів мають вигляд незаникаючих функцій та містять потужні викиди з частотою, що відповідає перекочуванню тіл кочення по зовнішньому кільцю ($\omega_{out} = 283.5 \text{ Гц}$). Присутні у вібраційних сигналах детерміновані коливання за потужністю значно переважають стохастичні складові. Співвідношення сигнал/шум для вертикальної складової вібрації становить 5:1, а для горизонтальної 4:1. Потужність вертикальної складової вібрації переважає потужність горизонтальної майже в 3 рази.

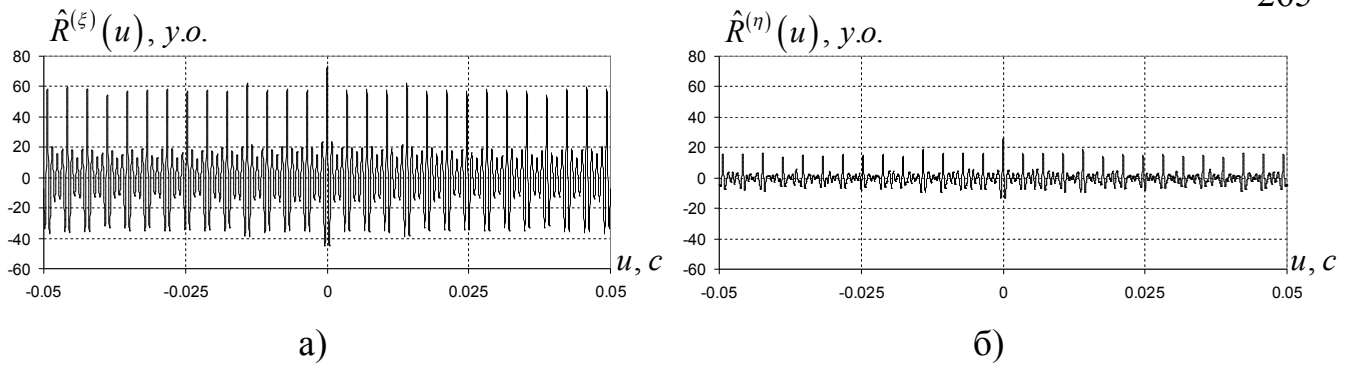


Рис. 7.3. Кореляційна функція вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці.

Спектри вібраційних сигналів (рис. 7.4) зосереджені у смузі частот до 2500 Гц та містять гармонічні складові, що відповідають частоті перекочування тіл кочення по зовнішньому кільцю та кратні до неї гармоніки. Гармонічний склад спектральної густини вертикальної та горизонтальної складових вібрації подібні між собою.

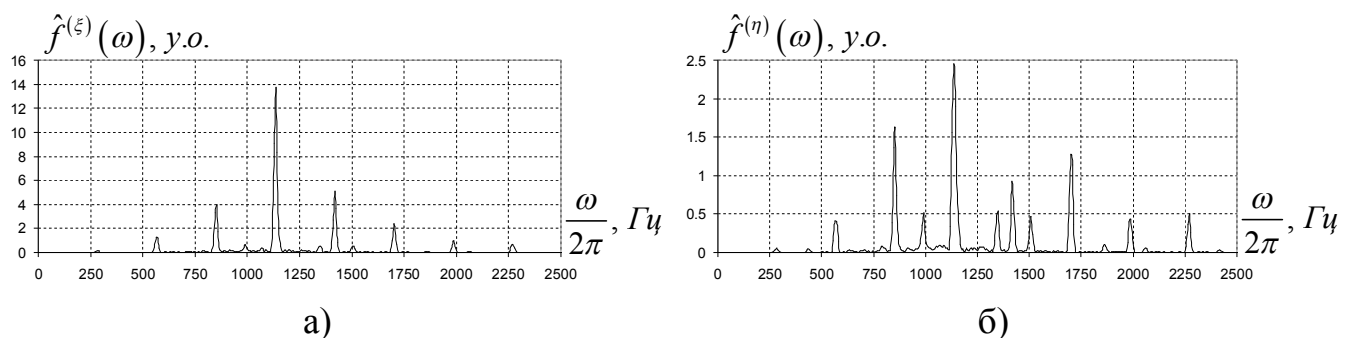


Рис. 7.4. Спектральна густина вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці.

Використовуючи компонентний метод оцінили математичне сподівання сигналів та розділили детерміновані та стохастичні складові сигналів. Математичні сподівання горизонтальної (а) та вертикальної (б) складових вібрації підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці наведені на рис. 7.5. З наведених рисунків бачимо, що регулярні складові вібраційних сигналів містять потужні викиди спричинені взаємодією тіл кочення з присутніми на кільці дефектом.

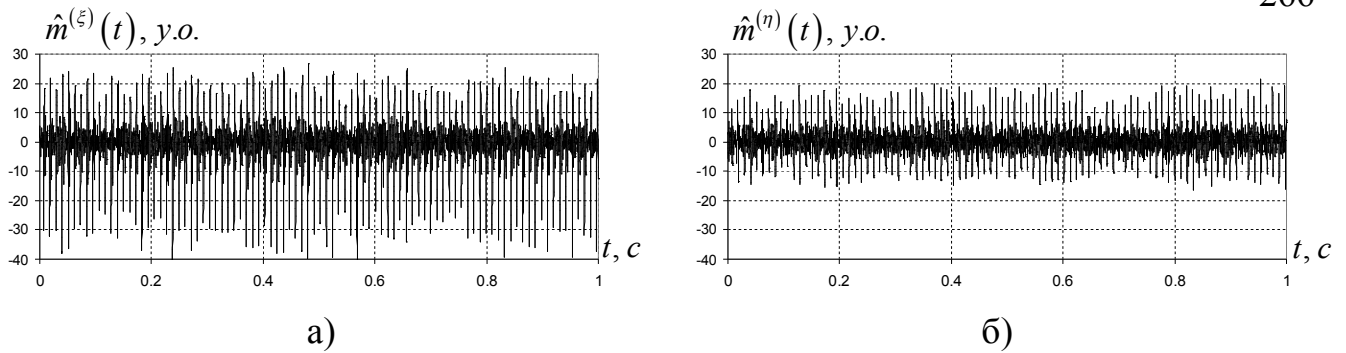


Рис. 7.5. Математичне сподівання вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці.

Гармонічний склад математичного сподівання вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці представлений на рис. 7.6. З наведених рисунків бачимо, що серед значущих компонентів математичного сподівання вертикальної складової є 18 компонентів, а горизонтальної – 10. Найпотужнішою гармонікою як вертикальної, так і горизонтальної складових є четверта.

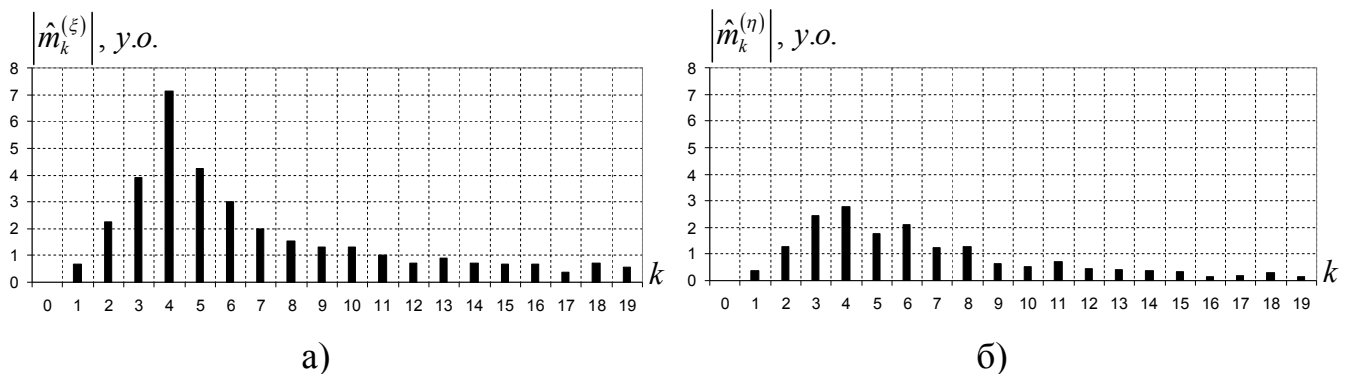


Рис. 7.6. Компоненти Фур'є математичне сподівання вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці.

У стохастичних складових сигналу вертикальної (а) та горизонтальної (б) вібрації підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці (рис. 7.7) присутні викиди, які зумовлені взаємодією тіл кочення з присутнім на кільці дефектом.

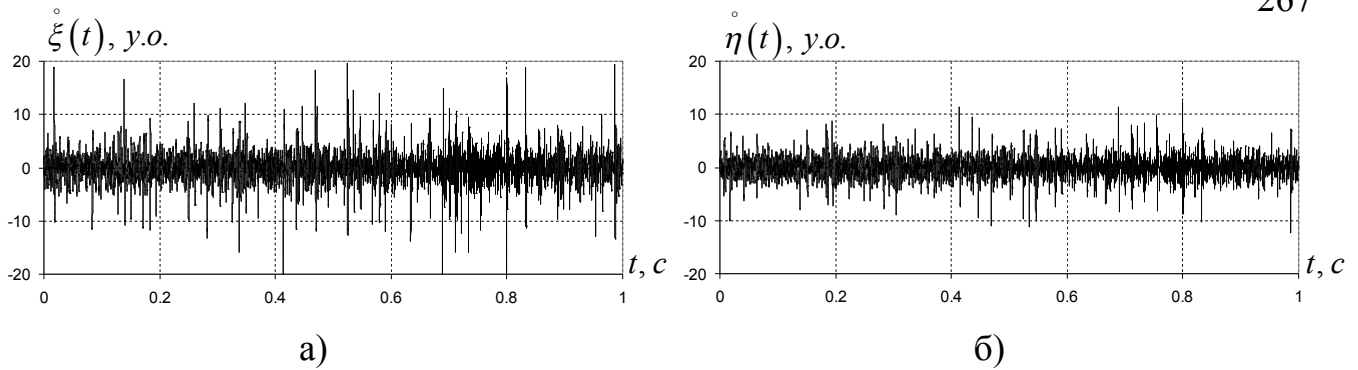


Рис. 7.7. Стохастичні складові сигналу вертикальної (а) та горизонтальної (б) вібрації підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці.

Кореляційні функції стохастичних складових вертикальної та горизонтальної складових вібрації підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці мають вигляд швидкозникаючих функцій. На хвості кореляційної функції вертикальної складової (рис. 7.8а) проглядаються незначні викиди з частотою 283,5 Гц. Потужність стохастичної складової вертикальної вібрації майже вдвічі перевищує потужність стохастичної складової горизонтальної вібрації (рис. 7.8а, б).

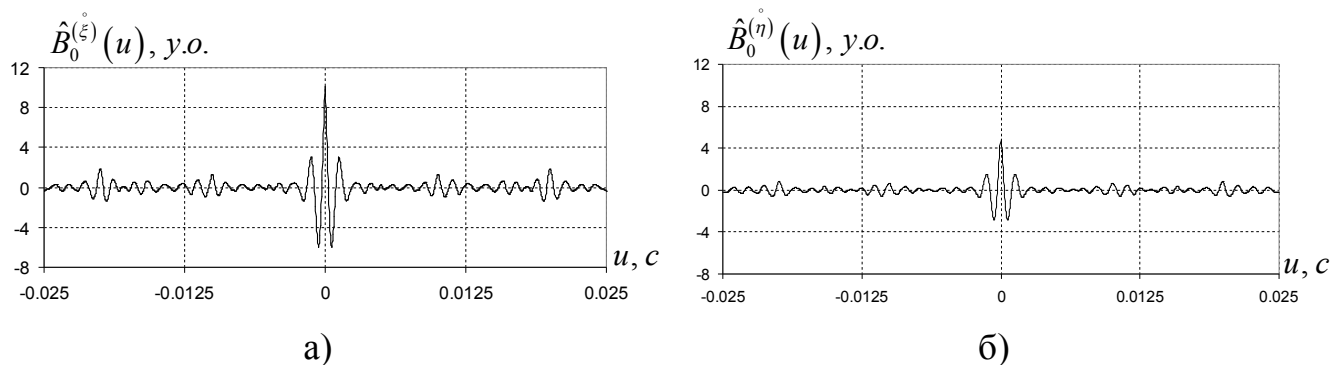


Рис. 7.8. Кореляційні функції стохастичних складових вертикальної (а) та горизонтальної (б) вібрації підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці.

Спектри стохастичних складових вертикальної та горизонтальної вібрації підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці зосереджені в області частот від 250 Гц до 1000 Гц (рис. 7.9). Амплітуда спектрального підняття у вказаній області частот для вертикальної складової вдвічі більша за амплітуду підняття у спектрі горизонтальної складової.

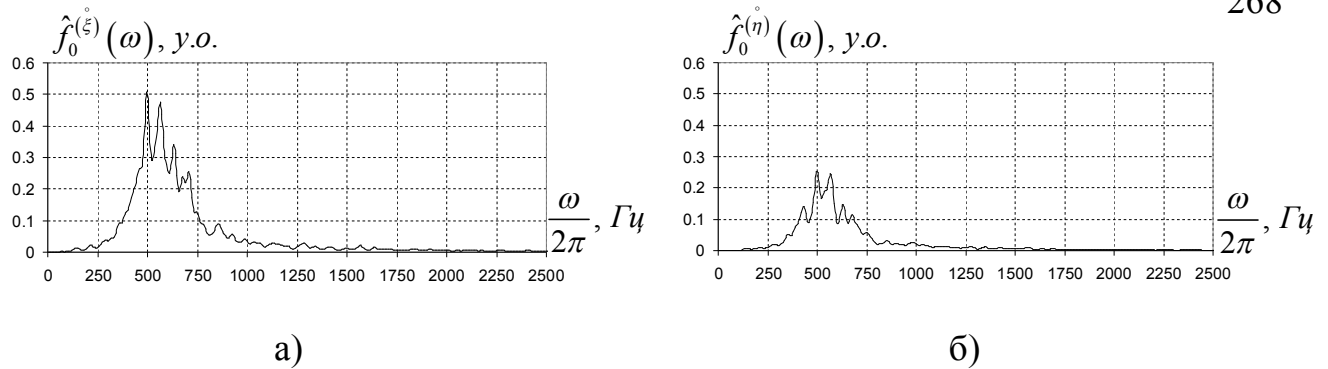


Рис. 7.9. Спектральна густина стохастичної складової вертикальної (а) та горизонтальної (б) вібрації підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці.

Використовуючи когерентний функціонал пошуку прихованих періодичностей у стохастичних складових вібраційних сигналів [146], виявлено потужні модуляції стаціонарними випадковими процесами частоти, що відповідає частоті перекочування тіл кочення по зовнішньому кільці підшипника кочення. Відповідні функціонали відображені на рис. 7.10. З наведених рисунків чітко видно, що функціонали приймають максимум у точці 0.003527 с, що відповідає періоду перекочування тіл кочення по зовнішньому кільці.

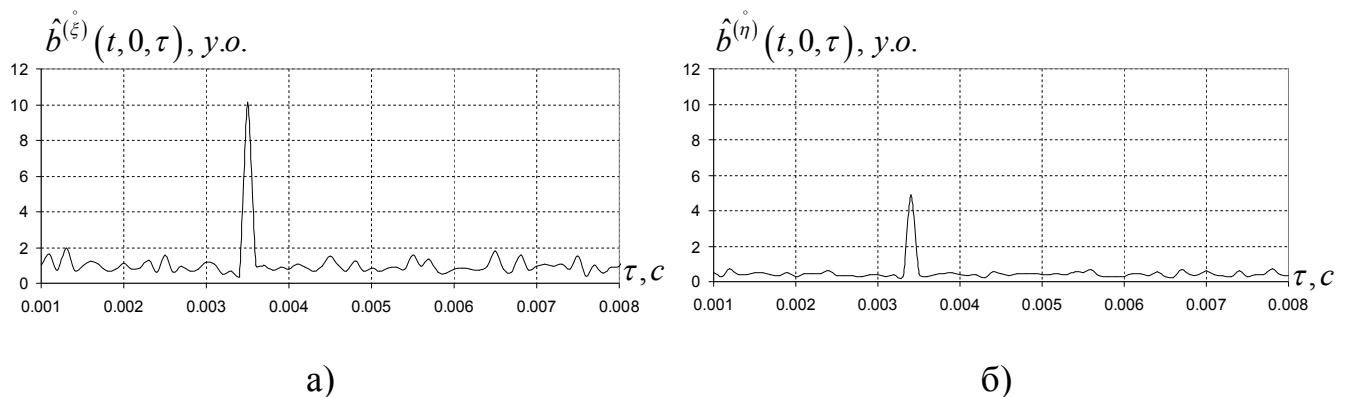


Рис. 7.10. Оцінка періоду стохастичної складової вертикальної (а) та горизонтальної (б) вібрації підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці.

Використовуючи компонентний метод для оцінювання імовірнісних характеристик ПНВП оцінено дисперсії стохастичних складових вертикальної та горизонтальної вібрації (рис. 7.11) та їх компонентів Фур'є (рис. 7.12).

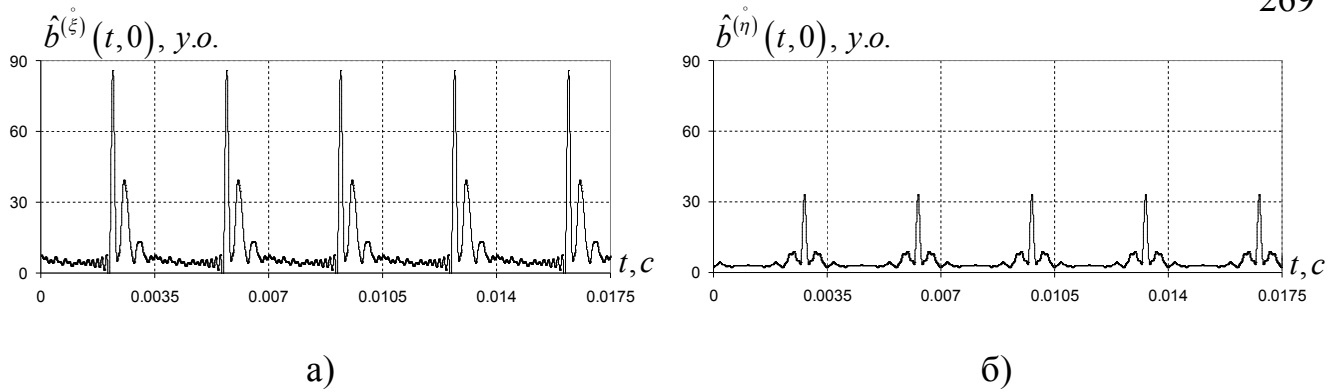


Рис. 7.11. Дисперсія стохастичної складової вертикальної (а) та горизонтальної (б) вібрації підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці.

З наведених графіків (рис. 7.11) чітко видно, що дисперсії кожної зі складових містять потужні викиди на періоді нестационарності (283.5 Гц). Відношення мінімального значення дисперсії до максимального для вертикальної складової вібрації складає 1:11, а для горизонтальної – 1:10. Серед компонентів дисперсії вертикальної складової вібрації значущими є більше 20 компонент, а горизонтальної – 15.

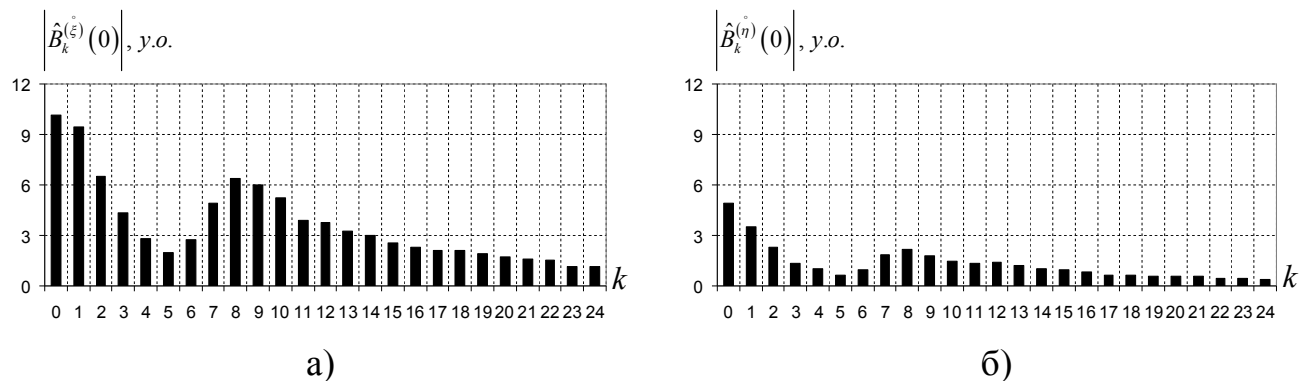


Рис. 7.12. Компоненти дисперсії стохастичної складової вертикальної (а) та горизонтальної (б) вібрації підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці.

Проведемо аналіз нульових (рис. 7.13) та перших п'яти кореляційних компонентів (рис. 7.14–7.23) кореляційної функції стохастичної складової вібраційного сигналу підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці.

На нульовому кореляційному компоненті вертикальної складової вібрації присутні незначні викиди, що відповідають взаємодії тіл кочення з присутнім на кільці дефектом.

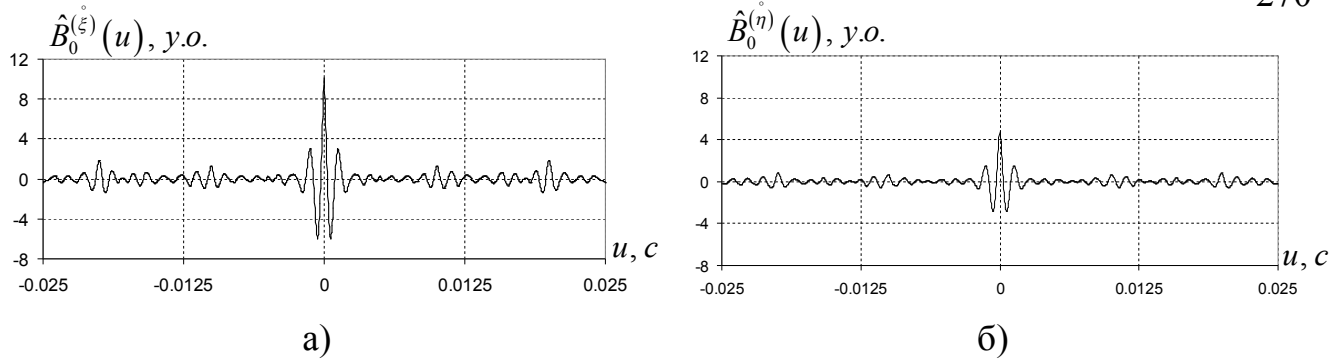


Рис. 7.13. Нульовий кореляційний компонент вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці.

Перші п'ять косинусних компонентів вертикальної та горизонтальної складових наведені на рис (рис. 7.14–7.18). Як видно з наведених рисунків всі складові кореляційних компонентів мають вигляд швидкозникаючих коливань.

Амплітуди косинусних кореляційних компонентів вертикальної складової більш ніж в три рази перевищують амплітуди кореляційних компонентів горизонтальної. Найпотужнішими компонентами для вертикальної складової вібрації є перший, другий та третій компоненти, для горизонтальної – другий.

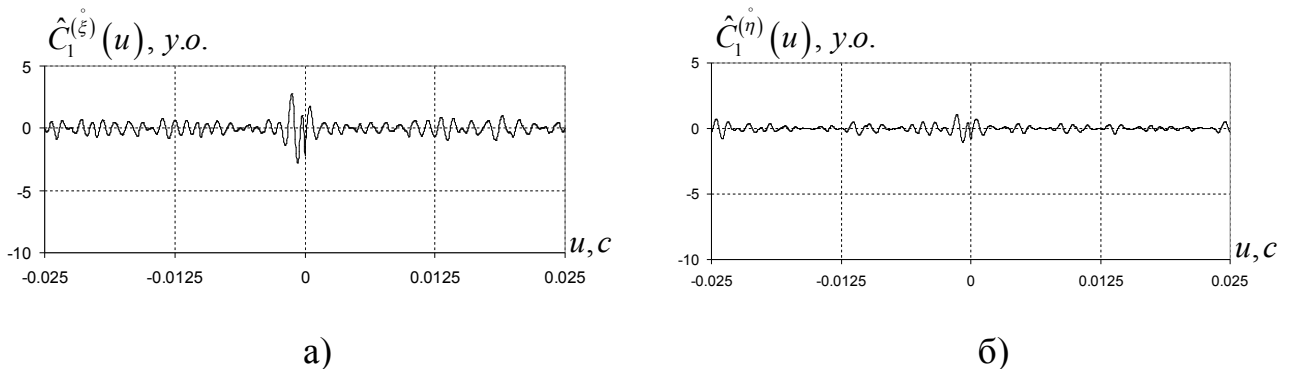


Рис. 7.14. Перший косинусний кореляційний компонент вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці.

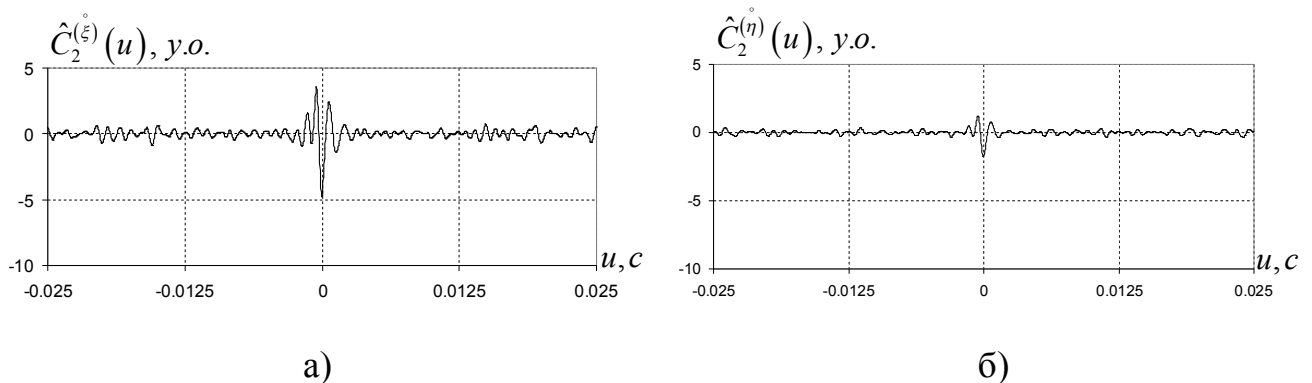


Рис. 7.15. Другий косинусний кореляційний компонент вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці.

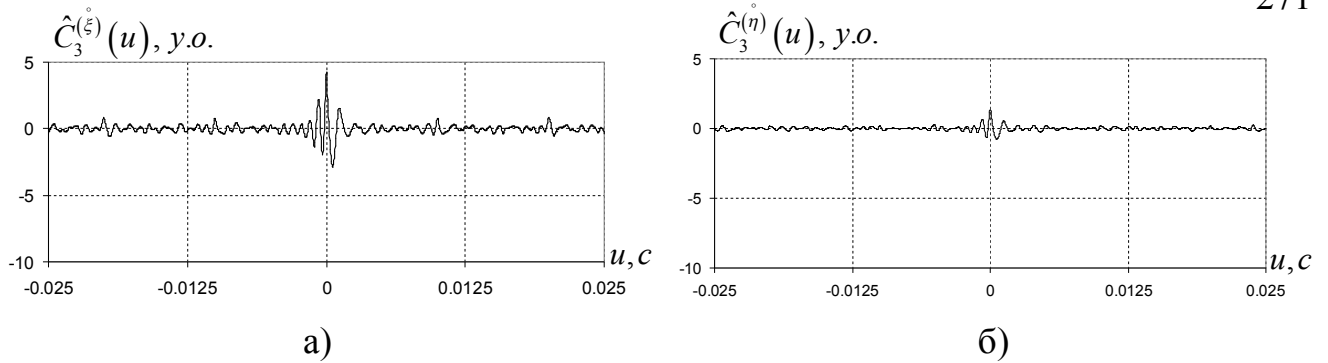


Рис. 7.16. Третій косинусний кореляційний компонент вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці.

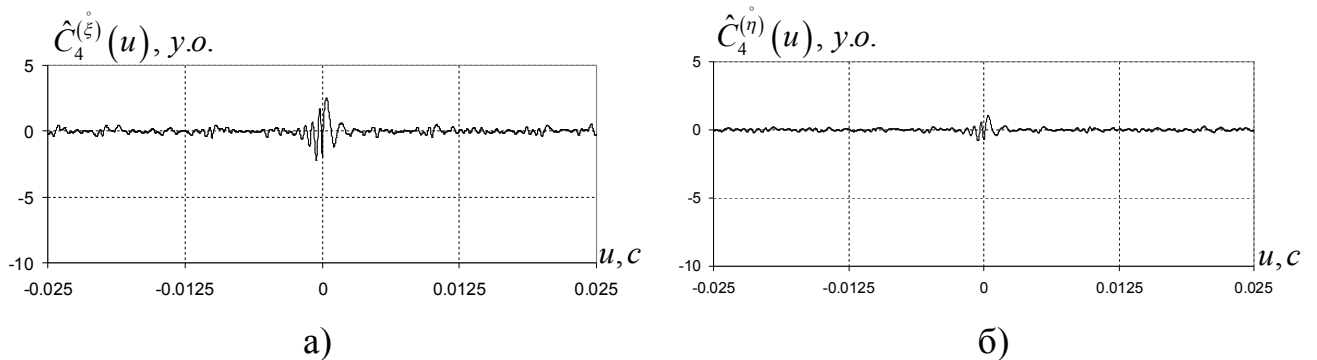


Рис. 7.17. Четвертий косинусний кореляційний компонент вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці.

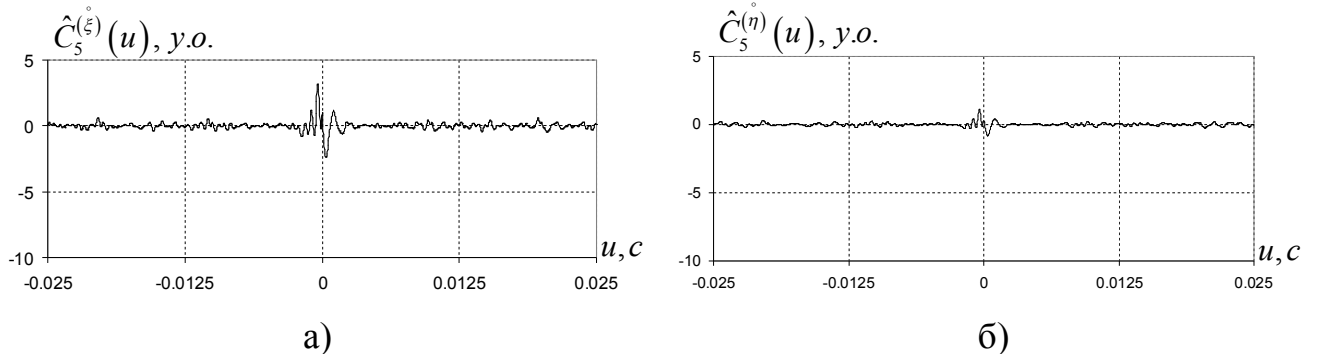


Рис. 7.18. П'ятий косинусний кореляційний компонент вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці.

Перші п'ять синусних компонентів вертикальної та горизонтальної складових наведені на рис (рис. 7.19–7.23), вони також мають вигляд швидкозникаючих коливань. Амплітуди синусних кореляційних компонентів вертикальної складової більш ніж в три рази перевищують амплітуди кореляційних компонентів горизонтальної. Найпотужнішими компонентами для вертикальної складової вібрації є перший, другий та третій компоненти, а для горизонтальної – перший.

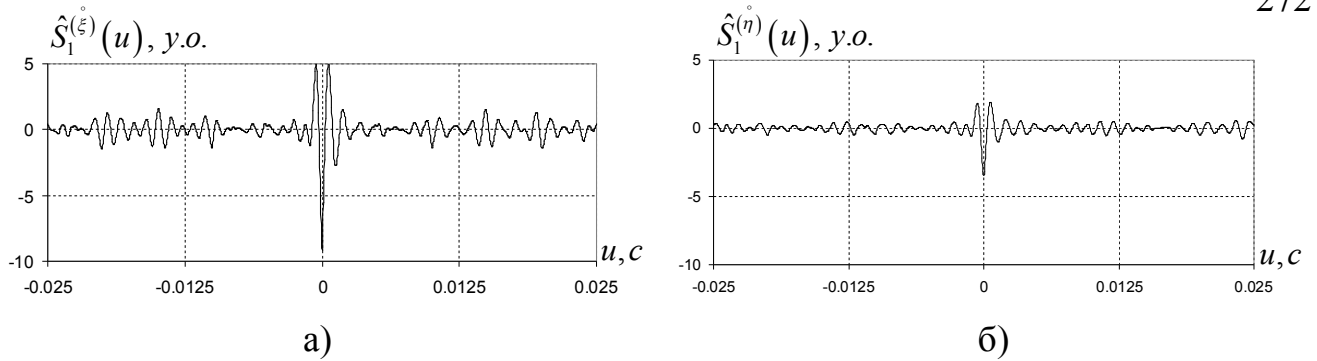


Рис. 7.19. Перший синусний кореляційний компонент вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці.

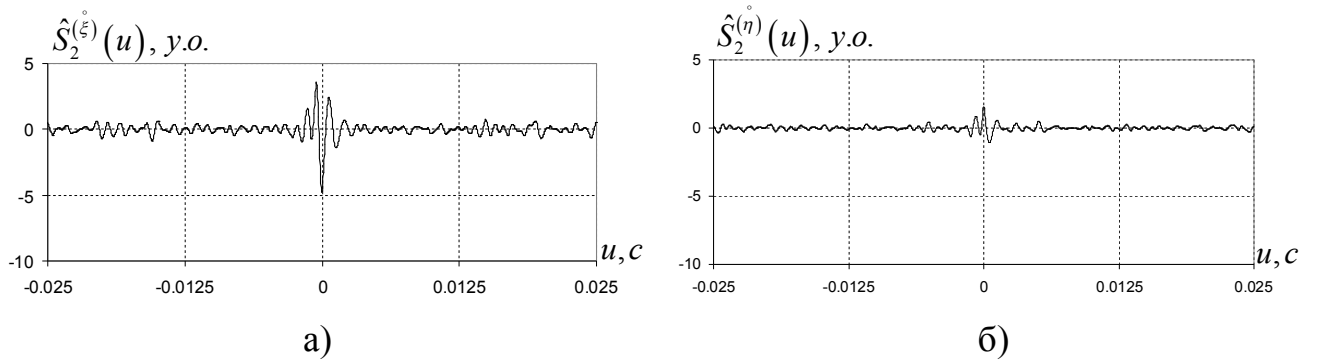


Рис. 7.20. Другий синусний кореляційний компонент вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці.

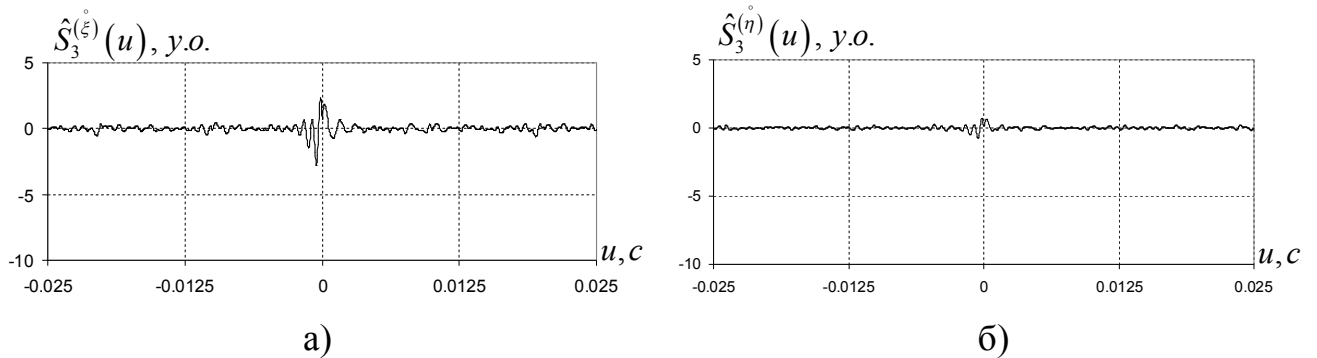


Рис. 7.21. Третій синусний кореляційний компонент вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці.

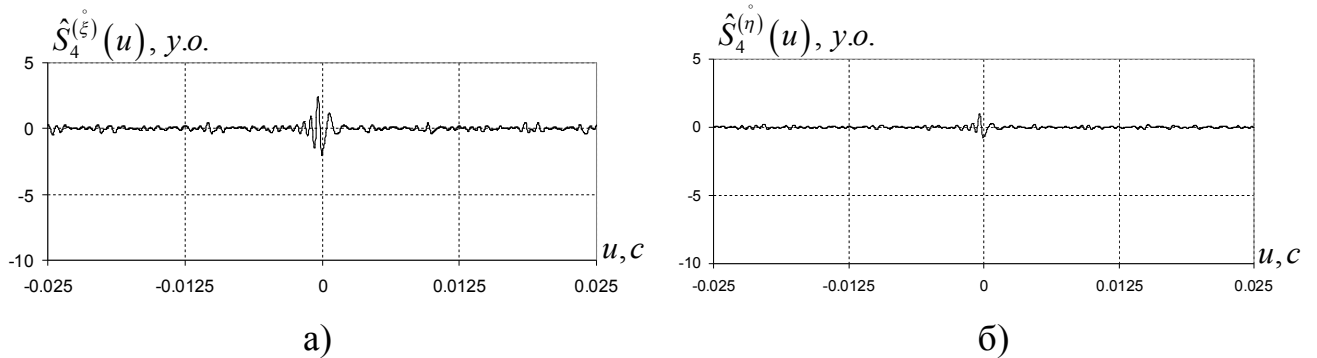


Рис. 7.22. Четвертий синусний кореляційний компонент вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці.

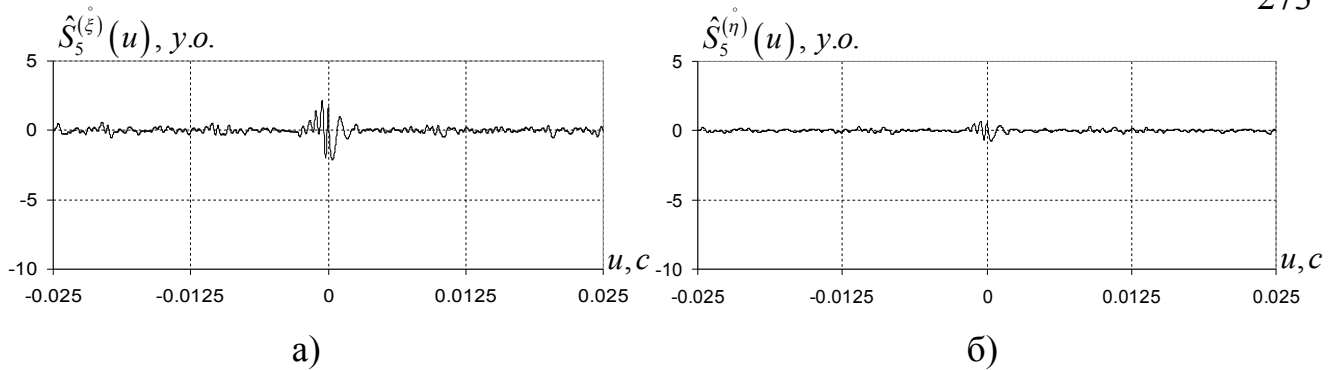


Рис. 7.23. П'ятий синусний кореляційний компонент вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці.

На основі перетворень з кореляційних компонентів отримано спектральні компоненти спектральної густини стохастичної складової. (рис. 7.24–7.33).

Нульовий спектральний компонент вертикальної складової є в два рази більшим від нульового спектрального компонента горизонтальної складової вібрації підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці

З наведених графіків добре видно, що кожна зі складових дійсної частини спектральних компонентів зосереджені в смузі частот від 250 Гц до 1000 Гц. Дійсні частини спектральних густин нульового, третього, четвертого та п'ятого компонентів горизонтальної складових вібрації, а також четвертий та п'ятий спектральні компоненти вертикальної є незначними у порівнянні з іншими компонентами та ними можна знехтувати.

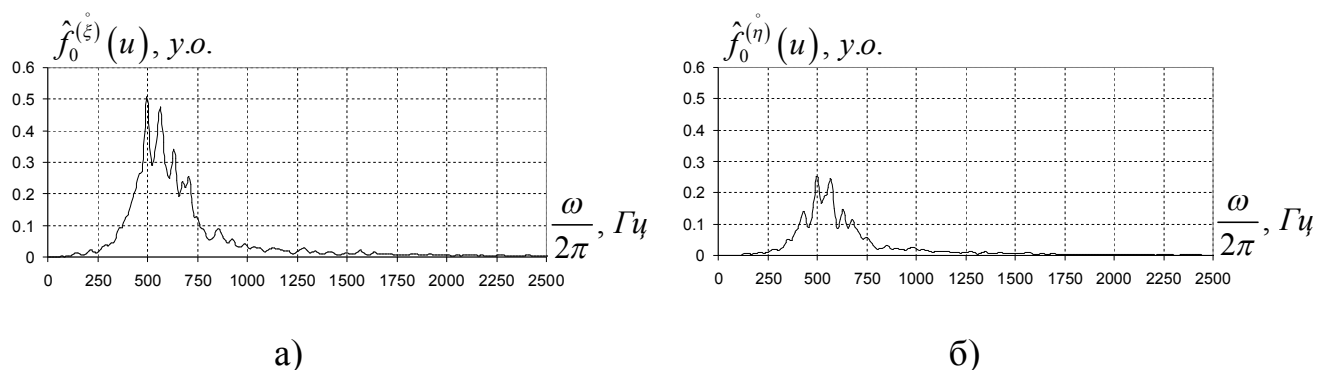


Рис. 7.24. Нульовий спектральний компонент вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці.

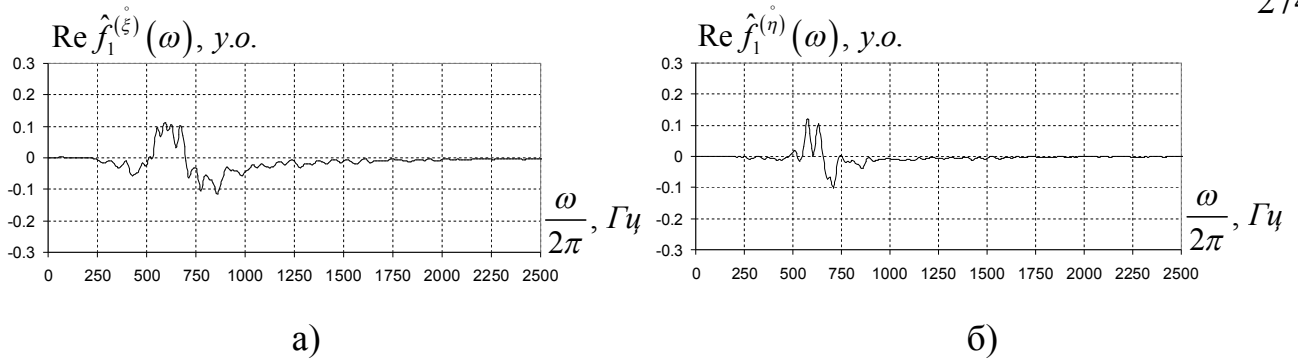


Рис. 7.25. Дійсна частина першого спектрального компонента вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці.

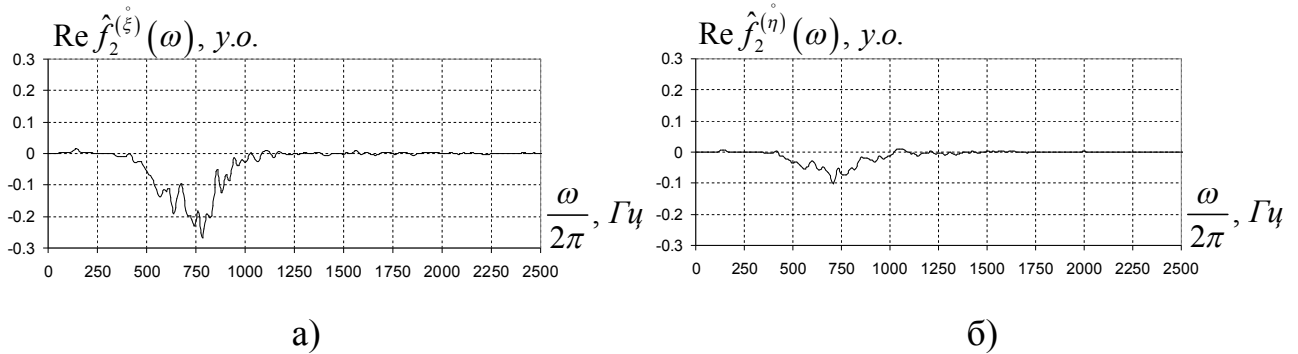


Рис. 7.26. Дійсна частина другого спектрального компонента вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці.

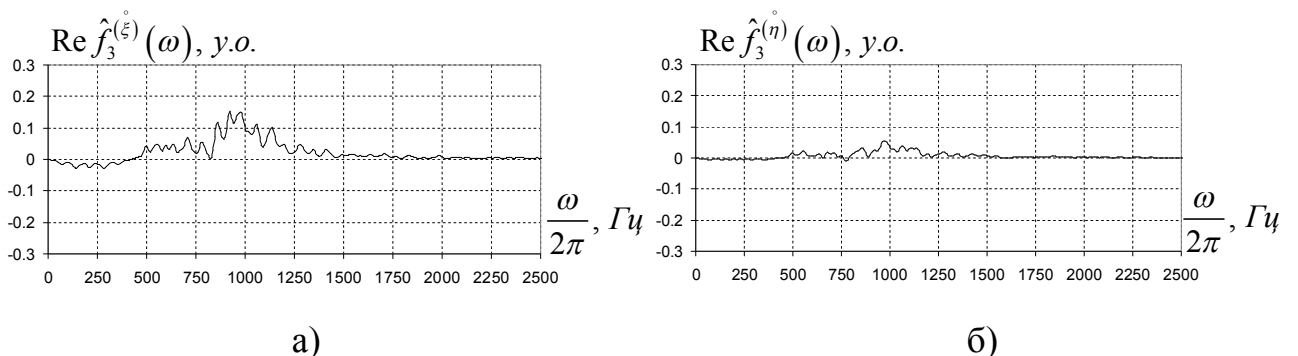


Рис. 7.27. Дійсна частина третього спектрального компонента вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці.

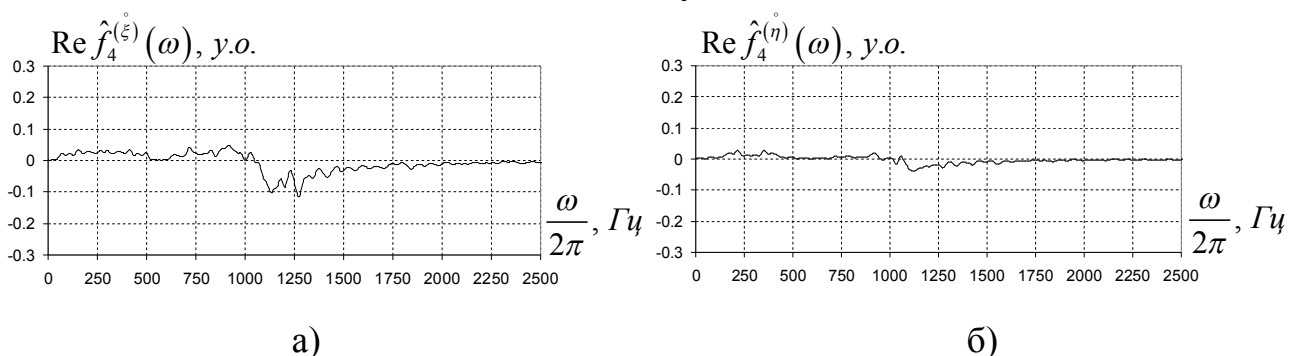


Рис. 7.28. Дійсна частина четвертого спектрального компонента вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці.

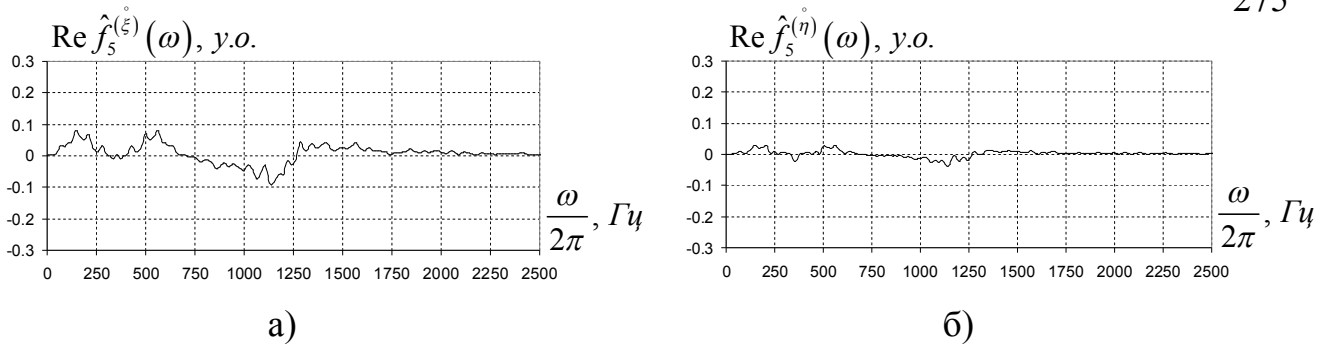


Рис. 7.29. Дійсна частина п'ятого спектрального компонента вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці.

Уявна частина спектральних компонентів вертикальної та горизонтальної складових вібрації підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці показані на рис. 7.30–7.34.

Уявні частини спектральних компонентів другого, третього, четвертого та п'ятого компонентів горизонтальної складових вібрації, а також четвертий та п'ятий спектральні компоненти вертикальної є незначними у порівнянні з іншими компонентами та ними можна знехтувати.

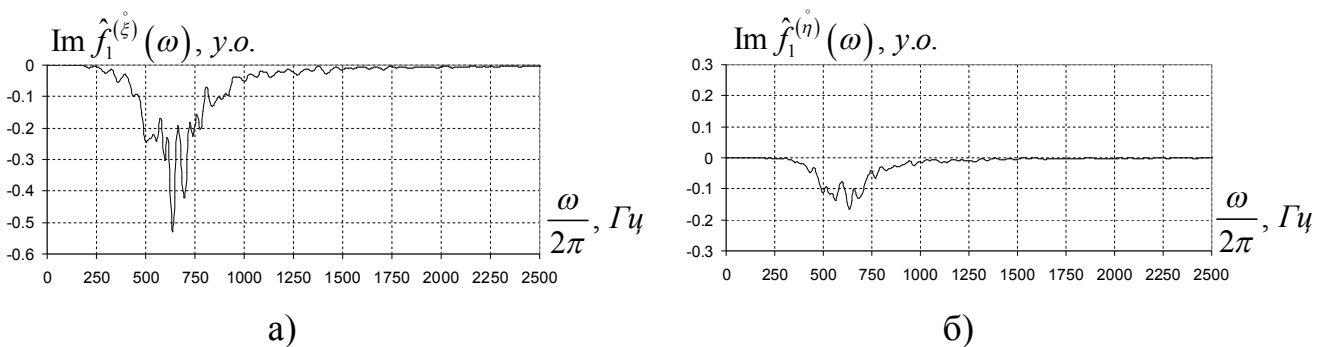


Рис. 7.30. Уявна частина першого спектрального компонента вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці.

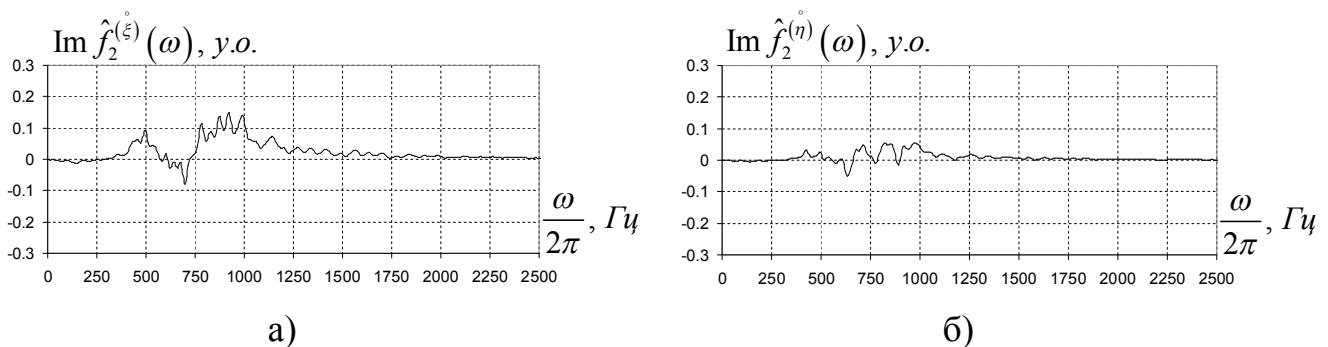


Рис. 7.31. Уявна частина другого спектрального компонента вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці.

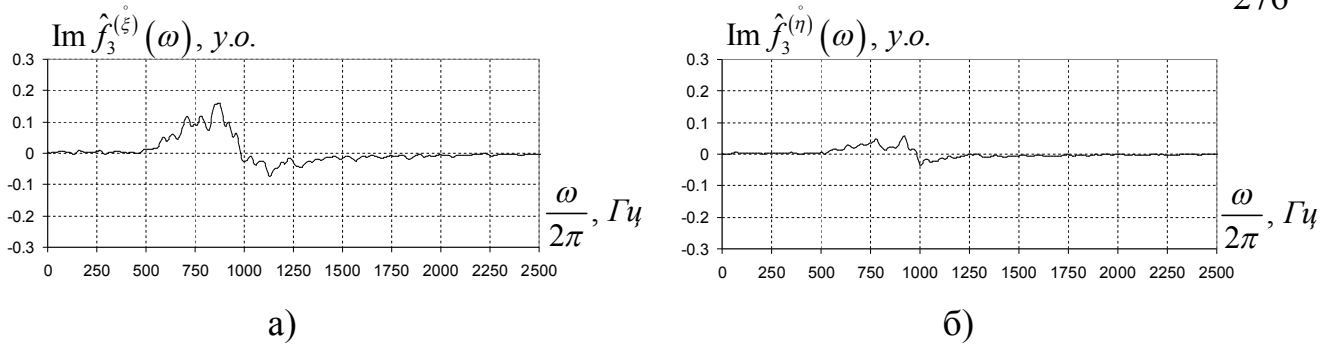


Рис. 7.32. Уявна частина третього спектрального компонента вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці.

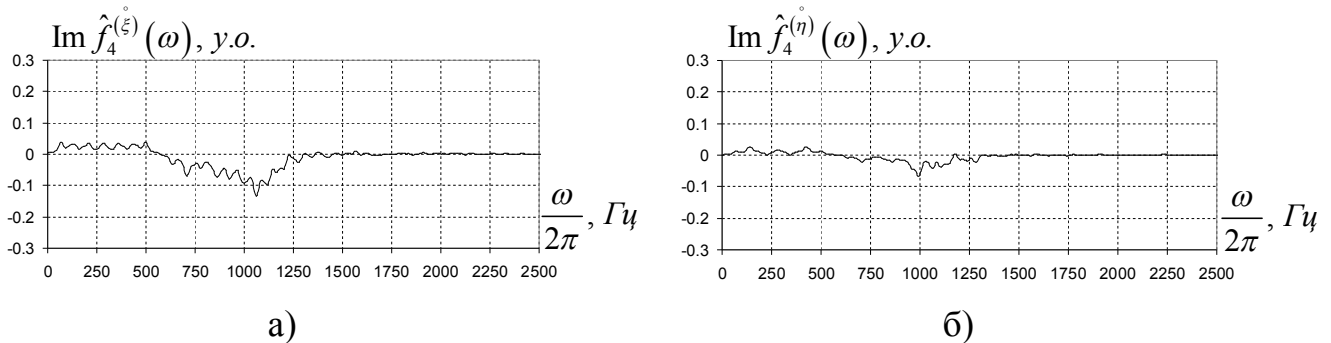


Рис. 7.33. Уявна частина четвертого спектрального компонента вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці.

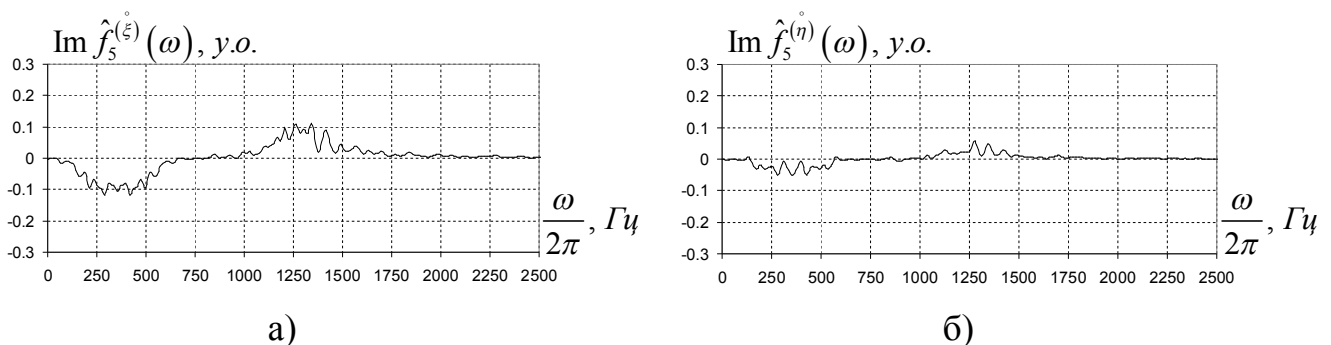


Рис. 7.34. Уявна частина п'ятого спектрального компонента вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці.

Аналізуючи взаємозалежність двох вібраційних сигналів, вертикальної та горизонтальної складових оцінено період взаємної нестационарності на основі функціоналу (6.1.1). З цього випливає, що випадкові процеси вертикальної та горизонтальної складової вібрації взаємопов'язані. Оцінимо нульовий та вищі взаємкореляційні компоненти взаємкореляційної функції.

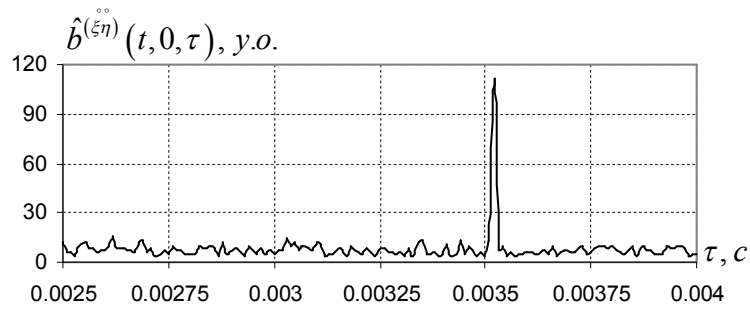


Рис. 7.35. Функціонал оцінки періоду взаємної нестационарності.

Графіки нульового та перших п'яти взаємкореляційних компонентів вертикальної та горизонтальної складових наведені на рис. 7.36–7.41.

Найбільш значущими є нульовий компонент, синусна складова першого, косинусна і синусна складові другого взаємкореляційного компонентів.

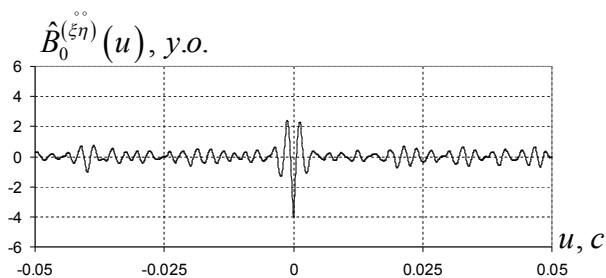
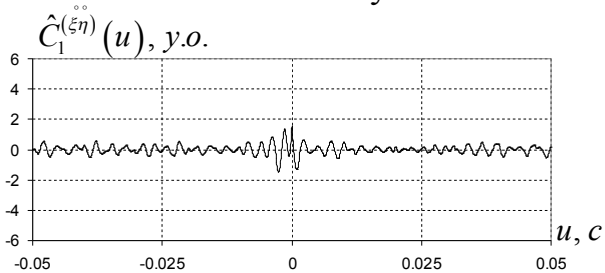
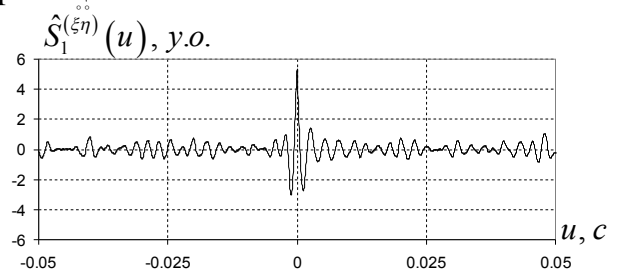


Рис. 7.36. Нульовий взаємкореляційний компонент.

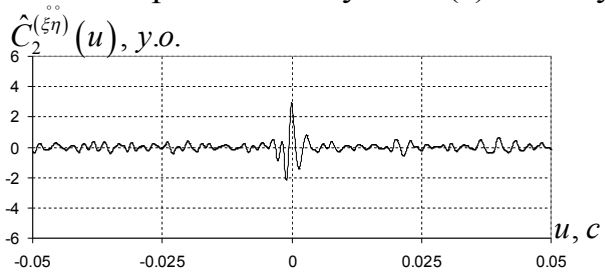


а)

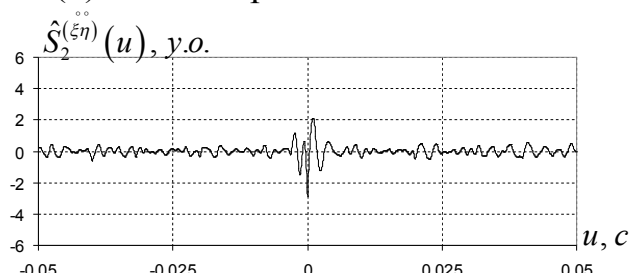


б)

Рис. 7.37. Перший косинусний (а) та синусний (б) взаємкореляційні компоненти.



а)



б)

Рис. 7.38. Другий косинусний (а) та синусний (б) взаємкореляційні компоненти.

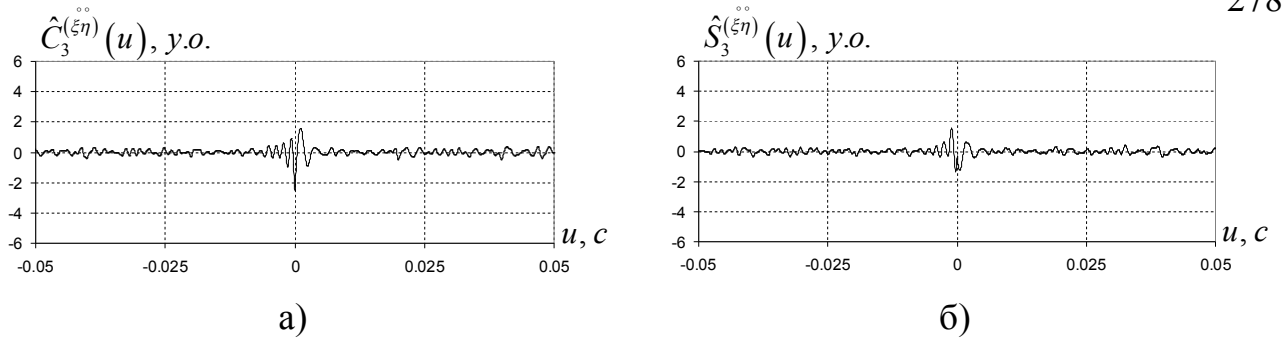


Рис. 7.39. Третій косинусний (а) та синусний (б) взаємокореляційні компоненти.

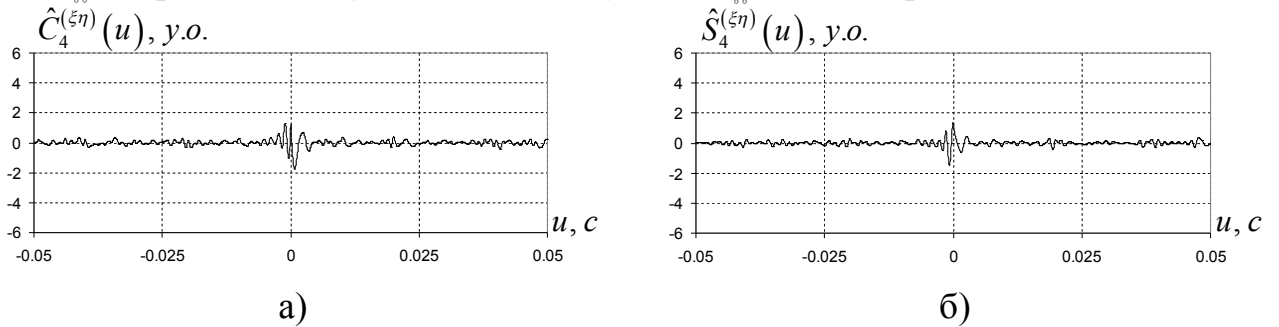


Рис. 7.40. Четвертий косинусний (а) та синусний (б) взаємокореляційні компоненти.

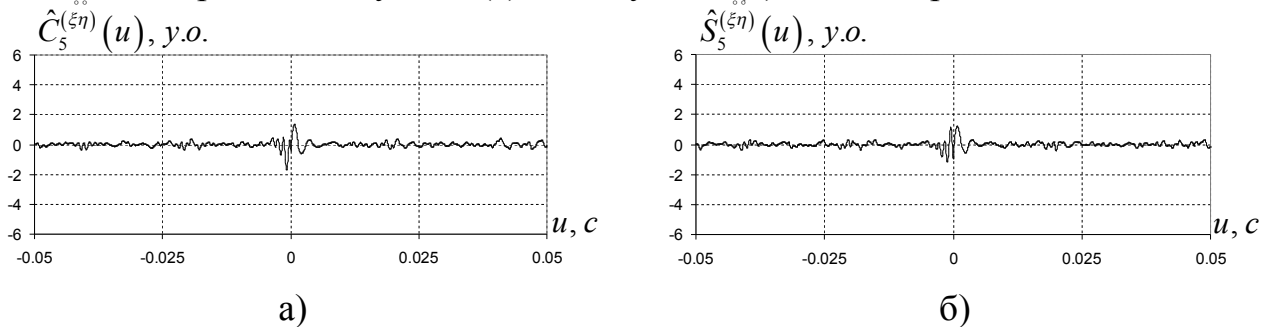


Рис. 7.41. П'ятий косинусний (а) та синусний (б) взаємокореляційні компоненти.

Взаємоспектральні компоненти наведені на рис. 7.42–7.47. З наведених графіків бачимо, що значущими серед взаємоспектральних компонентів є нульовий, дійсна та уявна частини першого, дійсна частина другого взаємоспектральних компонентів. Рештою складових взаємоспектральних компонентів можна знехтувати. Слід зауважити, що складові значущих компонентів зосереджені в смузі частот від 250 Гц до 1000 Гц.

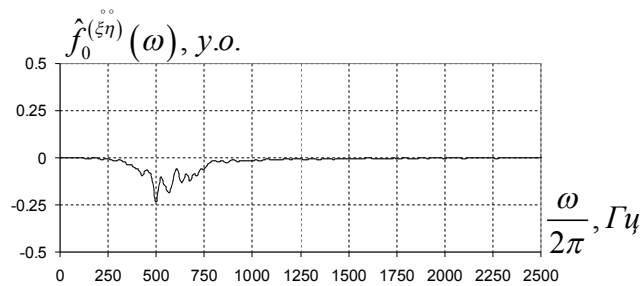


Рис. 7.42. Нульовий взаємоспектральний компонент.

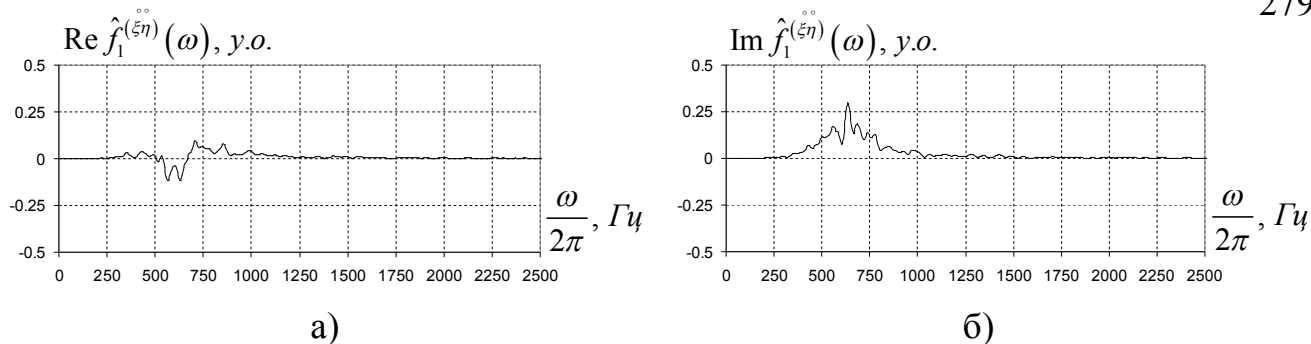


Рис. 7.43. Дійсна (а) та уявна (б) частина першого взаємоспектрального компонента.

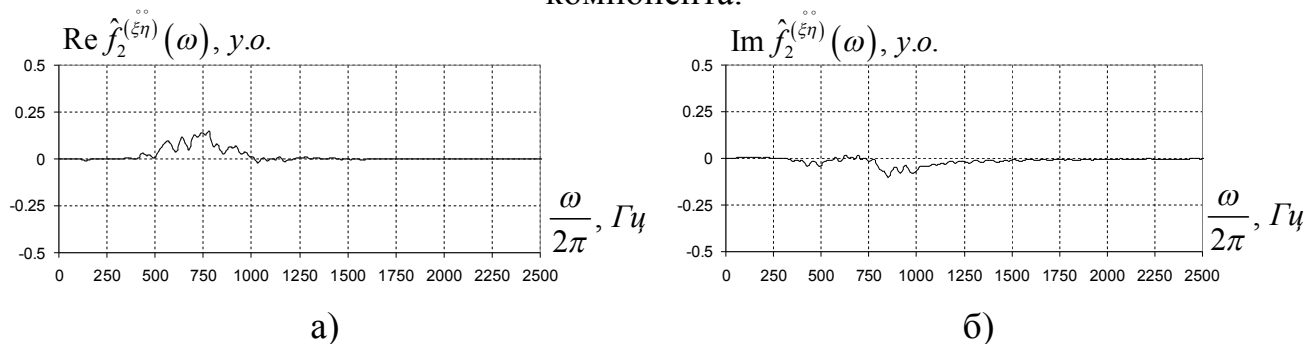


Рис. 7.44. Дійсна (а) та уявна (б) частина другого взаємоспектрального компонента.

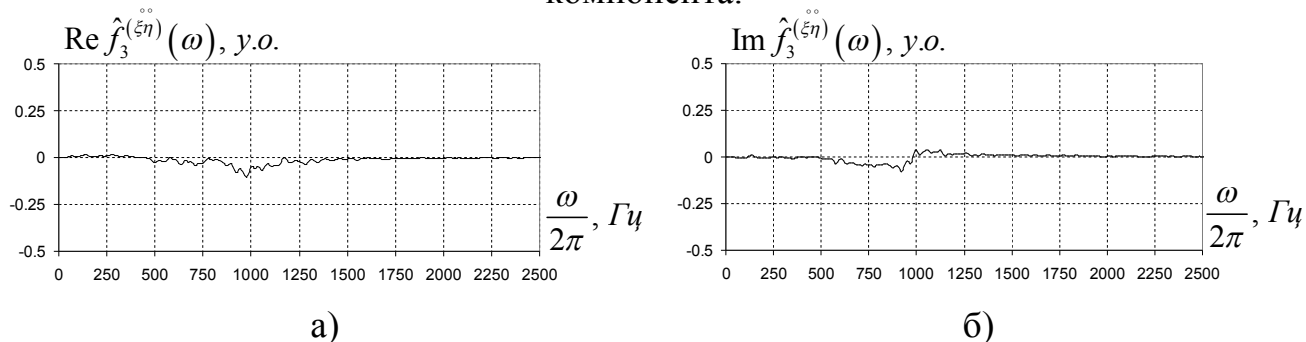


Рис. 7.45. Дійсна (а) та уявна (б) частина третього взаємоспектрального компонента.

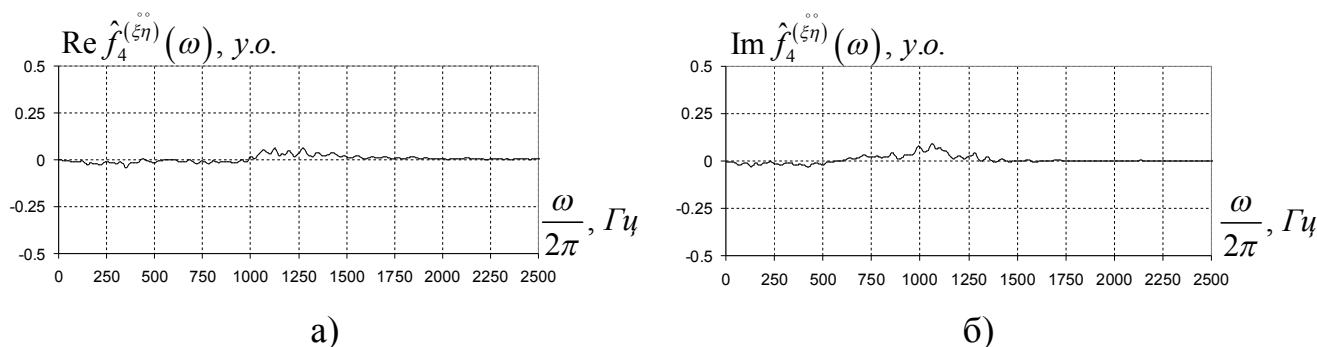


Рис. 7.46. Дійсна (а) та уявна (б) частина четвертого взаємоспектрального компонента.

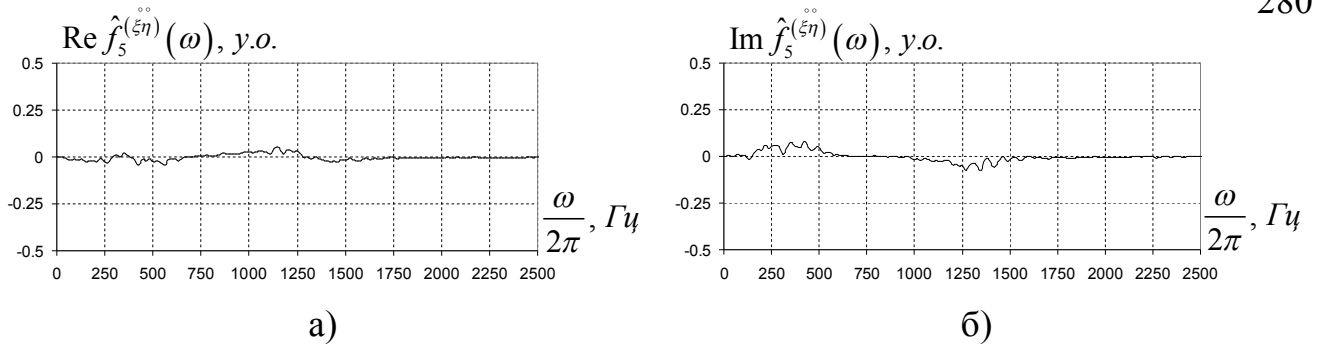


Рис. 7.47. Дійсна (а) та уявна (б) частина п'ятого взаємоспектрального компонента.

При проведенні взаємоспектрального аналізу виявлено, що найбільш корельованими на відстані ω_0 є гармоніки, частоти яких переважно зосереджено в смузі 250–1 000 Гц, на відстані $2\omega_0$ – гармоніки з частотами, що належать до смуги 250–1250 Гц, на відстані $3\omega_0$ – також до смуги 250–1250 Гц. Нульовий взаємоспектральний компонент помітно відрізняється від нуля в смузі 250–1250 Гц. Загальними характеристиками такої корельованості є інтегральні функції когерентності, графіки якої наведені на рис. 7.48. Їх значущі величини належать до діапазону 250÷1250 Гц з максимумом біля 750 Гц.

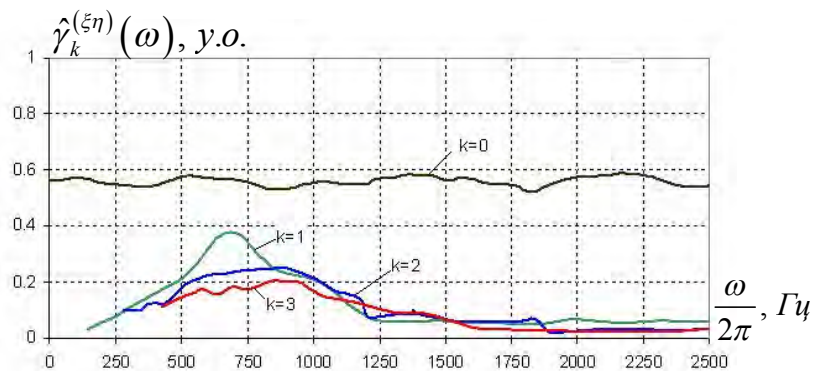


Рис. 7.48. Оцінка інтегральної функції когерентності для різних k .

Це свідчить про те, що гармоніки з частотою обертання кульок підшипника є промодульовані випадковими прочесами, спектри яких належать до вищої смуги частот. Центральна частота такої смуги майже в три рази перевищує частоту обертання кульок. Значення інтегральної функції когерентності нульового порядку коливається біля рівня 0.6, що є ознакою того, що вертикальна і горизонтальна

вібрації є лінійно пов'язані. Відтак, ми можемо зробити висновок про те, що дефект підшипника у вигляді вищерблення зовнішнього кільця проявляється у високочастотній модуляції гармонік з частотами, що є кратними до частоти обертання кульок. Форма частотної залежності інтегральної функції когерентності, ширина її частотної смуги є ознаками, які характеризують тип та розміри дефекту. Спектральні властивості модуляцій, які виникають при появі дефекту, описують покомпонентні функції когерентності (рис. 7.49).

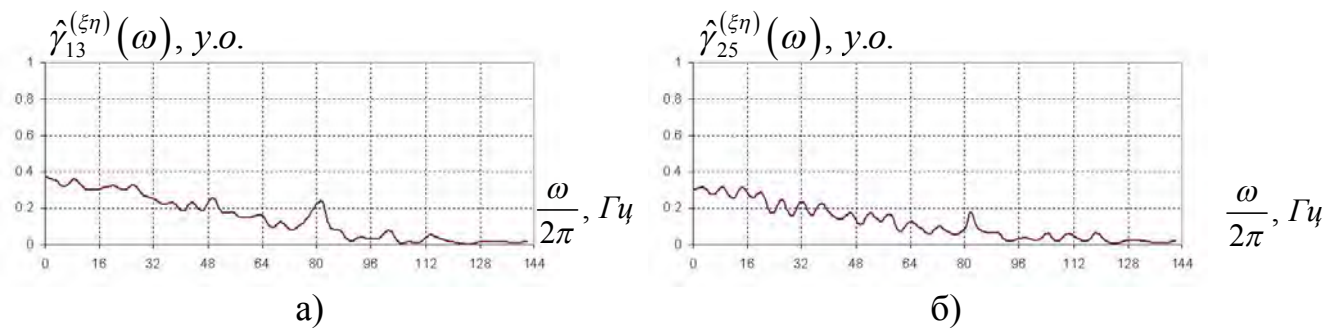


Рис. 7.49. Оцінка покомпонентної функції когерентності 2-го (а) та 3-го (б) порядків.

Вони повільно зникають зі збільшенням частоти, при цьому на частоті біля 80 Гц присутній невеликий максимум.

7.3. Взаємний аналіз симульованих вібраційних сигналів підшипника кочення з дефектом на внутрішньому кільці

На реалізаціях вібраційних сигналів від підшипника кочення з дефектом на внутрішньому кільці (рис. 7.50 а, б) бачимо чіткі різнонапрямлені викиди, які відповідають взаємодії тіл кочення з дефектом на рухомому кільці. Частота таких ударів відповідає частоті перекочування тіл кочення по внутрішньому кільці і для даного підшипника рівна $\omega_{out} = 365.5 \text{ Гц}$. З рис. 7.50 також видно, що амплітуді викидів притаманний випадковий характер. З наведених графіків добре видно, що потужність вібраційного сигналу вертикальної складової вібрації приблизно рівна горизонтальній складовій.

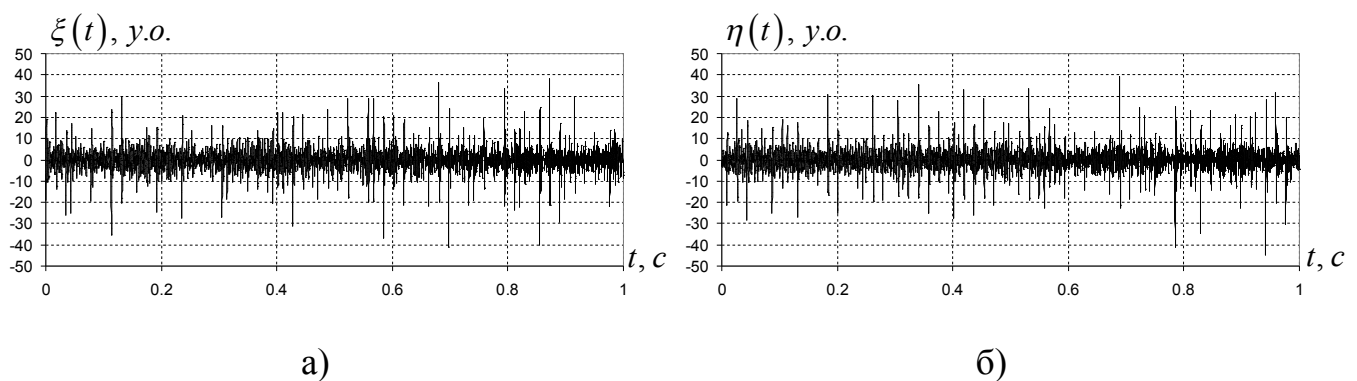


Рис. 7.50. Вібраційні сигнали вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації підшипника кочення з дефектом на внутрішньому кільці.

Кореляційні функції (рис. 7.51) в стаціонарному наближенні вібраційних сигналів мають вигляд незникаючих функцій та містять потужні різнонапрямлені викиди з частотою, що відповідають частоті перекочування тіл кочення по внутрішньому кільцю ($\omega = 365.5 \text{ Гц}$). Присутні у вібраційних сигналах детерміновані коливання за потужністю значно переважають стохастичні складові. Співвідношення сигнал/шум як для вертикальної так і для горизонтальної складових вібрації становить 4:1.

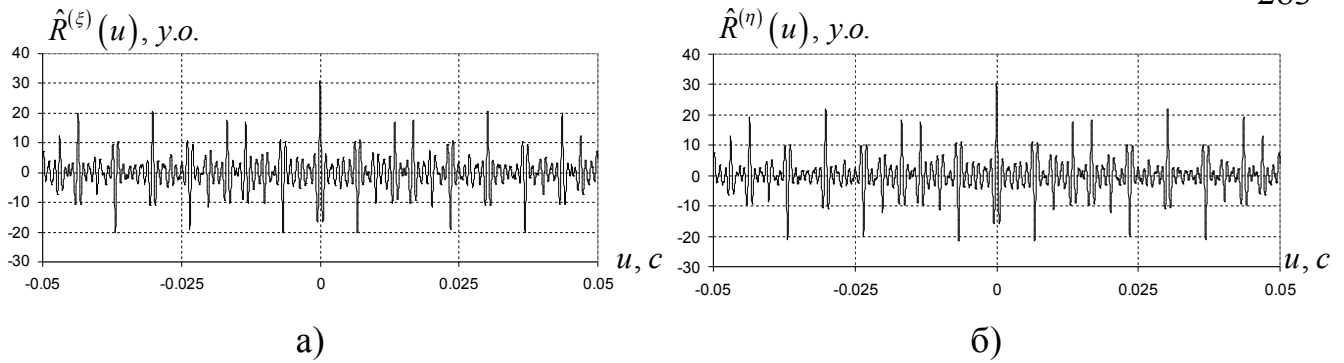


Рис. 7.51. Кореляційні функції вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації підшипника кочення з дефектом на внутрішньому кільці.

Спектри вібраційних сигналів (рис. 7.52) зосереджені у смузі частот до 2500 Гц та містять гармонічні складові, що відповідають частоті перекочування тіл кочення по внутрішньому кільцю та кратні до неї гармоніки. Гармонічний склад спектральної густини вертикальної та горизонтальної складових вібрації подібні між собою.

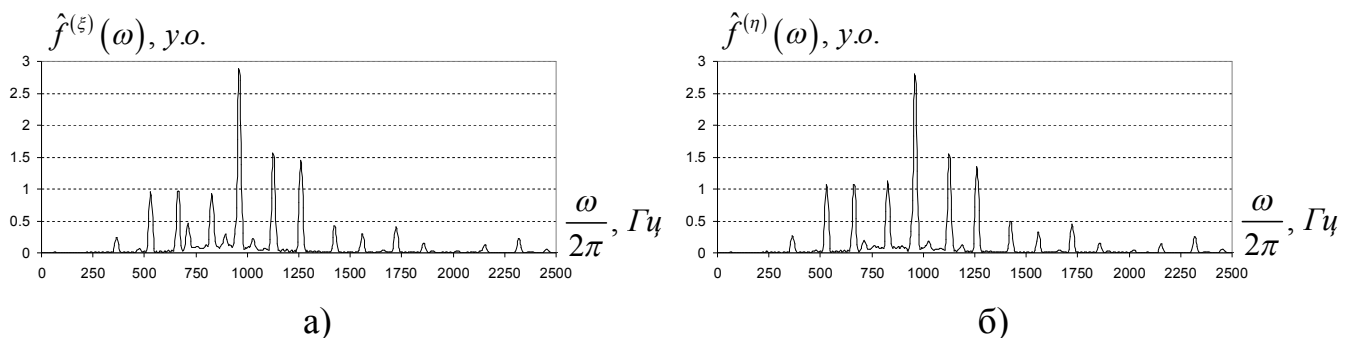


Рис. 7.52. Спектри вібраційних сигналів вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації підшипника кочення з дефектом на внутрішньому кільці.

Використовуючи компонентний метод оцінили математичне сподівання сигналів та розділили детерміновані та стохастичні складові сигналів. Математичні сподівання горизонтальної та вертикальної складових вібрації підшипника кочення з дефектом на внутрішньому кільці наведені на рис. 7.53. З наведених рисунків бачимо, що регулярні складові вібраційних сигналів містять потужні викиди спричинені взаємодією тіл кочення з присутніми на рухомому кільці дефектом.

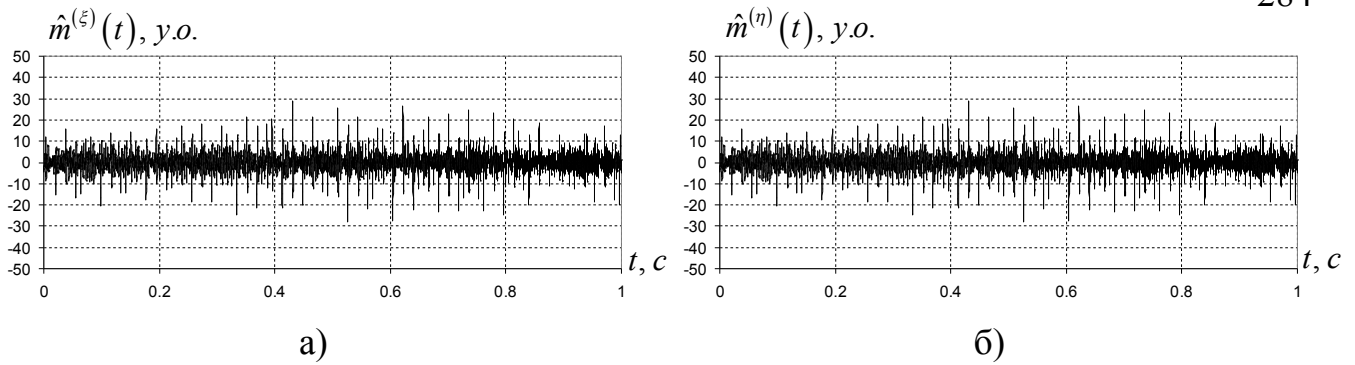


Рис. 7.53. Математичні сподівання вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації підшипника кочення з дефектом на внутрішньому кільці

Гармонічний склад математичного сподівання вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці представлений на рис. 7.54. З наведених рисунків бачимо, що серед значущих гармонік математичного сподівання вертикальної складової є 18 компонентів, а горизонтальної – 17. Гармонічні склади детермінованих складових як вертикальної, так і горизонтальної складової подібні.

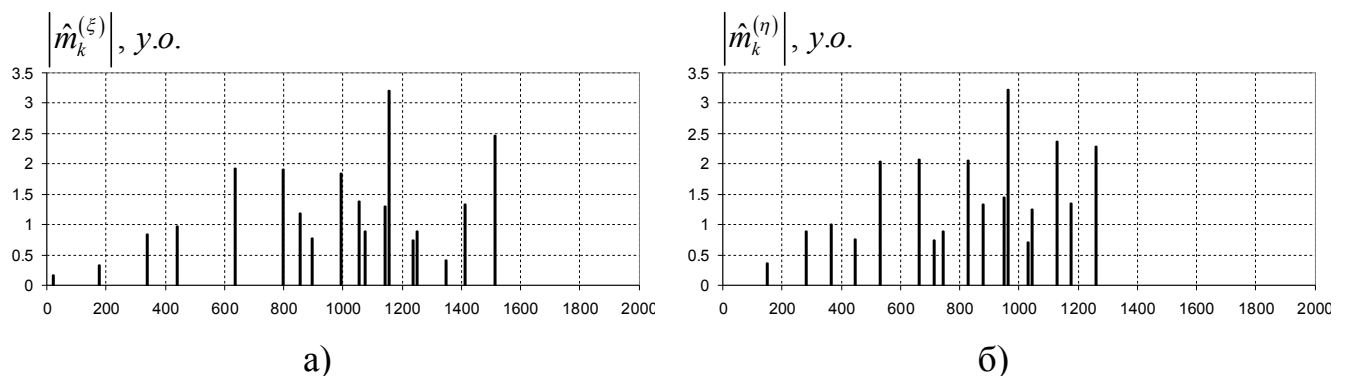


Рис. 7.54. Компоненти матсподівання вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації підшипника кочення з дефектом на внутрішньому кільці.

У стохастичних складових сигналу вертикальної та горизонтальної вібрації підшипника кочення з дефектом на внутрішньому кільці (рис. 7.55) присутні малопотужні викиди, які зумовлені взаємодією тіл кочення з присутнім на рухомому кільці дефектом.

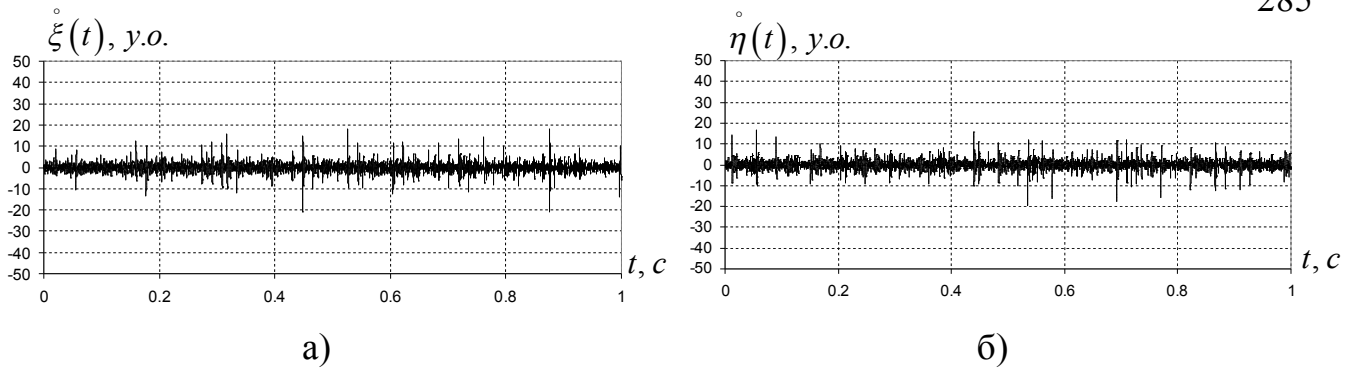


Рис. 7.55. Стохастичні складові вібраційних сигналів вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації підшипника кочення з дефектом на внутрішньому кільці.

Кореляційні функції стохастичних складових вертикальної та горизонтальної складових вібрації підшипника кочення з дефектом на внутрішньому кільці мають вигляд швидкозникаючих функцій (рис. 7.56а). Потужність стохастичної складової вертикальної вібрації співмірна з потужністю стохастичної складової горизонтальної вібрації (рис. 7.56б).

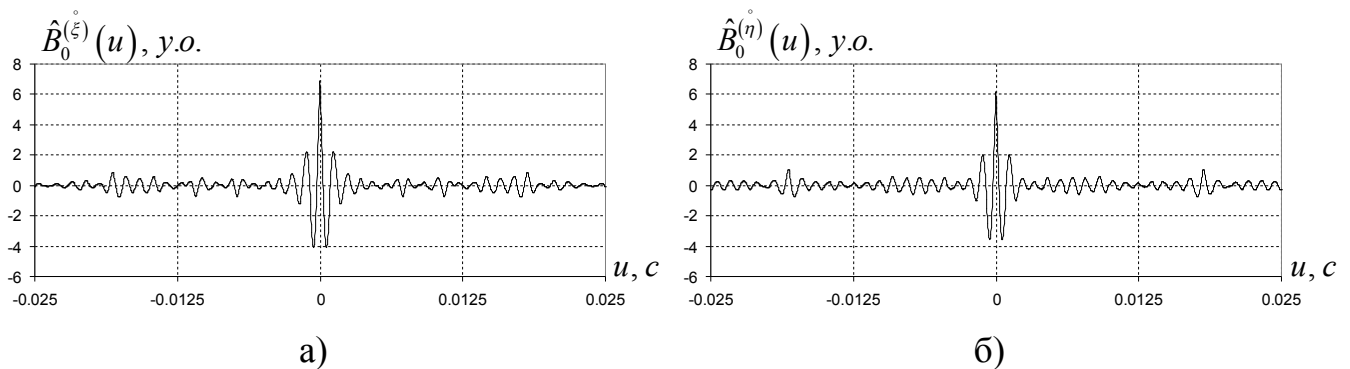


Рис. 7.56. Кореляційна функція стохастичної складової вібраційних сигналів вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації підшипника кочення з дефектом на внутрішньому кільці

Спектри стохастичних складових вертикальної та горизонтальної вібрації підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці зосереджені в області частот від 250 Гц до 1500 Гц (рис. 7.57). Амплітуда спектрального підняття у вказаній області частот для вертикальної складової співмірні з амплітудою підняття у спектрі горизонтальної складової.

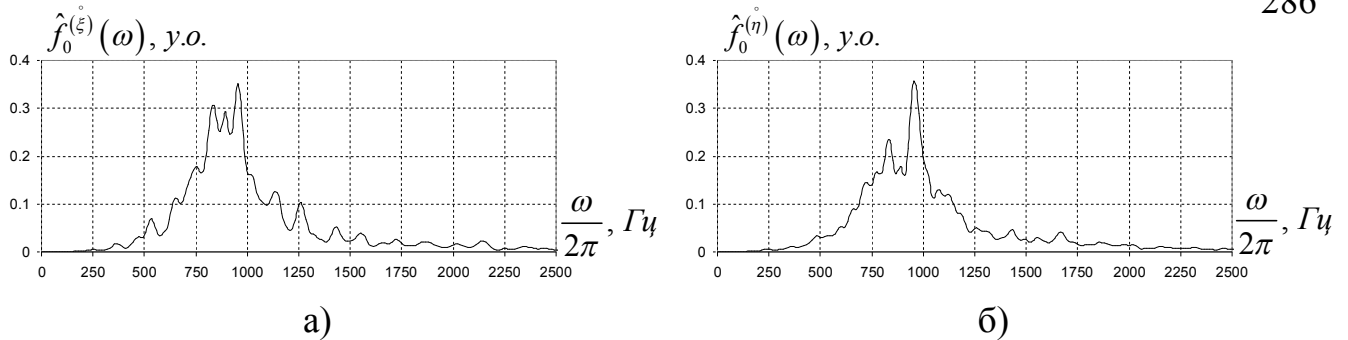


Рис. 7.57. Спектр стохастичної складової вібраційних сигналів вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації підшипника кочення з дефектом на внутрішньому кільці.

Використовуючи когерентний функціонал пошуку прихованих періодичностей у стохастичних складових вібраційних сигналів [146], виявлено потужні модуляції стаціонарними випадковими процесами частоти, що відповідає частоті перекочування тіл кочення по внутрішньому кільці підшипника кочення. Відповідні функціонали відображені на рис. 7.58. З наведених рисунків чітко видно, що функціонали приймають максимум у точці 0.002736 с, що відповідає періоду перекочування тіл кочення по внутрішньому кільці підшипника.

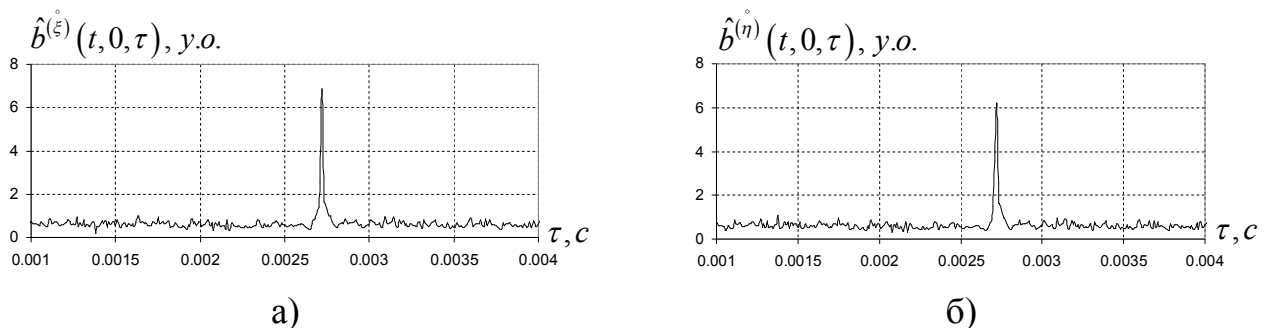


Рис. 7.58. Функціонал оцінки періоду стохастичної складової вібраційних сигналів вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації підшипника кочення з дефектом на внутрішньому кільці.

Використовуючи компонентний метод для оцінювання імовірнісних характеристик ПНВП оцінено дисперсії стохастичних складових вертикальної та горизонтальної вібрації (рис. 7.59) та їх компонентів Фур'є (рис. 7.60).

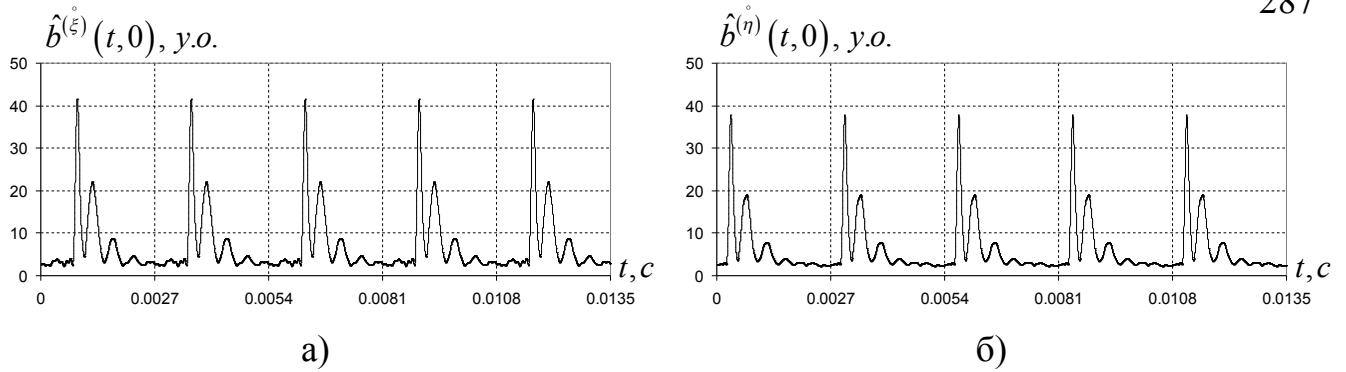


Рис. 7.59. Дисперсія стохастичної складової вібраційних сигналів вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації підшипника кочення з дефектом на внутрішньому кільці.

З наведених графіків (рис. 7.59) чітко видно, що дисперсії кожної зі складових містять потужні викиди на періоді нестационарності (365.5 Гц). Відношення мінімального значення дисперсії до максимального як для вертикальної складової вібрації так і для горизонтальної – 1:10. Дисперсії обох складових мають подібну форму.

Компоненти дисперсії як для вертикальної складової вібрації так і для горизонтальної мають подібний гармонічний склад. Серед значущих компонентів дисперсії обох складових вібрації значущими є перші 15 компонент.

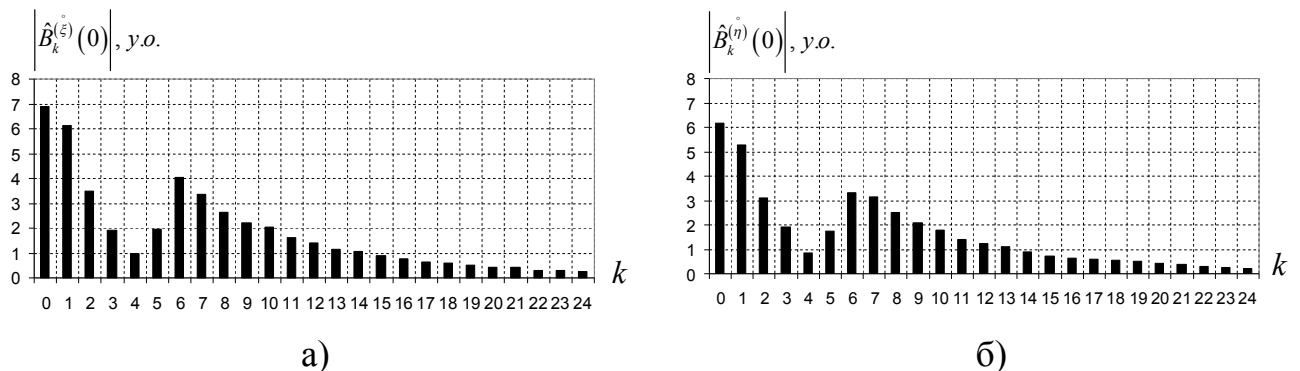


Рис. 7.60. Компоненти дисперсії стохастичної складової вібраційних сигналів вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації підшипника кочення з дефектом на внутрішньому кільці.

Проведемо аналіз нульових (рис. 7.61) та перших п'яти кореляційних компонентів (рис. 9.62–9.71) кореляційної функції стохастичної складової вібраційного сигналу підшипника кочення з дефектом на внутрішньому кільці.

Амплітуди нульових кореляційних компонентів вертикальної і горизонтальної складових співмірні, а характер їх змін подібний.

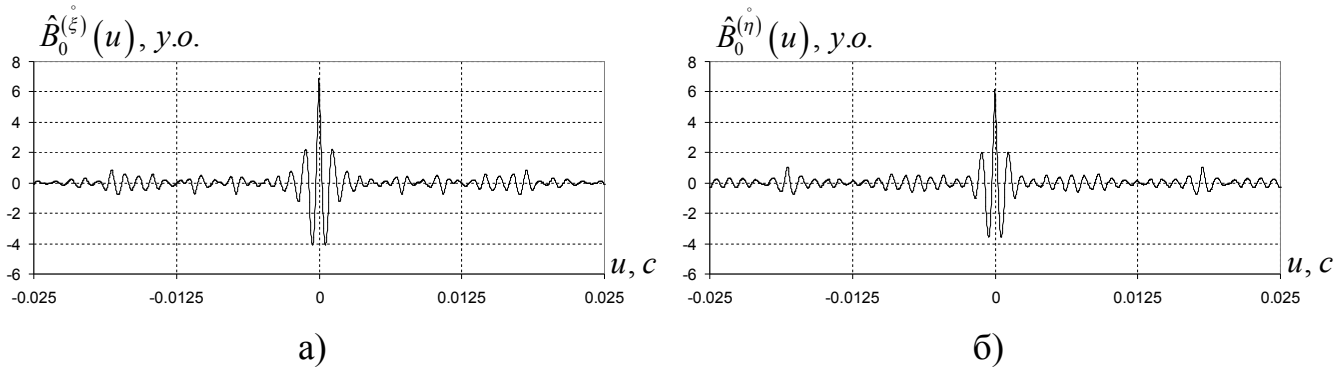


Рис. 7.61. Нульовий косинусний кореляційний компонент стохастичної складової вертикальної (а) та горизонтальної (б) вібрацій підшипника кочення з дефектом на внутрішньому кільці.

Перші п'ять косинусних компонентів вертикальної та горизонтальної складових наведені на рис (рис. 9.62–9.66). Як видно з наведених рисунків всі складові кореляційних компонентів мають вигляд швидкозникаючих коливань.

Характер змін косинусних кореляційних компонентів вертикальної та горизонтальної складових подібний, амплітуди компонентів співмірні. Найпотужнішими компонентами як для вертикальної так і горизонтальної складових вібрації є перший, другий та п'ятий компоненти.

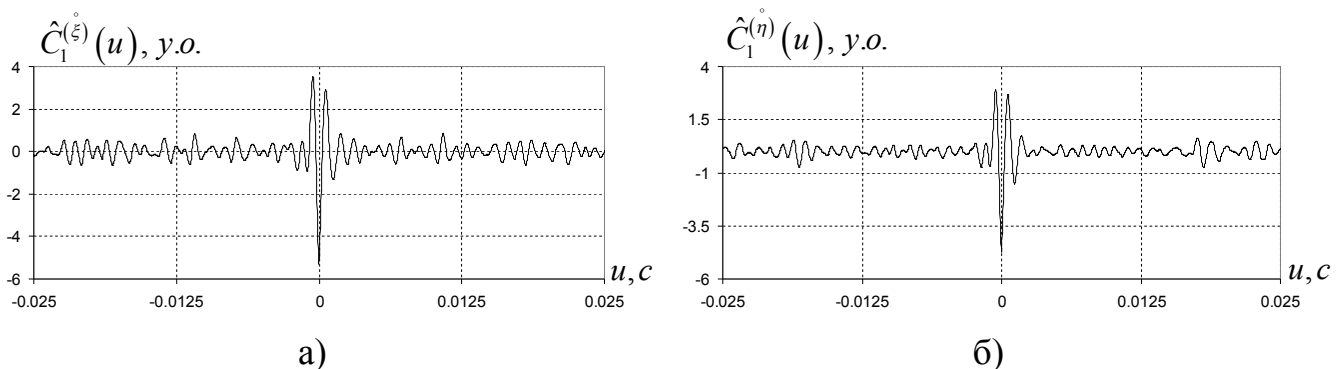


Рис. 7.62. Перший косинусний кореляційний компонент стохастичної складової вертикальної (а) та горизонтальної (б) вібрацій підшипника кочення з дефектом на внутрішньому кільці.

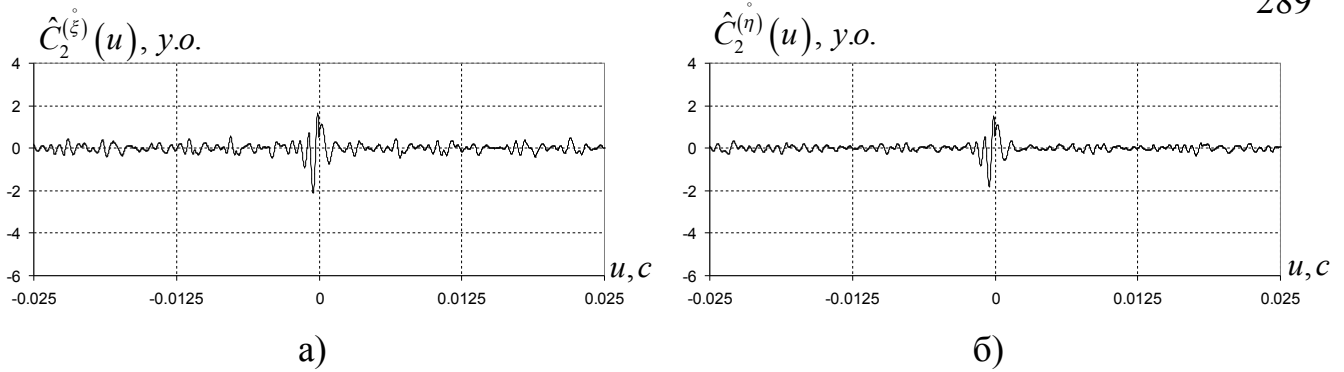


Рис. 7.63. Другий косинусний кореляційний компонент стохастичної складової вертикальної (а) та горизонтальної (б) вібрацій підшипника кочення з дефектом на внутрішньому кільці.

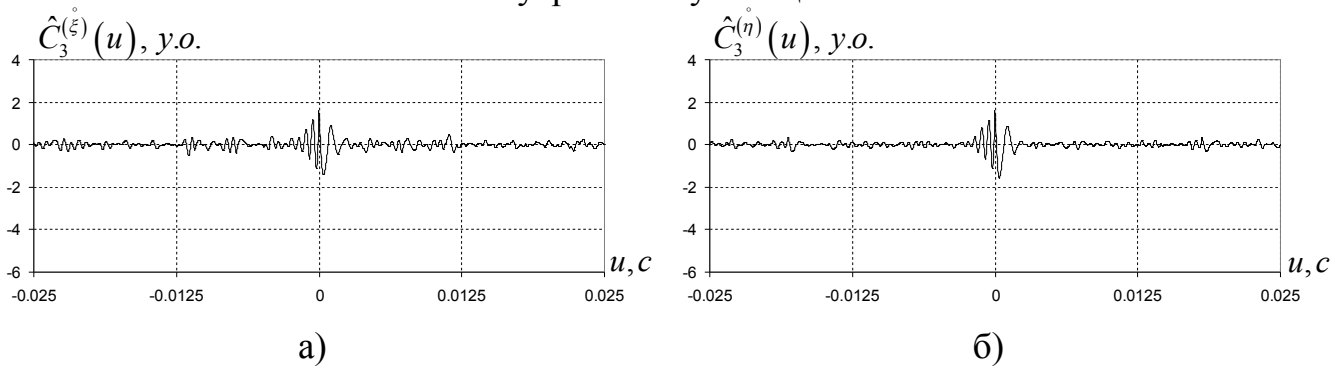


Рис. 7.64. Третій косинусний кореляційний компонент стохастичної складової вертикальної (а) та горизонтальної (б) вібрацій підшипника кочення з дефектом на внутрішньому кільці.

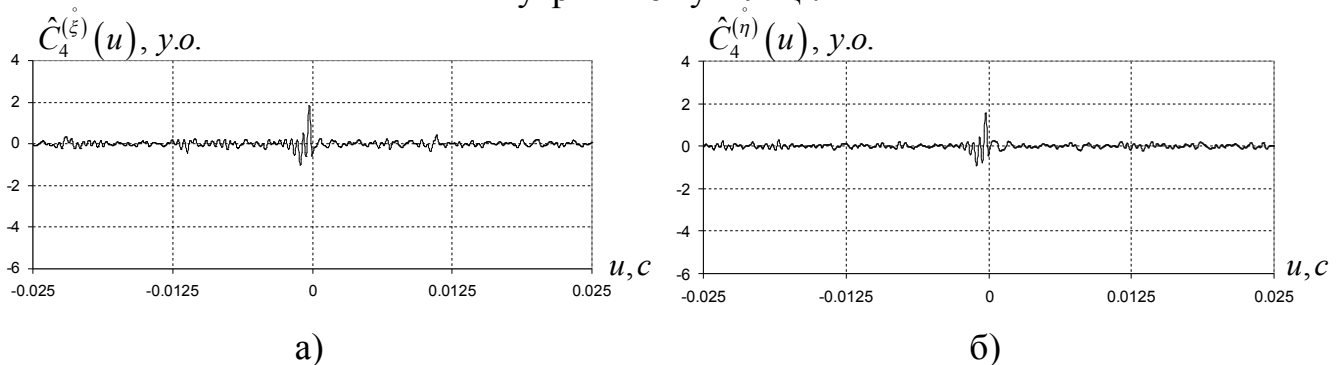


Рис. 7.65. Четвертий косинусний кореляційний компонент стохастичної складової вертикальної (а) та горизонтальної (б) вібрацій підшипника кочення з дефектом на внутрішньому кільці.

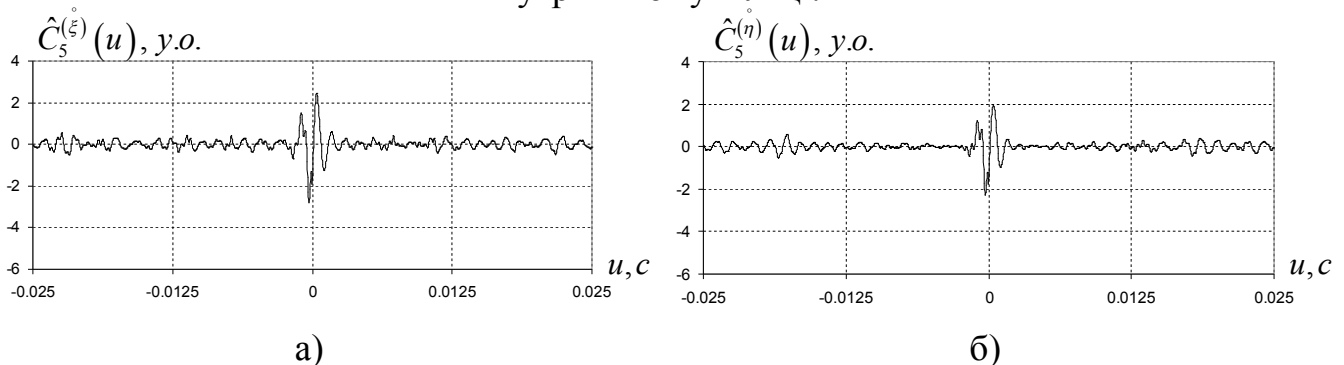


Рис. 7.66. П'ятий косинусний кореляційний компонент стохастичної складової вертикальної (а) та горизонтальної (б) вібрацій підшипника кочення з дефектом на внутрішньому кільці.

Перші п'ять синусних кореляційних компонентів вертикальної та горизонтальної складових наведені на рис (рис. 7.67–7.71), вони також мають вигляд швидкозникаючих коливань. Амплітуди синусних кореляційних компонентів вертикальної співмірні з амплітудами кореляційних компонентів горизонтальної. Найпотужнішими компонентами для вертикальної складової вібрації є перший, другий та п'ятий.

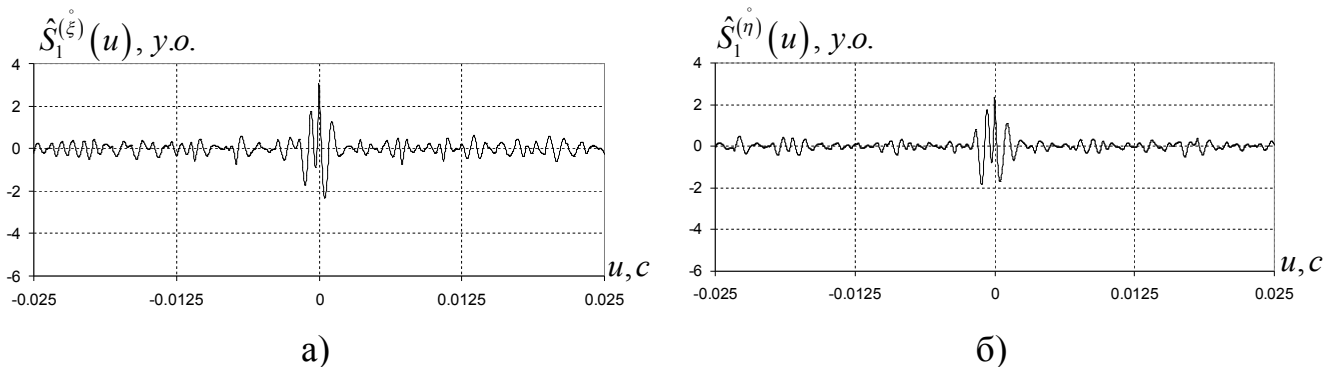


Рис. 7.67. Перший синусний кореляційний компонент стохастичної складової вертикальної (а) та горизонтальної (б) вібрацій підшипника кочення з дефектом на внутрішньому кільці.

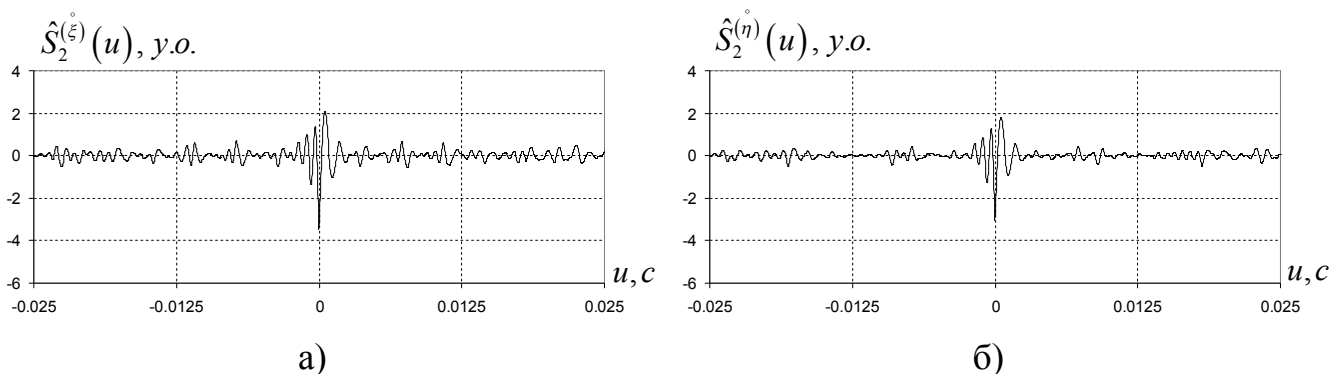


Рис. 7.68. Другий синусний кореляційний компонент стохастичної складової вертикальної (а) та горизонтальної (б) вібрацій підшипника кочення з дефектом на внутрішньому кільці

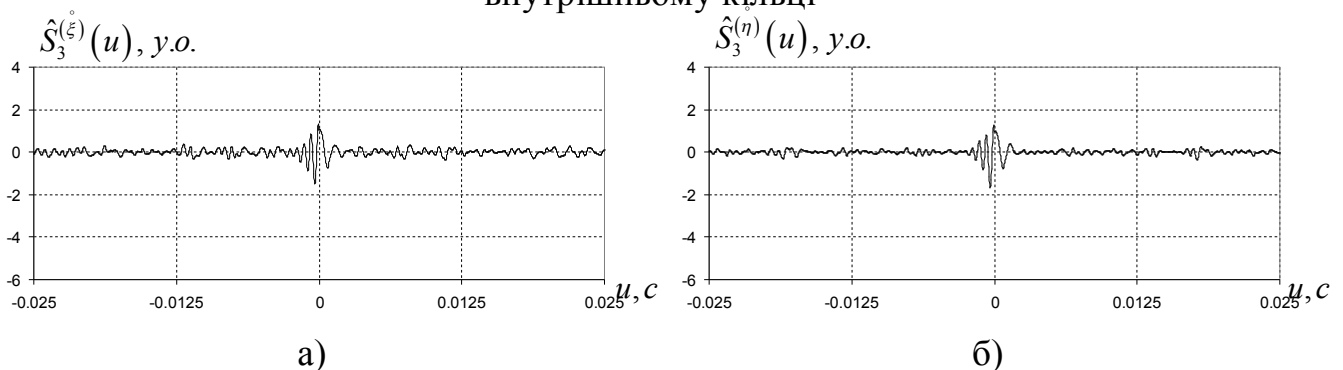


Рис. 7.69. Третій синусний кореляційний компонент стохастичної складової вертикальної (а) та горизонтальної (б) вібрацій підшипника кочення з дефектом на внутрішньому кільці.

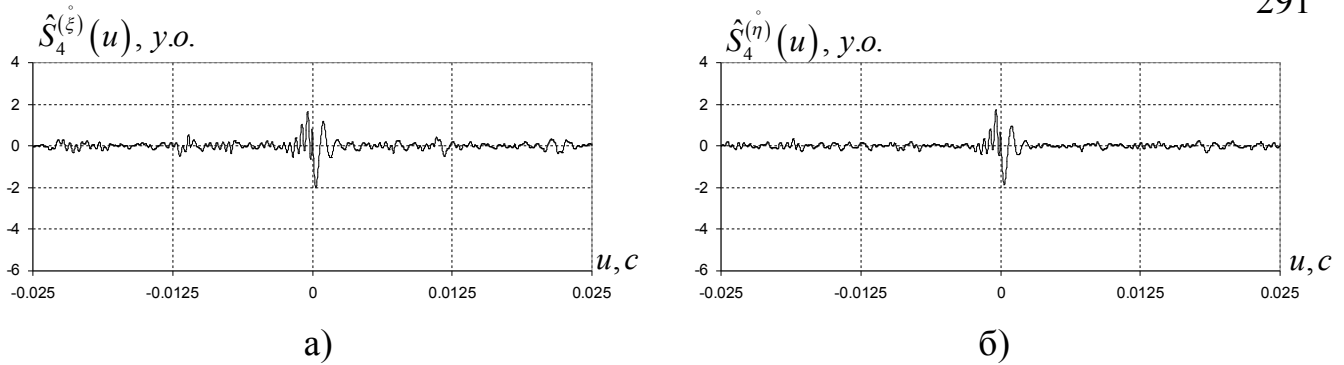


Рис. 7.70. Четвертий синусний кореляційний компонент стохастичної складової вертикальної (а) та горизонтальної (б) вібрацій підшипника кочення з дефектом на внутрішньому кільці.

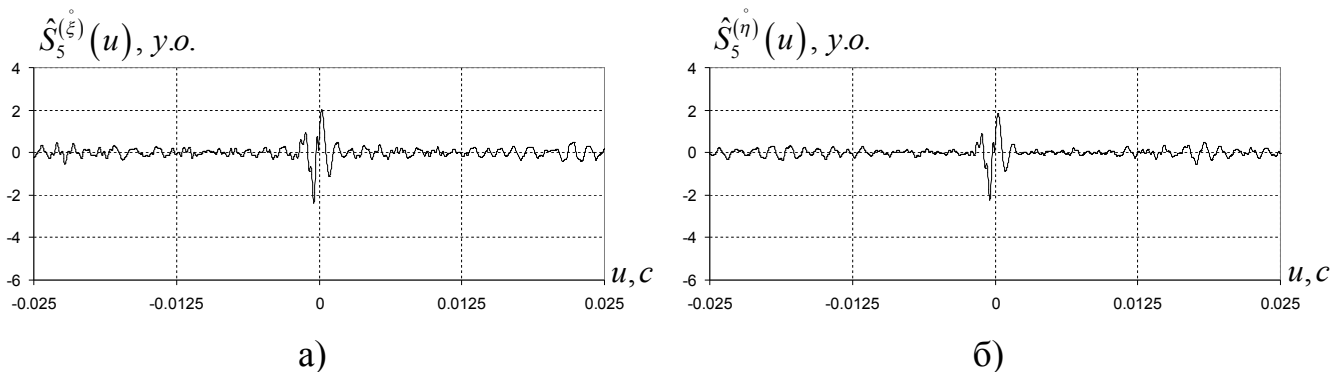


Рис. 7.71. П'ятий синусний кореляційний компонент стохастичної складової вертикальної (а) та горизонтальної (б) вібрацій підшипника кочення з дефектом на внутрішньому кільці.

Нульові спектральні компоненти, а також дійсні та уявні частини спектральної густини стохастичних складових подано на рис. 7.72–7.77.

Дійсні частини спектральних компонентів вертикальної та горизонтальної складових подібні між собою. З наведених графіків (рис. 7.72–7.77) добре видно, що кожна зі складових спектральних компонентів зосереджені в смузі частот від 500 Гц до 1500 Гц. Також слід зауважити, що амплітуди третього, четвертого та п'ятого спектральних компонентів дійсної частини вертикальної як вертикальної так і горизонтальної складових вібрацій незначні, тому дійсними складовими цих компонентів можна знехтувати.

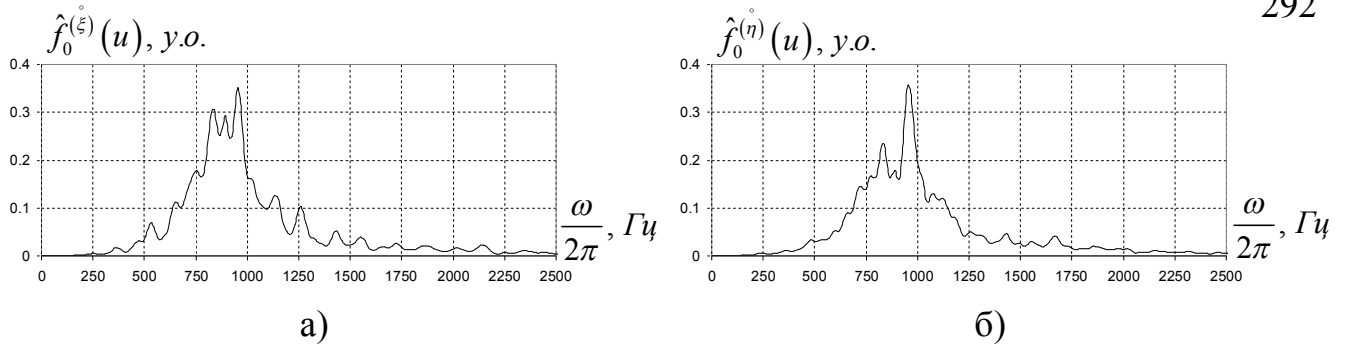


Рис. 7.72. Нульовий спектральний компонент стохастичної складової вертикальної (а) та горизонтальної (б) вібрації підшипника кочення з дефектом на внутрішньому кільці.

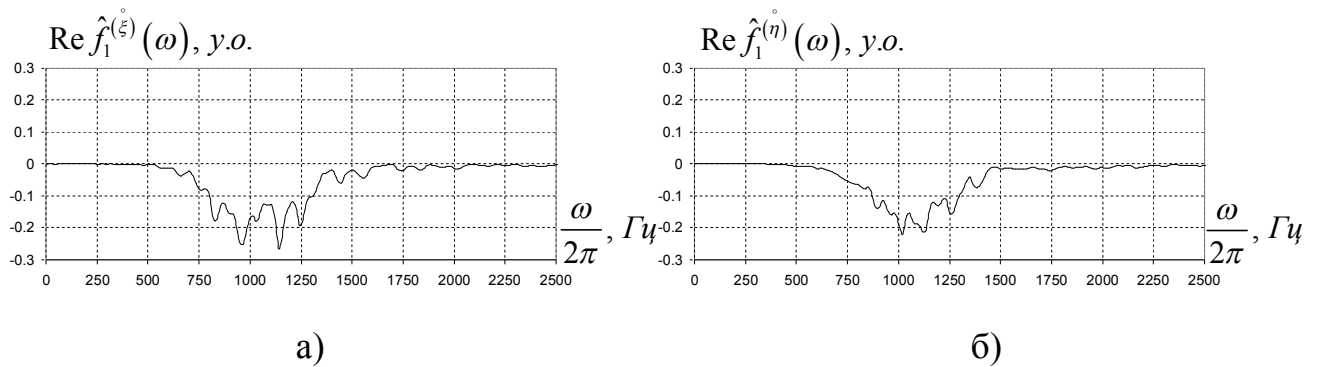


Рис. 7.73. Дійсна частина першого спектрального компонента вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації підшипника кочення з дефектом на внутрішньому кільці.

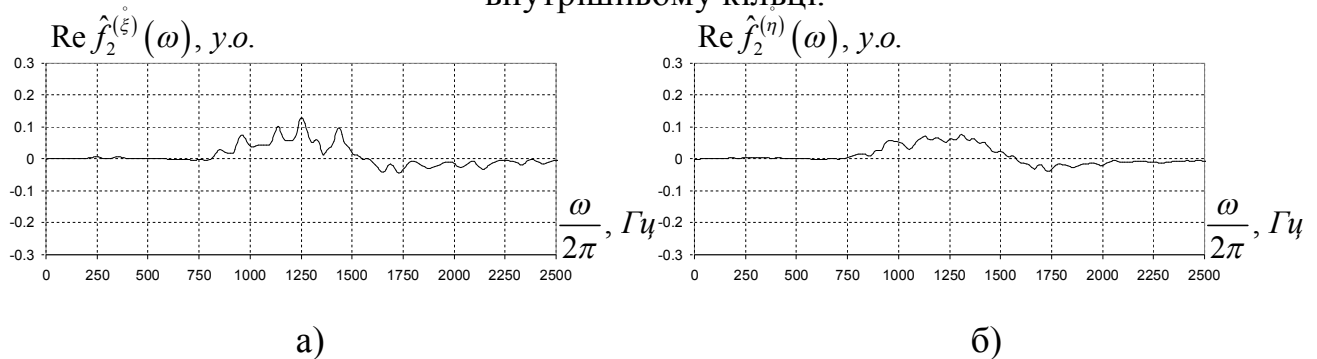


Рис. 7.74. Дійсна частина другого спектрального компонента вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації підшипника кочення з дефектом на внутрішньому кільці.

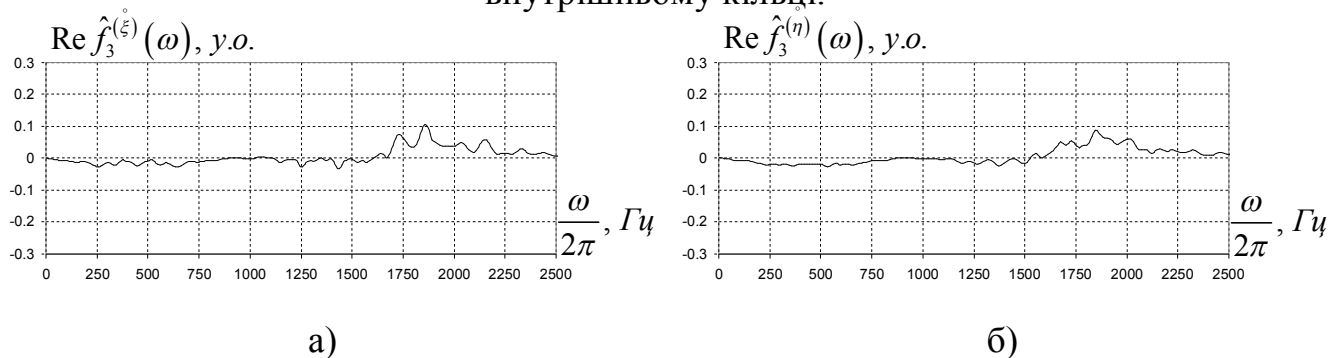


Рис. 7.75. Дійсна частина третього спектрального компонента вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації підшипника кочення з дефектом на внутрішньому кільці.

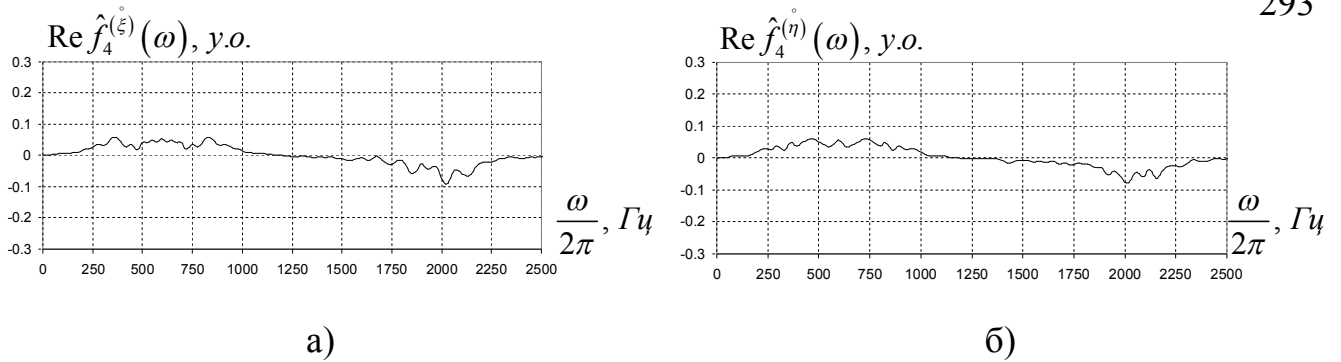


Рис. 7.76. Дійсна частина четвертого спектрального компонента вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації підшипника кочення з дефектом на внутрішньому кільці.

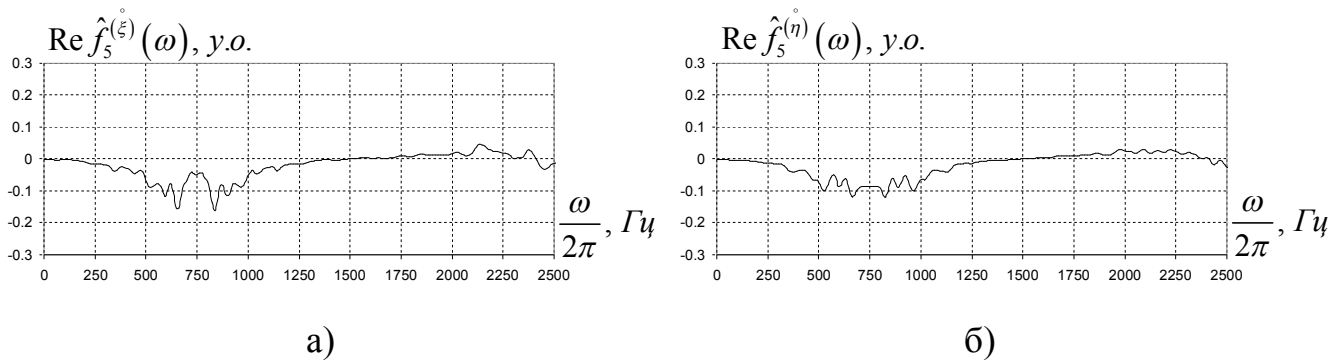


Рис. 7.77. Дійсна частина п'ятого спектрального компонента вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації підшипника кочення з дефектом на внутрішньому кільці.

Уявні частини спектральних компонентів вертикальної і горизонтальної складових наведені на (рис. 7.78–7.82). З наведених графіків добре видно, що кожна уявної частина першого та другого спектральних компонентів зосереджена в смузі частот від 750 Гц до 2000 Гц, п'ятого – в смузі частот від 400 Гц до 1100 Гц. Уявною частиною третього та четвертого спектральних компонентів як вертикальної так і горизонтальної складових вібрації можна знехтувати.

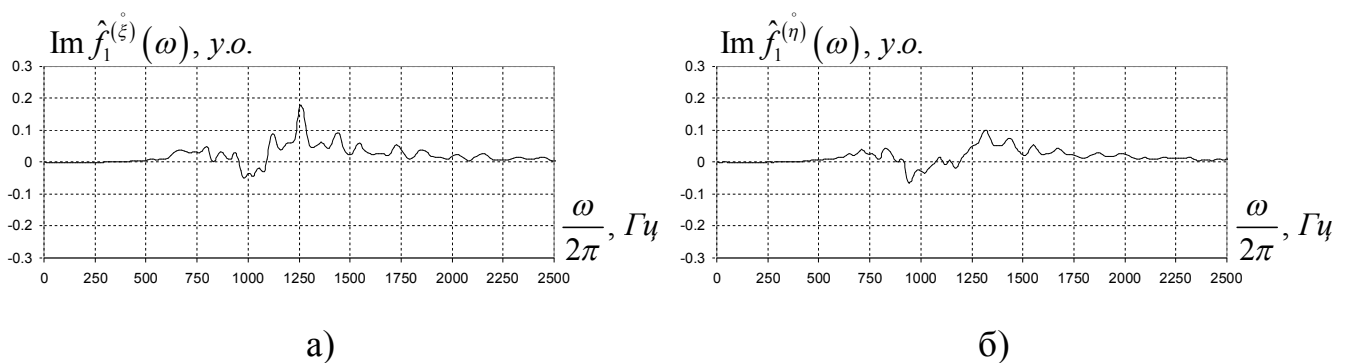
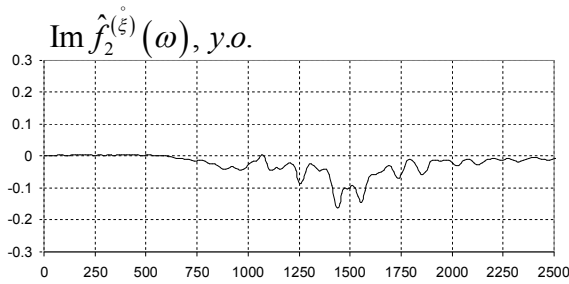
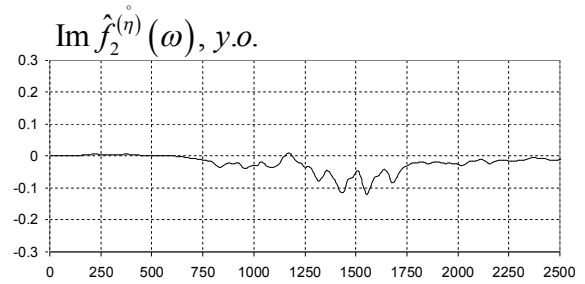


Рис. 7.78. Уявна частина першого спектрального компонента вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації підшипника кочення з дефектом на внутрішньому кільці.

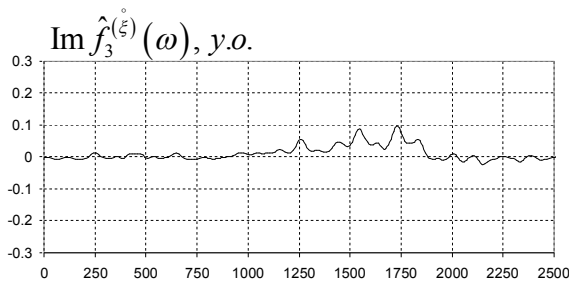


а)

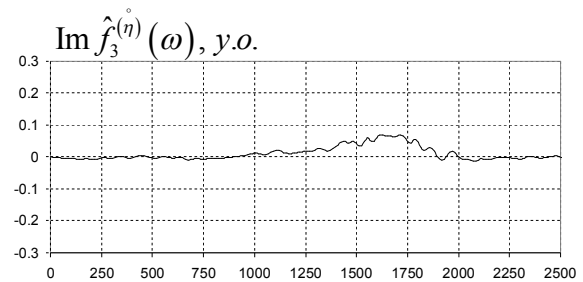


б)

Рис. 7.79. Уявна частина другого спектрального компонента вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації підшипника кочення з дефектом на внутрішньому кільці.

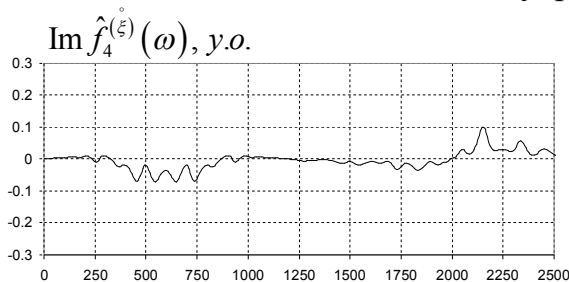


а)

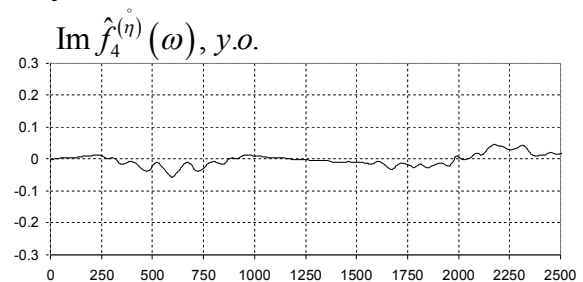


б)

Рис. 7.80. Уявна частина третього спектрального компонента вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації підшипника кочення з дефектом на внутрішньому кільці.

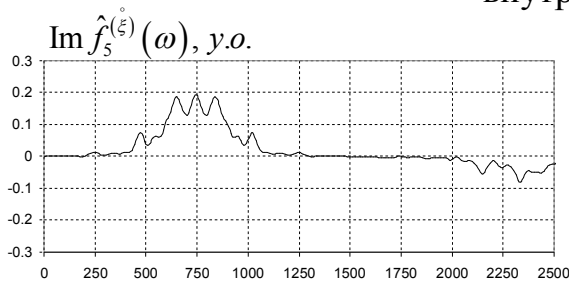


а)

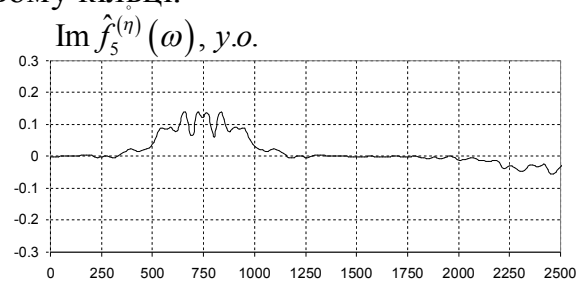


б)

Рис. 7.81. Уявна частина четвертого спектрального компонента вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації підшипника кочення з дефектом на внутрішньому кільці.



а)



б)

Рис. 7.82. Уявна частина п'ятого спектрального компонента вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації підшипника кочення з дефектом на внутрішньому кільці.

Аналізуючи взаємозалежність двох вібраційних сигналів, вертикальної та горизонтальної складових період взаємної нестационарності, що визначається за статистикою (6.1.1) не виявлено. З цього випливає, що випадкові процеси вертикальної складової вібрації, які виникають в процесі взаємодії присутнього на рухомому кільці дефекту з тілами кочення не корелюють з випадковими процесами, що формують горизонтальну складову вібрації. Таким чином, Нульовий та вищі компоненти взаємкореляційної функції мають форму слабких флуктуацій відносно осі абсцис (рис. 7.83–7.88).

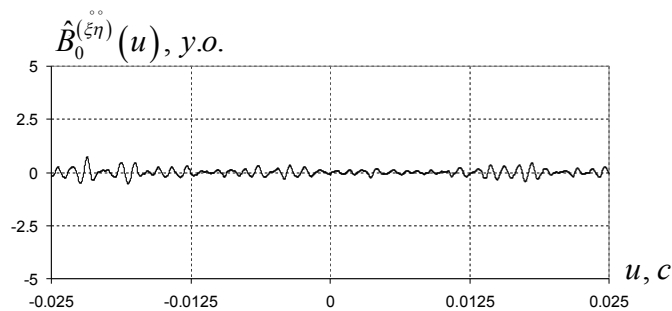


Рис. 7.83. Нульовий взаємкореляційний компонент.

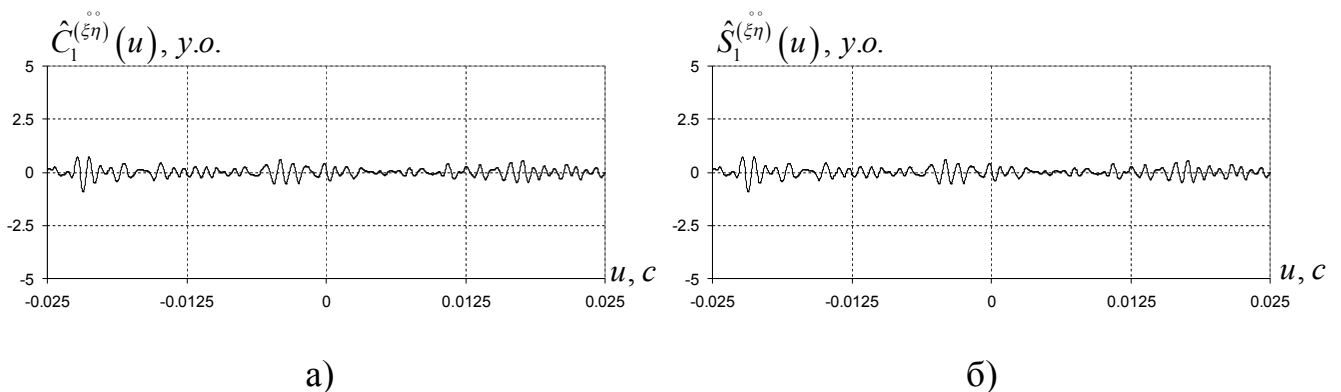


Рис. 7.84. Перший косинусний (а) та синусний (б) взаємкореляційні компоненти.

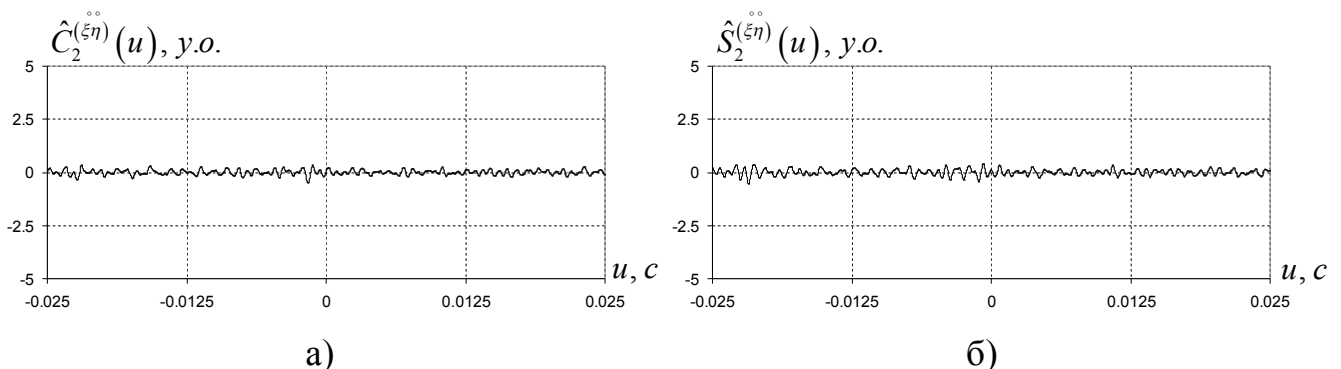


Рис. 7.85. Другий косинусний (а) та синусний (б) взаємкореляційні компоненти.

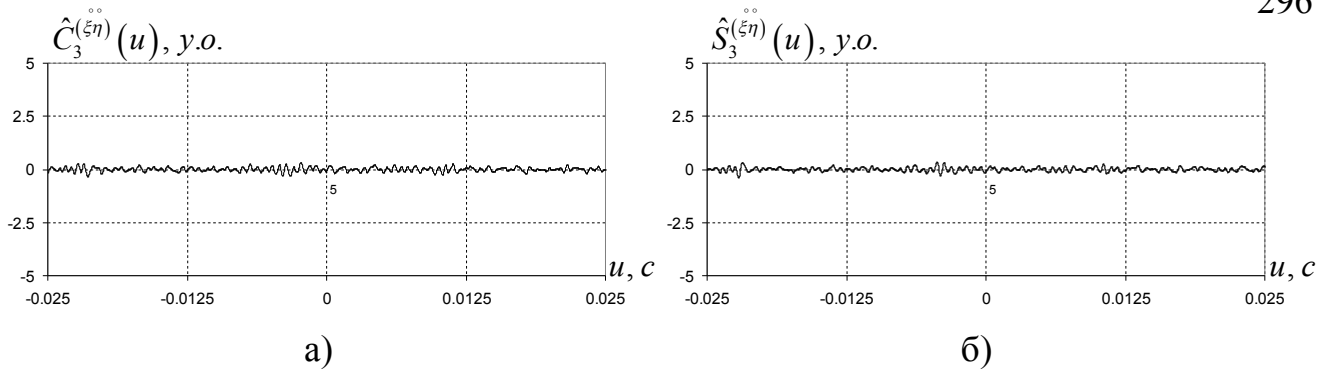


Рис. 7.86. Третій косинусний (а) та синусний (б) взаємкореляційні компоненти.

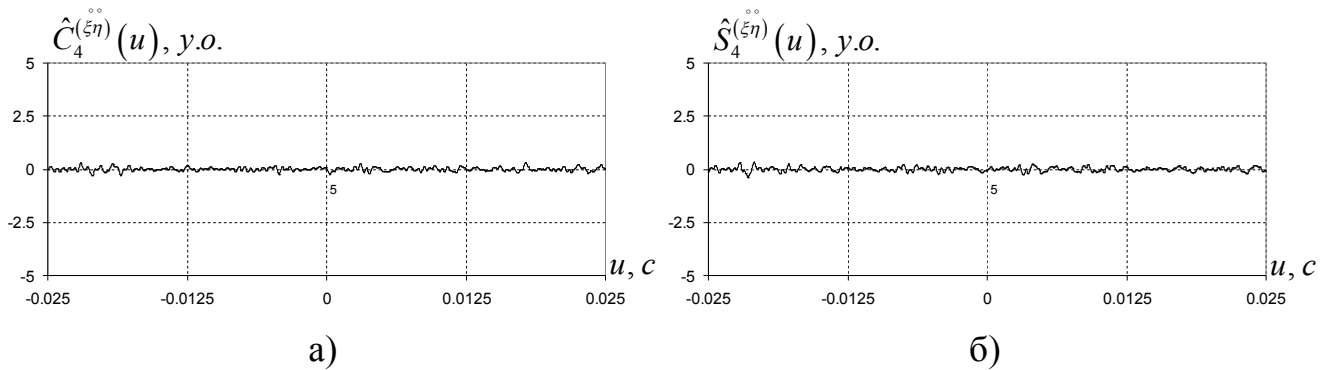


Рис. 7.87. Четвертий косинусний (а) та синусний (б) взаємкореляційні компоненти

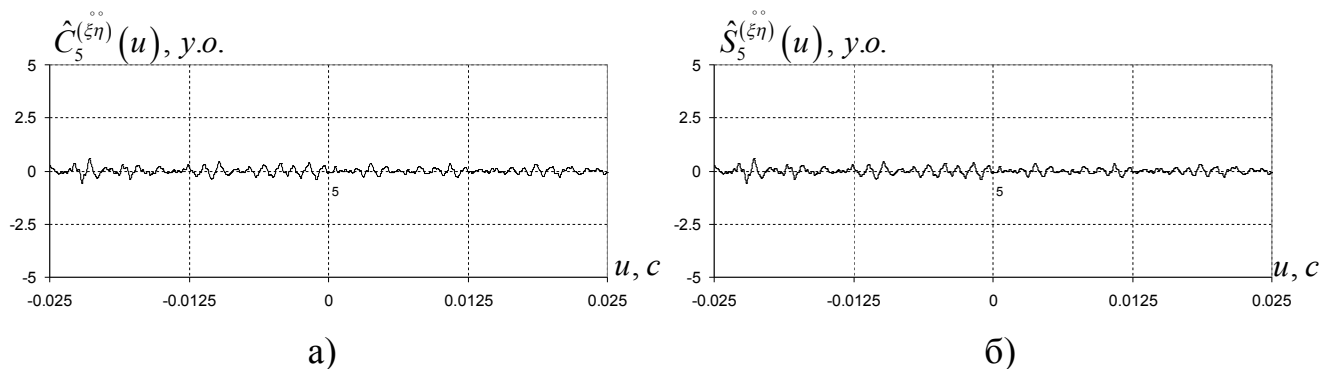


Рис. 7.88. П'ятий косинусний (а) та синусний (б) взаємкореляційні компоненти

Оскільки взаємкореляційні компоненти відсутні (рис. 7.83–7.88) то відповідно взаємспектральні компоненти мають форму слабких флуктуацій відносно осі абсцис (рис. 7.89–7.94), тобто також відсутні.

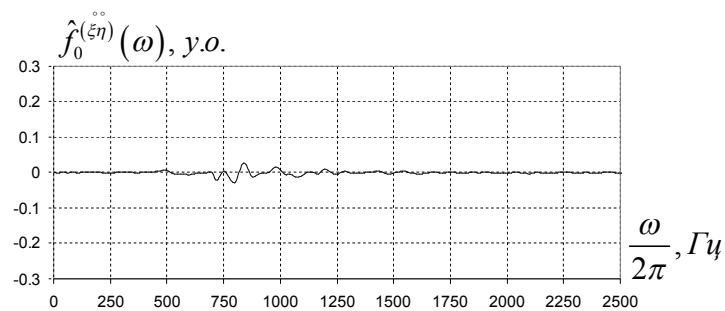


Рис. 7.89. Нульовий взаємспектральний компонент.

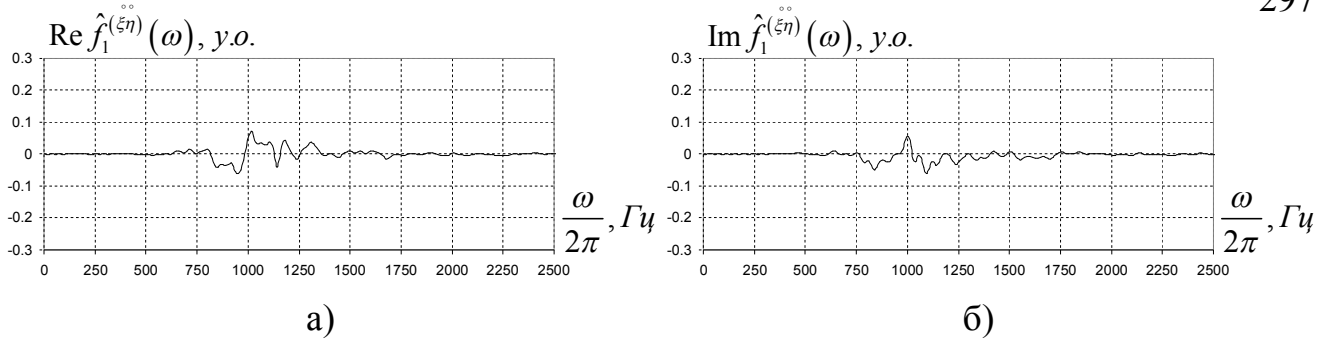


Рис. 7.90. Дійсна (а) та уявна (б) частини першого взаємоспектрального компонента.

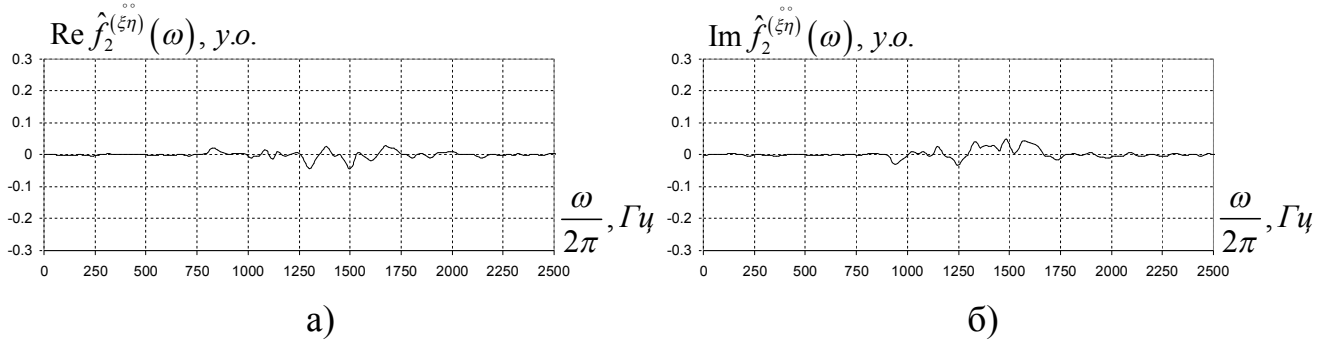


Рис. 7.91. Дійсна (а) та уявна (б) частини другого взаємоспектрального компонента.

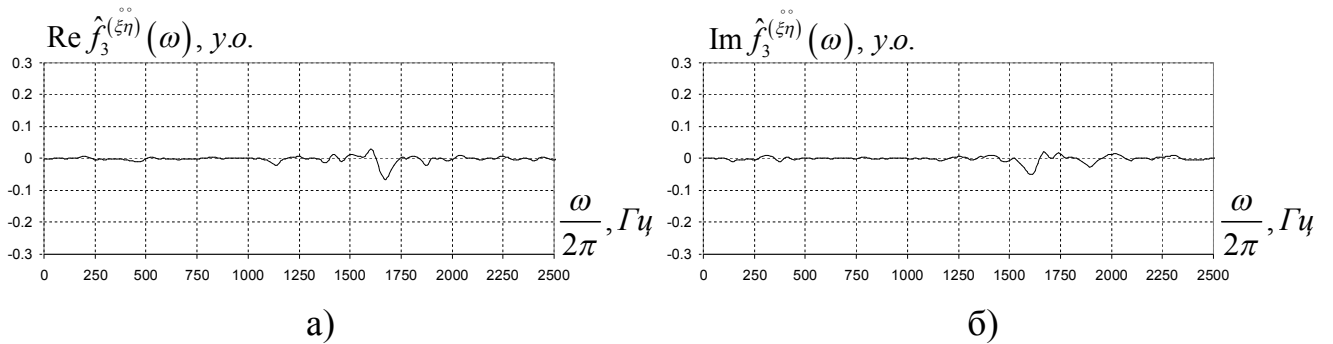


Рис. 7.92. Дійсна (а) та уявна (б) частини третього взаємоспектрального компонента.

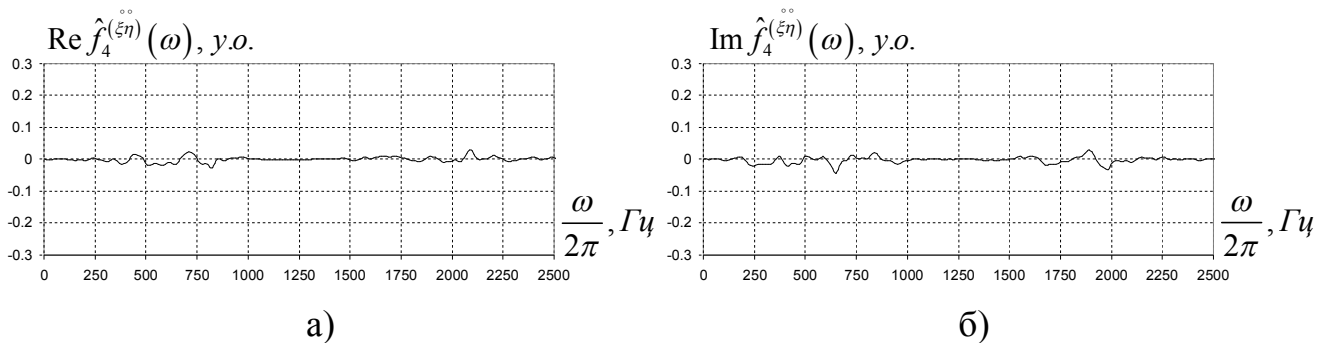


Рис. 7.93. Дійсна (а) та уявна (б) частини четвертого взаємоспектрального компонента.

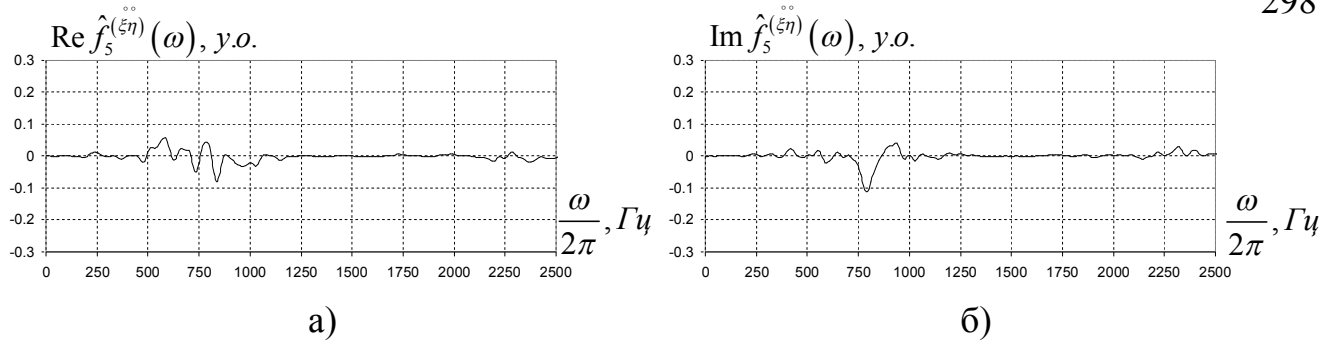


Рис. 7.94. Дійсна (а) та уявна (б) частина п'ятого взаємоспектрального компонента.

Обчислимо інтегральні функції когерентності, їх вигляд у вибраному масштабі і прийнятному (від 0 до 1) наведено на рис. 7.95.

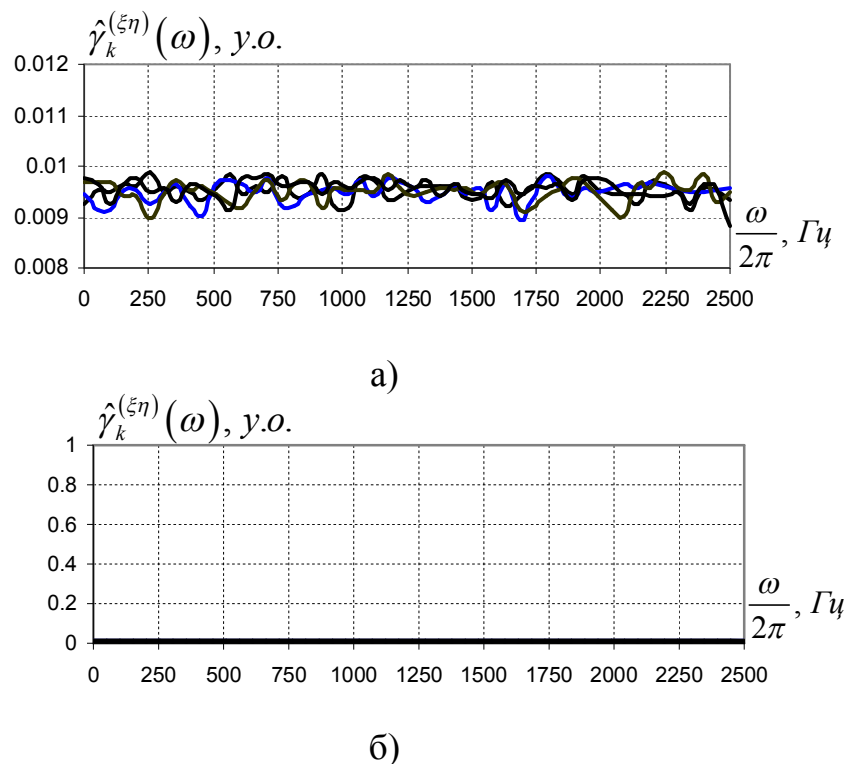


Рис. 7.95. Оцінка інтегральної функції когерентності для різних k : а) вибраний і б) звичайний масштаби.

Інтегральна функція когерентності має вигляд слабких флуктуацій біля нуля (рис. 7.95а). У прийнятному масштабі (рис. 7.95б) інтегральна функція когерентності має вигляд прямої лінії близько одиниці, причому рівень флуктуацій рівний 1%. Таким чином, можна стверджувати, що змодульовані вібраційні сигнали від підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці не є взаємопов'язані.

7.4. Взаємний аналіз симульованих вібраційних сигналів бездефектного підшипника кочення

Реалізації симульованих вертикальної та горизонтальної складових вібрації бездефектного підшипника кочення (див. п. 7.1) показано на рис. 7.96. З наведених графіків чітко видно, що у вібраційних сигналах домінують коливання з періодом обертання валу (60 Гц). Потужність вертикальної складової вібраційного сигналу майже на 20 % перевищує потужність горизонтальної.

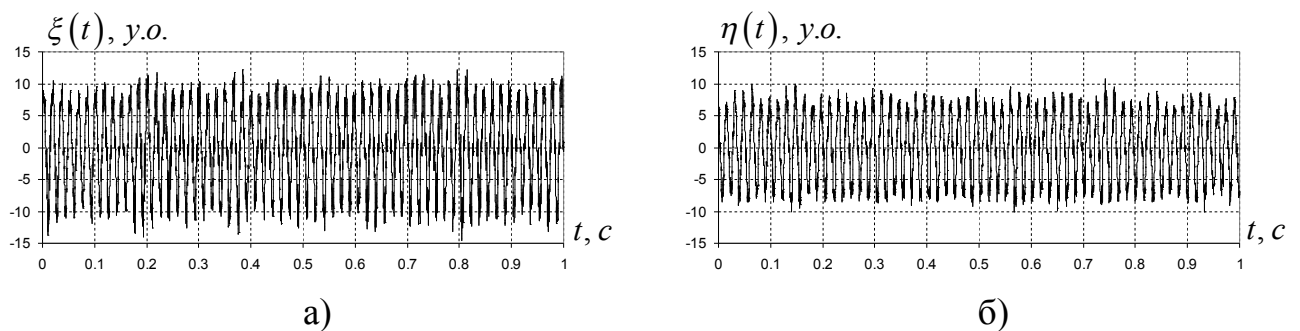


Рис. 7.96. Вібраційні сигнали вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації бездефектного підшипника кочення

Кореляційні функції (рис. 7.97) в стаціонарному наближенні вібраційних сигналів мають вигляд незникаючих коливань з частотою, що відповідає частоті обертання валу. У вібраційних сигналах детерміновані коливання за потужністю значно переважають стохастичні складові. Співвідношення сигнал/шум як для вертикальної так і для горизонтальної складових вібрації становить 50:1.

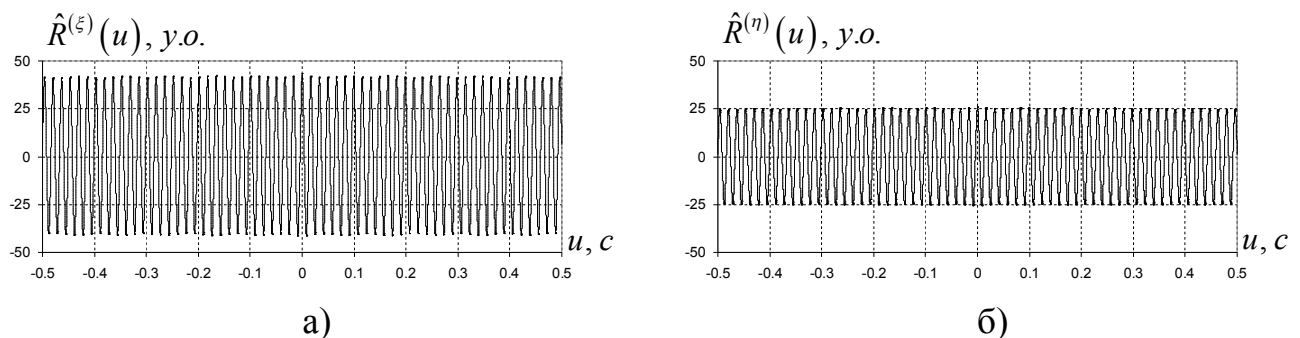


Рис. 7.97. Кореляційні функції вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації бездефектного підшипника кочення

У спектральних густинах потужності вібраційних сигналів (рис. 7.98) присутні гармонічні складові, що відповідають частоті обертання валу, на які припадає понад 95 % потужності вібраційних сигналів.

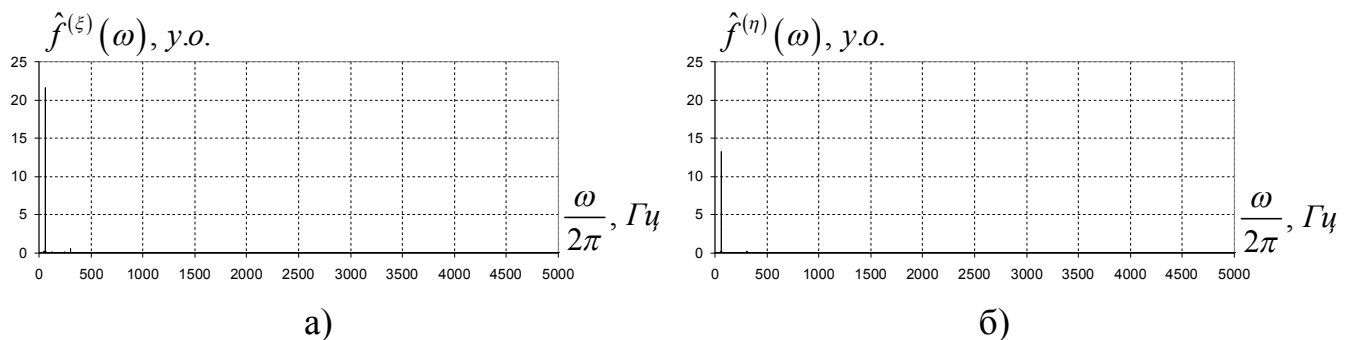


Рис. 7.98. Спектри вібраційних сигналів вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації бездефектного підшипника кочення

Використовуючи компонентний метод оцінили математичне сподівання сигналів та розділили детерміновані та стохастичні складові сигналів. Математичні сподівання горизонтальної та вертикальної складових вібрації бездефектного підшипника кочення наведені на рис. 7.99. З цих рисунків бачимо, що у вібраційних сигналах домінують коливання з періодом обертання валу (60 Гц). Потужність математичного сподівання вертикальної складової вібраційного сигналу майже на 20 % перевищує потужність горизонтальної.

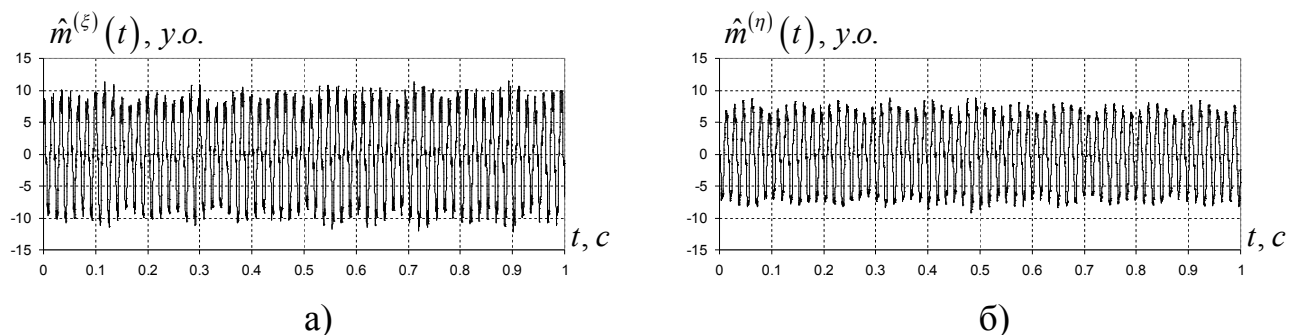


Рис. 7.99. Математичні сподівання вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації бездефектного підшипника кочення

У гармонічних складах математичного сподівання вертикальної та горизонтальної складових вібрації бездефектного підшипника кочення присутня потужна перша гармоніка, що відповідає частоті обертання валу, амплітуди вищих гармонічних складових є незначними і ними можна знехтувати (рис. 7.100).

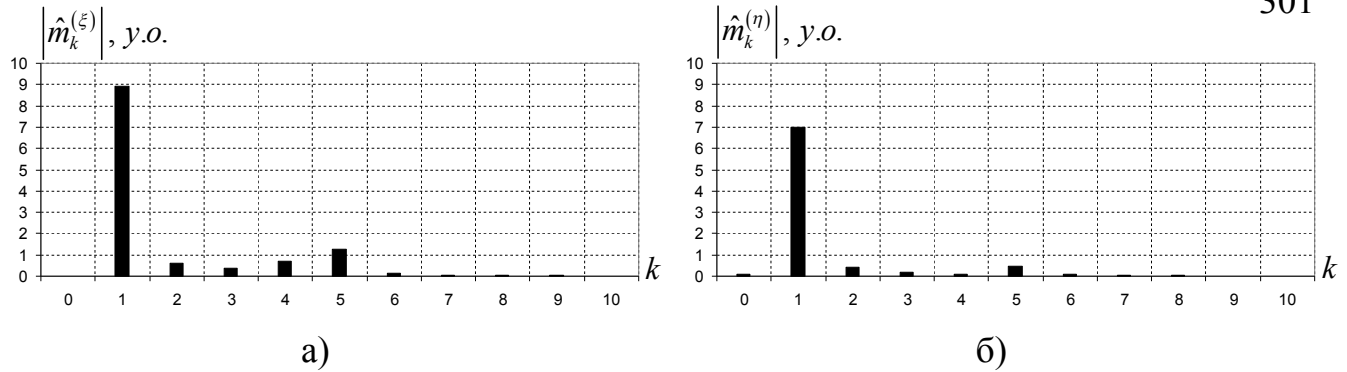


Рис. 7.100. Компоненти матсподівання вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації бездефектного підшипника кочення

У стохастичних складових вібраційних сигналів модуляції стаціонарними випадковими процесами основних гармонічних складових сигналів не виявлено. Стохастичні складові вібраційних сигналів вертикальної та горизонтальної складових є стаціонарними, що свідчить про відсутність локальних дефектів у підшипниковому вузлі (рис. 7.101).

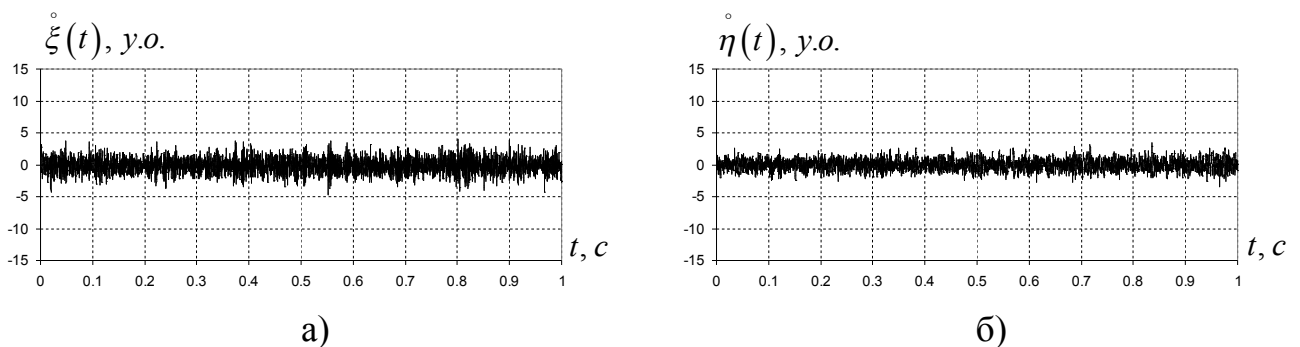


Рис. 7.101. Стохастичні складові вібраційних сигналів вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації бездефектного підшипника кочення

Кореляційні функції стохастичних складових вертикальної та горизонтальної складових вібрації підшипника кочення з дефектом на внутрішньому кільці мають вигляд швидкозникаючих функцій (рис. 7.102а). Потужність стохастичної складової вертикальної вібрації майже вдвічі перевищує потужність стохастичної складової горизонтальної вібрації.

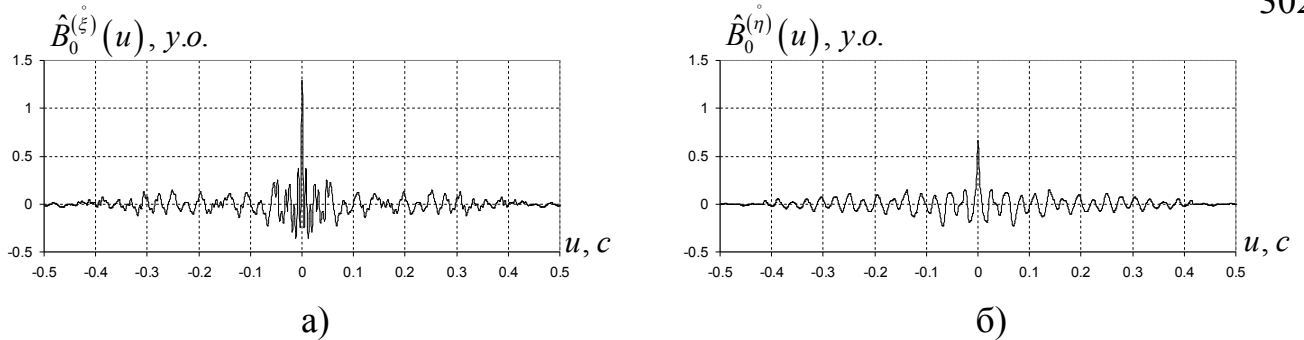


Рис. 7.102. Кореляційна функція стохастичної складової вібраційних сигналів вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації бездефектного підшипника кочення

Спектри стохастичних складових вертикальної та горизонтальної вібрації бездефектного підшипника кочення зосереджені смузі частот до 2000 Гц та мають резонансні підняття на частотах кратних до частоти обертання валу (рис. 7.103).

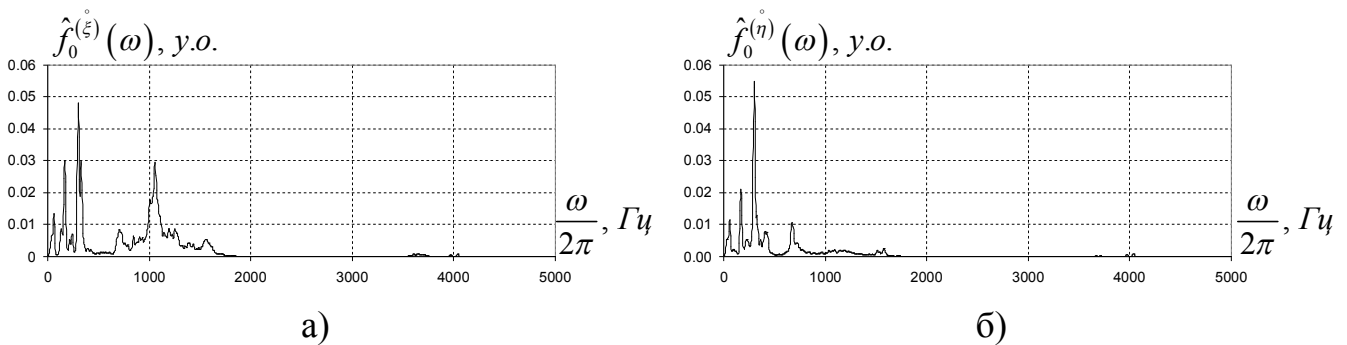


Рис. 7.103. Спектр стохастичної складової вібраційних сигналів вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації бездефектного підшипника кочення

Обчисливши когерентні функціонали пошуку прихованих періодичностей [146] у стохастичних складових вібраційних сигналів для вертикальної і горизонтальної складових встановлено, що вони мають характер слабких флуктуацій відносно певного рівня та не мають екстремумів (рис. 7.104).

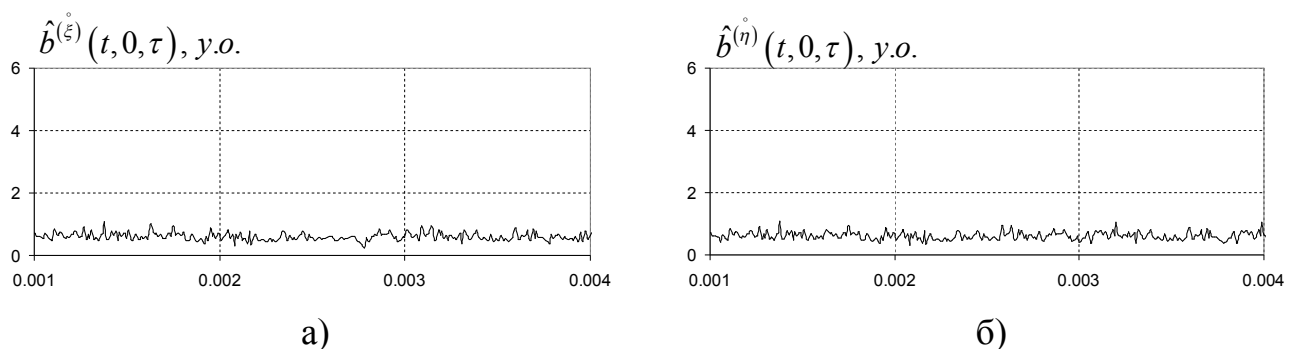


Рис. 7.104. Функціонал оцінки періоду стохастичної складової вібраційних сигналів вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації бездефектного підшипника кочення

Використовуючи компонентний метод для оцінювання імовірнісних характеристик ПНВП оцінено дисперсії стохастичних складових вертикальної та горизонтальної вібрації (рис. 7.105) та їх компонентів Фур'є (рис. 7.106).

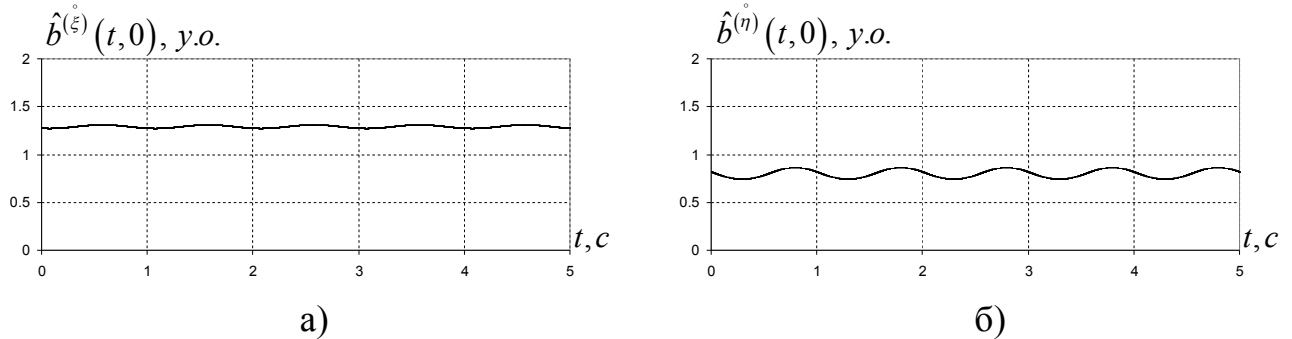


Рис. 7.105. Дисперсія стохастичної складової вібраційних сигналів вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації бездефектного підшипника кочення

З наведених рисунків дисперсії (рис. 7.105) видно, що величина дисперсії за період обертання валу змінюється мало, що свідчить про стаціонарний характер цих складових.

Серед значущих компонентів Фур'є (рис. 7.106) дисперсій стохастичних складових вібраційних сигналів присутні тільки нульові компоненти, що підтверджує стаціонарний характер стохастичних складових.

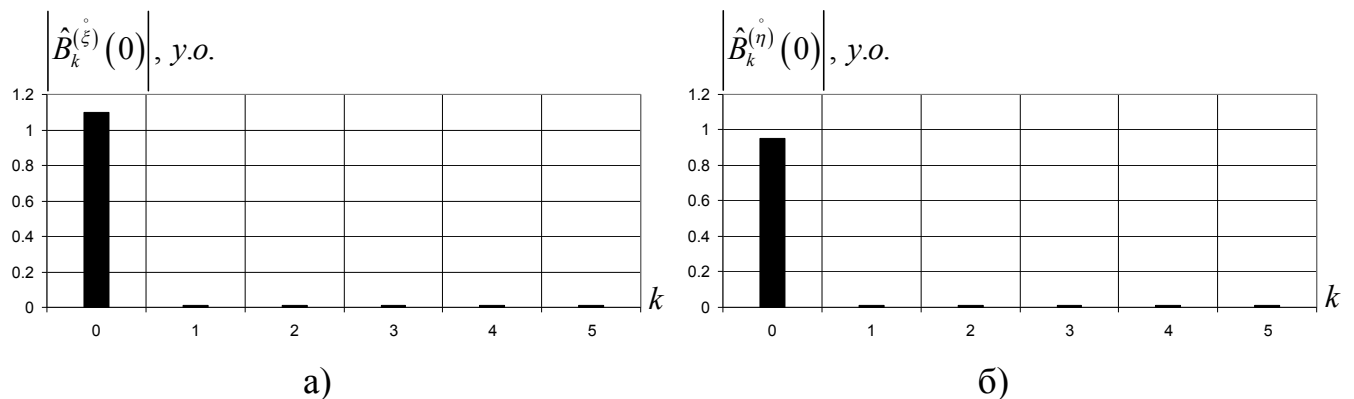


Рис. 7.106. Компоненти дисперсії стохастичної складової вібраційних сигналів вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації бездефектного підшипника кочення

Таким чином, проводити подальший взаємний аналіз двох вібраційних сигналів не потрібно, так як характеристики, які ми обчислили (рис. 7.97–7.106) вказують, що дані симульовані сигнали є бездефектними.

7.5. Висновки до розділу 7

1. На основі динамічної стохастичної моделі вібраційних сигналів підшипника кочення у вигляді системи нелінійних диференціальних рівнянь II-го порядку зсимульовано серію вібраційних сигналів як від бездефектного підшипника кочення, так і з дефектом на зовнішньому та внутрішньому кільцях. Показано, що поява дефекту на кільці підшипника призводить до набуття вібраційними сигналами властивостей періодичної нестационарності II-го порядку.

2. Розроблено алгоритм взаємного статистичного аналізу вібраційних сигналів та апробовано його на симульованих даних. На основі аналізу стохастичної складової виявлено часові зміни статистик другого порядку, які вказують на модуляційну природу випадкового процесу й дають можливість стверджувати про присутність у механізмі дефектів, що розвиваються. Алгоритм передбачає визначення двох функцій когерентності.

Першої: для уточнення типу дефекту виділено стаціонарні компоненти періодично нестационарної складової вібросигналу, обчислено авто- та взаємкореляційні функції, знайдено взаємспектральні густини і на їх основі обчислено покомпонентну функцію когерентності.

Другої: визначено період нестационарності та оцінено взаємкореляційні функції за допомогою симетричного когерентного усереднення (може бути проведено як за когерентним, так і за компонентним методом з тією різницею, що замість істинного значення періоду в них використовується деяка пробна величина, так званий пробний період), провівши її авто-, взаємкореляційний і взаємспектральний аналізи обчислено інтегральну функцію когерентності.

3. Для двох симульованих вібраційних сигналів підшипника кочення з дефектом на внутрішньому кільці проведено взаємний статистичний аналіз. Використовуючи когерентний функціонал пошуку прихованих періодичностей у стохастичних складових вібраційних сигналів, виявлено потужні модуляції стаціонарними випадковими процесами частоти, що відповідає частоті

перекочування тіл кочення по внутрішньому кільці підшипника кочення. Проте, аналізуючи взаємну залежність двох вібраційних сигналів, вертикальної та горизонтальної складових період взаємної нестационарності не виявлено. З цього випливає, що випадкові процеси вертикальної складової вібрації, які виникають в процесі взаємодії присутнього на рухомому кільці дефекту з тілами кочення не корелюють з випадковими процесами, що формують горизонтальну складову вібрації. Таким чином, нульовий та вищі компоненти взаємнокореляційної функції мають форму дуже слабких флуктуацій відносно осі абсцис, а тим самим і функція когерентності також має форму слабких флуктуацій на рівні нуля.

4. Показано, що інтегральна та покомпонентна функції когерентності є не тільки ефективним засобом для виявлення локальних дефектів, встановлення ступеня їх розвитку, а й надійним інструментом для встановлення типу локального пошкодження. Для випадку присутнього на стаціонарному кільці дефекту ці функції мають чітко виражені форми, а у випадку рухомого дефекту – вигляд малопотужних флуктуацій.

РОЗДІЛ 8

ВЕРИФІКАЦІЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ПНВ СИГНАЛІВ З ВИКОРИСТАННЯМ СТВОРЕНОЇ ВІБРОДІАГНОСТИЧНОЇ СИСТЕМИ ПУЛЬС ЗА РЕЗУЛЬТАТАМИ ВИКОНАННЯ РОБІТ НА ПРОМИСЛОВИХ ОБ'ЄКТАХ

8.1. Вібродіагностична система ПУЛЬС: загальний огляд, функціональне призначення, технічні характеристики, апробація

На основі розробленої методології аналізу стохастичних коливань з використанням сучасних елементів мікроелектроніки та відповідного програмного забезпечення розроблена, виготовлена та налагоджена мобільна система ПУЛЬС [73] для відбору та обробки вібраційних сигналів обертових механізмів, виявлення і попередження аварійних ситуацій на турбогенераторах, нафтоперекачувальних станціях, бурильних установках, для діагностики тіл обертання, електродвигунів, газоперекачувальних агрегатів, порталних кранів, електрогенеруючих установок (високовольтні трансформатори в тому числі) і т.п.

8.1.1. Загальний опис системи ПУЛЬС

На рис. 8.1 та рис. 8.2 представлені зовнішній та внутрішній вигляд виготовленої та налагодженої вібродіагностичної системи ПУЛЬС.



Рис. 8.1. Система ПУЛЬС, зовнішній вигляд.

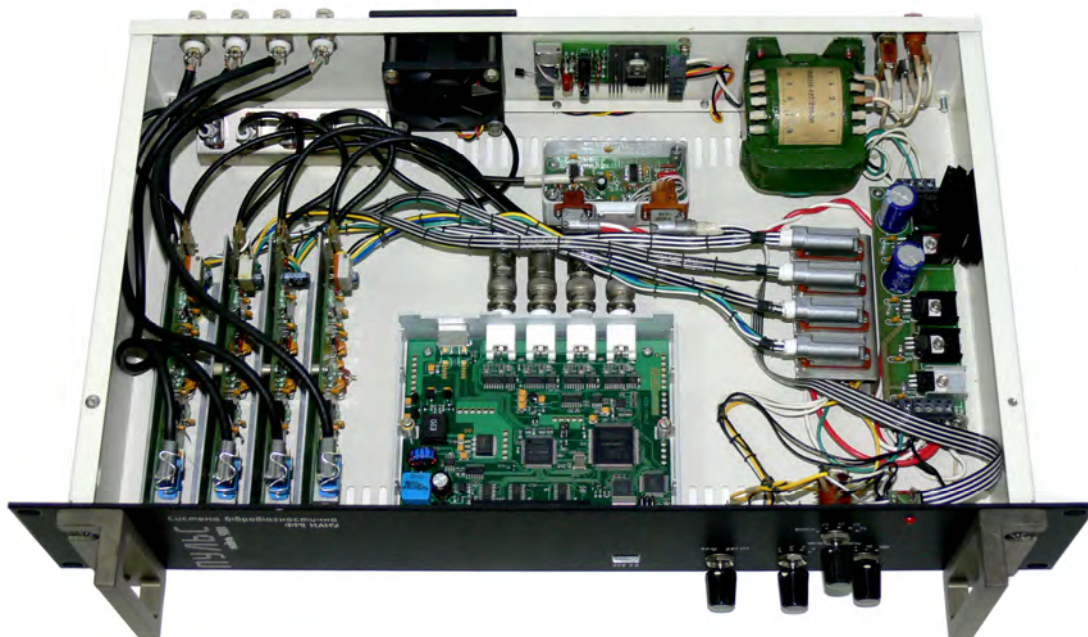


Рис. 8.2. Система ПУЛЬС, внутрішній вигляд.

Структурна схема вібродіагностичної системи ПУЛЬС показана на рис. 8.3.

Система складається з таких основних вузлів:

- диференціальних підсилювачів сигналу;
- аналого-цифрових фазолінійних фільтрів 8 порядку;
- вихідних буферних повторювачів;
- схеми управління частоти зрізу фільтрів низьких частот;
- швидкодіючого аналого-цифрового перетворювача Е 20-10 фірми *L-card* [15, 180];
- каналу синхронізації відбору сигналів;
- модуля регулятора температури;
- блоку живлення;
- персонального комп'ютера з блоком алгоритмічного забезпечення для взаємкореляційного і взаємспектрального аналізів багатомірних вібраційних сигналів.

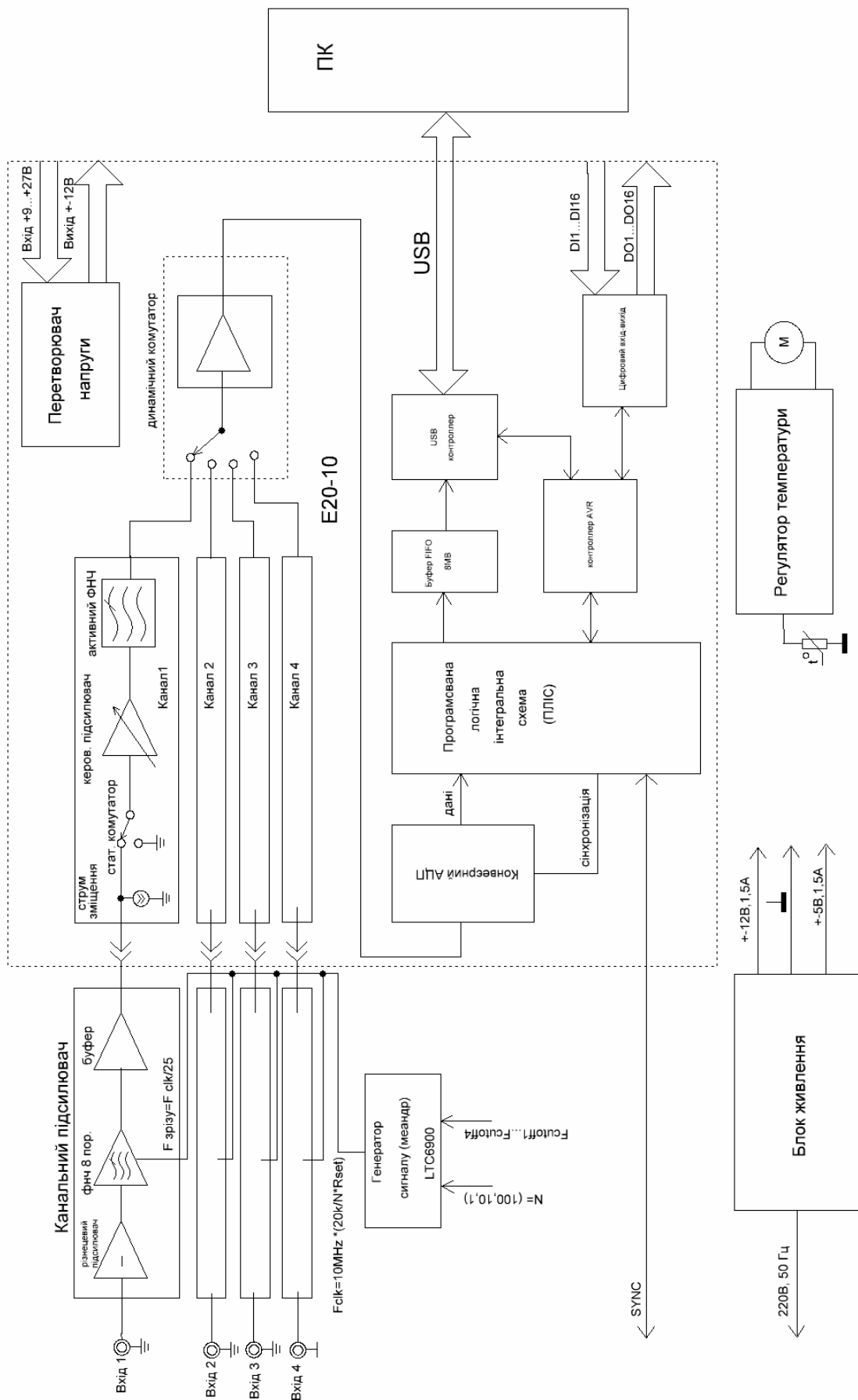


Рис. 8.3. Структурна схема вібраційної діагностичної системи ПУЛЬС.

Основою системи є швидкодіючий модуль аналого-цифрового перетворення E20-10 з USB2 інтерфейсом. Його основні властивості:

- забезпечення неперервного 16 бітового збору даних по USB2 інтерфейсу;
- чотирьохканальна архітектура з аналого-цифровим перетворювачем, комутатором;
- вхідними буферними підсилювачами та фільтрами;
- можливість програмного встановлення чутливості по кожному із каналів;
- частота перетворення аналого-цифрового перетворювача встановлюється програмно від 1 мГц до 10 мГц;
- багаторежимна синхронізація старту збору даних;
- шини цифрового входу – виходу представлені у вигляді 16 бітових ліній сумісних з рівнями TTL;
- напруга живлення +12 В;
- струм споживання не більше 35 мА.

8.1.2. Схема керування смугою пропускання фільтру нижніх частот

Основним елементом схеми є малопотужна інтегральна мікросхема фірми *Linear Technology LTC 6900* [227]. Діапазон генерованих частот знаходиться в межах від 1 кГц до 20 МГц з максимальною похибкою установки частоти 1.5 % при температурі 25°C.

Струм споживання 0.5 мА при напрузі живлення від 2.7 В до 5.5 В. Вихідний сигнал керування – типу меандр. Конструктивно виконана в низько профільному корпусі типу *TTSOP*.

Схема електрична принципова керуванням смуги пропускання фільтру нижніх частот показана на рис. 8.4.

Встановлення потрібної частоти генерації відбувається за допомогою прецизійних температурно стабільних постійних резисторів, що підключаються одним з чотирьох ключів 4-х канального електронного комутатора типу *SPST ADG 711* [177] фірми *Analog Devices* шляхом подачі рівнів логічного “0” на входи керування $F_{зріз1} \dots F_{зріз4}$.

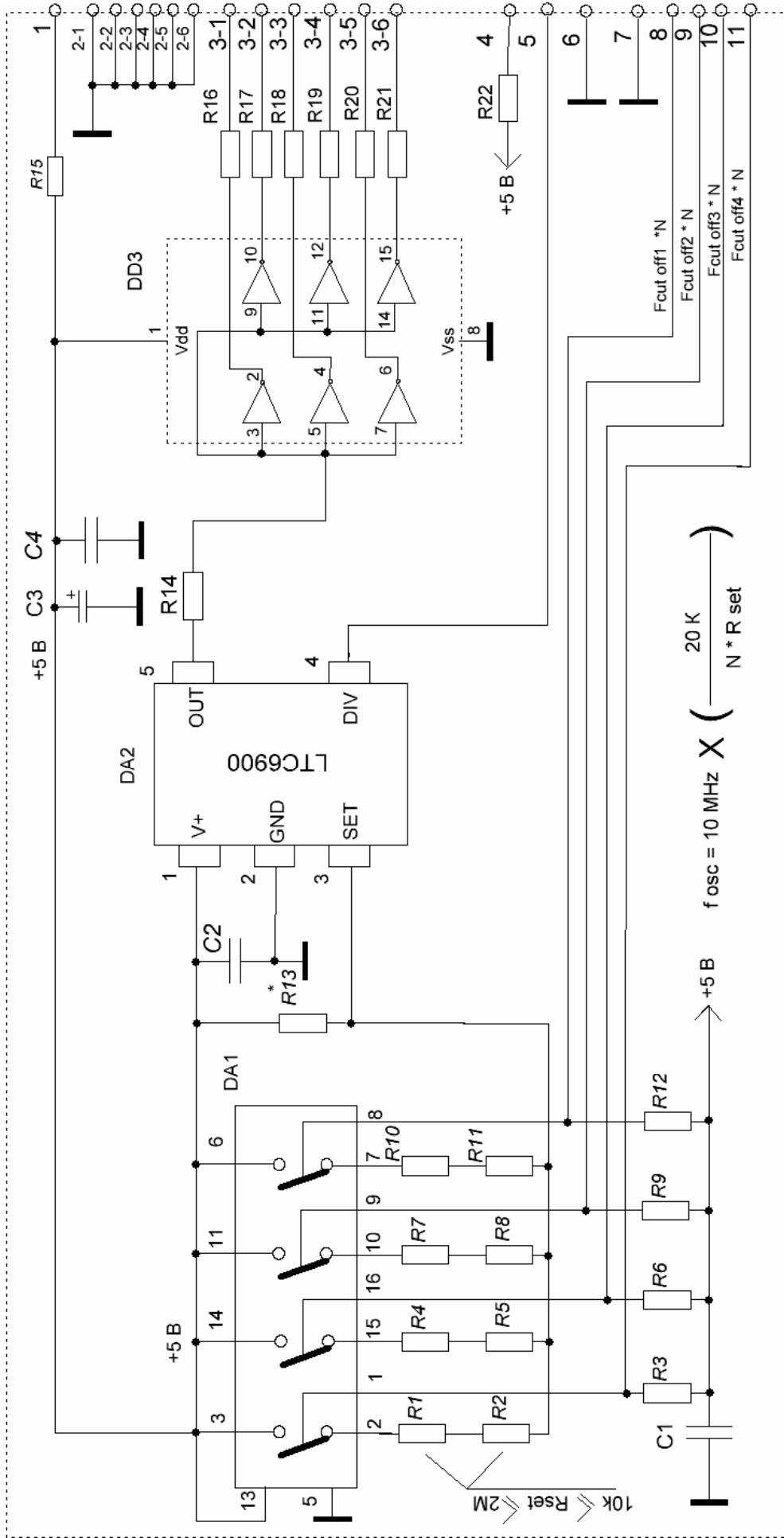


Рис. 8.4. Схема електрична принципу керування смугою пропускання фільтру нижніх частот.

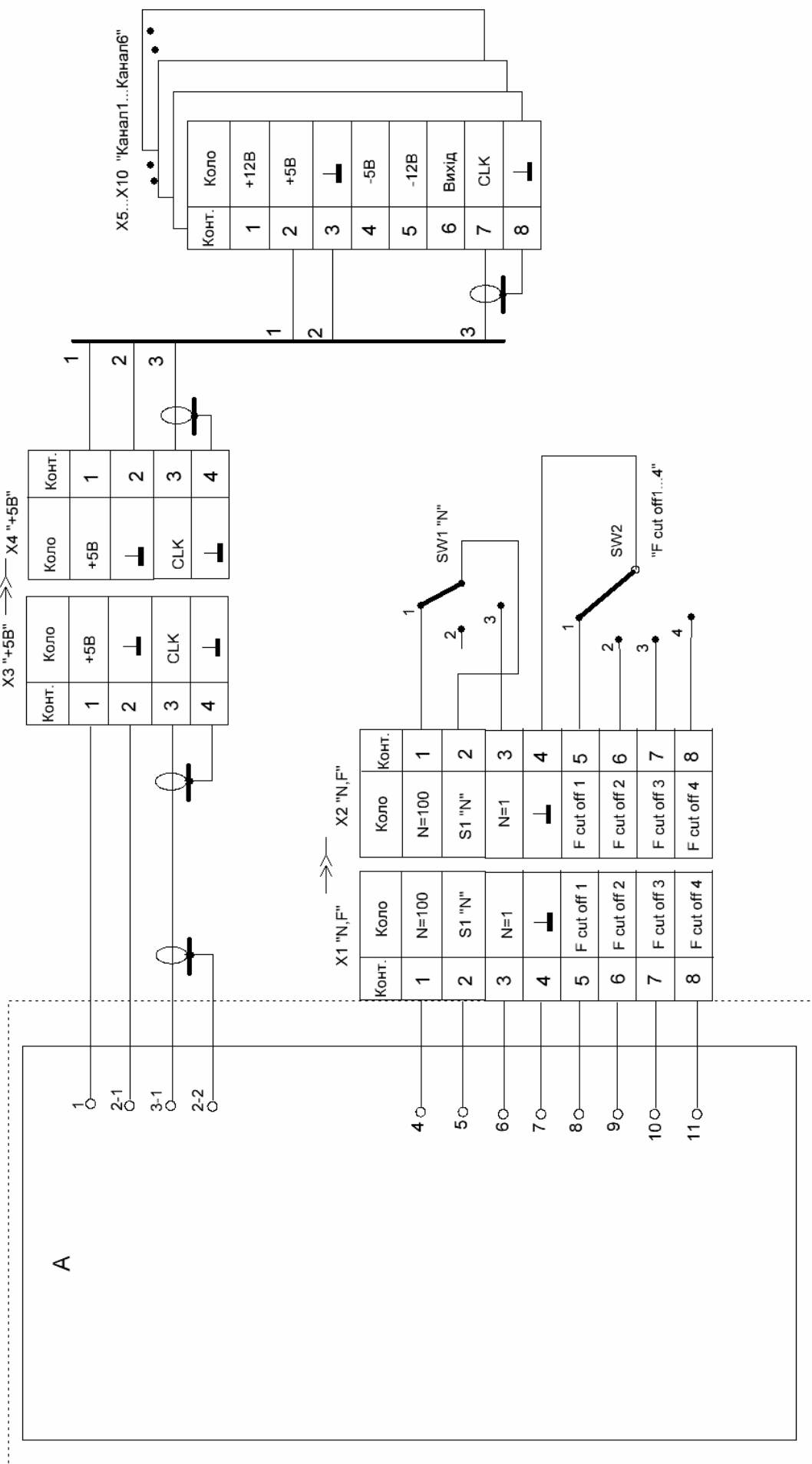


Рис. 8.5. Загальна електрична схема керування смугою пропускання фільтру нижніх частот.

Вихідний сигнал типу меандр (50 % ± 1 %) визначається з формули:

$$F_{\text{вих.}} = 10 \text{ МГц} \times \left(\frac{20K}{NR_{\text{set}}} \right),$$

де $N = 100, 10$ або 1 , а R_{set} може приймати значення від 10 кОм до 2 МОм максимум.

Для збільшення навантажувальної здатності та забезпечення мінімального впливу на каналні підсилювачі вібродіагностичної системи сигнал з виводу 4 мікросхеми DA2 (LTC 6900) поступає на буферні підсилювачі мікросхеми DD3 (74НСТ14050).

Загальна електрична схема керування смугою пропускання фільтру нижніх частот приведена на рис. 8.5.

За допомогою розніма ХЗ подається напруга живлення на схему управління, а перемикачі SW1 та SW2 встановлюють відповідно значення N (100,10 або 1) та одну із частот $F_{\text{зрізу1}} \dots F_{\text{зрізу4}}$.

8.1.3. Блок живлення

Блок живлення вібродіагностичної системи виконаний по класичній схемі з використанням інтегральних стабілізаторів напруги компенсаційного типу (7812, 7912, 7805 та 7905) з вихідними напругами $\pm 5 \text{ В}$ та $\pm 12 \text{ В}$ і максимальним вихідним струмом до 1.5 А . Трансформатор типу ТПП251-127/220-50.

Схема електрична принципова блоку живлення приведена на рис. 8.6.

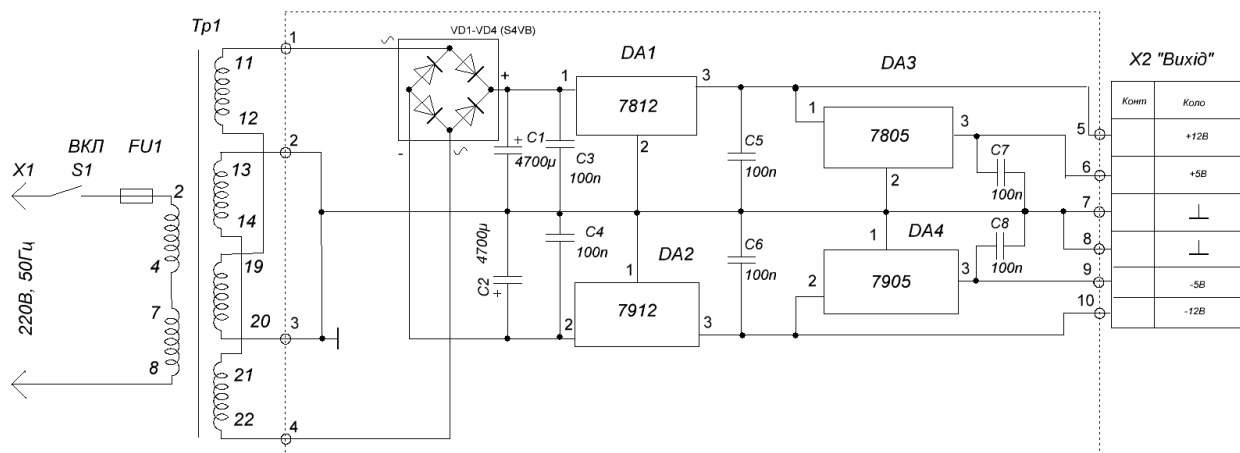


Рис. 8.6. Схема електрична принципова блоку живлення.

8.1.4. Регулятор температури

При діагностиці обертових механізмів, зокрема електрогенеруючих машинних агрегатів великої потужності в літній період оточуюча температура може сягати далеко за $+25^{\circ}\text{C}$. Для забезпечення метрологічних характеристик необхідно підтримувати температуру всередині корпусу вібродіагностичної системи в заданих межах, що вирішується використанням регулятора температури, побудованого з використанням широтно-імпульсної модуляції. Для його реалізації достатньо подати на компаратор дві напруги – пилоподібної та постійної напруги, що пропорційна температурі середовища. Компаратор, порівнюючи два сигнали, сформує різницевий сигнал і через керуючий елемент регулюватиме швидкістю обертів вентилятора. Схема такого регулятора приведена на рис. 8.7.

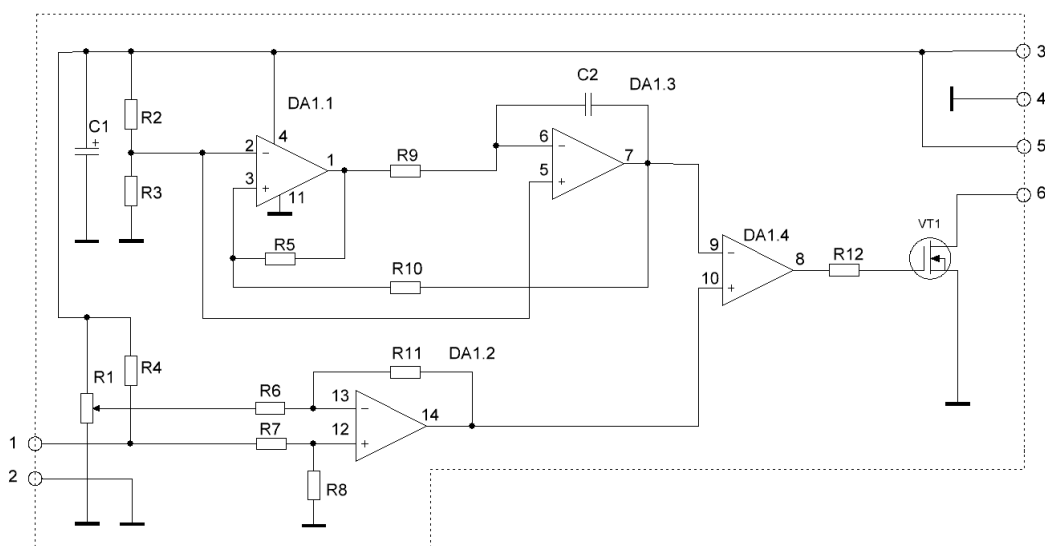


Рис. 8.7. Регулятор температури, схема електрична принципова.

На елементах DA1.1 та DA1.3 побудований генератор пилоподібної напруги, а на DA1.2 диференціальний підсилювач, на один із входів якого поступає сигнал від температурного датчика. Виділений та підсилений сигнал поступає на компаратор, а далі на регулюючий елемент, що побудований на MOSFET транзисторі типу IRF530 або аналогічному. Ширина імпульсу керування є прямопропорційна температурі середовища, а це в свою чергу призводить до збільшення швидкості обертання вентилятора. В якості датчика температури

використовується мікросхема LM335Z фірми *National Semiconductor*, вихідний сигнал якого складає 10 мВ на один градус Кельвіна. Тобто при температурі 25°C вихідна напруга давача буде складати $(25+273) \times 10 \text{ мВ} = 2.98 \text{ В}$. Ця напруга подається на додатній вхід різницевого підсилювача, на другий вхід якого подається постійна напруга з регулятора R1. Різниця напруг поступає на компаратор, де порівнюється з пилоподібною напругою. Вихідний сигнал компаратора – прямокутні імпульси, ширина яких залежить від температури.

Загальна схема електрична регулятора температури показана на рис. 8.8.

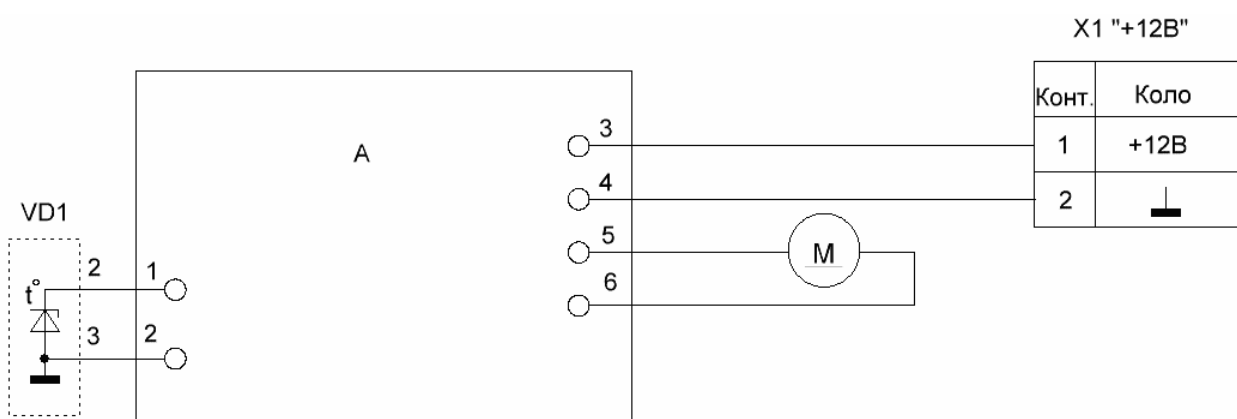


Рис. 8.8. Регулятор температури, схема електрична загальна.

Для забезпечення кращої теплопровідності давач температури розміщений в металевому корпусі і кріпиться до стінки корпусу вібраційної системи.

8.1.5. Блок-схема узгодження перетворювача заряду з аналого-цифровим перетворювачем

Блок-схема узгодження перетворювача заряду з аналого-цифровим перетворювачем E20-10 [15, 190] показана на рис. 8.9.

Основними елементами є:

- перетворювач заряду п'єзокерамічних давачів віброприскорення;
- схема узгодження електронних давачів віброприскорення на базі ADXL001;
- схема підсилювача з дискретно регульованим коефіцієнтом підсилення;
- вихідний буфер та ряд допоміжних елементів.

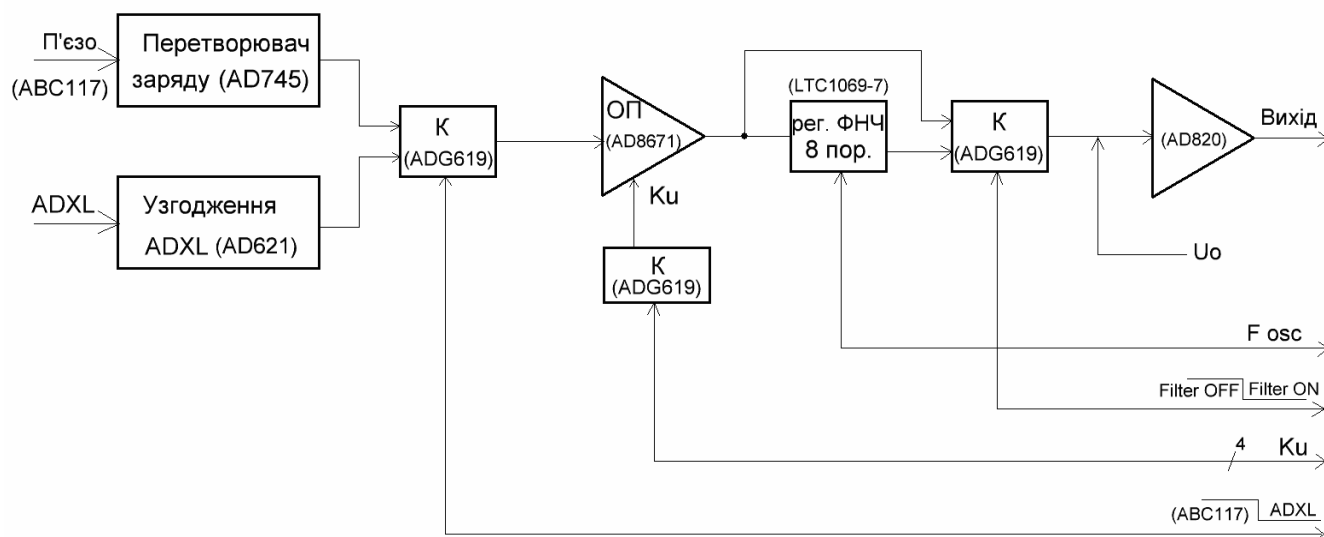


Рис. 8.9. Блок-схема узгодження перетворювача заряду з АЦП E20-10.

Перетворювач заряду побудований на спеціалізованій інтегральній мікросхемі фірми *Analog Devices* типу AD745 [227]. Для розширення функціональних можливостей, а також використання розроблених електронних давачів віброприскорення на базі сенсора ADXL001, що добре зарекомендували себе в роботі в реальних умовах, додатково введена схема узгодження сигналу з парафазним виходом згаданого сенсора з аналого-цифровим перетворювачем.

У залежності від умов експерименту сигнали з п'єзокерамічного або електронного давачів віброприскорення через комутатор під дією сигналу управління *abc117/adxl001* поступають у схему керованого підсилювача з дискретними коефіцієнтами передачі, а далі – на фазолінійний фільтр 8-го порядку, побудованого на мікросхемі фірми *Linear Technologi* LTC 1069-7 [178–180]. Також, в залежності від режиму запису вібросигналу (відфільтрований чи широкосмуговий), аналоговий сигнал поступає в вихідний буфер, з виходу якого за допомогою коаксіального кабелю подається на один із входів аналого-цифрового перетворювача E20-10 [190].

8.1.6. Схема електрична принципова узгодження перетворювача заряду з АЦП E20-10

Схема електрична принципова узгодження перетворювачів заряду з аналого-цифровим перетворювачем E20-10 показана на рис. 8.10.

Сигнал з акселерометра (давача віброприскорення) через антипаразитний опір R1 поступає у схему перетворювача заряду, побудованого на спеціалізованій інтегральній мікросхемі фірми *Analog Devices* типу AD745, яка являє собою високошвидкісний з низькими шумами *BiFET* операційний підсилювач. Вихідний сигнал такого перетворювача буде визначатися

$$U_{вих} = -\frac{Q_{вих}}{C3},$$

де $Q_{вих}$ – заряд на конденсаторі C3 в пікокулонах (пКл), C3 – конденсатор з величиною ємності в пікофарадах (пФ).

Значення ємності такого конденсатора вибирається близьким до сумарної ємності п'єзокерамічного акселерометра та погонної ємності кабелю, що з'єднує акселерометр із входом перетворювача. В нашому випадку величина ємності становить 1000 пФ, тоді чутливість такого перетворювача буде становити 1 мВ/пКл. Значення частоти зрізу – смуги пропускання в області низьких частот – буде визначатися величиною опору зворотного зв'язку та ємністю конденсатора C3 і визначається з рівності:

$$F_{зрізу} = \frac{1}{2\pi} (R_{зв.з} \times C3).$$

Для зменшення високочастотних наводок опір зворотного зв'язку реалізовано у вигляді Т-моста, еквівалентне значення якого буде визначатися як $R_{зв.з} = R3 \left(1 + \frac{R6}{R4} \right)$, та буде становити згідно з використаними елементами схеми близько 500 МОм.

Смуга пропускання сигналу в області низьких частот буде складати 0.32 Гц, що задовольняє більшість практичних задач. Конденсатор C3 повинен бути високої якості, з малими струмами витоку, з поліпропіленовою ізоляцією.

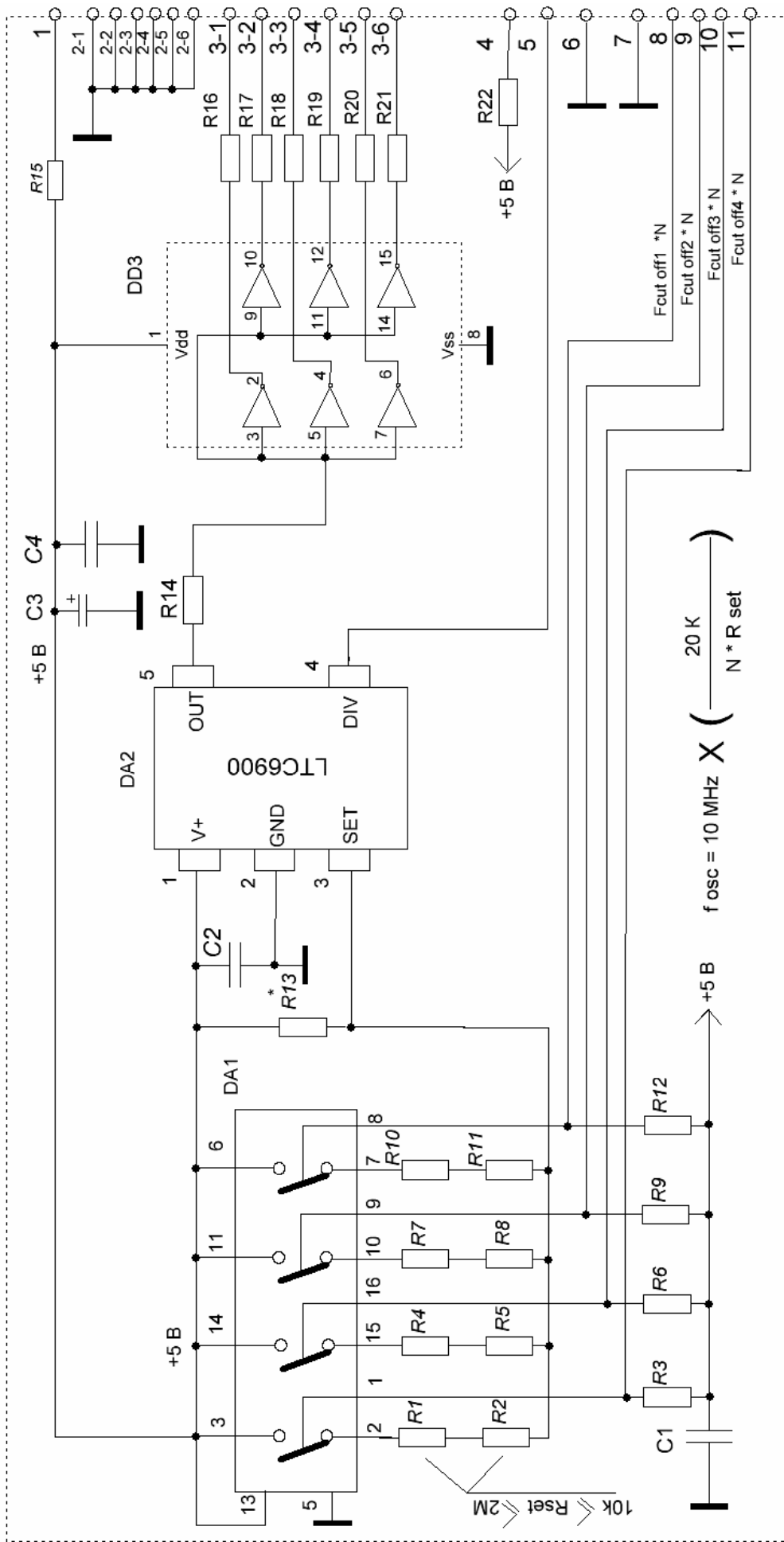
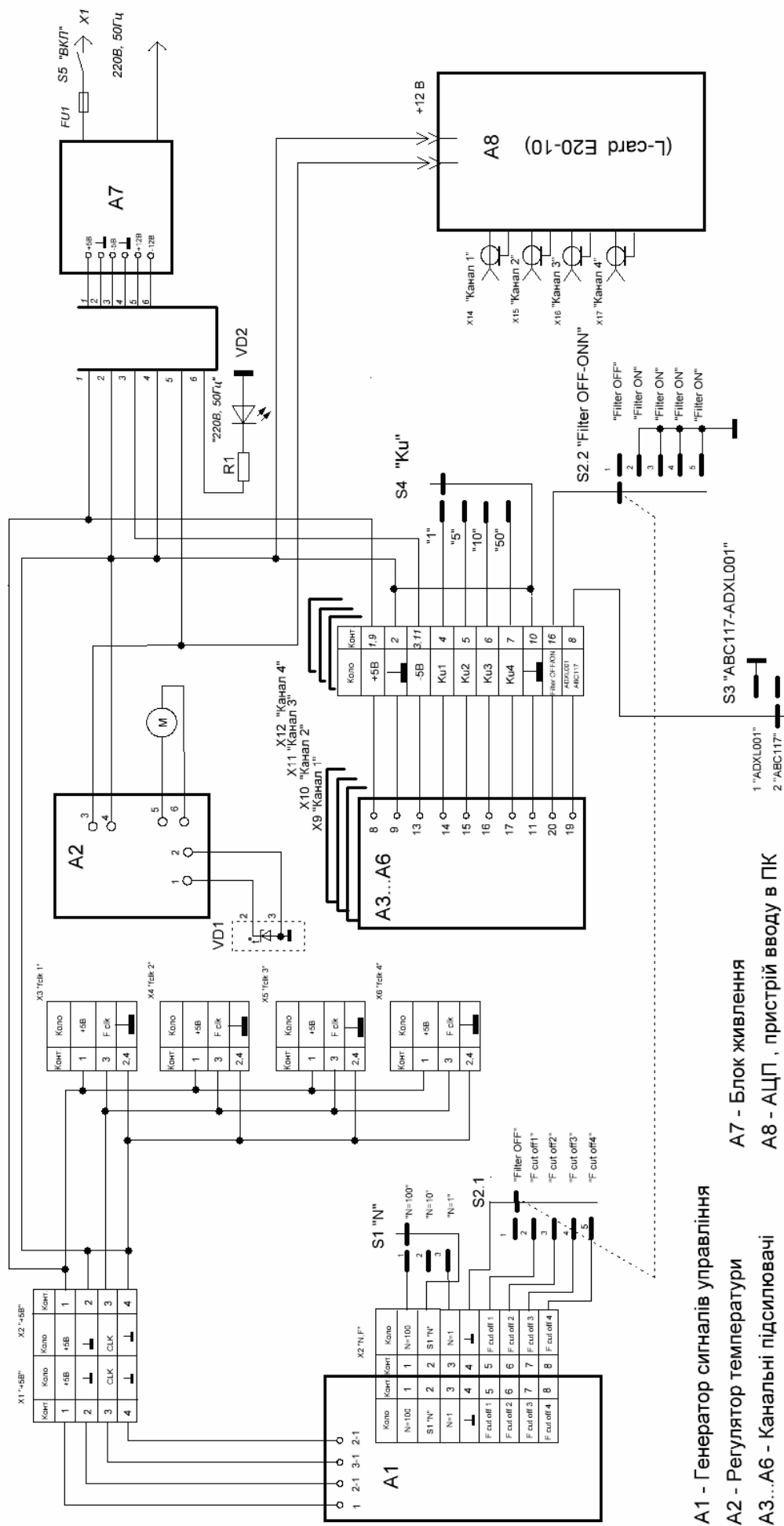


Рис. 8.10. Схема електрична принципова узгодження перетворювачів заряду з АЦП E20-10.

Для компенсації інструментальної похибки використовується резистор R5. Сигнал з виходу перетворювача поступає на комутатор DA2, побудований на мікросхемі ADG619 [178], характерною особливістю якого є малий опір (біля 4 Ом) включеного каналу при використанні біполярного живлення ± 5 В. На другий вхід комутатора поступає сигнал з різницевого підсилювача DA1.1 електронного акселерометра і в залежності від режиму роботи під дією сигналу управління abc117/adxl001, поступає на неінвертований вхід керованого підсилювача, в якості якого використаний операційний підсилювач AD8671 [24, 178], фірми *Analog Devices*. Коефіцієнт передачі задається дискретно та визначається як відношення опору R17 до одного з підключених за допомогою комутатора DA3 опорів R11, R12, R14 чи R15.

У якості комутатора DA3 використана мікросхема фірми *Analog Devices* типу ADG451 [26, 177]. Опір відкритого каналу становить не більше 4 Ом і, будучи підключеним послідовно з одним із резисторів R11, R12, R14 чи R15, не буде вносити суттєвої похибки в заданий коефіцієнт підсилення операційного підсилювача, побудованого на мікросхемі DA4. Сигнал управління формується перемикачем S4 “Ку” (див. рис. 8.11). Сигнал, підсилений до рівня, необхідного для забезпечення оптимального використання динамічного діапазону аналого-цифрового перетворювача, поступає одночасно на низькочастотний фазолінійний фільтр 8-го порядку (LTC1069-7 *Linear Technology*) та комутатор сигналу, реалізований на мікросхемі DA6, де, в залежності від умов запису вібраційного сигналу на вихідний буфер поступає широкосмуговий чи обмежений в області високих частот сигнал. Частота зрізу фільтра визначається як $F_{зрізу} = F_{clk} / 25$ де F_{clk} – частота управління смугою пропускання фільтра ТТЛ або КМОН рівня, шпаруватістю 50 % (± 10 %) та знаходиться в діапазоні від 50 кГц до 2.5 мГц.

Згідно з технічними даними послаблення (заникання) сигналу на подвійній частоті зрізу ($2F_{зрізу}$) становить не менше як -43 dB (141 раз по напрузі). Сигнал управління формується за допомогою перемикачів S1 та S2 в генераторі сигналів управління (див. рис. 8. 11).



A1 - Генератор сигналів управління
 A2 - Регулятор температури
 A3...A6 - Канальні підсилювачі

A7 - Блок живлення
 A8 - АЦП, пристрій вводу в ПК

Рис. 8.11. Система Пульс. Схема електрична принципова загальна.

Для зменшення комутаційних завад у схему введений резистор R18 величиною 1 кОм. Вихідний буферний підсилювач реалізований на мікросхемі DA7 в інверсному включенні з можливістю компенсації постійної складової (в основному за рахунок офсетної похибки мікросхеми фільтра в розмірі що не перевищує мінус 30 мВ) та обмеження проникнення високочастотних складових у загальний сигнал за допомогою RC фільтра, включеного в коло зворотного зв'язку вихідного буферного каскаду. Змонтована друкована плата узгодження перетворювачів заряду з АЦП E20-10 показана на рис. 8.12.

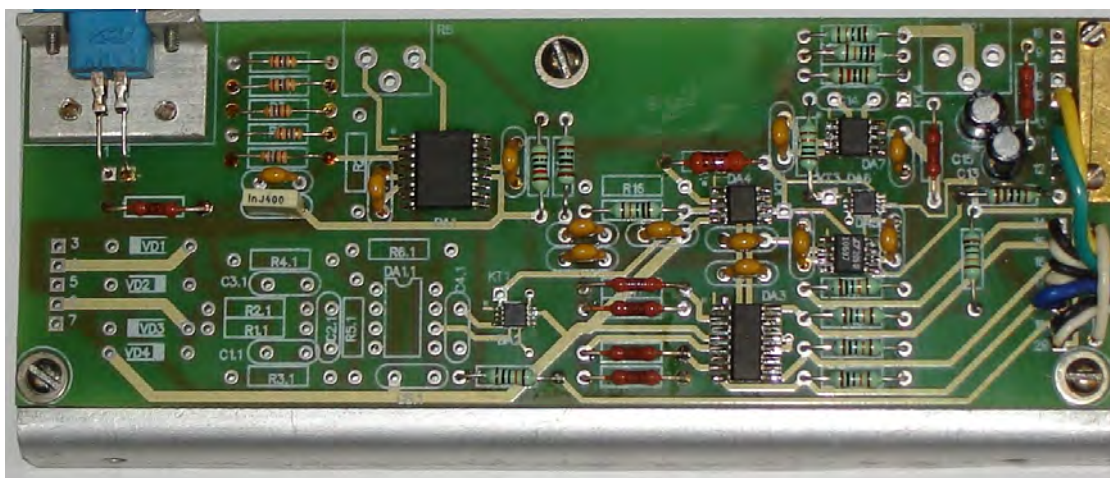


Рис. 8.12. Друкована плата узгодження перетворювачів заряду з АЦП E20-10.

8.1.7. П'єзокерамічний акселерометр типу ABC117

У якості давача віброприскорення вибраний п'єзокерамічний акселерометр типу ABC117, власна резонансна частота якого знаходиться в межах 100 кГц.

Таблиця 8.1. Основні електричні параметри.

коефіцієнт перетворення в амплітудному значенні по напрузі	$0.11 \pm 0,016$ мВ/г;
коефіцієнт перетворення в амплітудному значенні по заряду	$0,24 \pm 0,08$ пКл/г;
ємність, не більше	2200 ± 330 пФ;
власна резонансна частота, не менше	90 кГц;
нерівномірність амплітудно-частотної характеристики в діапазоні частот	від 100 до 5000 Гц ± 1 дБ;
основна похибка, не більше	± 10 %.

На рис. 8.13 показаний зовнішній вигляд п'єзокерамічного акселерометра типу АВС117. Давач виготовлений в металевому мініатюрному корпусі із нержавіючої сталі. Під'єднуючий кабель виконаний з високотемпературних вібростійких матеріалів. Матеріал п'єзокераміки – ЦТС 83Г (цирконат титанат свинцю).

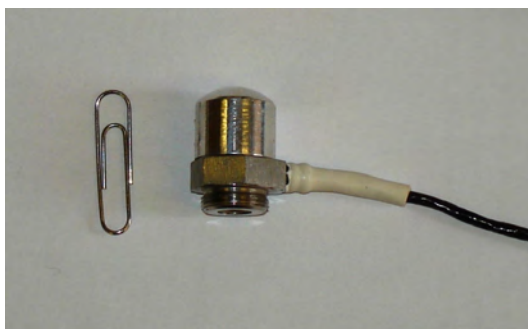


Рис. 8.13. П'єзокерамічний акселерометр типу АВС117.

Максимальна тактова частота аналого-цифрового перетворювача складає 10 МГц, що дасть можливість обробляти вхідні аналогові сигнали зі смугою пропускання до 1.25 МГц при одночасно включених 4 каналах відбору інформації. При одноканальному варіанті відбору частота вхідного вібраційного сигналу складає 5 МГц максимум.

8.1.8. Апробація вібродіагностичної системи ПУЛЬС на вібромеханічному стенді ВМС-1

Для апробації вібродіагностичної системи ПУЛЬС розроблений, виготовлений та введений в експлуатацію вібро-механічний стенд ВМС-1 [74] (рис. 8.14) з метою вивчення імовірнісних характеристик багатомірних вібраційних сигналів від елементів механізмів та вузлів, що обертаються.

Вібро-механічний стенд ВМС-1 змонтований на зварному металевому шасі прямокутної форми. На ньому закріплений асинхронний двигун фірми LENZE потужністю 2,2 кВт, що приводить за допомогою еластичного муфтового з'єднання в рух вал, закріплений в підшипниках (впресовані холодним методом), довжиною 720 мм.

Стенд складається з валу довжиною 50 см, що опирається на два підшипники кочення типу 6205. Вал приводиться в дію за допомогою двигуна.

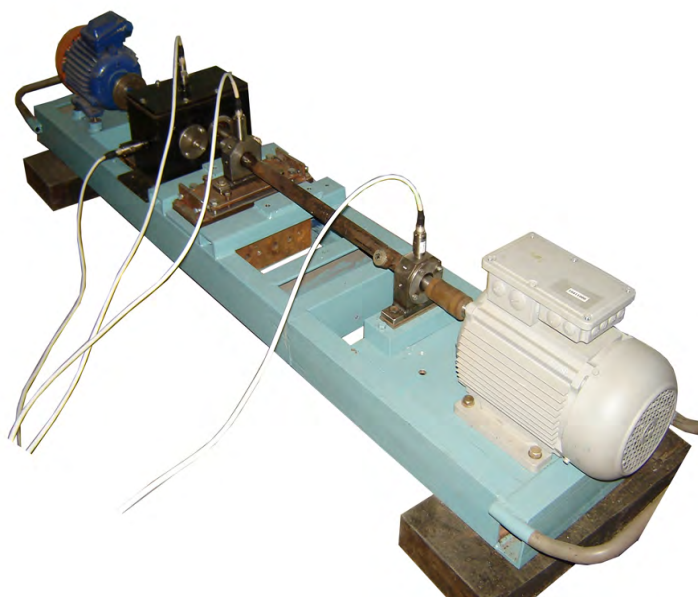


Рис. 8.14. Загальний вигляд стенду ВМС-1.

З однієї сторони вал жорстко кріпиться до шасі, а з другої – до рухомої платформи, що може переміщуватися по осям X та Y. Регулювання та фіксація вибраної позиції здійснюється за допомогою відповідних регулювальних гвинтів. Використовуючи регулюючі болти можна виставити різні дефекти кільця підшипника (дефект на зовнішньому чи внутрішньому кільці).

Живлення стенду:

- вид струму: змінний, однофазний, частотою 50 Гц;
- напруга: 220В;
- потужність: 2,2 кВт.

Частоту обертів валу можна плавно змінювати в межах від 5 Гц до 87 Гц (встановлено обмеження 50 Гц).

Також є можливість для монтування додаткового тіла на вал для досягнення дисбалансу обертів валу.

Структурна схема вібро-механічного стенду ВМС-1 показана на рис. 8.15.

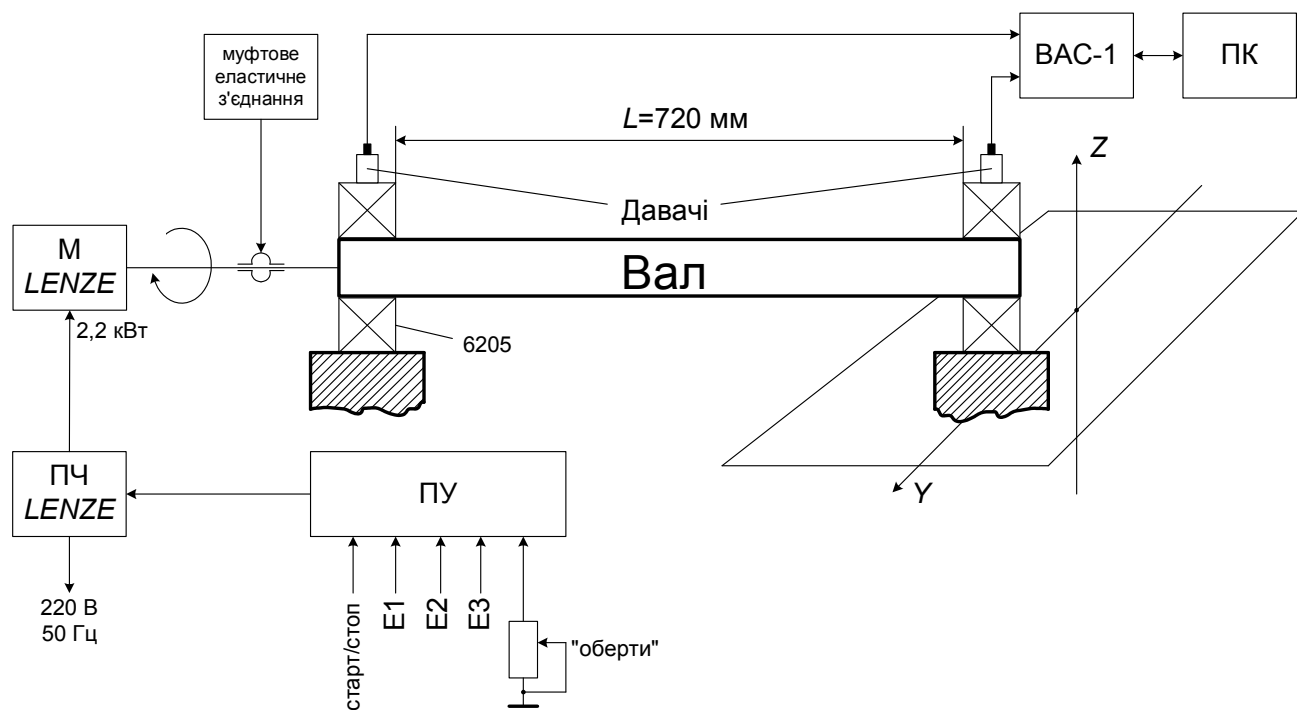


Рис. 8.15. Структурна схема вібро-механічного стенду ВМС-1.

Давачі вібрації кріпляться за допомогою магнітів або шпильок до стійок валу під кутом 90° один до одного. Кріплення давачів вібрації показано на рис. 8.16.

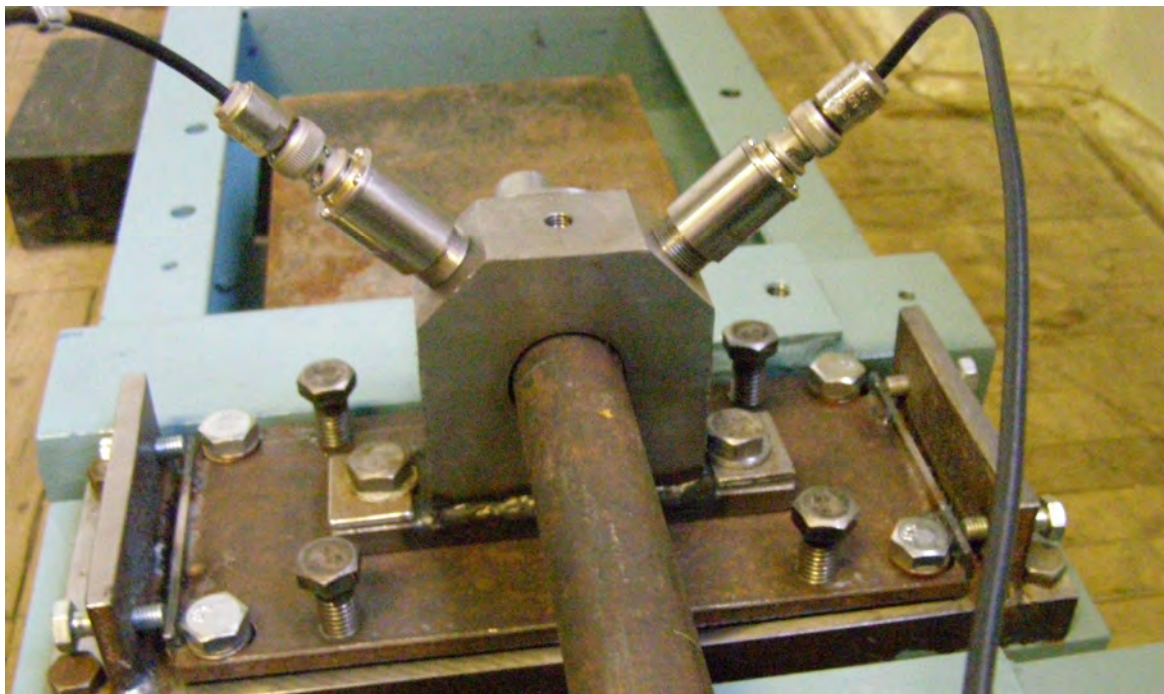


Рис. 8.16. Приклад кріплення давачів

Частота обертів, напрямок руху, закон управління V/f (прямолінійний чи квадратичний), гальмування постійним струмом, компенсація ковзання валу, час виходу на встановлений режим та інші параметри програмуються за допомогою перетворювача частоти LENZE ESMD222X2SFA та виносного пульта управління. З ціллю зменшення власних механічних коливань в стенд вмонтований баласт вагою біля 70 кг, а віброізоляція з підлогою приміщення досягається використанням гумових прокладок товщиною біля 60 мм.

Можливість програмно встановлювати перемикачем (до 4 шт.) на виносному пульті управління відповідних інструкцій з переліку можливих для даного типу частотних перетворювачів.

Передбачені місця (8 шт.), з ціллю відбору багатомірних вібраційних сигналів, для монтажу датчиків (акселерометрів) як електронного типу, так і давачів побудованих з використанням п'єзокераміки за допомогою з'єднання шпилькою чи магніту.

Передбачене місце для монтажу редуктора та двигуна-редуктора або іншого пристрою як навантаження.

Робочий хід зміщення рухомої платформи по осях X та Y – не менше 5 мм.

Габаритні розміри стенду, мм – не більше $2050 \times 350 \times 350$.

Габаритні розміри стенду із захисним кожухом-сіткою та гумовими прокладками, мм – не більше $2050 \times 550 \times 600$.

Вага стенду, кг – не більше 200.

8.1.9. Загальне призначення

Таким чином, на основі розвинутих методів статистичного аналізу ПНВ сигналів у Фізико-механічному інституті ім. Г.В. Карпенка НАН України з використанням вібро-механічного стенду ВМС-1 створена та апробована вібродіагностична система ПУЛЬС, яка забезпечує:

- реєстрацію;
- вимірювання;
- аналогову низькочастотну фільтрацію сигналу вібрації;

- підсилення сигналу вібрації;
- перетворення аналогового сигналу в цифровий код;
- запис цифрового сигналу в пам'ять персонального портативного комп'ютера;
- основні види цифрової фільтрації, перетворення Гільберта, диференціювання сигналу вібрації;
- статистичний спектрально-кореляційний аналіз сигналів вібрації в стаціонарному наближенні;
- оцінку періодів математичного сподівання сигналів вібрації як реалізацій ПКВП;
- оцінку періодів кореляційної функції сигналів вібрації як реалізацій ПКВП;
- виділення детермінованої складової вібросигналу та обчислення її параметрів;
- виділення періодично нестационарної складової та її періодично спектрально-кореляційний аналіз методами ПКВП;
- виділення модулюючих стаціонарних компонентів вібросигналу та їх статистичний аналіз;
- побудову параметричних моделей сигналів вібрації та обчислення діагностичних ознак;
- статистичне моделювання ПКВП-моделей вібросигналів із заданою спектрально-кореляційною структурою;
- статистичний аналіз поліритміки сигналів за методами майже ПКВП;
- оцінку вірогідності результатів статистичного спектрально-кореляційного аналізу періодично і майже періодично корельованих нестационарних сигналів вібрації.
- взаємокореляційний аналіз багатомірних вібраційних сигналів;
- взаємоспектральний аналіз багатомірних вібраційних сигналів.

8.2. Взаємний аналіз вібраційних сигналів центрифуги

Проведемо детальний аналіз структури вібраційних сигналів відібраних з підшипникових вузлів центрифуги Flottweg Z4E (P=19 кВт, N=3650 об/хв.) за допомогою вібродіагностичної системи ПУЛЬС в режимі роботи при навантаженні. Відповідно до стандартів ДСТУ ISO 2372, ISO 10816-1-97 даний електродвигун відноситься до 2 класу механізмів. Частоту дискретизації при відборі вібраційних сигналів вибрано 10 кГц, час запису реалізацій 20 с. Згідно [77] така довжина реалізації вібраційного сигналу забезпечує похибку обробки не більше 5%.

На рис. 8.17 наведено фрагменти реалізації вертикальної та горизонтальної складових вібрації. З наведених рисунків чітко видно коливання основної гармонічної складової (60 Гц).

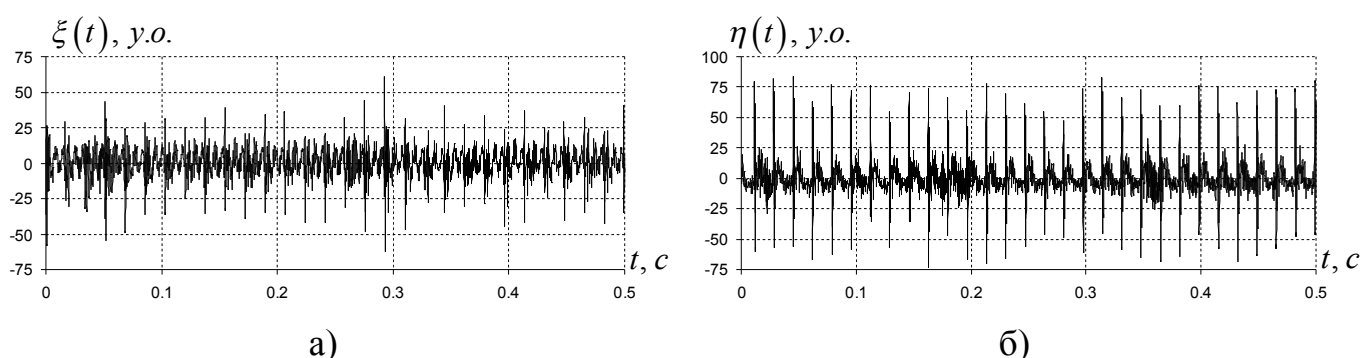


Рис. 8.17. Фрагмент реалізації вертикальної (а) та горизонтальної (б) складової вібрації центрифуги.

Графіки кореляційної функції (рис. 8.18) вібраційного сигналу в стаціонарному наближенні вказує на те, що у сигналі присутня потужна детермінована складова, а співвідношення сигнал/шум для вертикальної складової складає 2:1, а для горизонтальної – 4:1. Хвости кореляційної функції як для горизонтальної так і вертикальної складових мають характер незаникаючих коливань і містять потужні викиди з частотою, що відповідає частоті обертання вала (60 Гц).

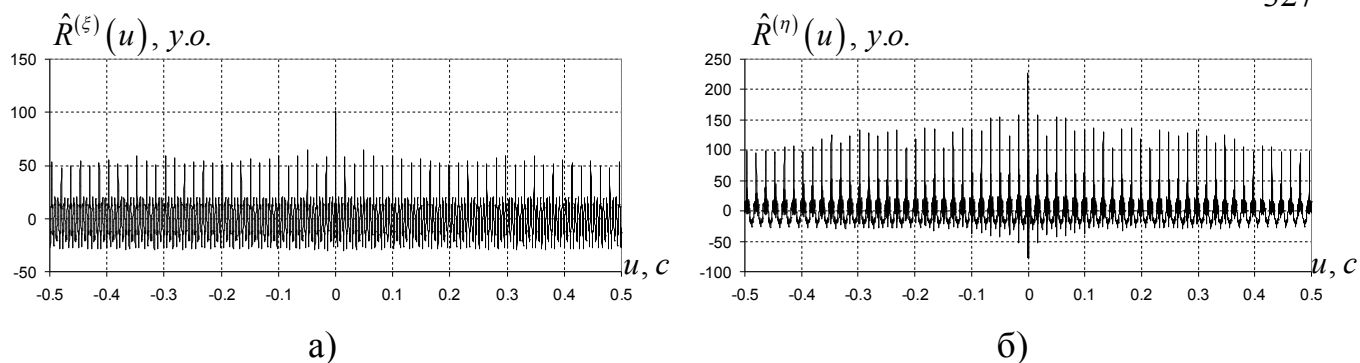


Рис. 8.18. Кореляційна функція вертикальної (а) та горизонтальної (б) складової вібрації центрифуги.

Спектральна густина потужності вертикальної і горизонтальної складових вібраційного сигналу в стаціонарному наближенні містить основну гармонічну складову, що відповідає частоті обертання вала (60 Гц), та кратні до неї гармоніки, при чому для вертикальної складової найпотужнішою є третя гармоніка на яку припадає понад 70% потужності детермінованих коливань вібраційного (рис. 8.19а). Для горизонтальної складової спектральна густина потужності вібраційного сигналу в стаціонарному наближенні зосереджена у смузі частот до 2500 Гц (рис. 8.19б).

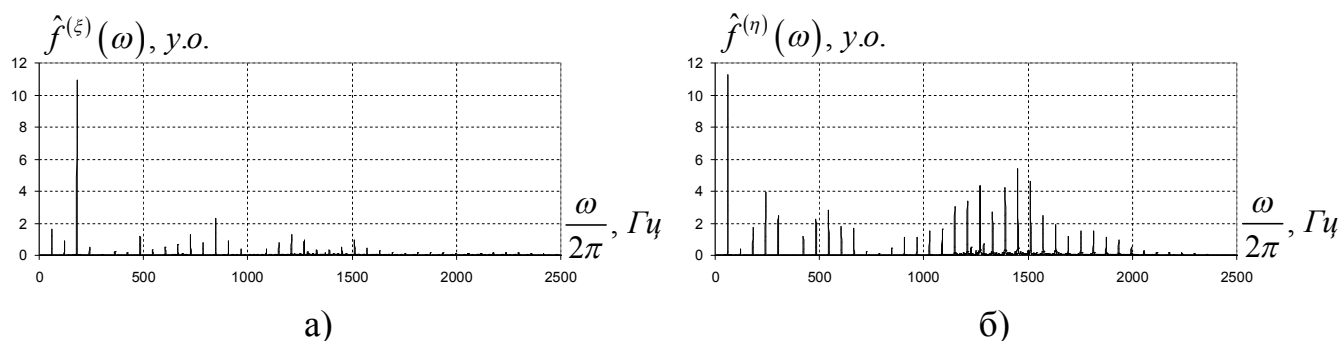


Рис. 8.19. Спектральна густина вертикальної (а) та горизонтальної (б) складової вібрації центрифуги.

З використанням МНК розділено детерміновану та стохастичну складові вібраційного сигналу та проведено аналіз кожної з них окремо. На рис. 8.20 наведено графіки математичного сподівання вертикальної та горизонтальної складових сигналу, на яких чітко проявляються коливання основного періоду, при чому для горизонтальної складової спостерігаються викиди з частотою, що відповідає частоті обертання вала.

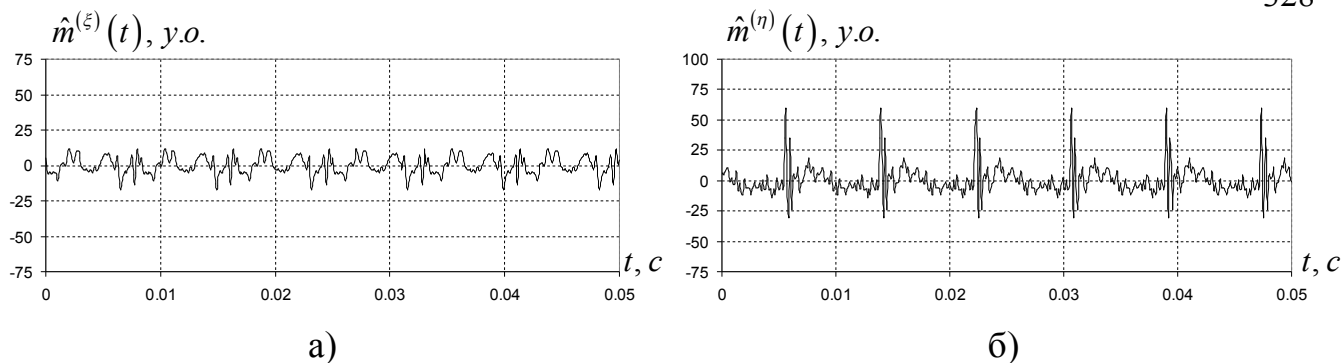


Рис. 8.20. Математичне сподівання вертикальної (а) та горизонтальної (б) складової вібрації центрифуги.

Компоненти Фур'є математичного сподівання для вертикальної і горизонтальної складових зображено на рис. 8.21. Для вертикальної складової вібрації центрифуги значущими є чотирнадцять гармонік, а для горизонтальної – тринадцять.

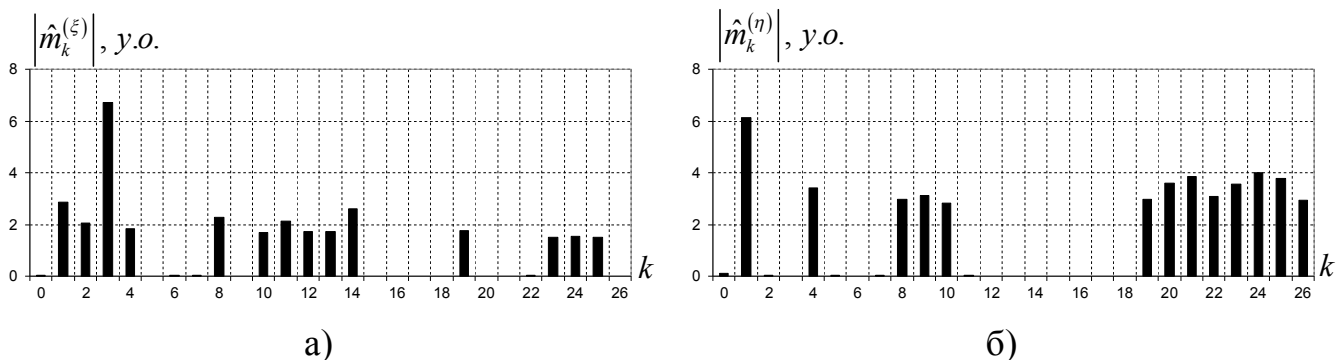


Рис. 8.21. Компоненти математичного сподівання вертикальної (а) та горизонтальної (б) складової вібрації центрифуги.

Графік стохастичної складової для вертикальної і горизонтальної складових вібраційного сигналу центрифуги показано на рис. 8.22. З графіків видно, що в стохастичних складовій присутні викиди з частотою, що відповідає частоті обертання валу.

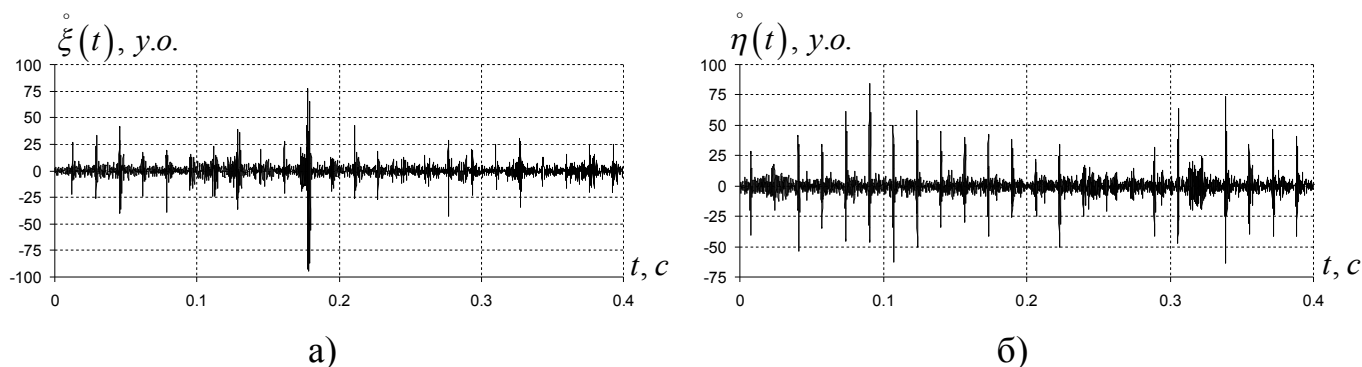


Рис. 8.22. Стохастична складова сигналу вертикальної (а) та горизонтальної (б) складової вібрації центрифуги.

Зникаючий хвіст кореляційної функції для вертикальної та горизонтальної складової вібрації центрифуги (рис. 8.23) свідчить про відсутність у ній детермінованих коливань. З графіків кореляційних функцій чітко видно, що на їх хвостах присутні викиди, що відповідають частоті обертання валу (60 Гц).

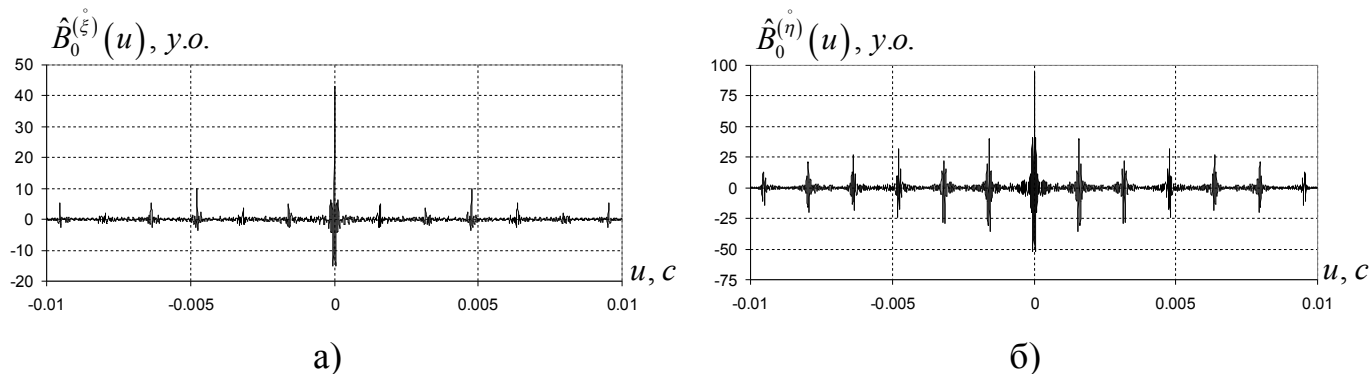


Рис. 8.23. Кореляційна функція стохастичної складової вертикальної (а) та горизонтальної (б) складової вібрації центрифуги.

Спектральна густина потужності стохастичної складової вертикальної вібрації в стаціонарному наближенні має резонансне підняття в області частот від 500 Гц до 2500 Гц, а горизонтальної вібрації – в області частот від 1000 Гц до 2000 Гц і містить піки кратні до частоти обертання валу (рис. 8.24).

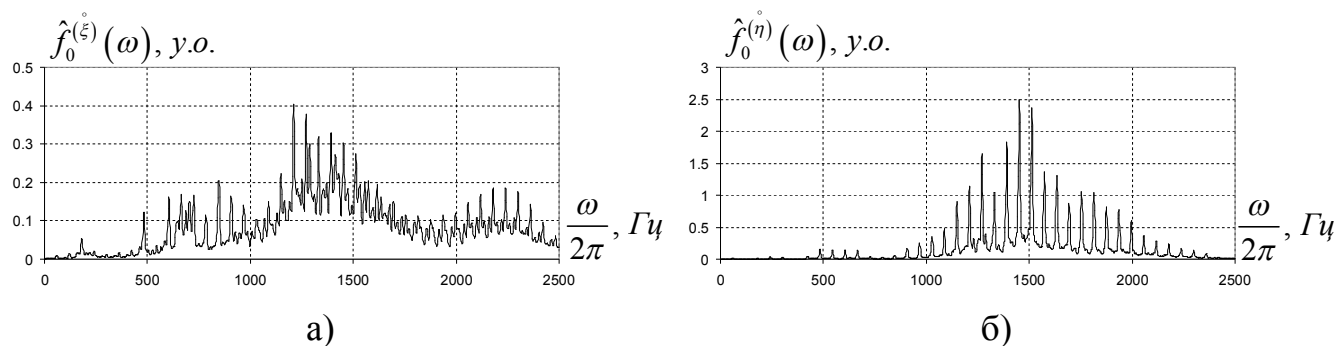


Рис. 8.24. Спектр стохастичної складової вертикальної (а) та горизонтальної (б) складової вібрації центрифуги.

Використовуючи когерентний кореляційний функціонал для пошуку прихованих періодичностей 2-ого порядку у стохастичних складових вертикальної і горизонтальної вібрації виявлено потужну модуляцію стаціонарними випадковими процесами частоти 60,45 Гц, що відповідає частоті обертання валу. Залежність даних функціоналів від пробного періоду показано на рис. 8.25.

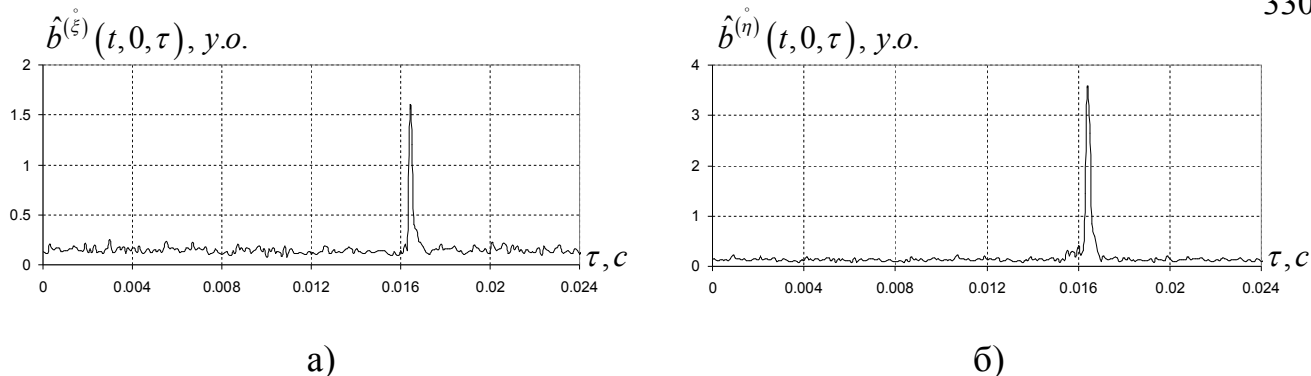


Рис. 8.25. Функціонал визначення періоду стохастичної складової вертикальної (а) та горизонтальної (б) складової вібрації центрифуги.

Оцінивши значення періоду нестационарності проведемо повний ПКВП аналіз структури стохастичної складової вібраційного сигналу. За допомогою компонентного методу оцінено дисперсію та її компоненти Фур'є. Відношення мінімального значення дисперсії для вертикальної складової за період до максимального складає 0,03 (рис. 8.26а), а для горизонтальної – 0,035 (рис. 8.26б).

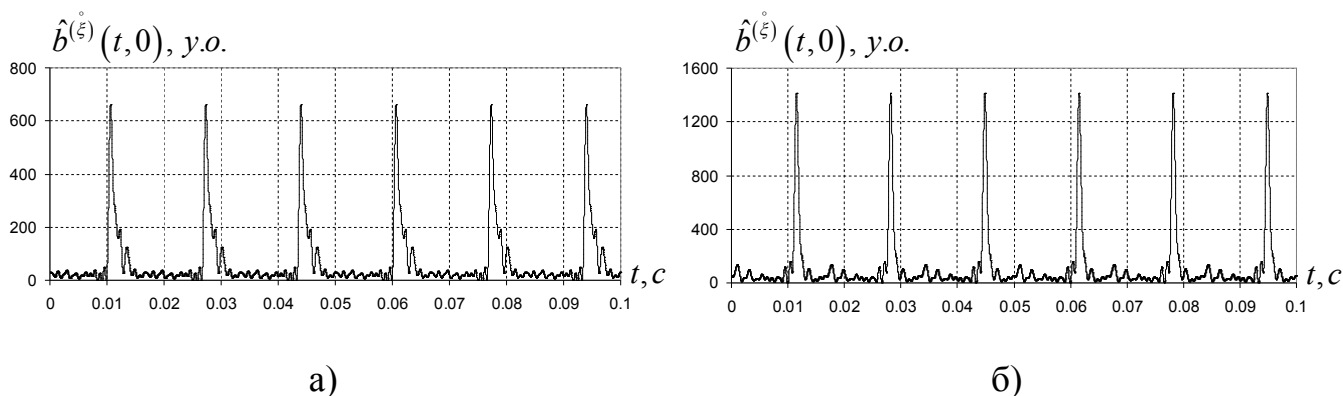


Рис. 8.26. Дисперсія стохастичної складової вертикальної (а) та горизонтальної (б) складової вібрації центрифуги.

Серед значущих компонентів дисперсії для вертикальної складової вібраційного сигналу центрифуги є перші вісім (рис. 8.27а), а для горизонтальної – сімнадцять (рис. 8.27б).

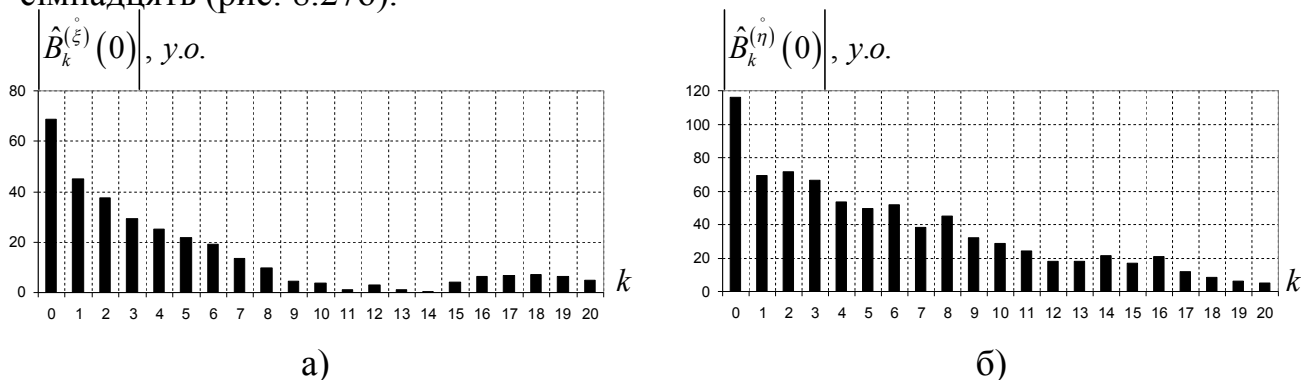


Рис. 8.27. Компоненти дисперсії стохастичної складової вертикальної (а) та горизонтальної (б) складової вібрації центрифуги.

Проведемо аналіз нульових (рис. 8.28), перших п'яти косинусних кореляційних компонентів вертикальної та горизонтальної стохастичних складових кореляційної функції стохастичної складової сигналу центрифуги (рис. 8.29–8.33).

Як видно з наведених рисунків усі складові косинусних кореляційних компонентів вертикальної та горизонтальної складових мають вигляд швидкозникаючих коливань, на хвостах яких присутні потужні викиди. Значущими є нульові кореляційні компоненти вертикальної та горизонтальної складових, другий і четвертий косинусний компонент вертикальної складової вібрації, а також перший, другий, третій четвертий і п'ятий косинусний компонент горизонтальної складової. Рештою складовими можна знехтувати.

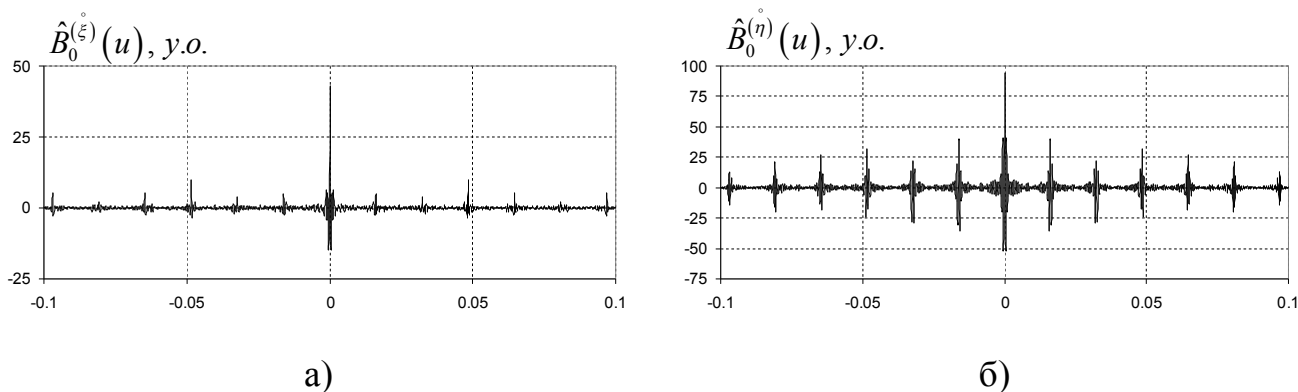


Рис. 8.28. Нульовий кореляційний компонент вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації центрифуги.

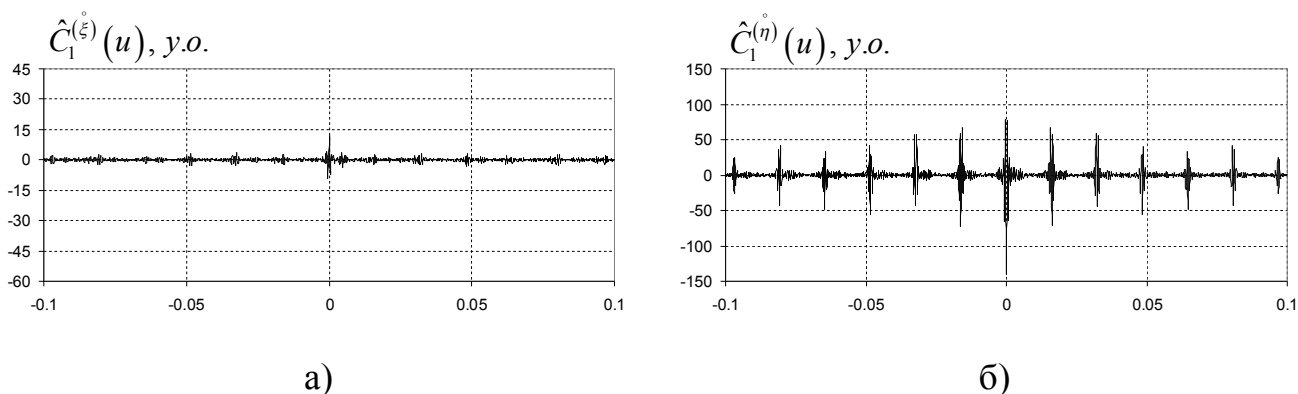


Рис. 8.29. Перший косинусний кореляційний компонент вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації центрифуги.

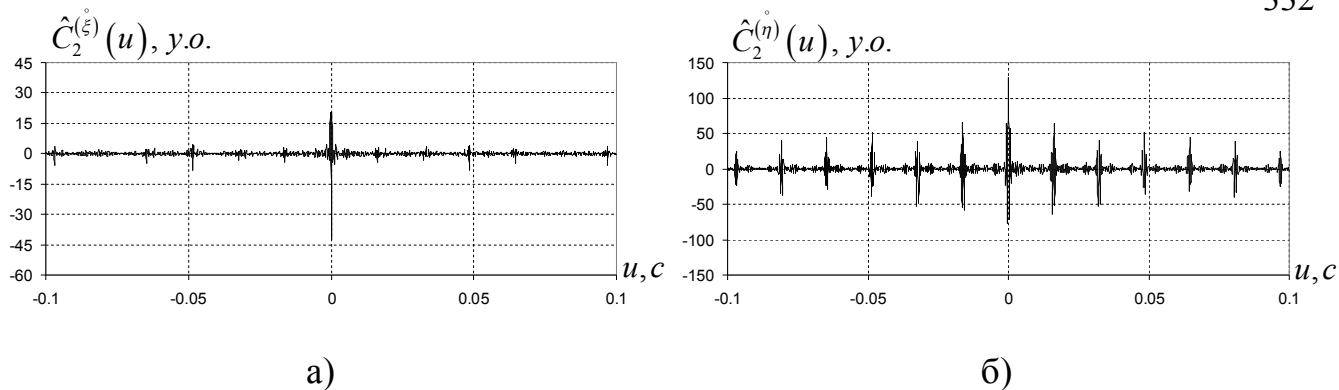


Рис. 8.30. Другий косинусний кореляційний компонент вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації центрифуги.

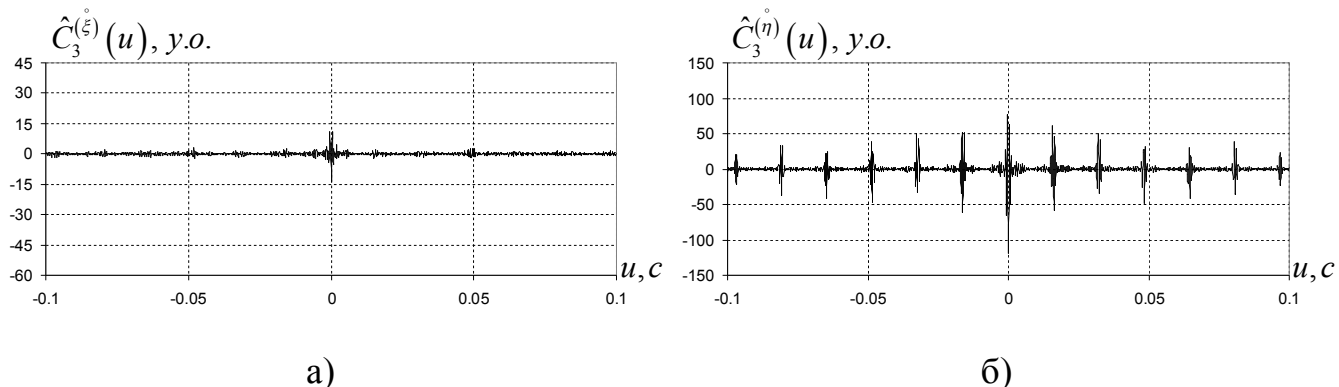


Рис. 8.31. Третій косинусний кореляційний компонент вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації центрифуги.

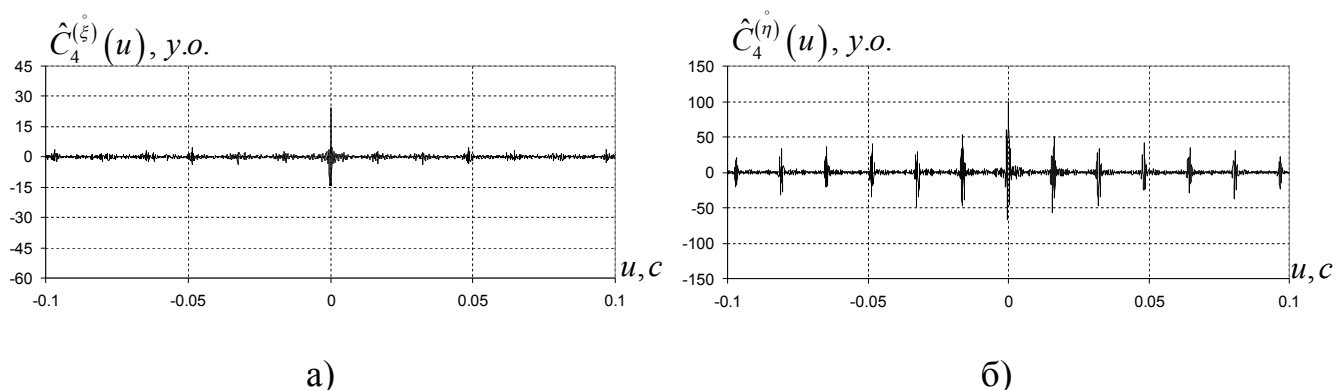


Рис. 8.32. Четвертий косинусний кореляційний компонент вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації центрифуги.

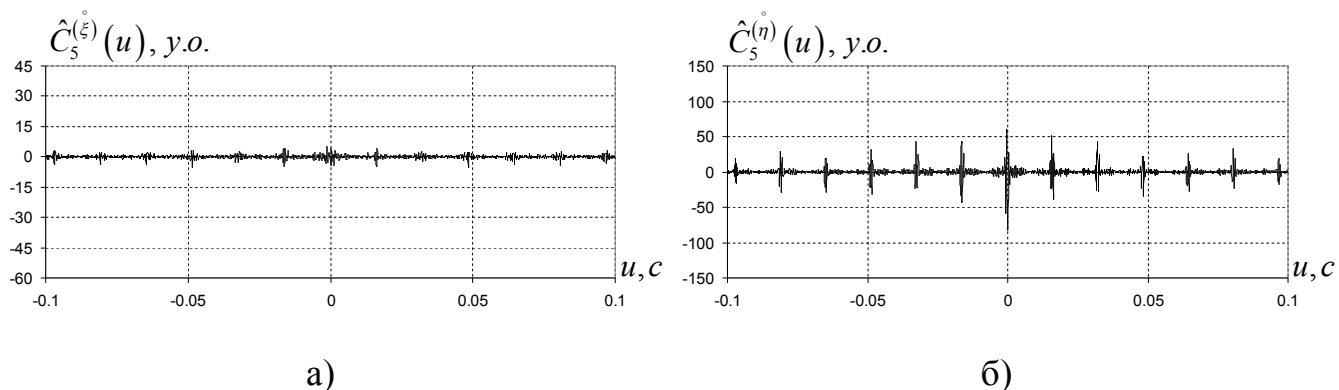


Рис. 8.33. П'ятий косинусний кореляційний компонент вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації центрифуги.

Проведемо також аналіз перших п'яти синусних кореляційних компонентів вертикальної та горизонтальної складових кореляційної функції стохастичної складової сигналу (рис. 8.34–8.38). Як видно з наведених рисунків складові синусних кореляційних компонентів мають вигляд швидкозникаючих коливань, на хвостах яких присутні потужні викиди. Значущими є перший, другий і третій синусний компоненти вертикальної складової вібрації, а також четвертий і п'ятий синусний компоненти горизонтальної складових вібрації.

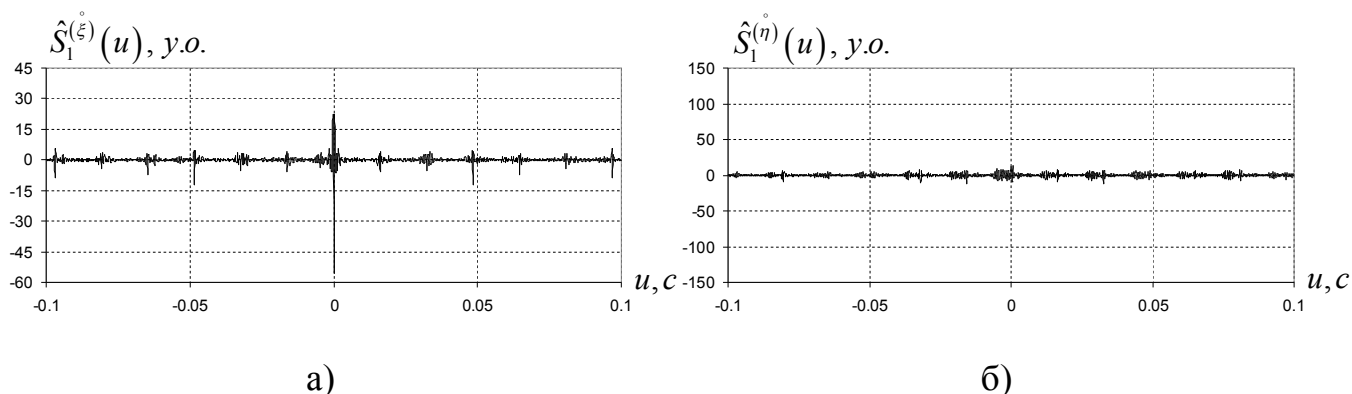


Рис. 8.34. Перший синусний кореляційний компонент вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації центрифуги.

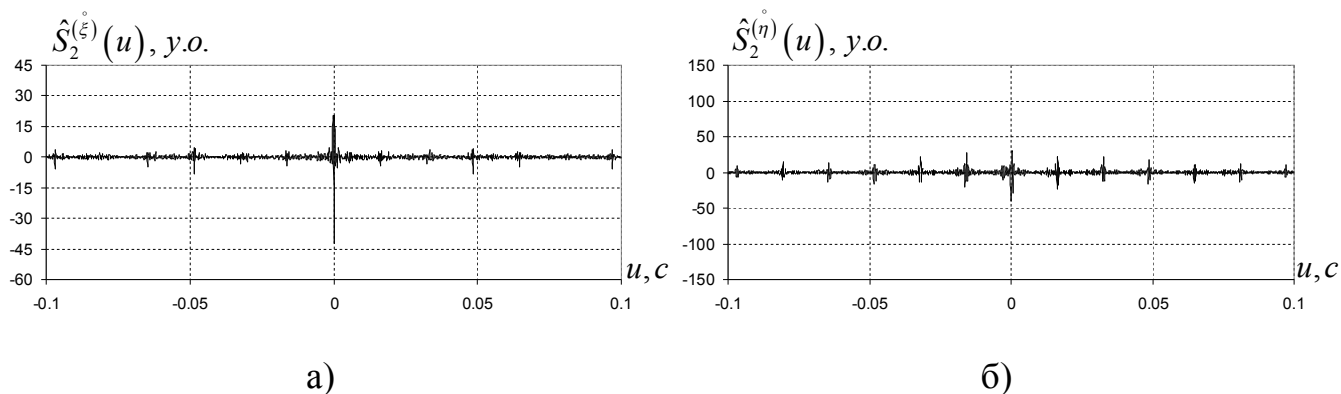


Рис. 8.35. Другий синусний кореляційний компонент вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації центрифуги.

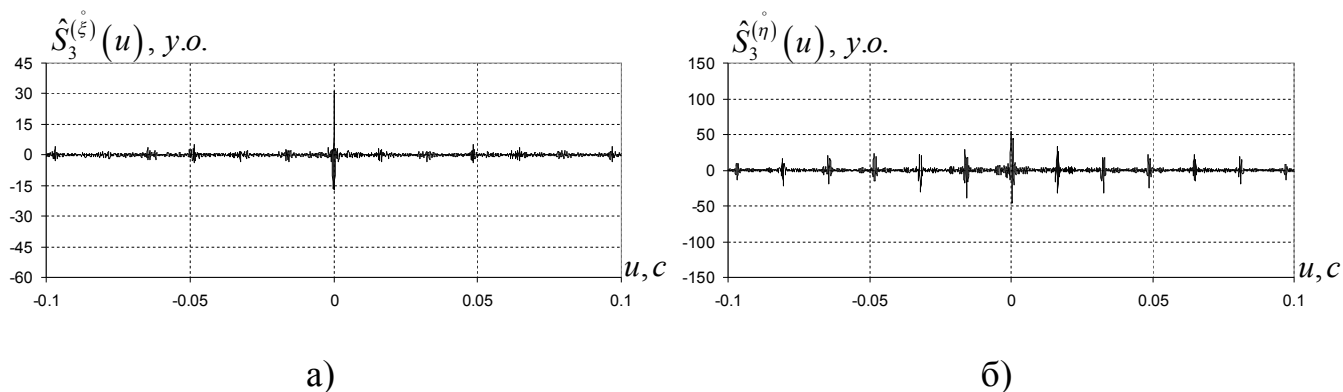


Рис. 8.36. Третій синусний кореляційний компонент вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації центрифуги.

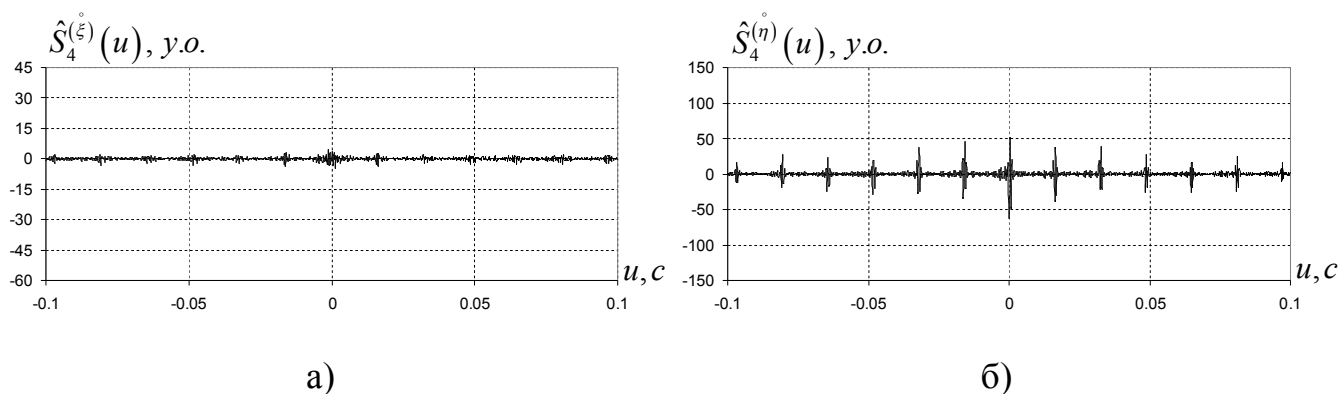


Рис. 8.37. Четвертий синусний кореляційний компонент вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації центрифуги.

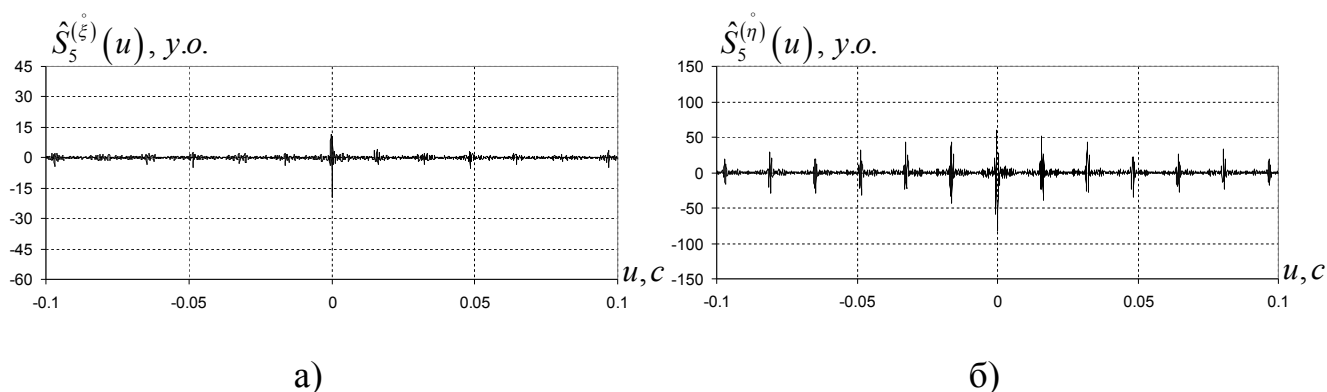


Рис. 8.38. П'ятий синусний кореляційний компонент вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації центрифуги.

Нульовий спектральний компонент, а також дійсні та уявні частини спектральних компонентів спектральної густини стохастичної складової для вертикальної і горизонтальної вібрацій наведено на рис. 8.39–8.49. З наведених графіків добре видно, що дійсна і уявна частини вертикальної і горизонтальної складових спектральних компонентів має піки на частотах, що відповідають частоті обертання валу, та кратних до неї частотах, а також зосереджені в смугах частот: вертикальна від 500 до 2500 Гц, горизонтальна – від 1000 до 2000 Гц.

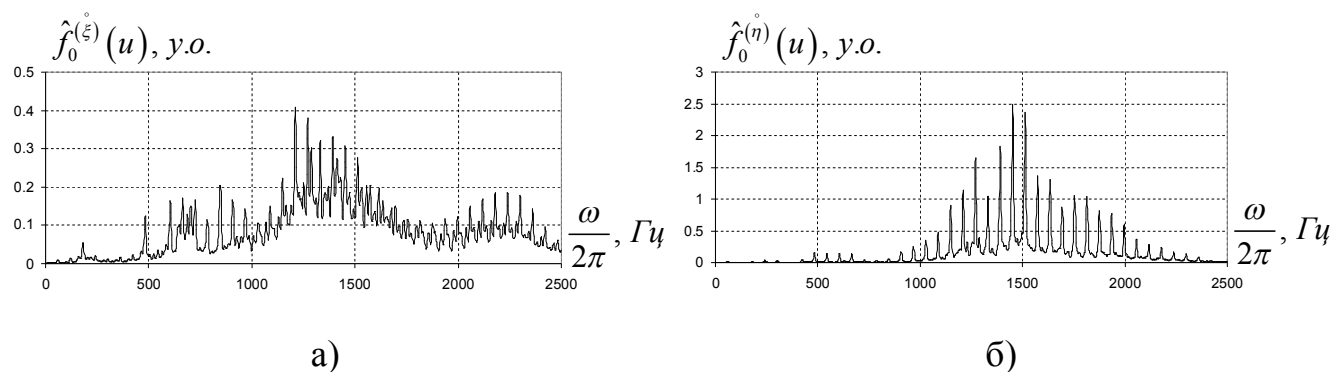


Рис. 8.39. Нульовий спектральний компонент вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації центрифуги.

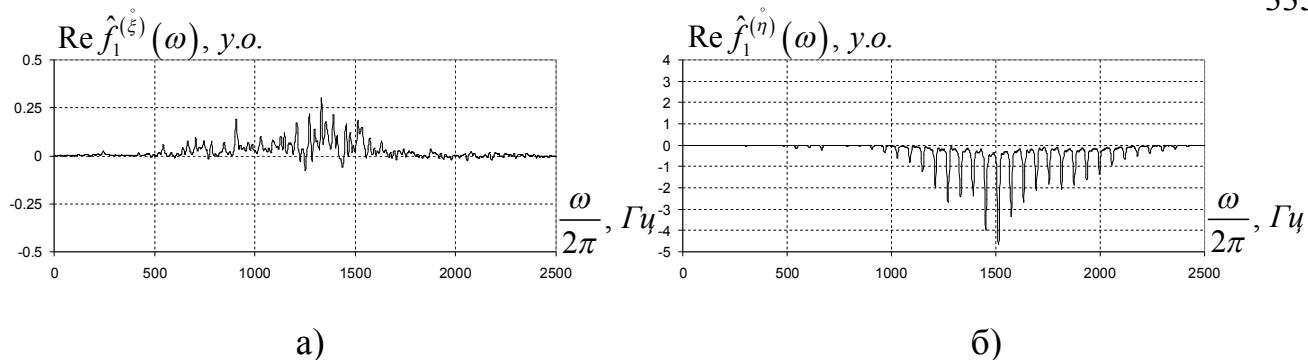


Рис. 8.40. Дійсна частина першого спектрального компонента вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації центрифуги.

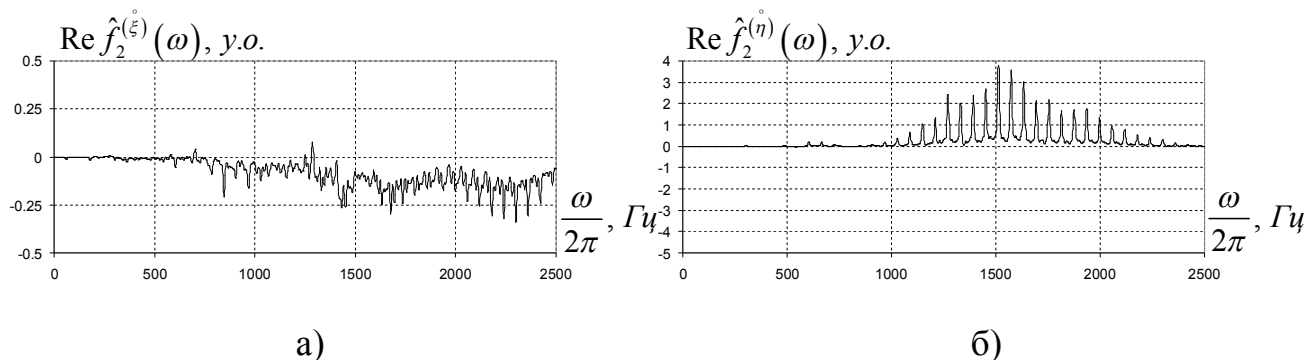


Рис. 8.41. Дійсна частина другого спектрального компонента вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації центрифуги.

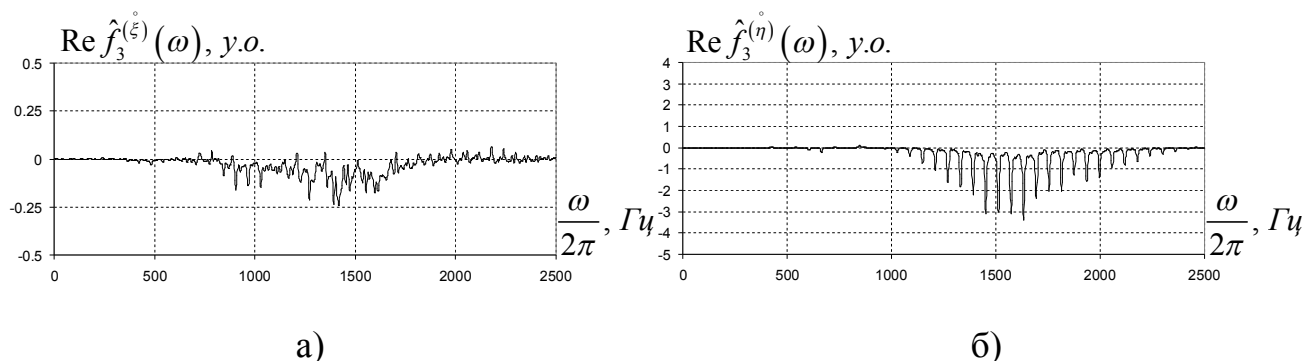


Рис. 8.42. Дійсна частина третього спектрального компонента вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації центрифуги.

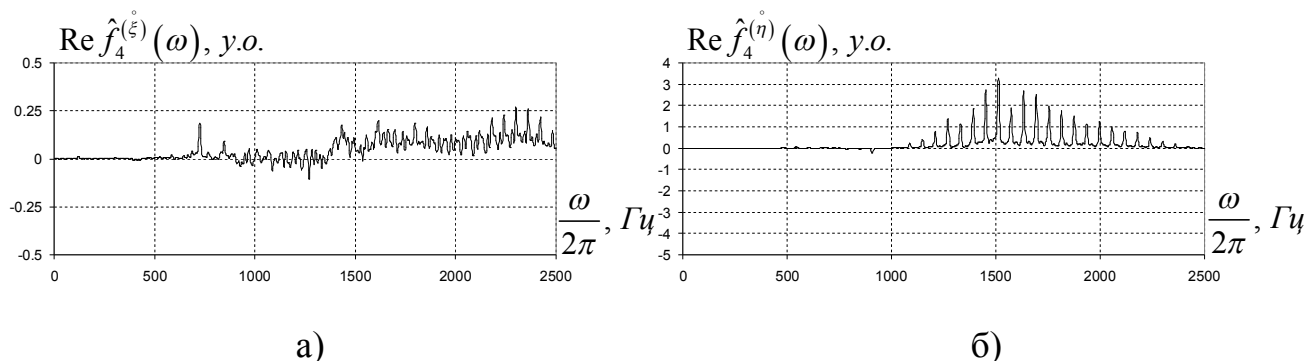


Рис. 8.43. Дійсна частина четвертого спектрального компонента вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації центрифуги.

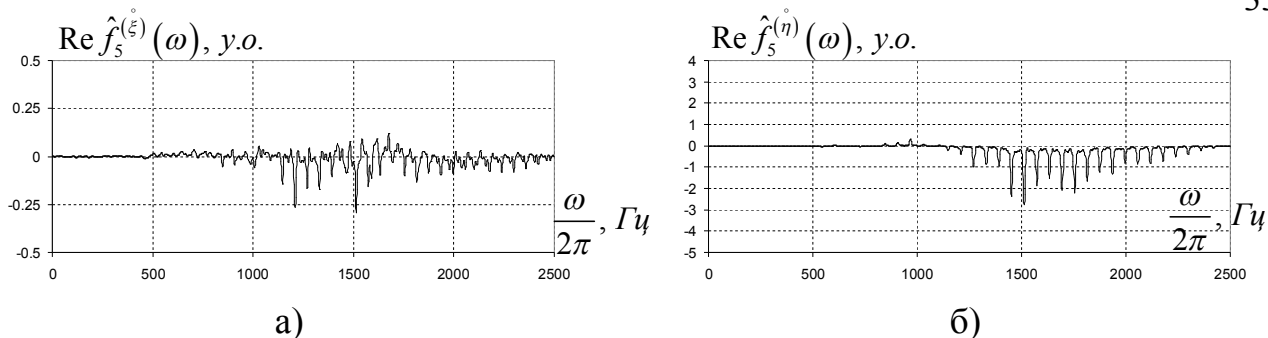


Рис. 8.44. Дійсна частина п'ятого спектрального компонента вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації.

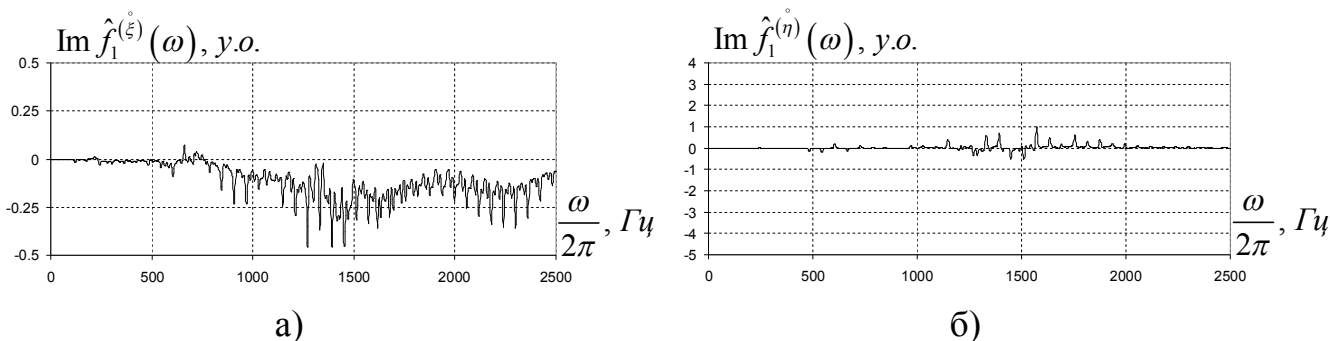


Рис. 8.45. Уявна частина першого спектрального компонента вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації.

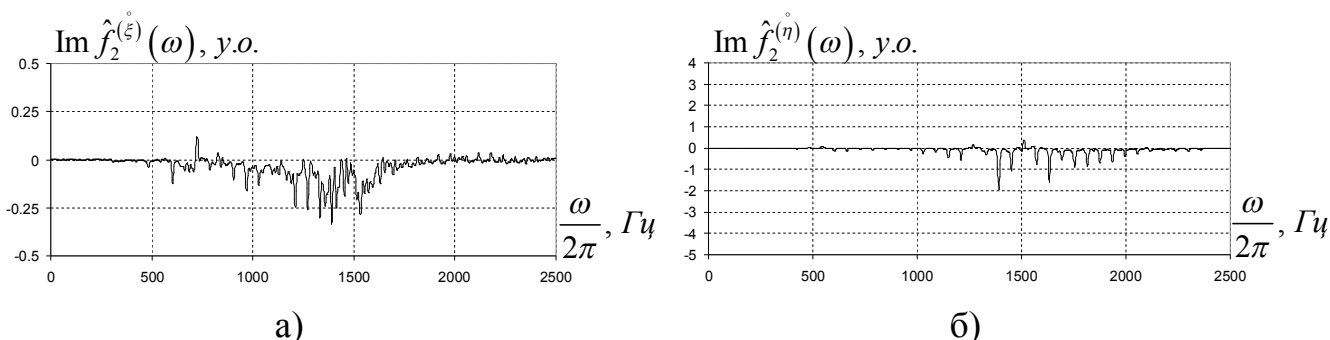


Рис. 8.46. Уявна частина другого спектрального компонента вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці.

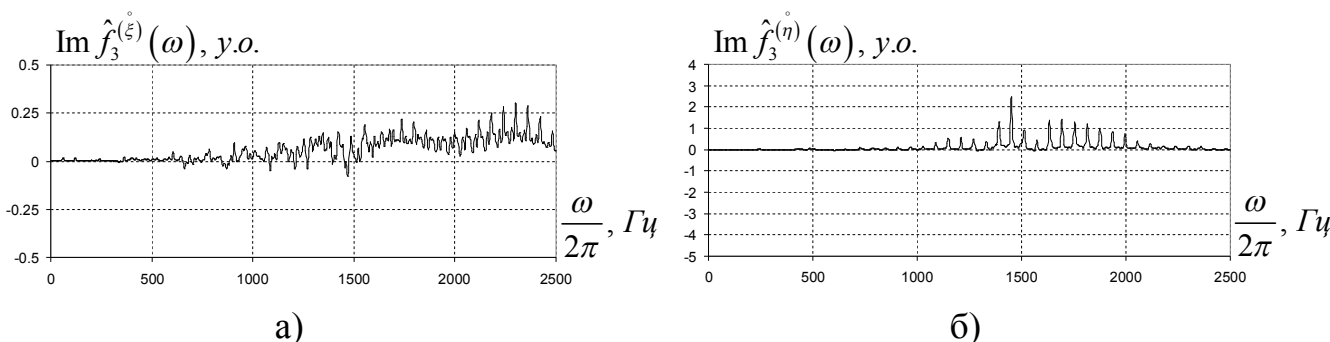


Рис. 8.47. Уявна частина третього спектрального компонента вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації.

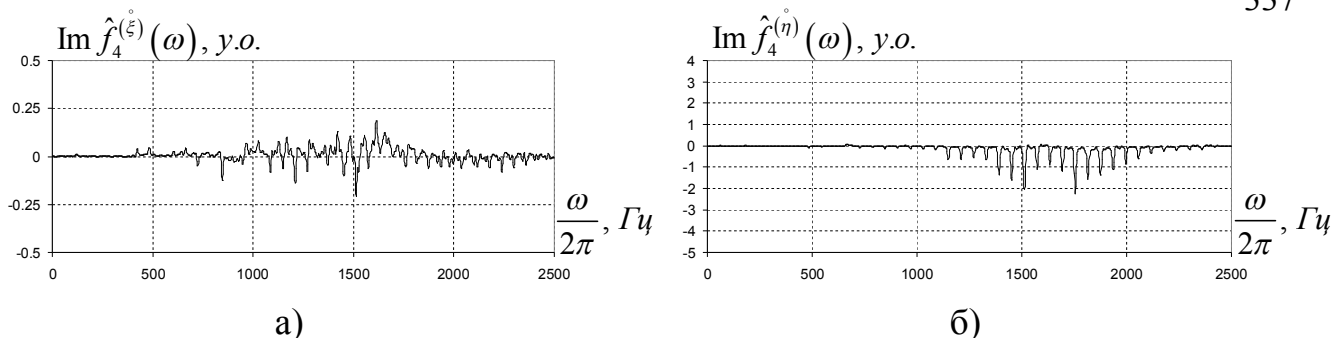


Рис. 8.48. Уявна частина четвертого спектрального компонента вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації.

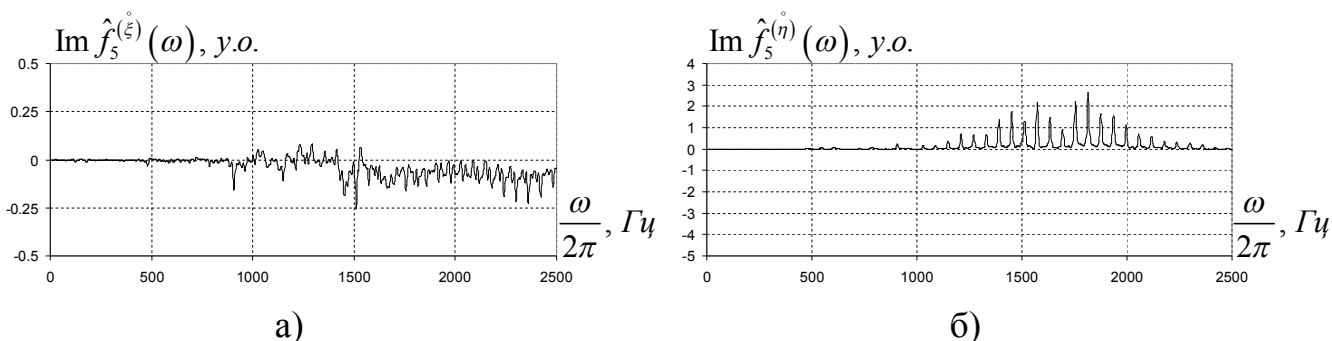


Рис. 8.49. Уявна частина п'ятого спектрального компонента вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації.

Проведемо взаємкореляційний аналіз вертикальної та горизонтальної складових вібраційного сигналу. На основі функціоналу (7.1.1) визначимо період нестационарності сигналів. Залежність функціоналу від пробного періоду показана на рис. 8.50. З отриманого графіка добре видно, що період нестационарності рівний приблизно 0.0165 с, що відповідає частоті обертання валу.

Графіки взаємкореляційних компонентів наведені на рис. 8.51–8.61. Хвости взаємкореляційних компонентів містять потужні викиди з частотою обертання валу. Структуру взаємкореляційної функції визначають нульовий взаємкореляційний компонент, косинусна складова другого і четвертого взаємкореляційного компонентів, а також синусні складові першого, третього, та п'ятого взаємкореляційних компонентів. Рештою складових можна знехтувати.

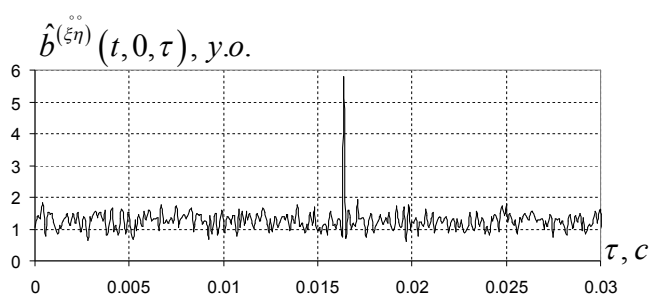


Рис. 8.50. Залежність функціоналу взаємної нестационарності.

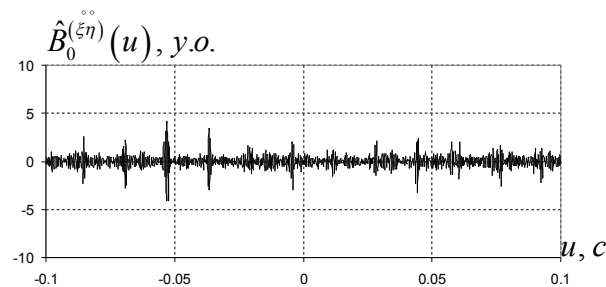


Рис. 8.51. Нульовий взаємкореляційний компонент.

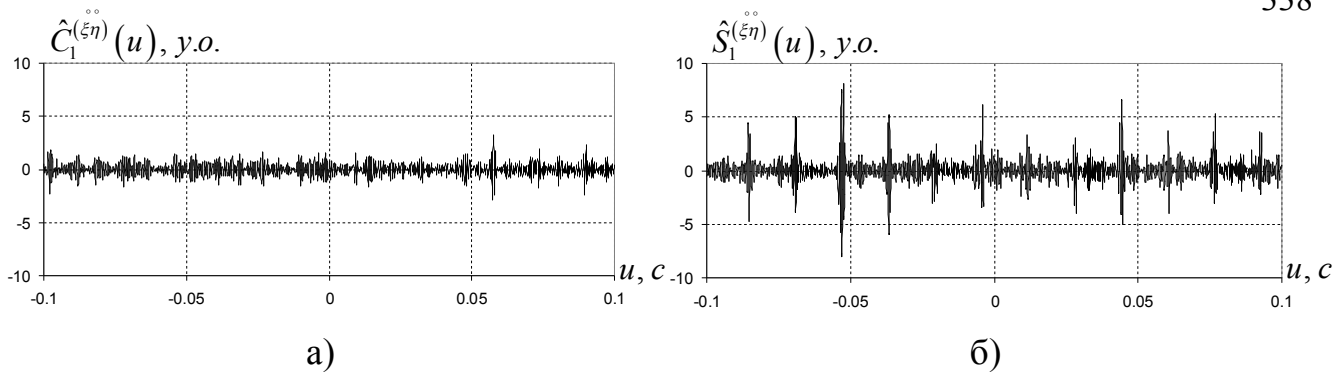


Рис. 8.52. Перший косинусний (а) та синусний (б) взаємкореляційні компоненти.

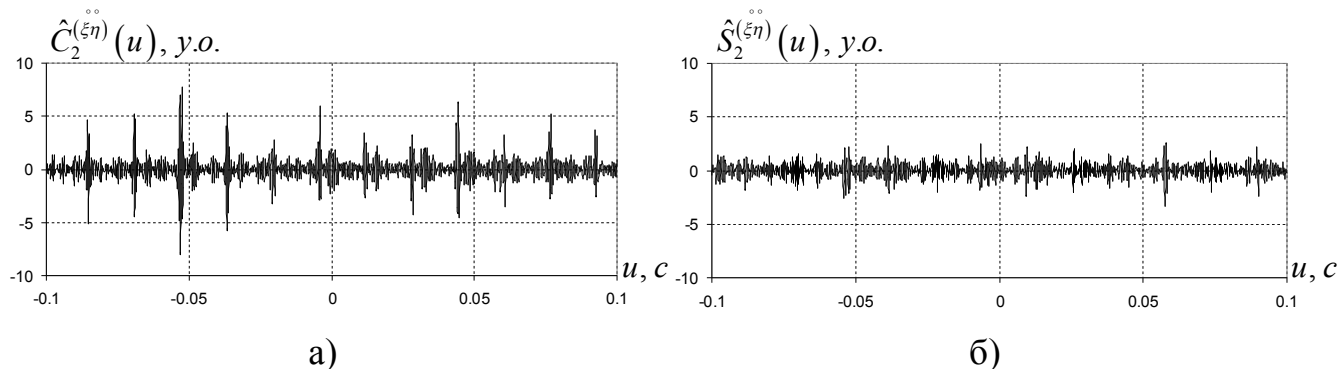


Рис. 8.53. Другий косинусний (а) та синусний (б) взаємкореляційні компоненти.

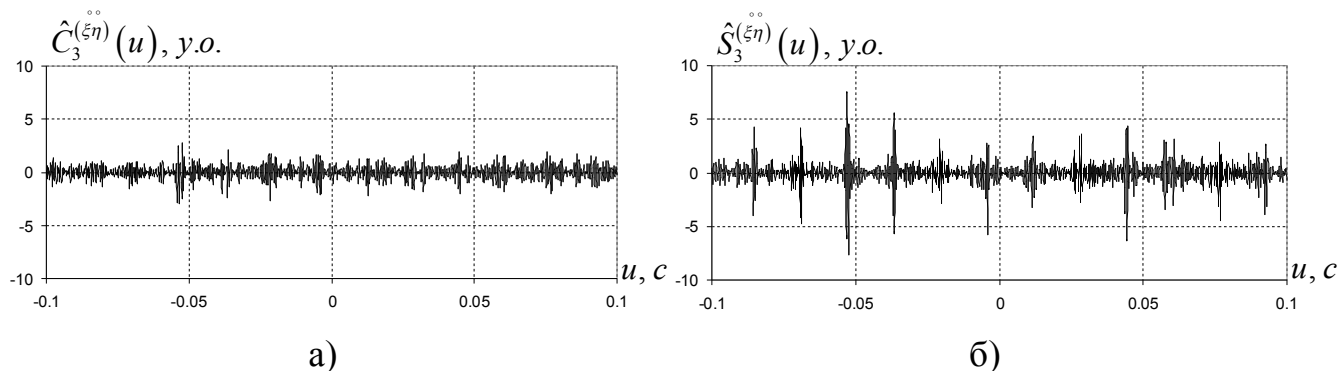


Рис. 8.54. Третій косинусний (а) та синусний (б) взаємкореляційні компоненти.

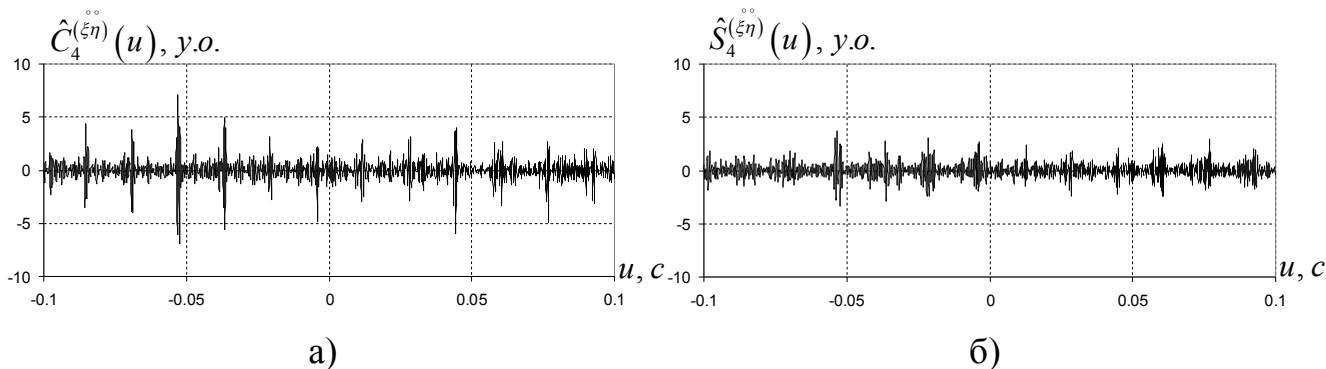


Рис. 8.55. Четвертий косинусний (а) та синусний (б) взаємкореляційні компоненти

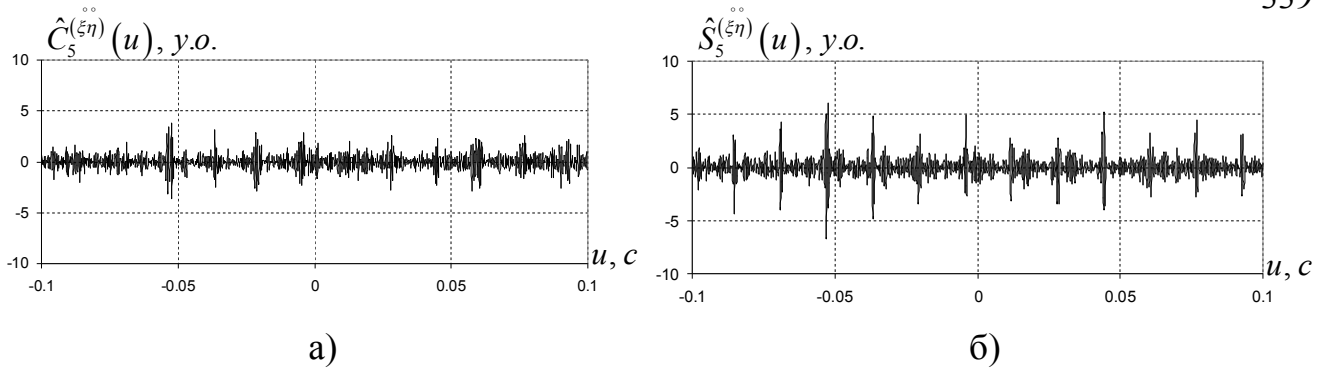


Рис. 8.56. Четвертий косинусний (а) та синусний (б) взаємкореляційні компоненти.

Взаємспектральні компоненти взаємспектральної густини стохастичної складової наведено на рис. 8.57–8.62. З наведених графіків добре видно, що кожна з складових взаємспектральних компонентів має піки на частотах, що відповідають частоті обертання валу та кратних до неї частотам. З рисунків видно, що нульовим взаємспектральним компонентом можна знехтувати (рис. 8.57), вищі взаємспектральні компоненти формують структуру взаємспектральної густини. Слід зауважити, що взаємспектральні густини як дійсних так і уявних частин взаємспектральних компонентів зосереджені в смузі частот від 1000 до 2000 Гц.

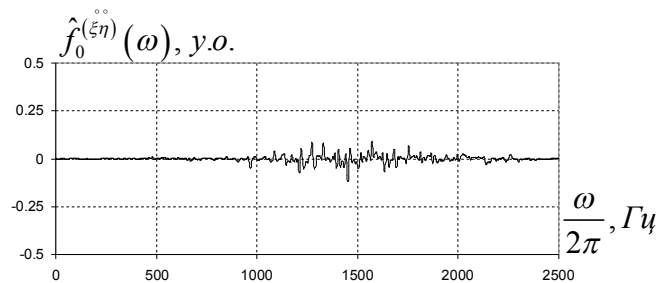


Рис. 8.57. Нульовий взаємспектральний компонент.

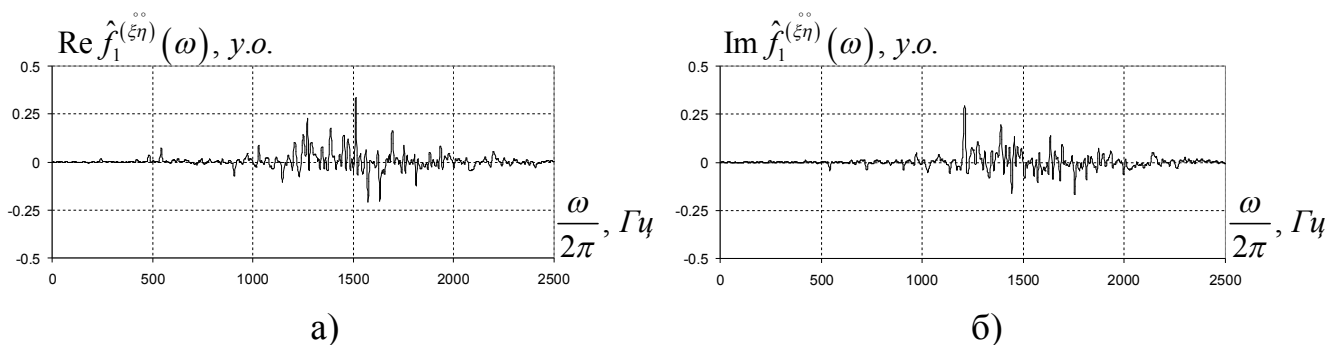


Рис. 8.58. Дійсна (а) та уявна (б) частина першого взаємспектрального компонента.

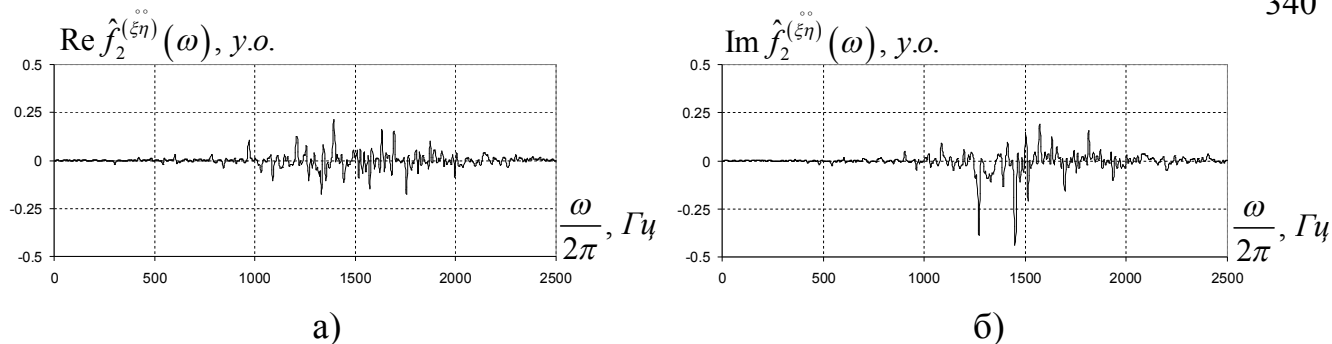


Рис. 8.59. Дійсна (а) та уявна (б) частина другого взаємоспектрального компонента

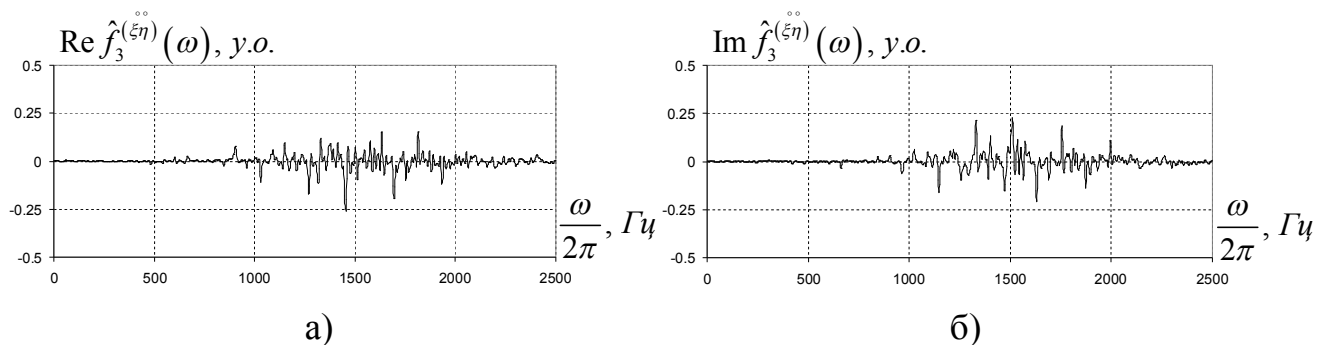


Рис. 8.60. Дійсна (а) та уявна (б) частина третього взаємоспектрального компонента

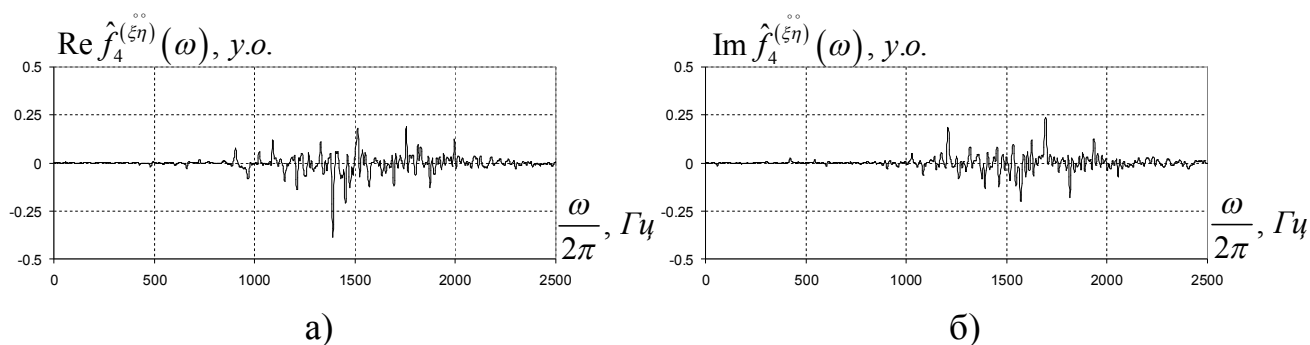


Рис. 8.61. Дійсна (а) та уявна (б) частина четвертого взаємоспектрального компонента

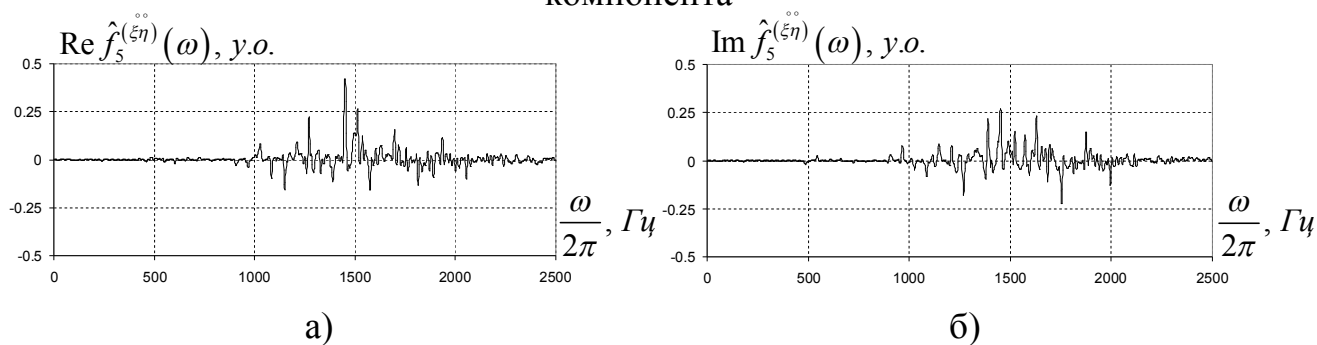


Рис. 8.62. Дійсна (а) та уявна (б) частина п'ятого взаємоспектрального компонента

Інтегральна функція когерентності двох взаємозв'язаних вібраційних сигналів вертикальної і горизонтальної складових центрифуги наведена на

рис. 8.63. З рисунка видно, що вона має вигляд гребінки в смузі 0.5÷2.5 кГц. Переніс по частоті у вищу смугу пояснюється тим, що гармоніки частоти обертання вала (~60 Гц) промодульовані високочастотними смуговими процесами, спектри яких також гребінчасті.

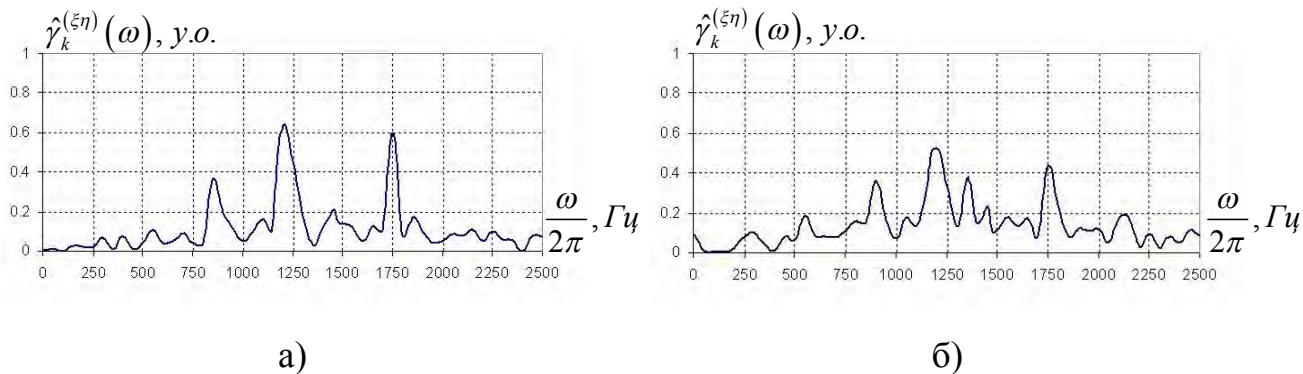


Рис. 8.63. Оцінка інтегральної функції когерентності при $k = 0$ (а) і $k = 1$ (б).

Такий висновок впливає також з аналізу покомпонентних функцій когерентності (рис. 8.64).

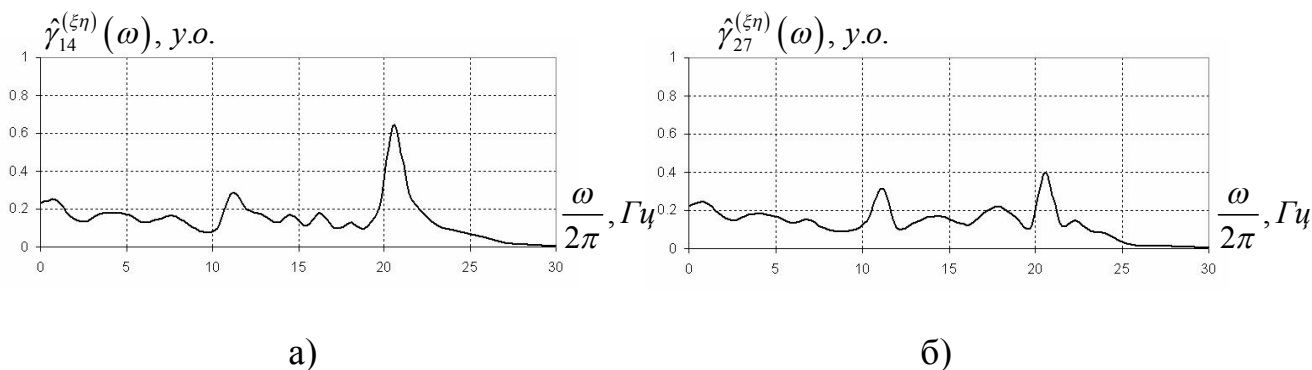


Рис. 8.64. Покомпонентна функція когерентності 3-го (а) та 5-го (б) порядків.

Виявлені властивості функцій когерентності є наслідком того, що розподілений дефект обертового вузла, який проявляється у нерівномірному радіальному навантаженні, супроводжується також розвинутим локальним. Останній має ударний характер. Виявлений дефект був підтверджений під час ремонту обертового вузла.

8.3. Взаємний аналіз вібраційних сигналів підшипникових вузлів електродвигуна вугільного конвеєра

Проведемо детальний аналіз структури вібраційних сигналів відібраних з підшипникових вузлів електродвигуна ($P=355$ кВт, $N=1460$ об/хв.) вугільного конвеєра за допомогою вібродіагностичної системи ПУЛЬС при режимі роботи без навантаження. Відповідно до стандартів ДСТУ ISO 2372, ISO 10816-1-97 даний електродвигун відноситься до 2 класу механізмів. Частоту дискретизації при відборі вібраційних сигналів вибрано 25 кГц, час запису реалізацій 20 с. Згідно [77] така довжина реалізації вібраційного сигналу забезпечує похибку обробки не більше 5%.

На рис. 8.65 наведено фрагмент реалізації вертикальної (а) та горизонтальної (б) складової вібрації. З наведеного рисунка (рис. 8.65а) чітко видно коливання основної гармонічної складової (25 Гц).

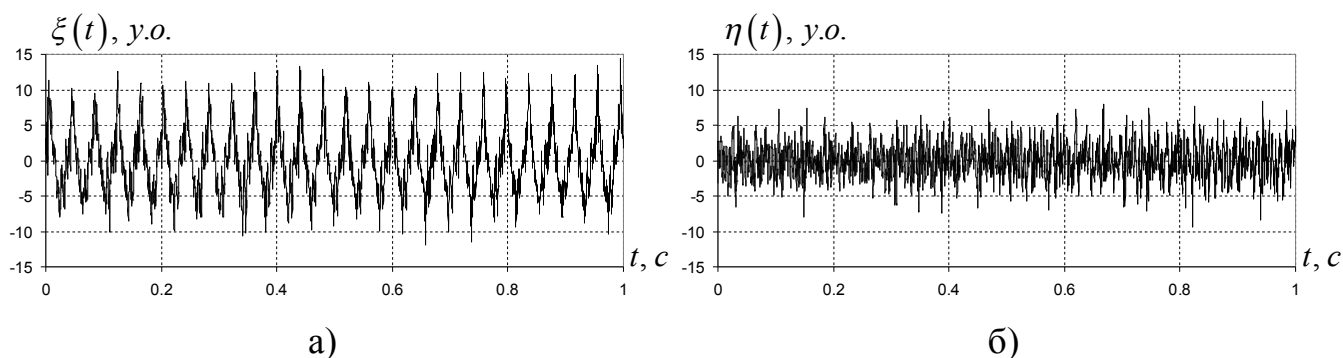


Рис. 8.65. Фрагмент реалізації вертикальної (а) та горизонтальної (б) складової вібрації електродвигуна.

Графіки кореляційної функції вертикальної складової (рис. 8.66) вібраційного сигналу в стаціонарному наближенні вказує на те, що у вертикальній і горизонтальній складових сигналу присутня потужна детермінована складова. Співвідношення сигнал/шум для вертикальної складової 30:1, а для горизонтальної – 3:1. Хвісти кореляційних функцій мають характер незникаючих коливань з частотою, що відповідає частоті обертання вала (25 Гц).

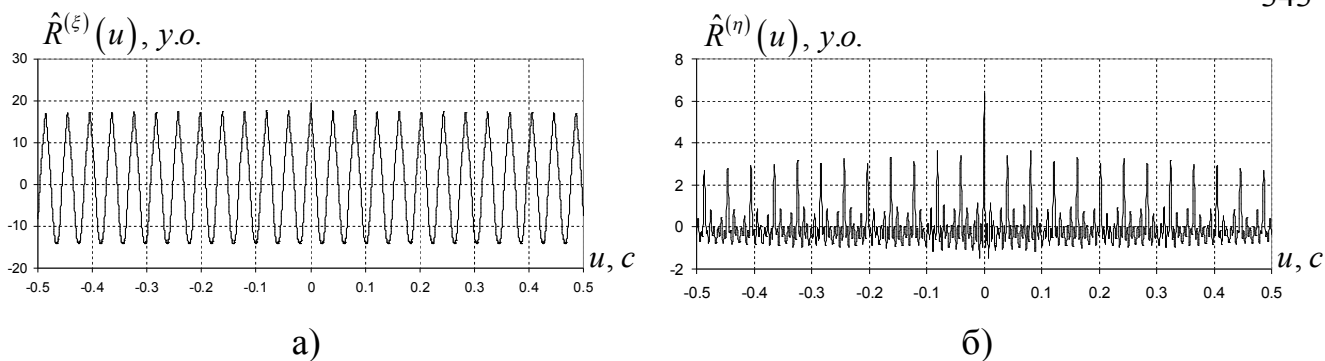


Рис. 8.66. Кореляційна функція вертикальної (а) та горизонтальної (б) складової вібрації електродвигуна.

Спектральна густина потужності вертикальної складової вібраційного сигналу (рис. 8.67а) в стаціонарному наближенні містить основну гармонічну складову, що відповідає частоті обертання вала (25 Гц), на яку припадає понад 90% потужності детермінованих коливань вібраційного сигналу та кілька кратних до неї малопотужних гармонік (рис. 8.67). Спектральна густина потужності горизонтальної складової вібраційного сигналу в стаціонарному наближенні зосереджена у смузі частот до 250 Гц, містить основну гармонічну складову, що відповідає частоті обертання вала (25 Гц) та кілька кратних до неї потужних гармонік (рис. 8.67б).

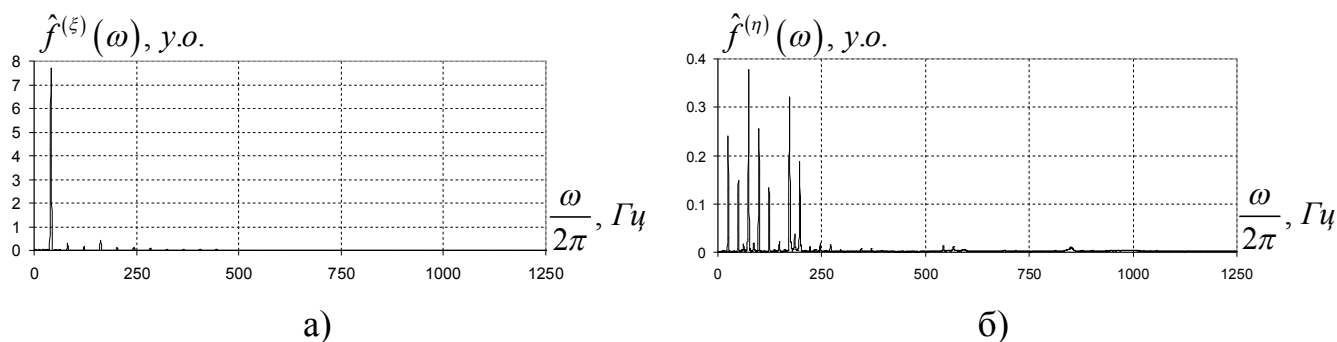


Рис. 8.67. Спектральна густина вертикальної (а) та горизонтальної (б) складової вібрації електродвигуна.

З використанням МНК розділено детерміновану та стохастичну складові вібраційного сигналу та проведено аналіз кожної з них окремо. На рис. 8.68 наведено графік математичного сподівання вертикальної (рис. 8.68а) та горизонтальної (рис. 8.68б) складової сигналу, на яких чітко проявляються коливання основного періоду.

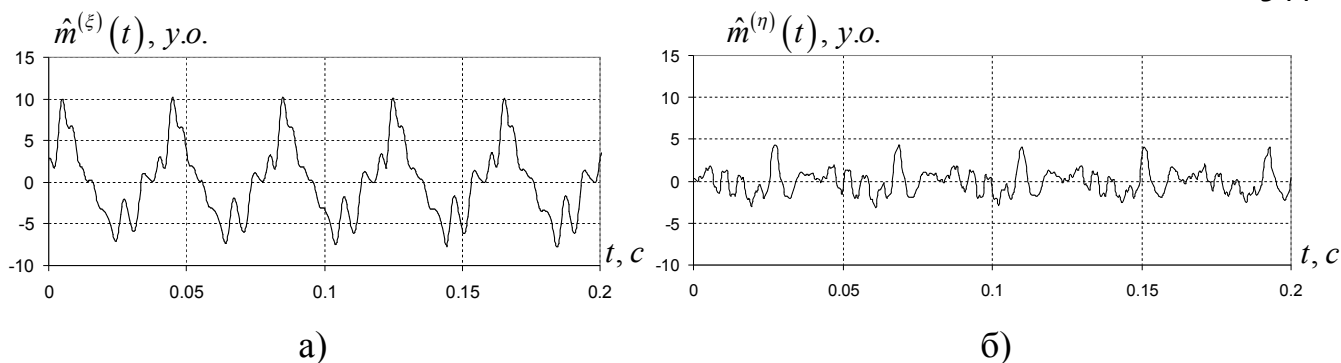


Рис. 8.68. Математичне сподівання вертикальної (а) та горизонтальної (б) складової вібрації електродвигуна.

Серед компонентів Фур'є математичного сподівання вертикальної складової вібрації значущими є перші сім гармонік (рис. 8.69а), найпотужнішою серед яких є перша на яку припадає 75% потужності коливань, а горизонтальної – значущими є вісім гармонік (рис. 8.69б), найпотужнішими серед яких є третя, четверта, п'ята і сьома на які припадає понад 80% потужності коливань.

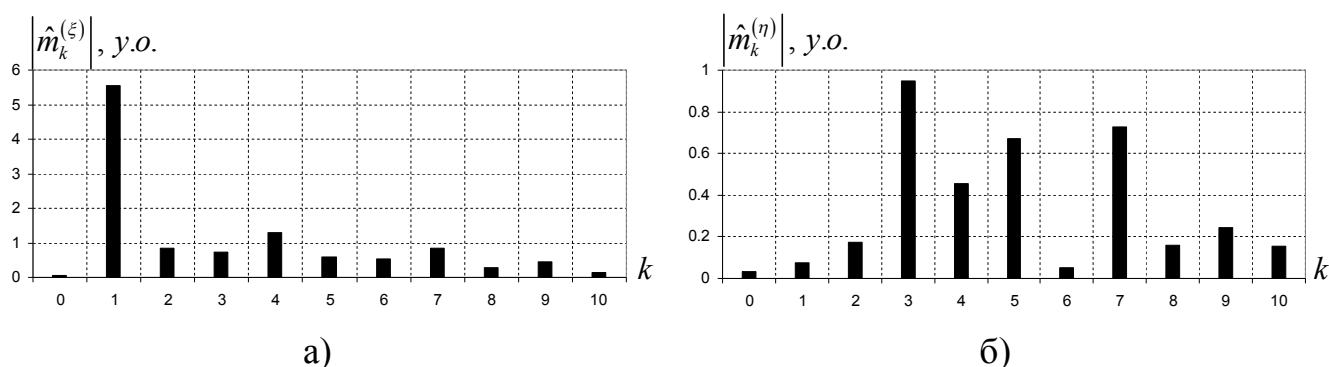


Рис. 8.69. Компоненти матсподівання вертикальної (а) та горизонтальної (б) складової вібрації електродвигуна.

Графік стохастичної складової вертикальної та горизонтальної складових вібраційного сигналу показано на рис. 8.70.

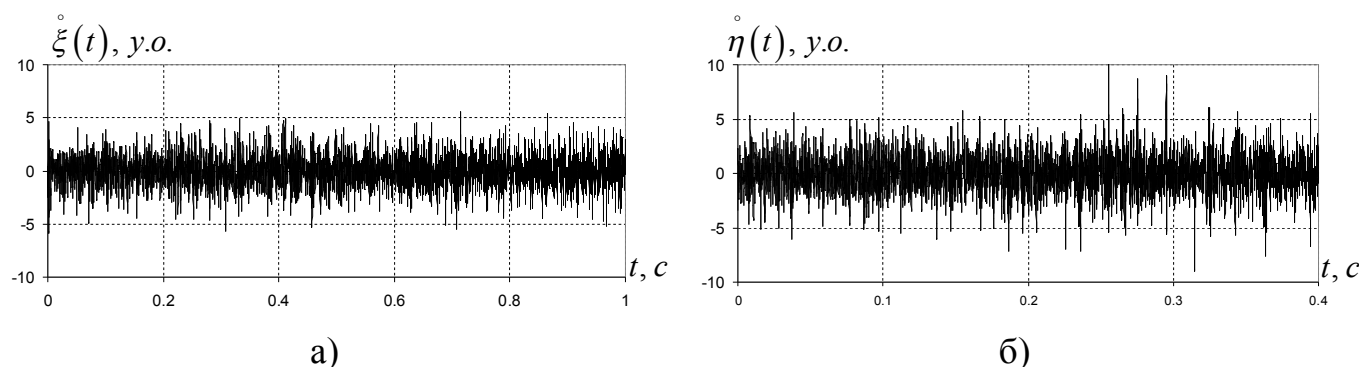


Рис. 8.70. Стохастична складова сигналу вертикальної (а) та горизонтальної (б) складової вібрації електродвигуна.

Зникаючий хвіст кореляційних функцій вертикальної (рис. 8.71а) і горизонтальної (рис. 8.71б) складових у стаціонарному наближенні свідчить про відсутність у ній детермінованих коливань. З графіків чітко видно, що на хвостах кореляційних функцій присутні викиди, що відповідають частоті обертання валу (25 Гц).

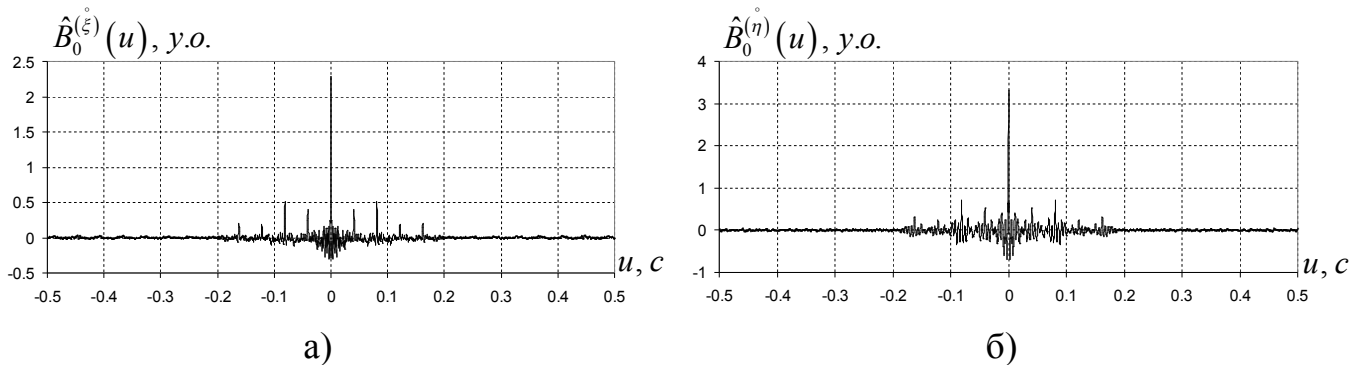


Рис. 8.71. Кореляційна функція стохастичної складової вертикальної (а) та горизонтальної (б) складової вібрації електродвигуна.

Спектральні густини потужності стохастичної складової вертикальної (рис. 8.72а) та горизонтальної (рис. 8.72б) складових вібраційного сигналу в стаціонарному наближенні мають піки на частоті обертання та кратних до неї частотах.

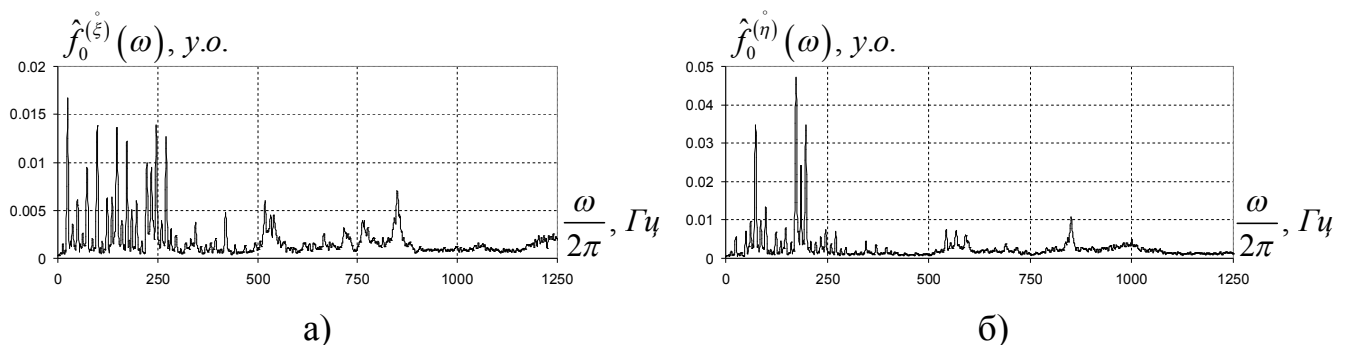


Рис. 8.72. Спектр стохастичної складової стохастичної складової вертикальної (а) та горизонтальної (б) складової вібрації електродвигуна.

Використовуючи когерентний кореляційний функціонал для пошуку прихованих періодичностей 2-ого порядку у стохастичній складовій вібраційного сигналу виявлено потужну модуляцію стаціонарними випадковими процесами частоти 24,67 Гц (0.040535), що відповідає частоті обертання валу. Залежність даного функціоналу від пробного періоду для вертикальної і горизонтальної складових вібрації показано на рис. 8.73.

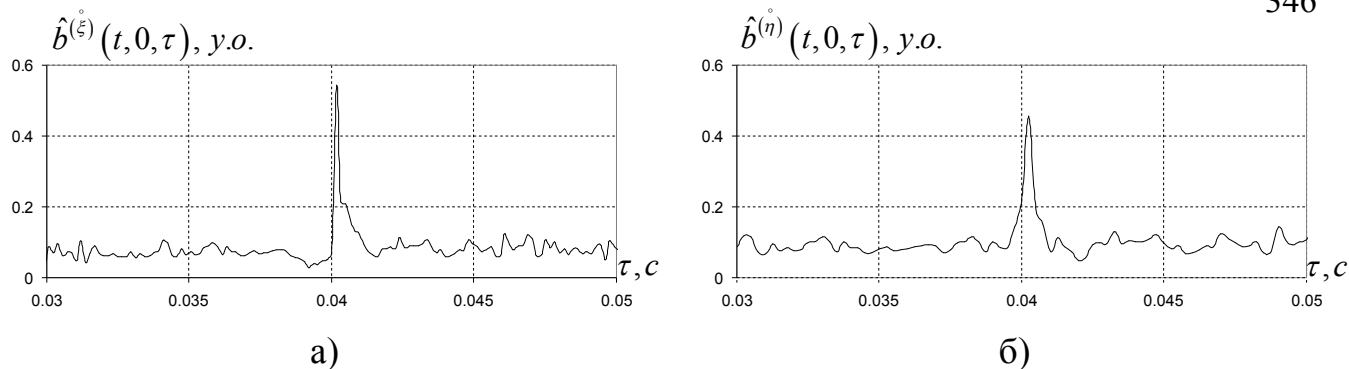


Рис. 8.73. Функціонал визначення періоду стохастичної складової вертикальної (а) та горизонтальної (б) складової вібрації електродвигуна.

Оцінивши значення періоду нестационарності проведемо повний ПКВП аналіз структури стохастичної складової вібраційного сигналу. За допомогою компонентного методу оцінено дисперсію та її компоненти Фур'є. Відношення мінімального значення дисперсії за період до максимального для вертикальної складової є 0,29 (рис. 8.74а), а для горизонтальної – 0,28 (рис. 8.74б). Як видно з (рис. 8.74б) дисперсія має значний викид за період.

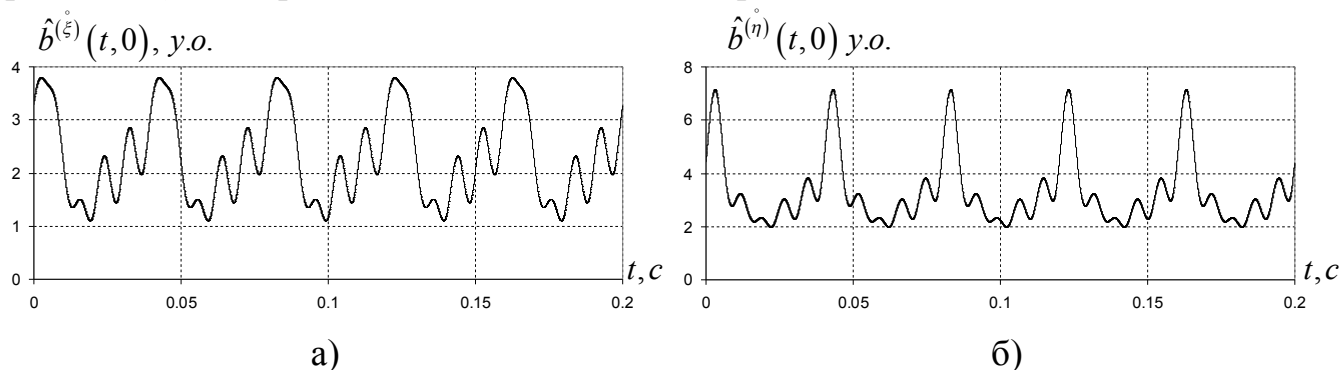


Рис. 8.74. Дисперсія стохастичної складової вертикальної (а) та горизонтальної (б) складової вібрації електродвигуна.

Серед значущих компонентів дисперсії вертикальної складової є перші три, найпотужнішим серед яких є нульовий (рис. 8.75а), а горизонтальної – перші п'ять, найпотужнішим серед яких є нульовий (рис. 8.75б).

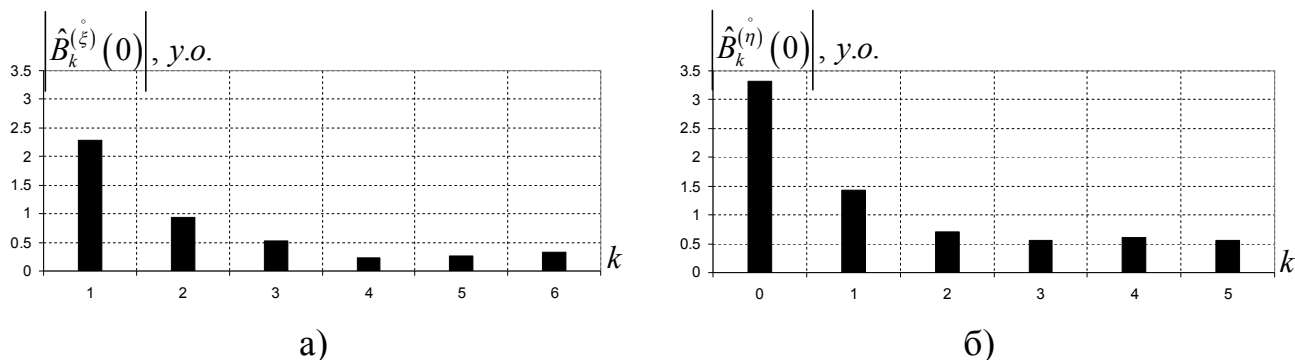


Рис. 8.75. Компоненти дисперсії стохастичної складової вертикальної (а) та горизонтальної (б) складової вібрації електродвигуна.

Проведемо аналіз нульових (рис. 8.76) і перших п'яти косинусних кореляційних компонентів вертикальної і горизонтальної складових кореляційної функції стохастичної складової сигналу (рис. 8.77–8.81). Як видно з наведених рисунків складові кореляційних компонентів мають вигляд швидкозникаючих коливань. Значущими є нульові кореляційні компоненти і косинусна складова першого кореляційного компонента вертикальної (рис. 8.77а) та горизонтальної (рис. 8.77б) складових вібрації. Решта складових кореляційних компонентів не є значущими і ними можна знехтувати.

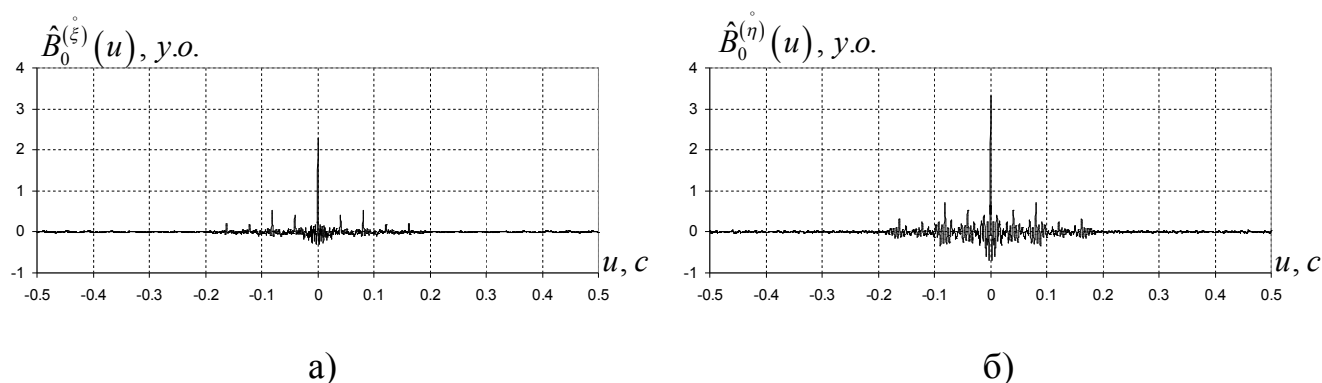


Рис. 8.76. Нульовий кореляційний компонент вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації.

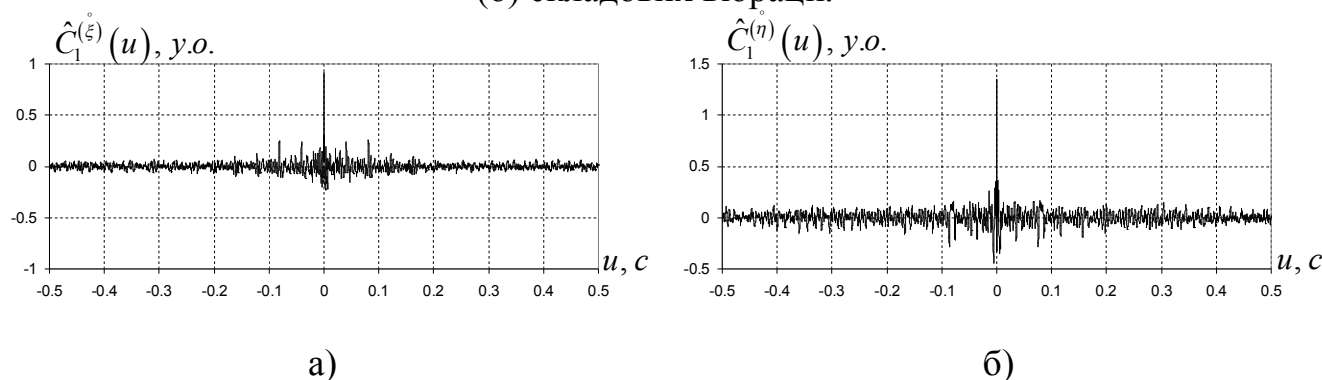


Рис. 8.77. Перший косинусний кореляційний компонент вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації.

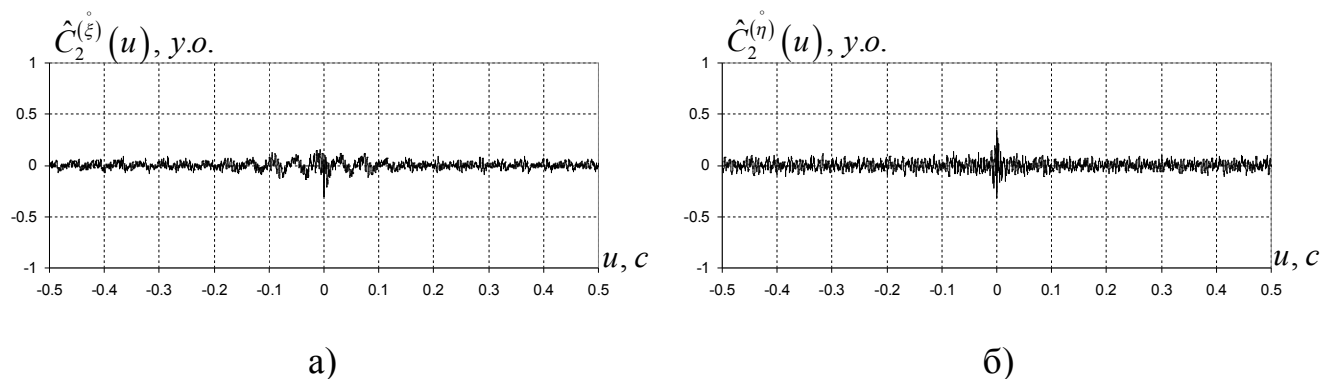


Рис. 8.78. Другий косинусний кореляційний компонент вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації.

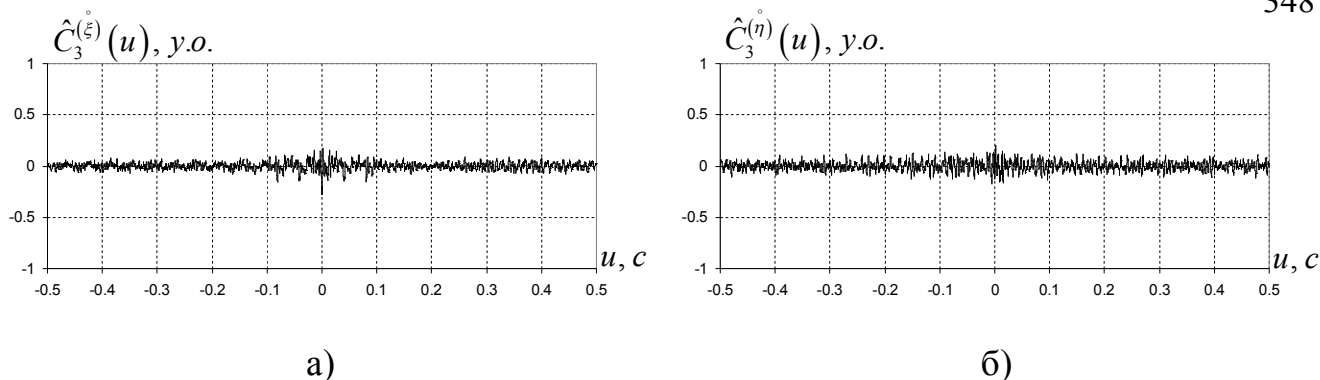


Рис. 8.79. Третій косинусний кореляційний компонент вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації.

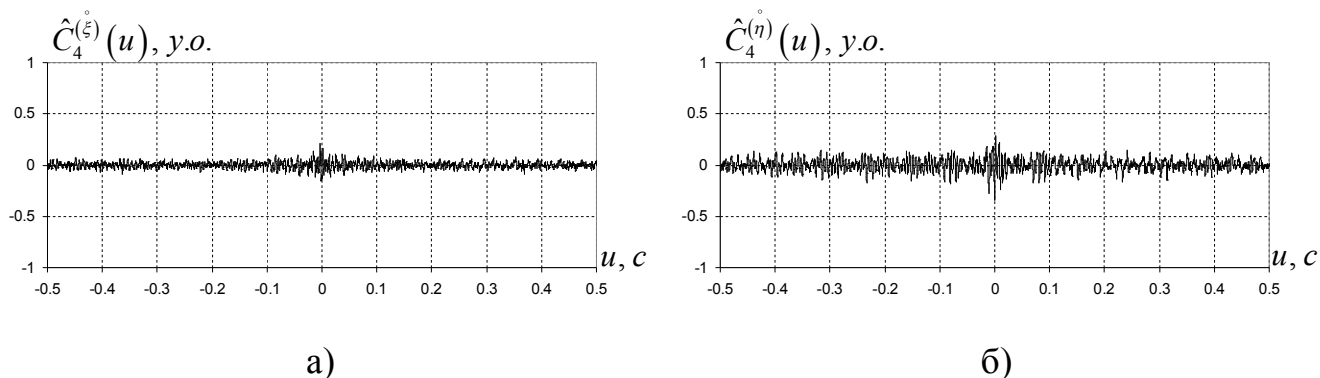


Рис. 8.80. Четвертий косинусний кореляційний компонент вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації.

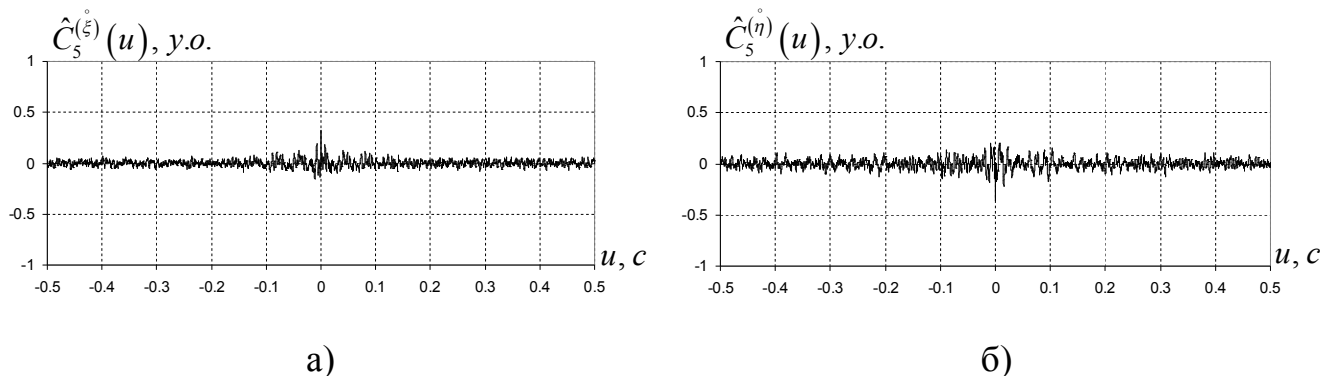


Рис. 8.81. П'ятий косинусний кореляційний компонент вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації.

Також проведемо аналіз перших п'яти синусних кореляційних компонентів вертикальної та горизонтальної складових кореляційної функції стохастичної складової сигналу електродвигуна (рис. 8.82–8.86). Як видно з наведених рисунків складові кореляційних компонентів мають вигляд швидкозникаючих коливань.

Значущими є другий синусний кореляційний компонент вертикальної складової (рис. 8.83а), а також перший, другий, третій, четвертий і п'ятий синусний кореляційний компонент горизонтальної складової. Решта складових кореляційних компонентів не є значущими і ними можна знехтувати.

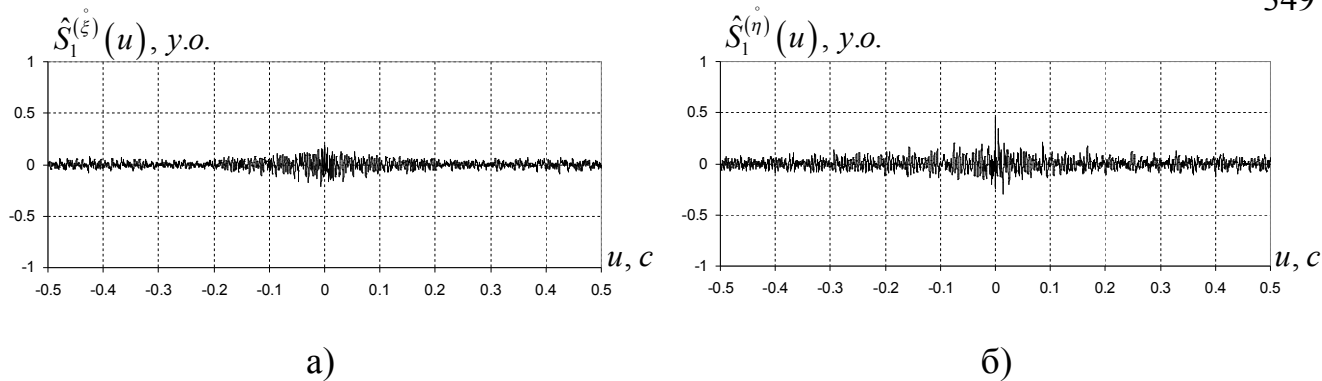


Рис. 8.82. Перший синусний кореляційний компонент вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації.

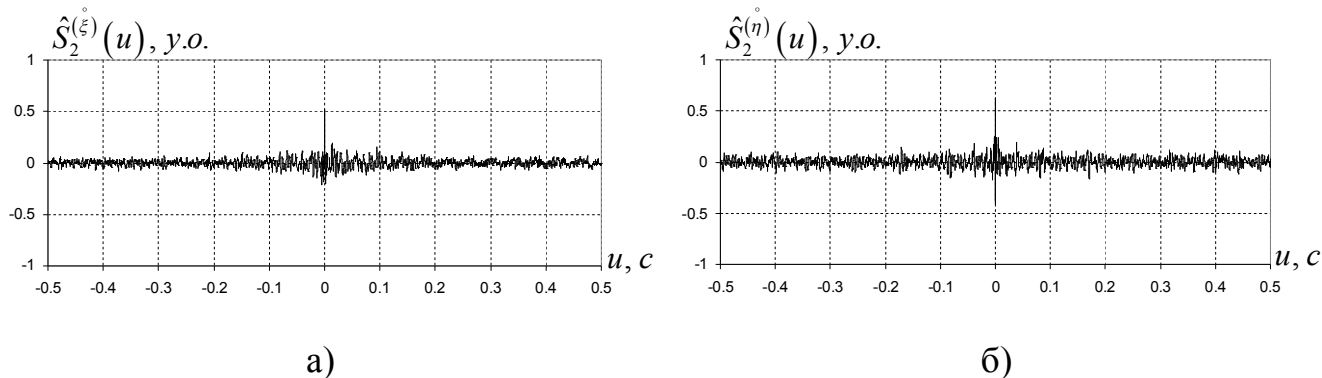


Рис. 8.83. Другий синусний кореляційний компонент вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації.

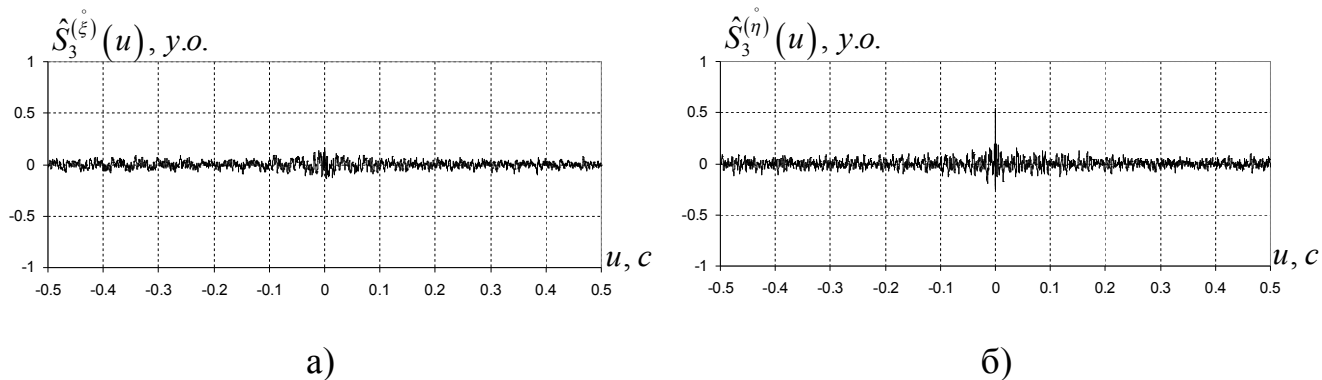


Рис. 8.84. Третій синусний кореляційний компонент вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації.

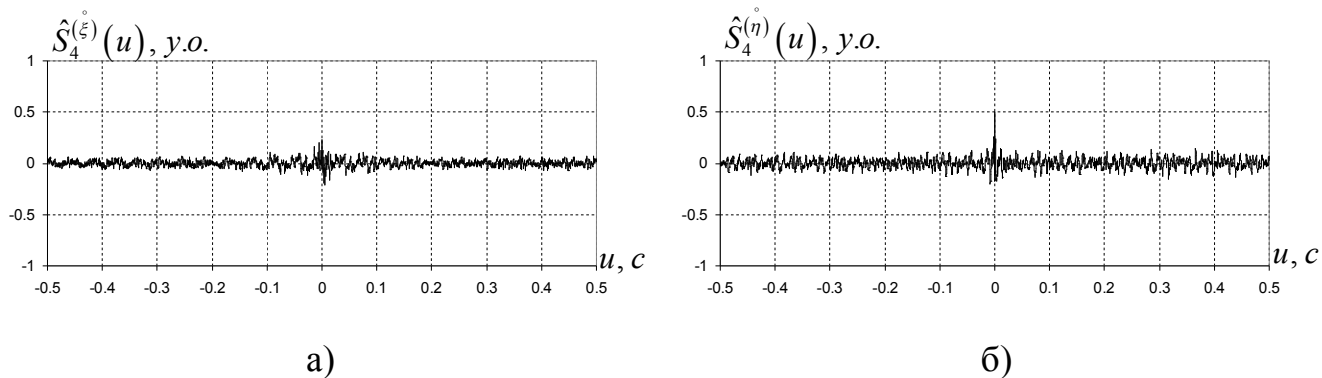


Рис. 8.85. Четвертий синусний кореляційний компонент вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації.

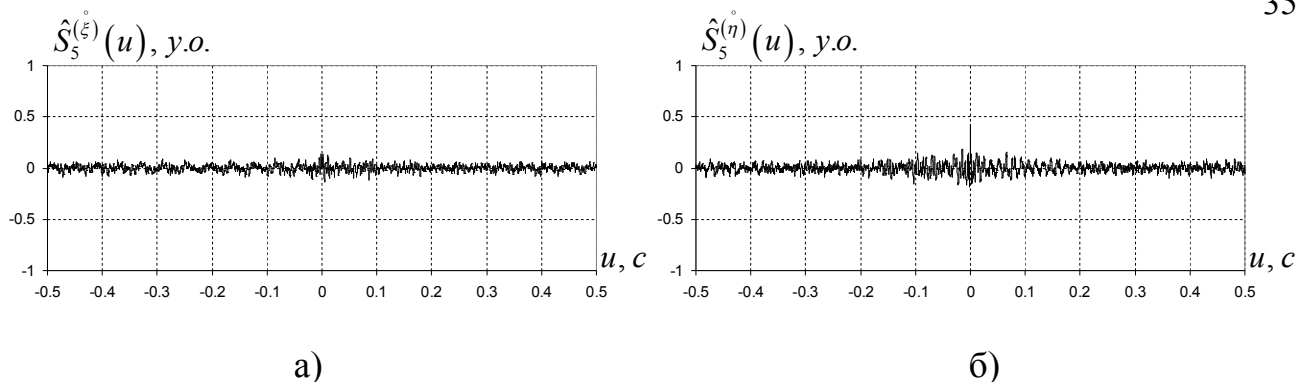


Рис. 8.86. П'ятий синусний кореляційний компонент вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації електродвигуна.

Нульовий спектральний компонент, дійсні і уявні частини спектральних компонентів спектральної густини стохастичної складової електродвигуна наведено на рис. 8.87–8.97.

Розглянемо нульові спектральні компоненти (рис. 8.87) і дійсні частини спектральних компонентів вертикальної і горизонтальної складових (рис. 8.88–8.92). З наведених графіків добре видно, що кожна з складових спектральних компонентів має піки на частотах, що відповідають частоті обертання валу, та кратних до неї частотах.

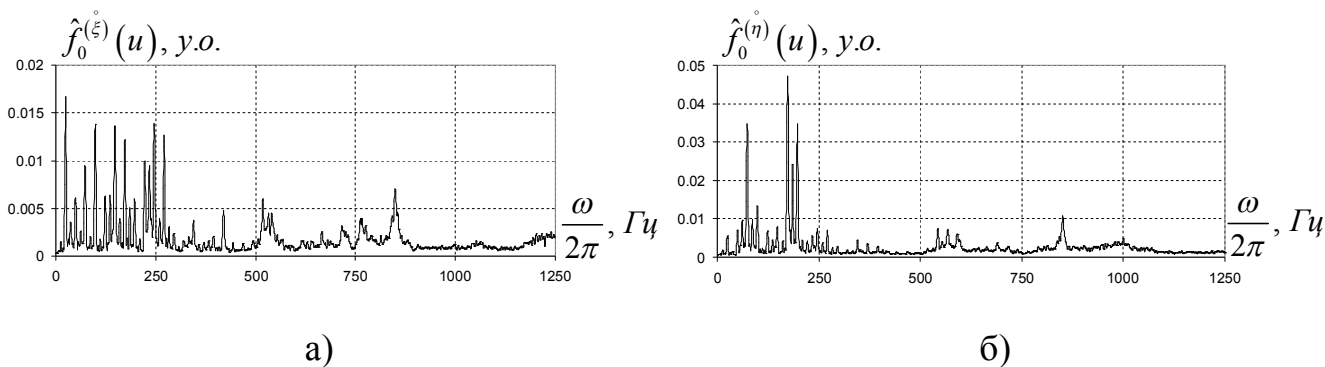


Рис. 8.87. Нульовий спектральний компонент вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації.

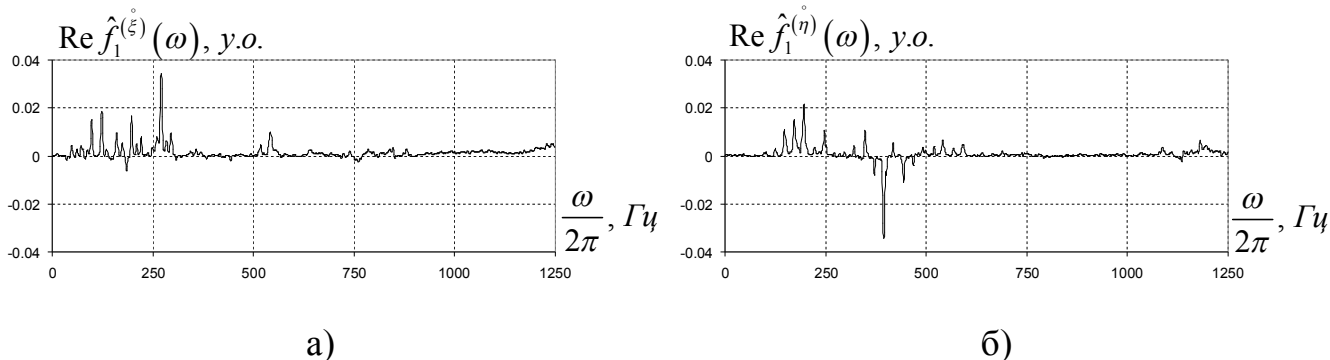


Рис. 8.88. Дійсна частина першого спектрального компонента вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації.

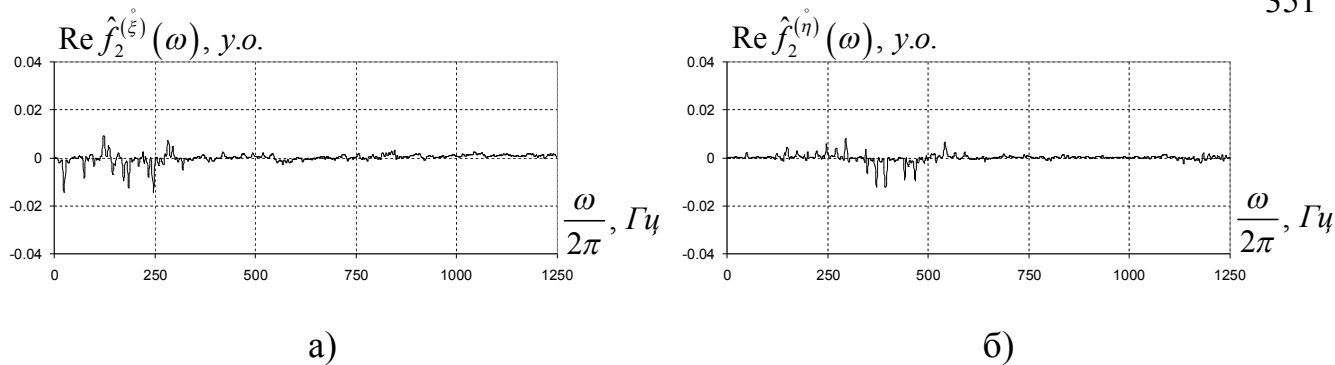


Рис. 8.89. Дійсна частина другого спектрального компонента вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації.

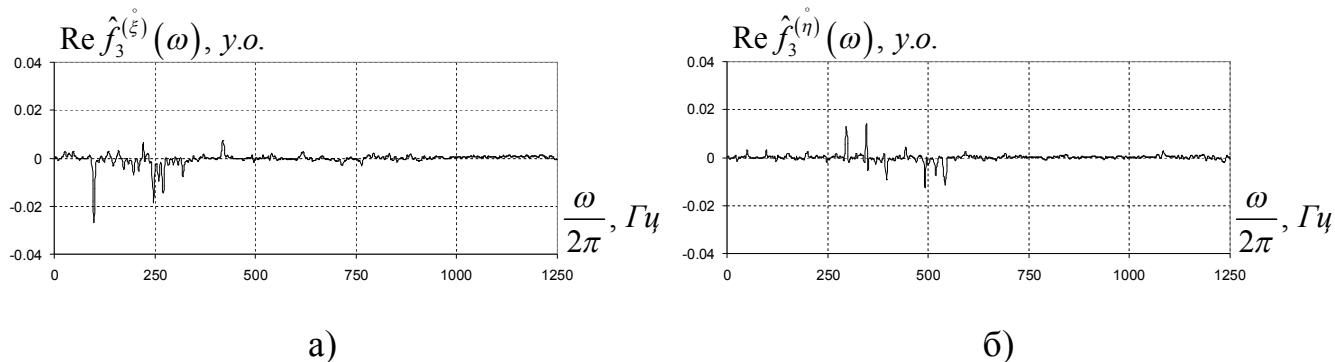


Рис. 8.90. Дійсна частина третього спектрального компонента вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації.

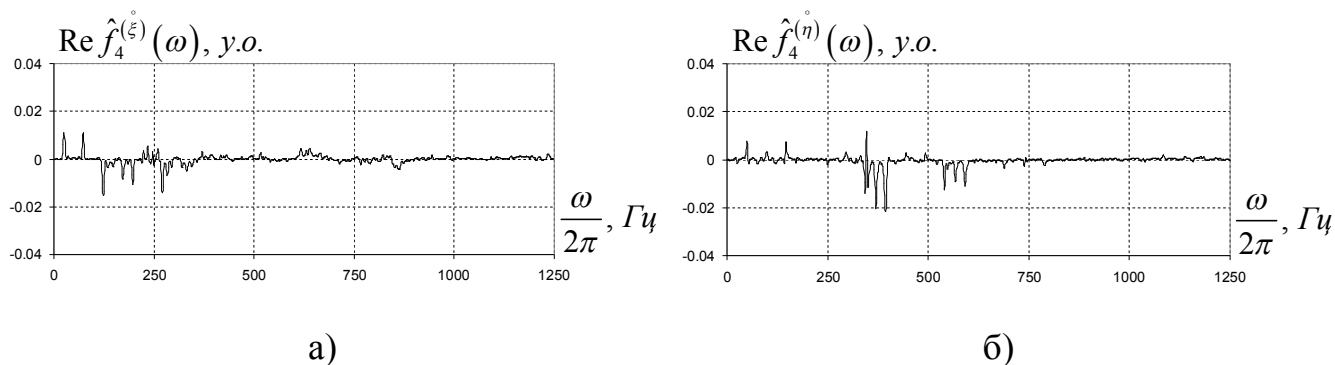


Рис. 8.91. Дійсна частина четвертого спектрального компонента вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації.

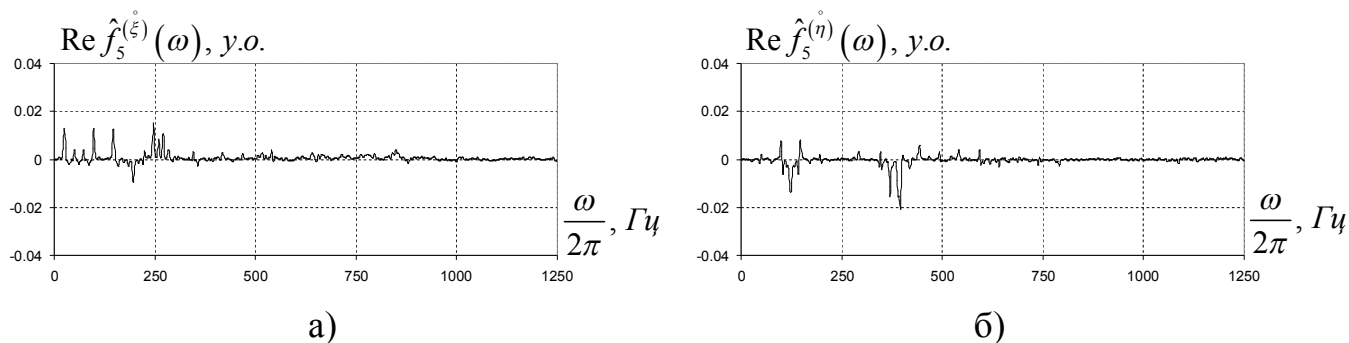


Рис. 8.92. Дійсна частина п'ятого спектрального компонента вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації.

Розглянемо уявні частини спектральних компонентів вертикальної і горизонтальної складових (рис. 8.93–8.97). З наведених графіків добре видно, що

кожна з уявних частин складових спектральних компонентів має піки на частотах, що відповідають частоті обертання валу, та кратних до неї частотах.

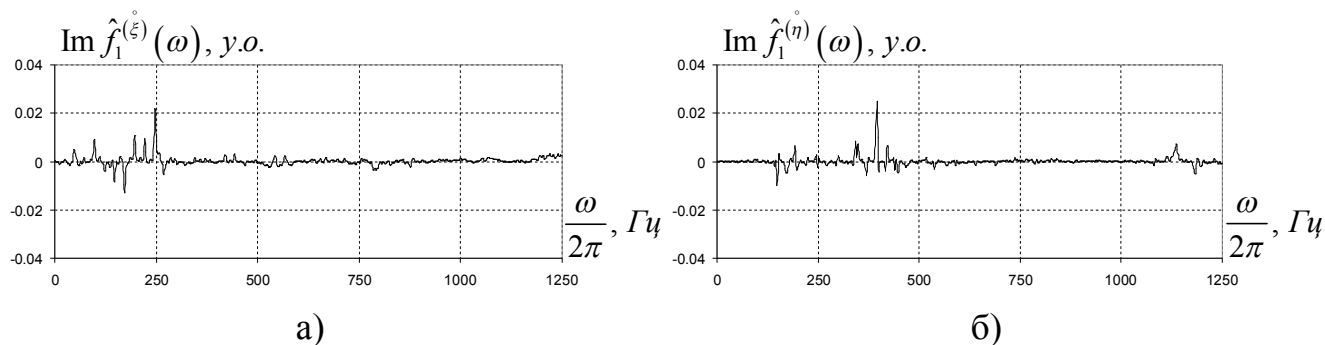


Рис. 8.93. Уявна частина першого спектрального компонента вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації.

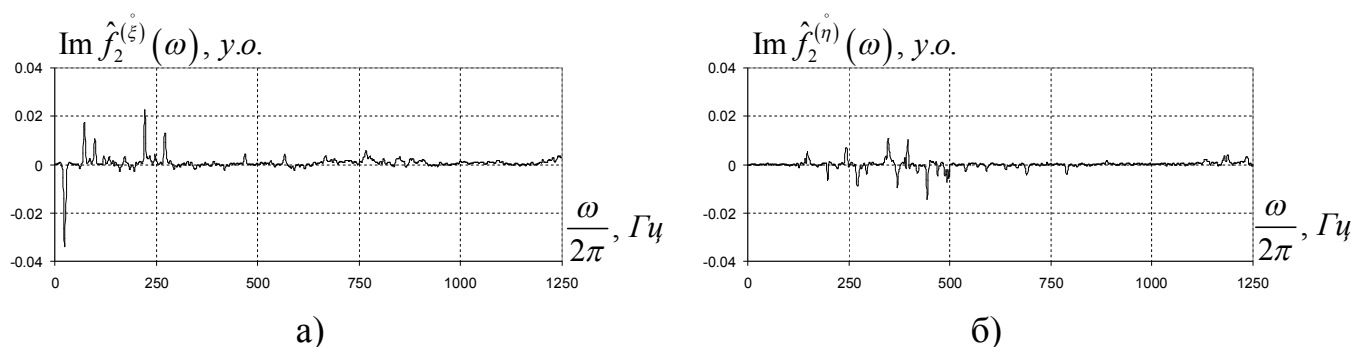


Рис. 8.94. Уявна частина другого спектрального компонента вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації.

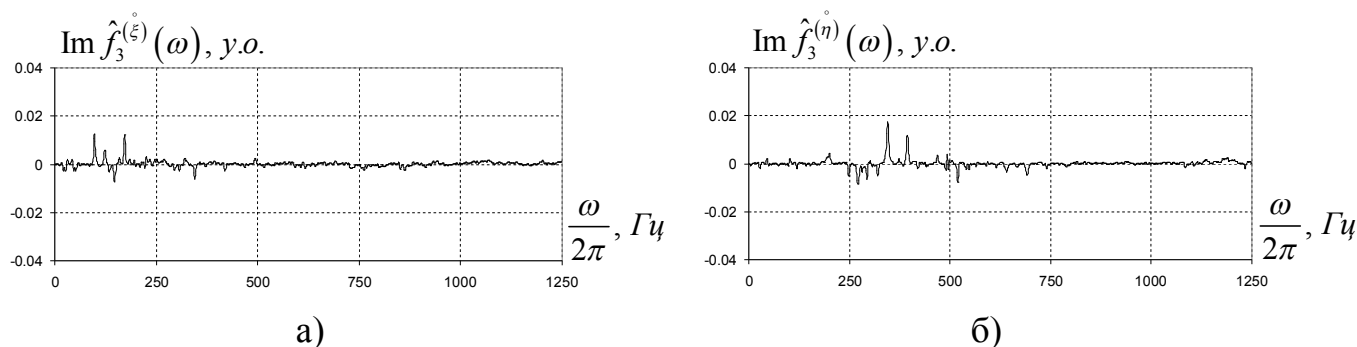


Рис. 8.95. Уявна частина третього спектрального компонента вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації.

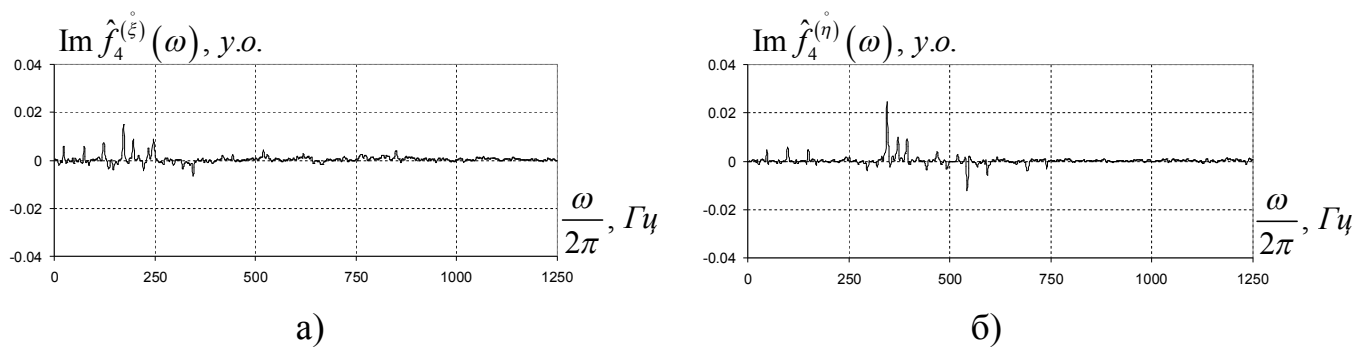


Рис. 8.96. Уявна частина четвертого спектрального компонента вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації.

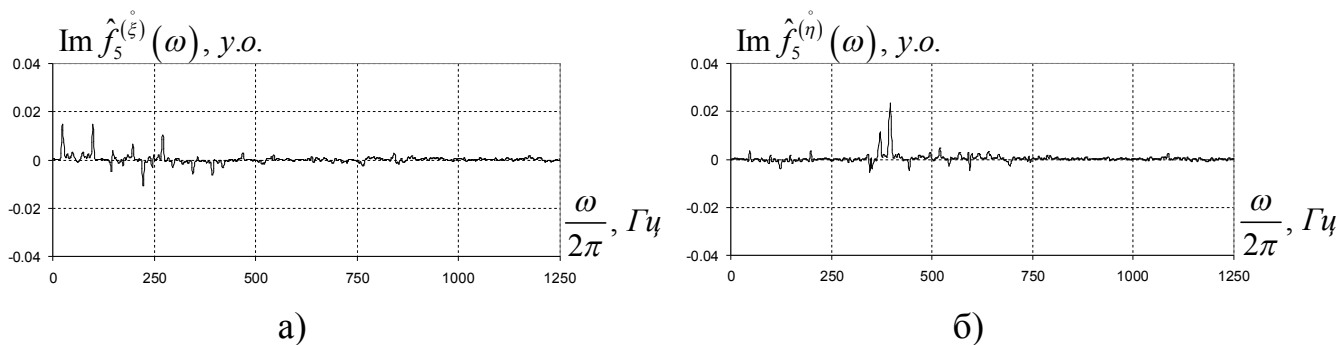


Рис. 8.97. Уявна частина п'ятого спектрального компонента вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації.

Проведемо взаємкореляційний аналіз вертикальної та горизонтальної складових вібраційного сигналу. На основі функціоналу (7.1) визначимо період нестационарності сигналів. Залежність функціоналу від пробного періоду показана на рис. 8.98. З отриманого графіка добре видно, що період нестационарності рівний приблизно 0.0405 с, що відповідає частоті обертання валу.

Графіки взаємкореляційних компонентів наведені на рис. 8.98–8.104. Як видно з наведених рисунків складові взаємкореляційних компонентів мають вигляд швидкозникаючих коливань. Структуру взаємкореляційної функції визначають нульовий взаємкореляційний компонент, косинусна складова першого взаємкореляційного компонентів, та синусні складові першого, другого, третього, четвертого та п'ятого взаємкореляційних компонентів. Рештою складових можна знехтувати.

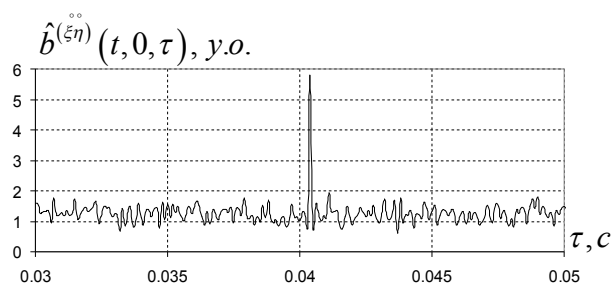


Рис. 8.98. Функціонал взаємозв'язаних сигналів.

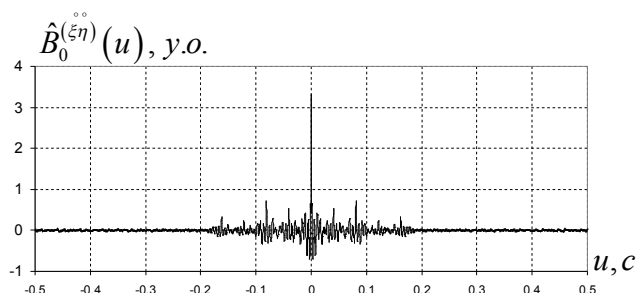
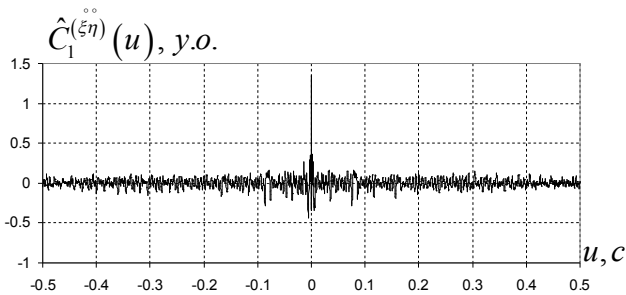
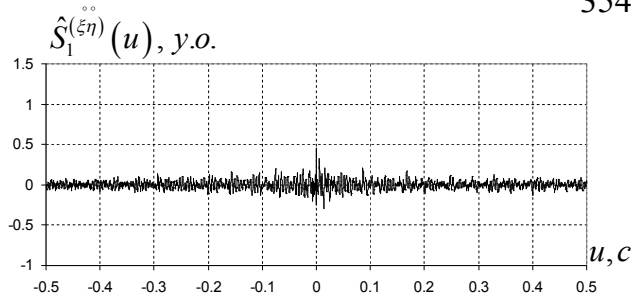


Рис. 8.99. Нульовий взаємкореляційний компонент.

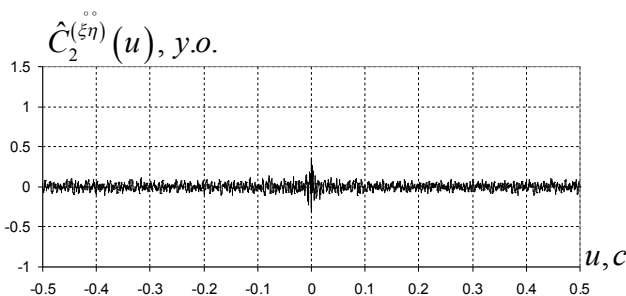


а)

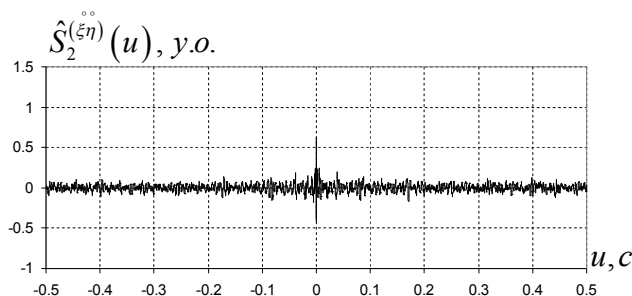


б)

Рис. 8.100. Перший косинусний (а) і синусний (б) взаємкореляційні компоненти.

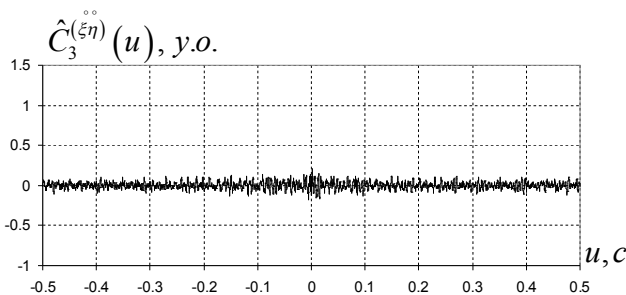


а)

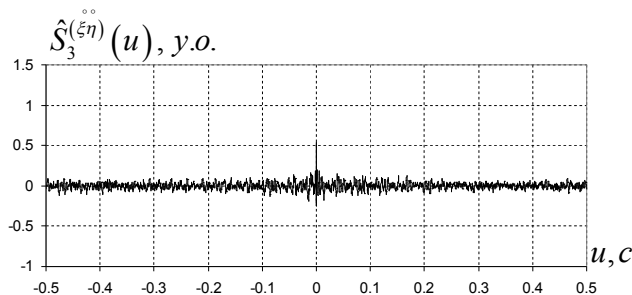


б)

Рис. 8.101. Другий косинусний (а) і синусний (б) взаємкореляційні компоненти.

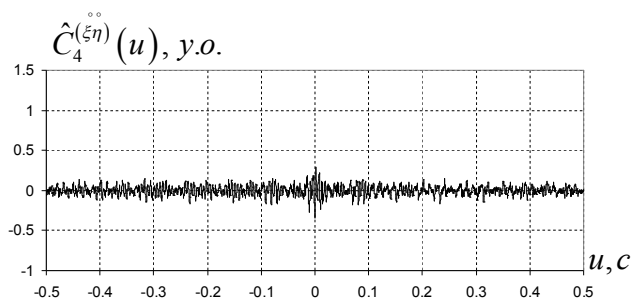


а)

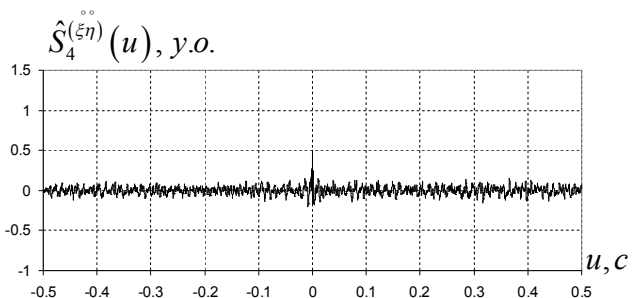


б)

Рис. 8.102. Третій косинусний (а) і синусний (б) взаємкореляційні компоненти.



а)



б)

Рис. 8.103. Четвертий косинусний (а) і синусний (б) взаємкореляційні компоненти.

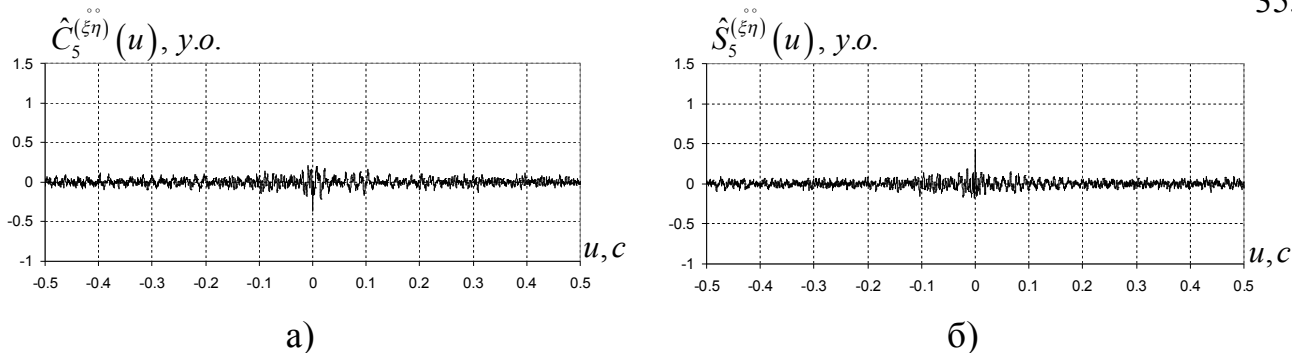


Рис. 8.104. Пятый косинусный (а) і синусный (б) взаємкореляційні компоненти.

Дійсні та уявні частини взаємспектральних компонентів спектральної густини стохастичної складової наведено на рис. 8.105–8.110. З наведених графіків добре видно, що кожна зі складових взаємспектральних компонентів зосереджена в смузі частот до 300 Гц, також містить піки на частотах, що відповідають частоті обертання валу та кратних до неї частотах.

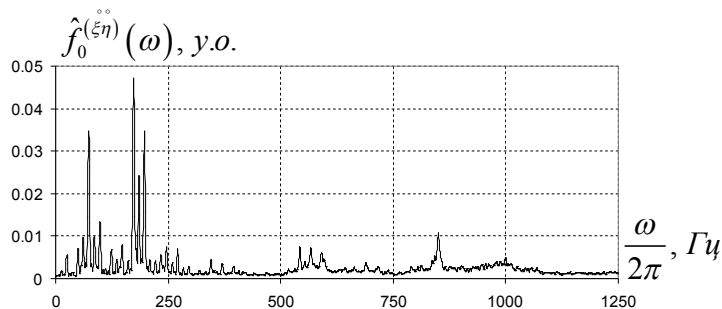


Рис. 8.105. Нульовий взаємспектральний компонент.

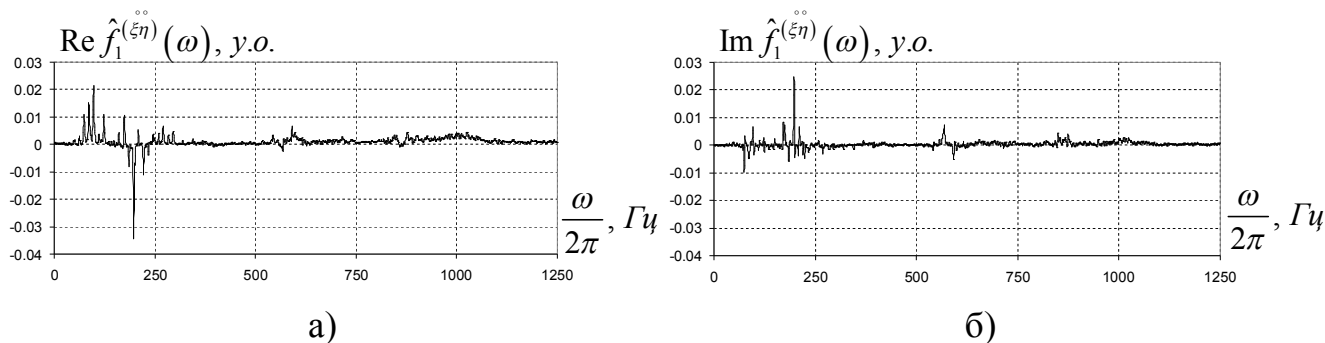


Рис. 8.106. Дійсна (а) і уявна (б) частини першого взаємспектрального компонента.

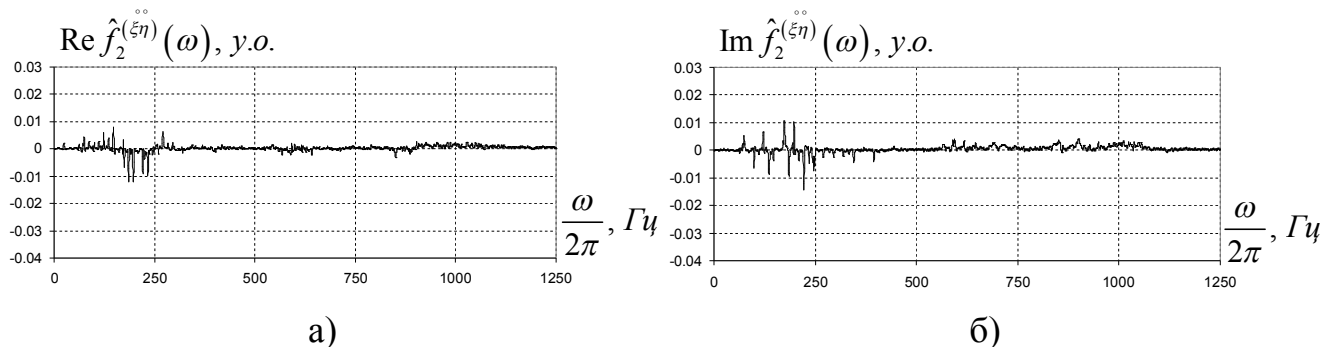


Рис. 8.107. Дійсна (а) і уявна (б) частини другого взаємспектрального компонента.

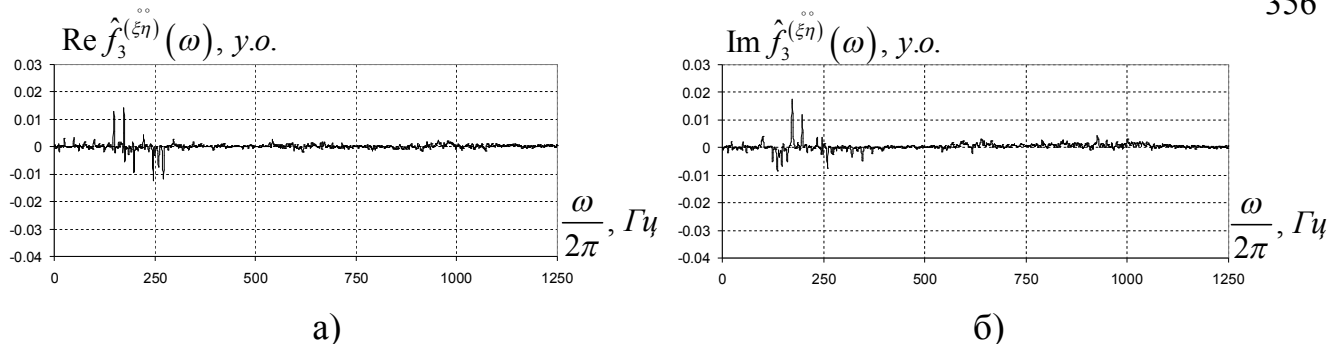


Рис. 8.108. Дійсна (а) і уявна (б) частини третього взаємоспектрального компонента.

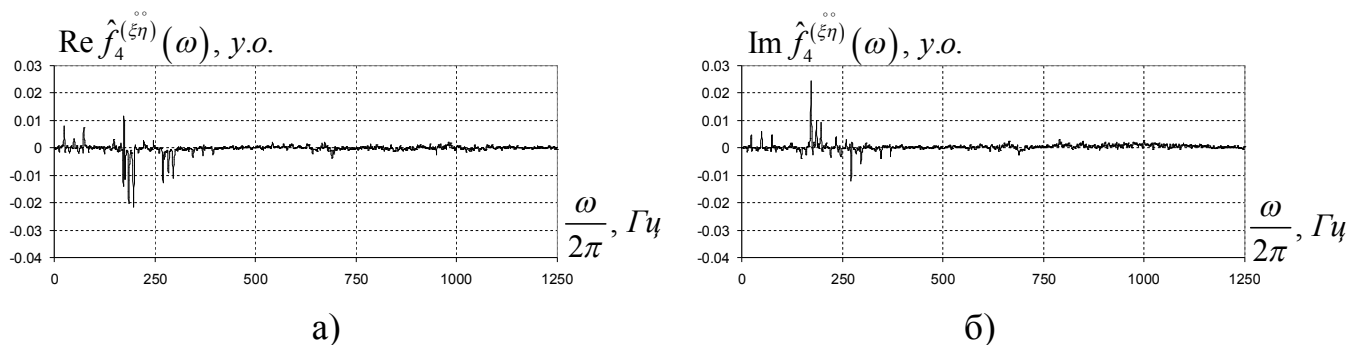


Рис. 8.109. Дійсна (а) і уявна (б) частини четвертого взаємоспектрального компонента.

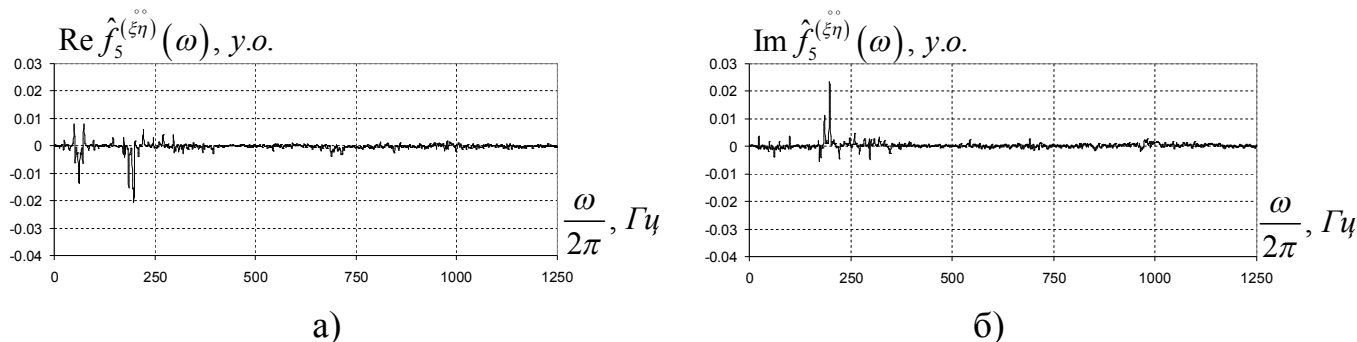


Рис. 8.110. Дійсна (а) і уявна (б) частини п'ятого взаємоспектрального компонента.

Інтегральна функція когерентності (рис. 18) має вигляд гребінки в області низьких частот, яка є помітно зсунутою відносно області частот, що відповідають частотам гармонік обертання вала 24,67 Гц (0.040535). Незначні підвищення значень появляються також у вищій області частот.

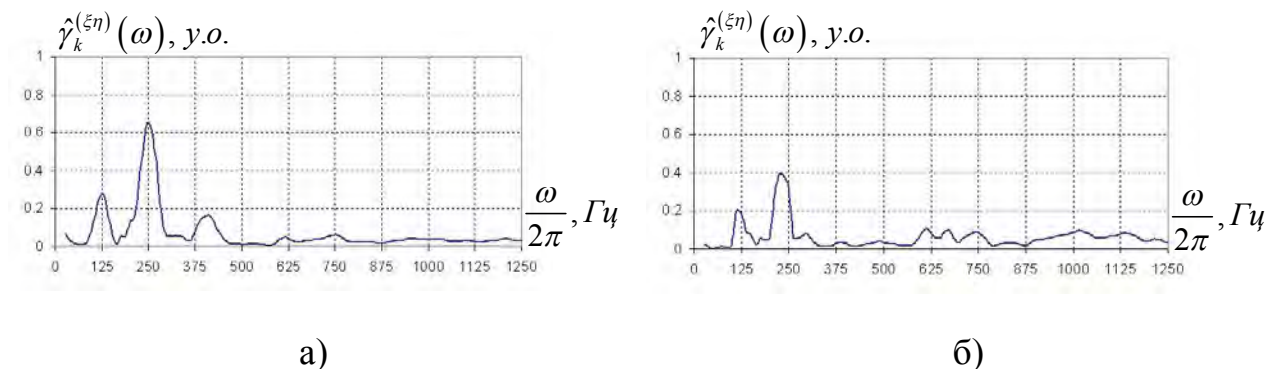


Рис. 8.111. Оцінка інтегральної функція когерентності $k=0$ (а) і $k=1$ (б).

Частотні залежності покомпонентної функції когерентності (рис. 8.112) також мають щитоподібний вигляд з найбільшим максимумом біля частоти, яка відповідає $\frac{1}{4}$ частоти обертання вала.

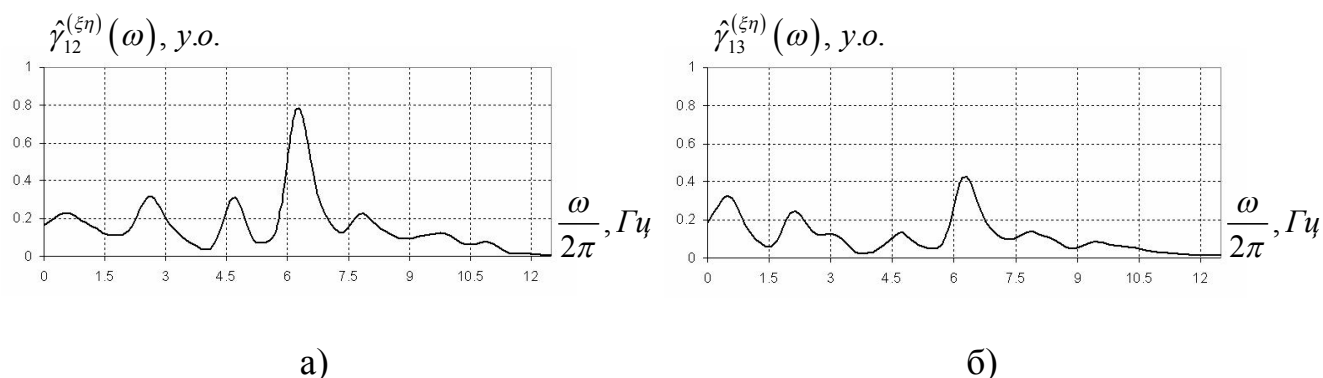


Рис. 8.112. Покомпонентна функція когерентності 1-го (а) та 2-го (б) порядків.

Такі властивості функцій когерентності можна пояснити наявністю розподіленого дефекту – нерівномірного навантаження на зовнішнє кільце, а також появи його локального руйнування.

8.4. Взаємний аналіз вібраційних сигналів підшипникових вузлів турбогенераторів Добротвірської ТЕС

З використанням вібродіагностичної системи ПУЛЬС проводився постійний моніторинг турбоагрегатів Добротвірської ТЕС впродовж шести місяців. За цей період часу досліджено деградацію підшипникового вузла від зародження в ньому локального дефекту до викришення бабітового вкладишу.

Для наглядності коротко проаналізуємо зміну імовірнісних характеристик вертикальної складової вібраційних сигналів підшипникового вузла. Частота відбору сигналів становила 2 кГц, час відбору – 20 с. З наведених графіків видно (рис. 8.113), що поява дефекту спричиняє появу періодичних викидів з частотою, що відповідає частоті обертання валу, у нижній частині графіків, амплітуда яких зростає зі збільшенням розміру дефекту.

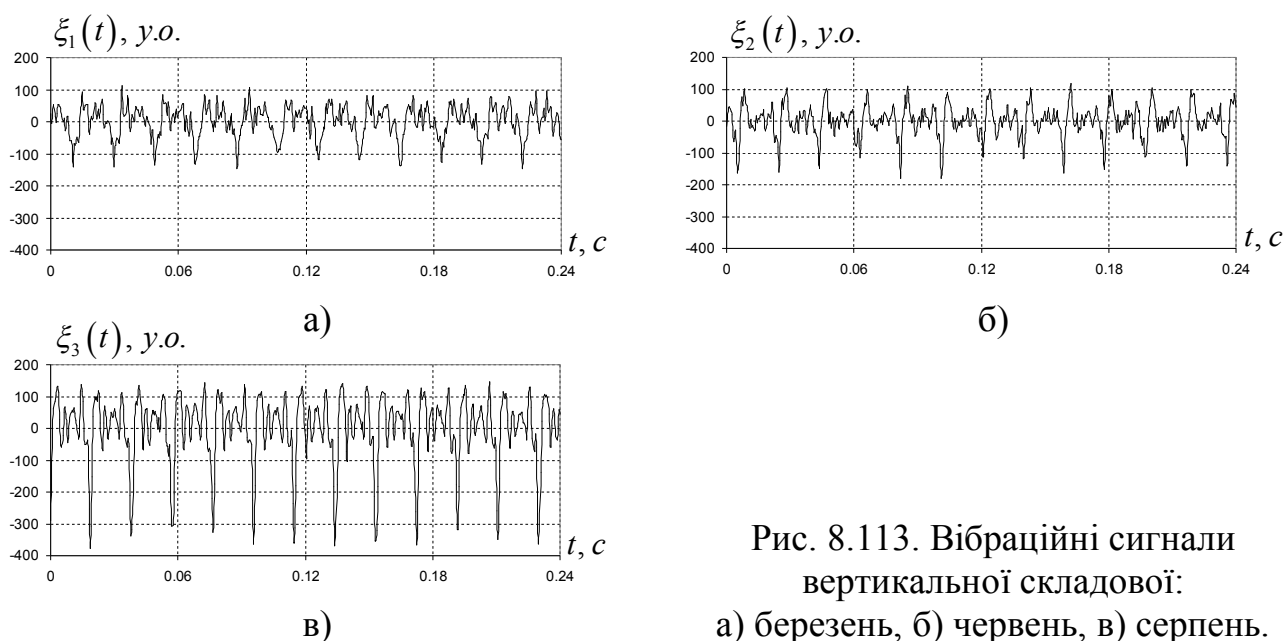


Рис. 8.113. Вібраційні сигнали вертикальної складової:
а) березень, б) червень, в) серпень.

Оцінки кореляційних функцій вібраційних сигналів у стаціонарному наближенні (рис. 8.114) мають незаникаючий хвіст, зумовлений наявністю детермінованих складових. Основний період $T=0,02\text{с}$ (≈ 50 Гц). Поява дефекту спричиняє появу потужних викидів на хвості кореляційної функції амплітуди яких зростають з ростом дефекту. Слід зауважити, що середня потужність вібраційних сигналів з ростом дефекту зростає також.

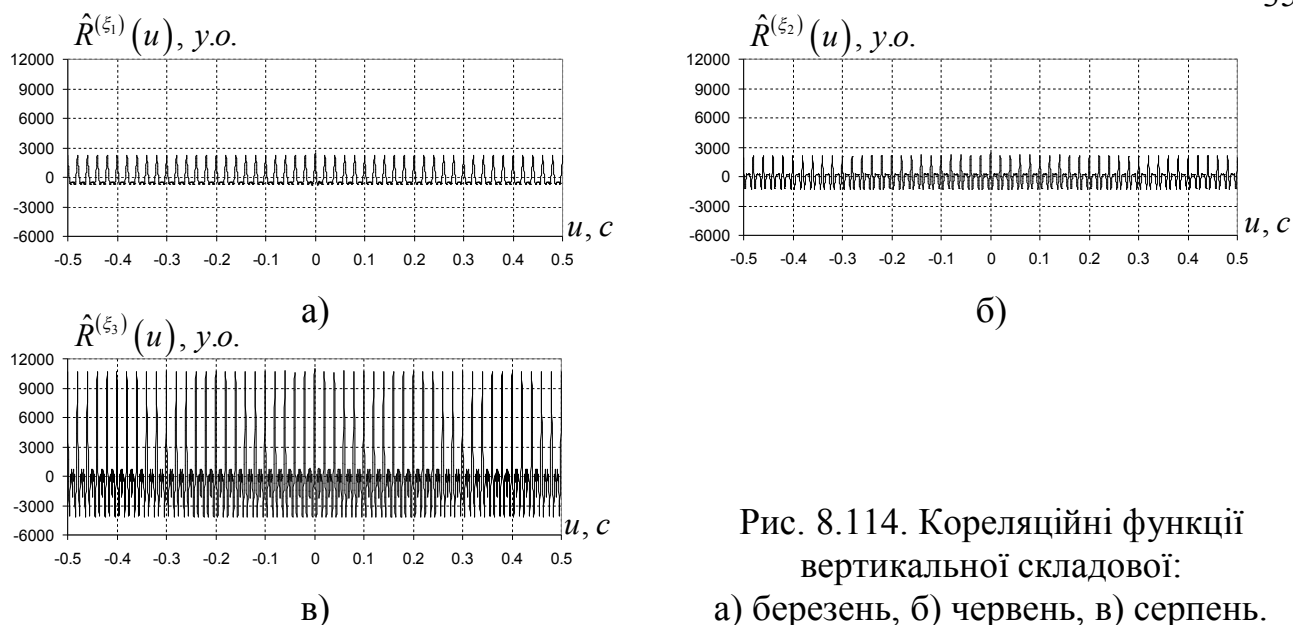


Рис. 8.114. Кореляційні функції вертикальної складової: а) березень, б) червень, в) серпень.

У спектральних густинах потужності (рис. 8.115) вібраційних сигналів у стаціонарному наближенні присутня основна гармонічна складова, що відповідає частоті обертання валу (50 Гц) та кілька кратних до неї гармонік. В основному всі гармонічні складові зосереджені в смузі частот до 500 Гц. Поява дефекту та його ріст спричиняють появу вищих гармонічних складових та ріст їх амплітуд.

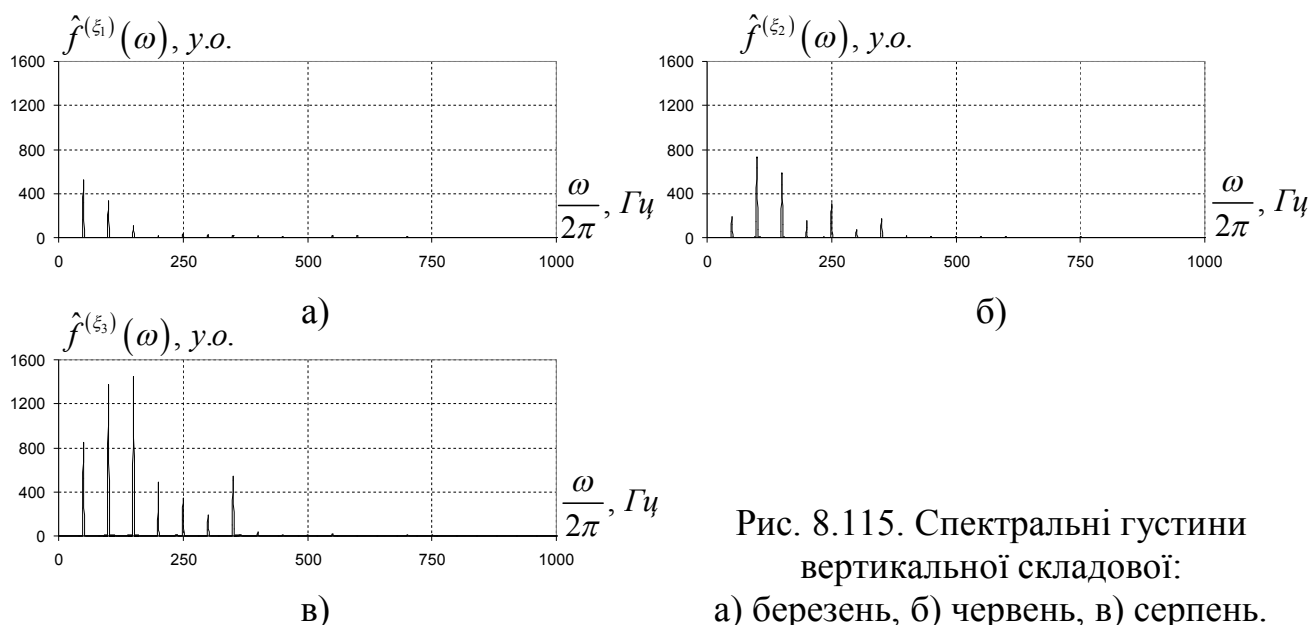


Рис. 8.115. Спектральні густини вертикальної складової: а) березень, б) червень, в) серпень.

Використовуючи метод найменших квадратів розділено детерміновану й стохастичну складові вібраційних сигналів та проаналізовано кожну з них окремо при розвитку дефекту.

На рис. 8.116 наведено динаміку зміни математичного сподівання вібраційних сигналів впродовж всього моніторингу. З наведених графіків бачимо, що при появі дефекту зростають амплітуди викидів.

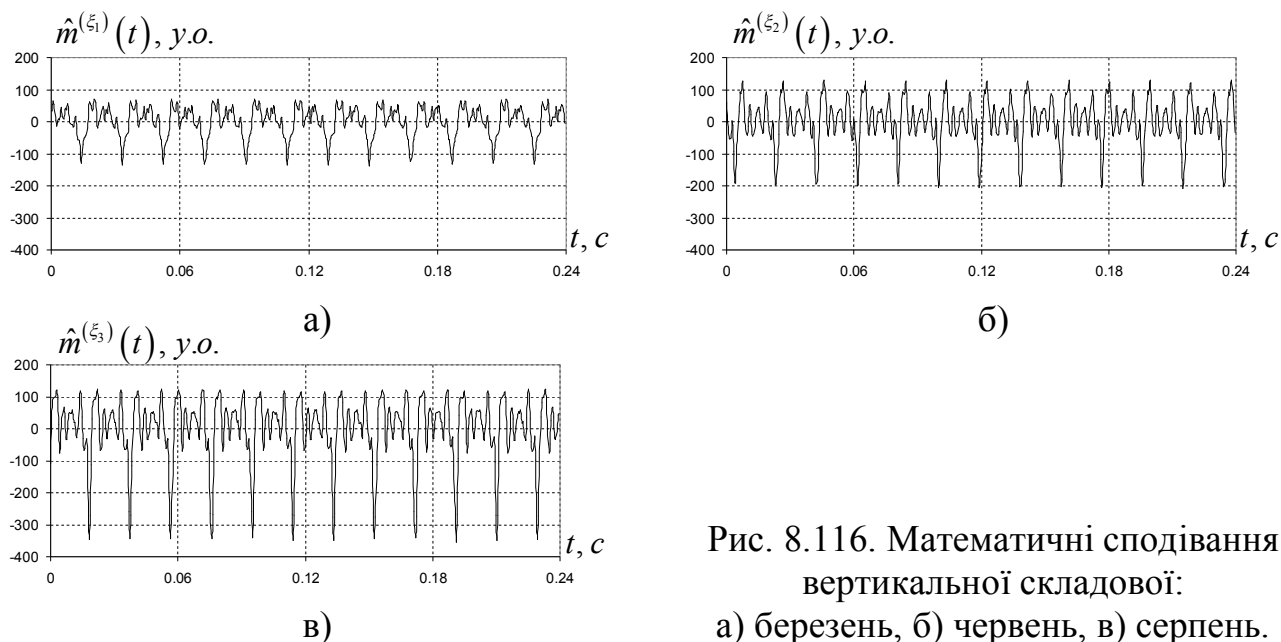


Рис. 8.116. Математичні сподівання вертикальної складової:
а) березень, б) червень, в) серпень.

Серед значущих коефіцієнтів Фур'є математичного сподівання присутні вісім компонентів амплітуди яких зростають з розвитком дефекту (рис. 8.117).

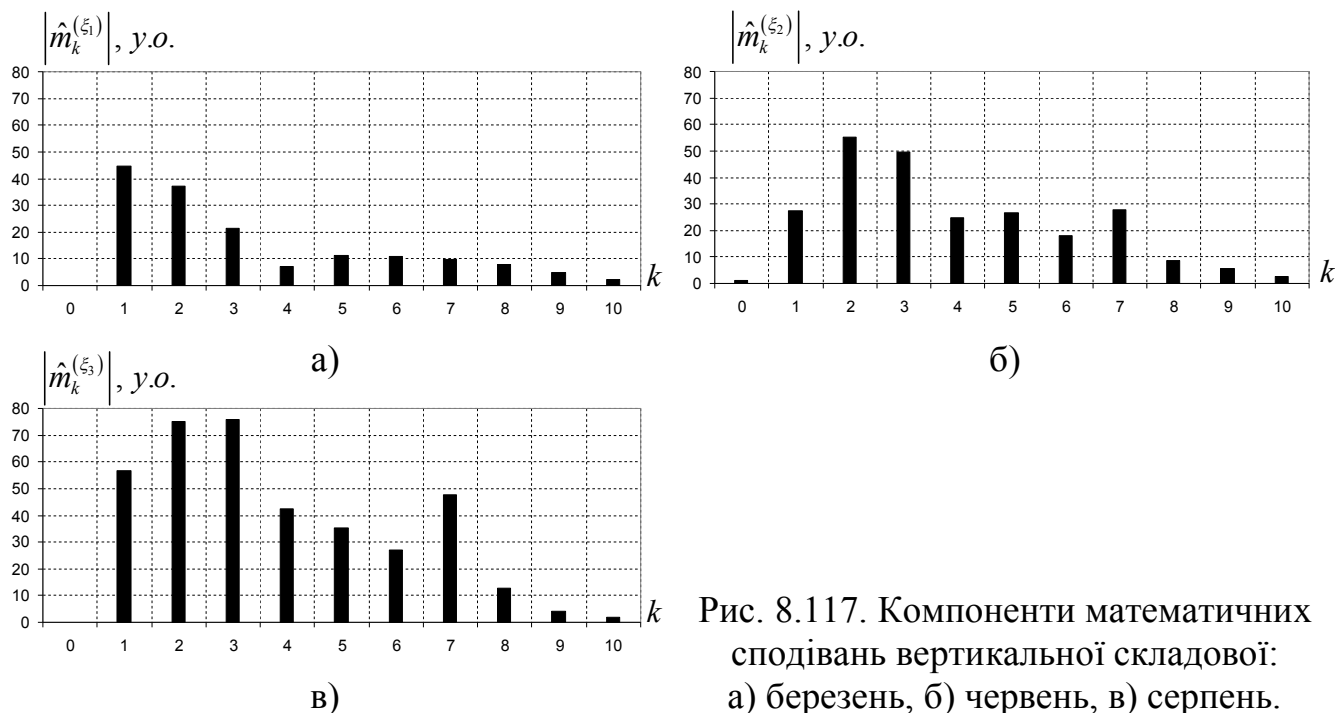


Рис. 8.117. Компоненти математичних сподівань вертикальної складової:
а) березень, б) червень, в) серпень.

Потужність стохастичних складових вібраційних сигналів складають не більше 10 відсотків потужності сигналів (рис. 8.118). При появі дефектів у цих складових вібраційних сигналів появляються викиди, що спричинені взаємодією валу з вкладишем підшипника.

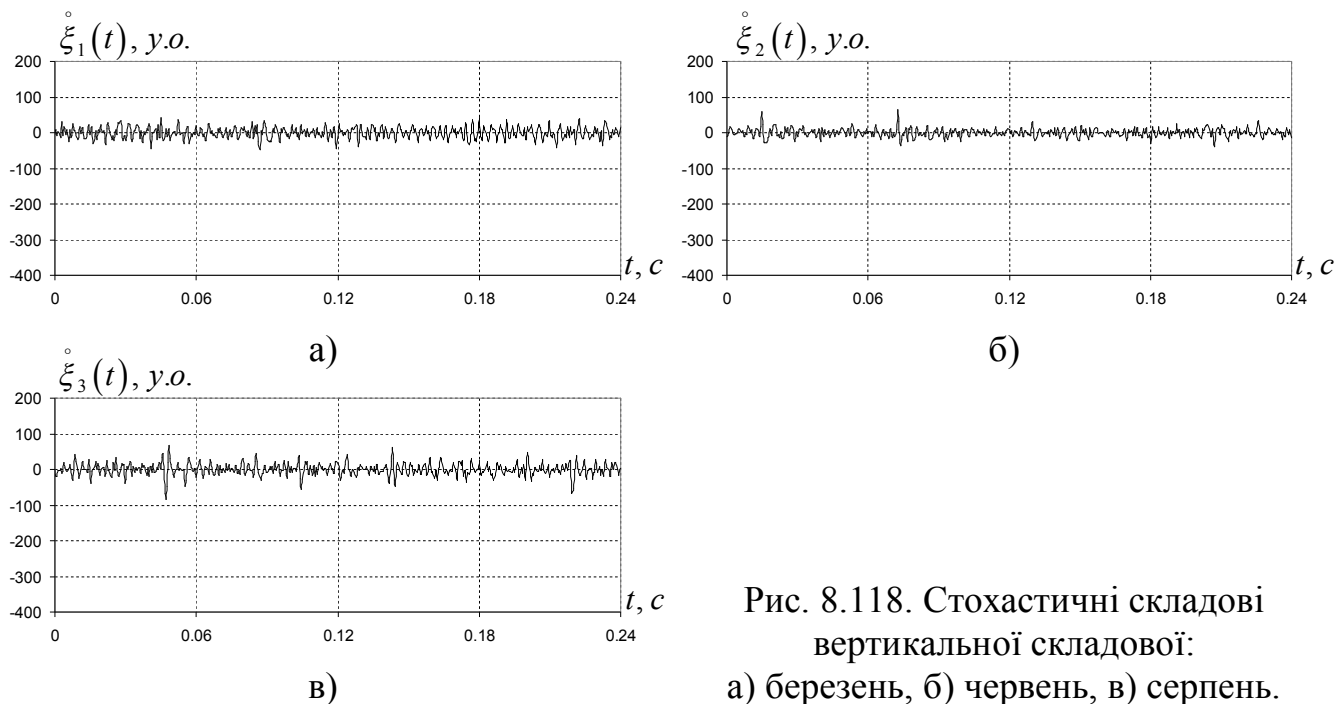


Рис. 8.118. Стохастичні складові вертикальної складової:
а) березень, б) червень, в) серпень.

У кореляційних функціях стохастичних складових у стаціонарному наближенні на хвостах появляються викиди на частоті обертання валу, амплітуди яких зростають з ростом дефекту. Потужність цих складових з ростом дефекту зростає також (рис. 8.119).

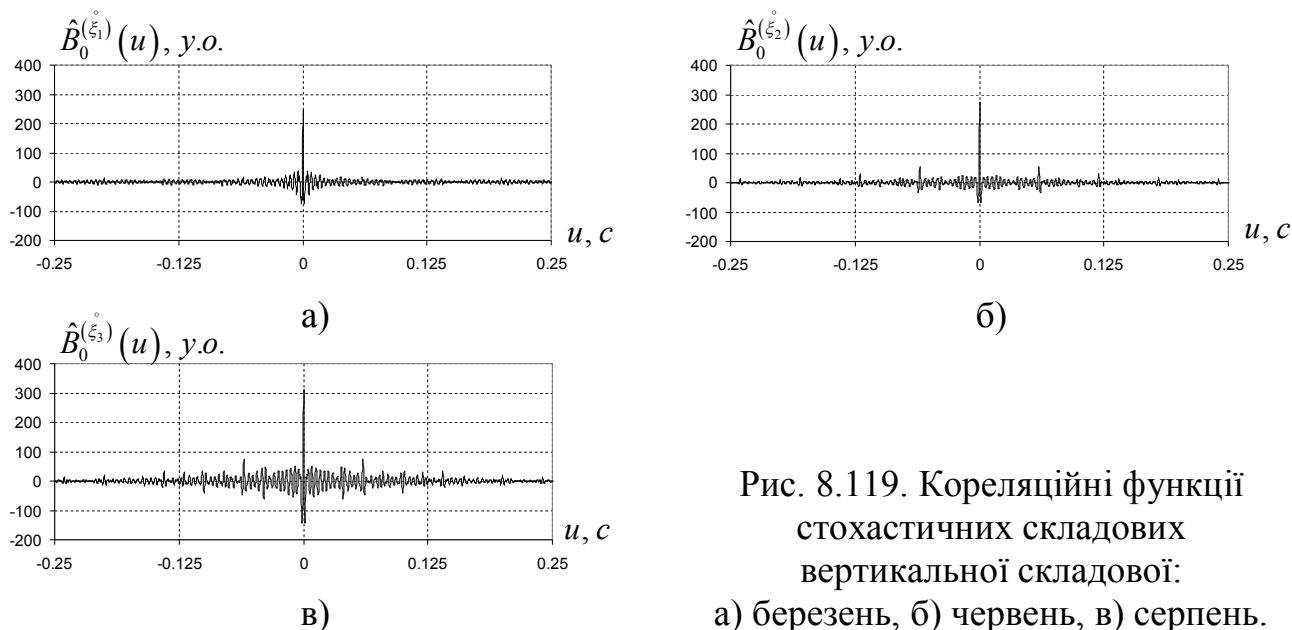


Рис. 8.119. Кореляційні функції стохастичних складових вертикальної складової:
а) березень, б) червень, в) серпень.

Спектральні густини стохастичних складових у стаціонарному наближенні наведено на рис. 8.120 і зосереджені в смузі частот до 500 Гц. Поява дефекту спричиняє появу спектральних піків кратних до частоти обертання валу у смузі від 150 до 500 Гц, амплітуди яких зростають з розвитком дефекту.

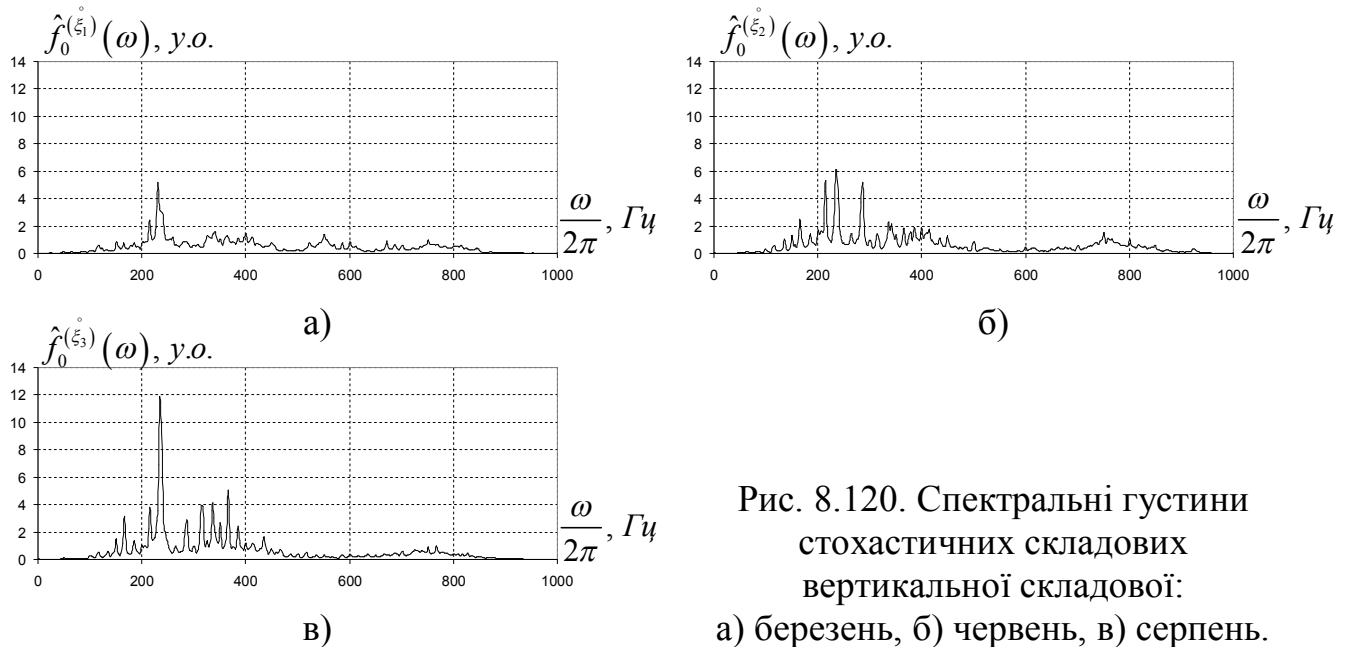


Рис. 8.120. Спектральні густини стохастичних складових вертикальної складової: а) березень, б) червень, в) серпень.

Застосовуючи когерентний метод пошуку прихованих періодичностей для стохастичних складових вібраційних сигналів, у сигналах відібраних у червні (рис. 8.121б) та серпні (рис. 8.121в) виявлені потужні модуляції стаціонарними випадковими процесами частоти обертання валу.

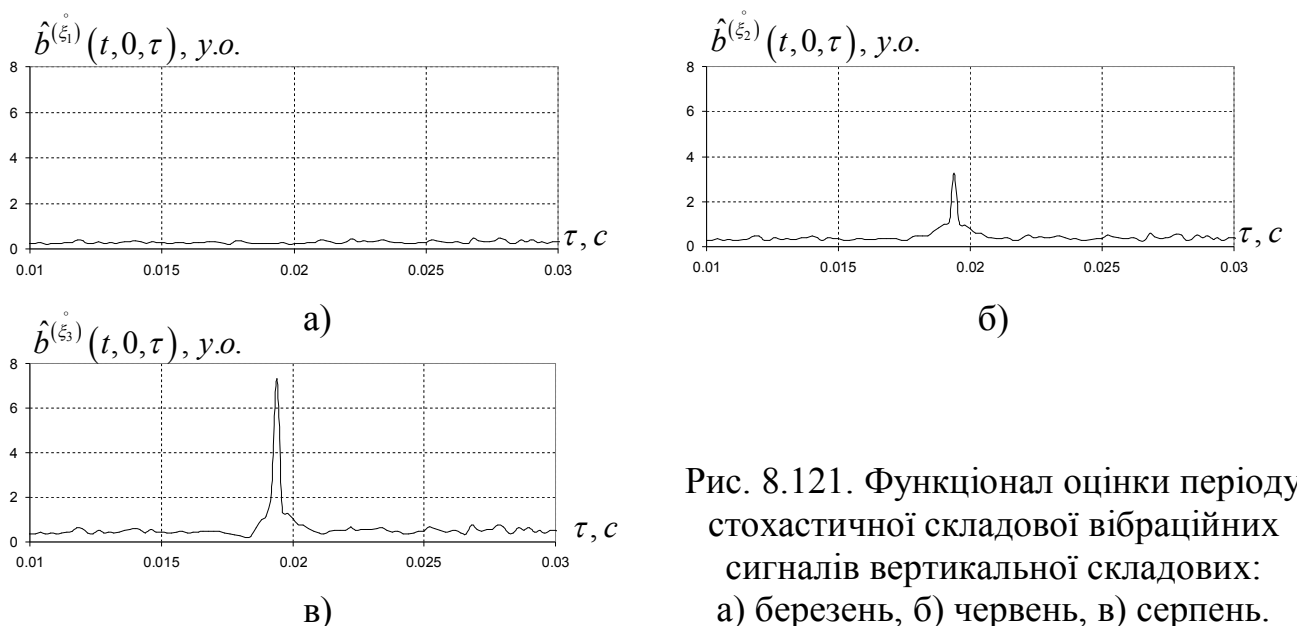


Рис. 8.121. Функціонал оцінки періоду стохастичної складової вібраційних сигналів вертикальної складових: а) березень, б) червень, в) серпень.

Застосовуючи компонентний метод для аналізу стохастичних складових вібраційних сигналів оцінено дисперсії цих складових та їх компоненти Фур'є. З графіків дисперсії видно, що дисперсія стохастичної складової вібраційного сигналу відібраного у березні має вигляд малопотужних флуктуацій відносно певного рівня, що свідчить про стаціонарність цієї складової сигналу, а отже і про відсутність дефекту у підшипниковому вузлі (рис. 8.122а). Поява дефекту до набуття стохастичними складовими вібраційних сигналів характеристик періодичної нестационарності другого порядку, що відображається у появі потужних викидів у дисперсії за період (рис. 8.122б-в). Співвідношення мінімального значення дисперсії до максимального у червні становить 0.352, а у серпні – 0.165.

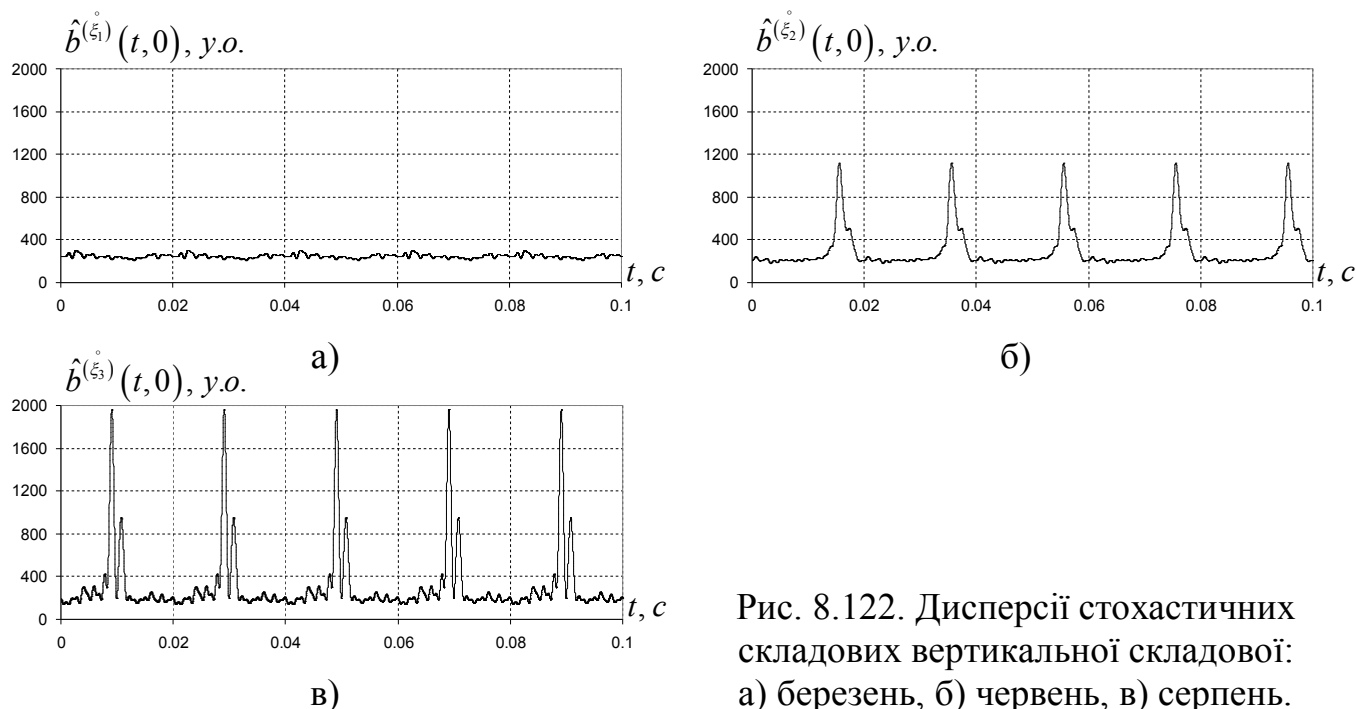


Рис. 8.122. Дисперсії стохастичних складових вертикальної складової: а) березень, б) червень, в) серпень.

Серед значущих компонентів Фур'є дисперсії стохастичної складової вібраційного сигналу відібраного у березні присутня лише нульовий компонент (рис. 8.123а). Поява дефекту спричиняє появу вищих гармонічних складових дисперсії та ріст їх амплітуд. Дисперсія стохастичної складової вібраційного сигналу відібраного у червні містить 9 значущих компонент (рис. 8.123б), а у серпні – 15 (рис. 8.123в).

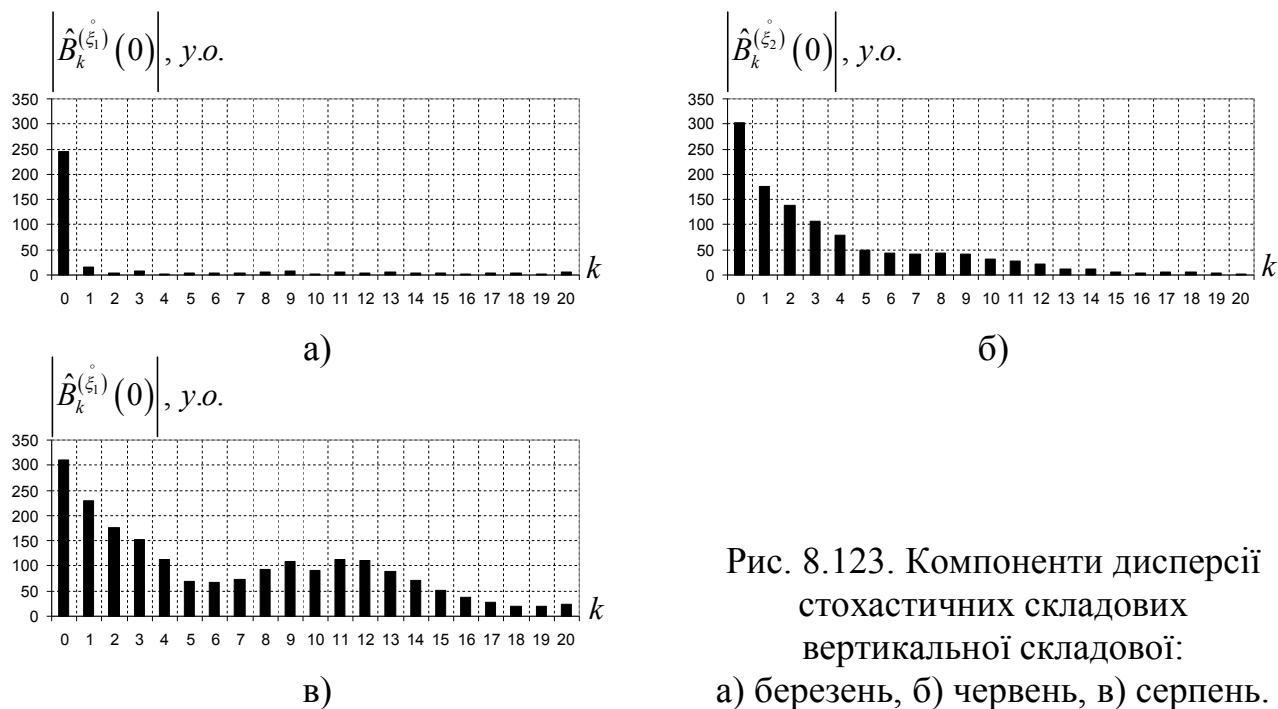


Рис. 8.123. Компоненти дисперсії стохастичних складових вертикальної складової: а) березень, б) червень, в) серпень.

Аналогічний аналіз проведений і для горизонтальних складових вібраційних сигналів. Для горизонтальної і вертикальної складових проведених взаємний кореляційний і спектральний аналізи (згідно схеми на рис. 7.1), виділено їх стаціонарні компоненти та побудовано покомпонентні функції когерентності (рис. 8.124) для дефекту, що розвивався впродовж моніторингу турбоагрегатів.

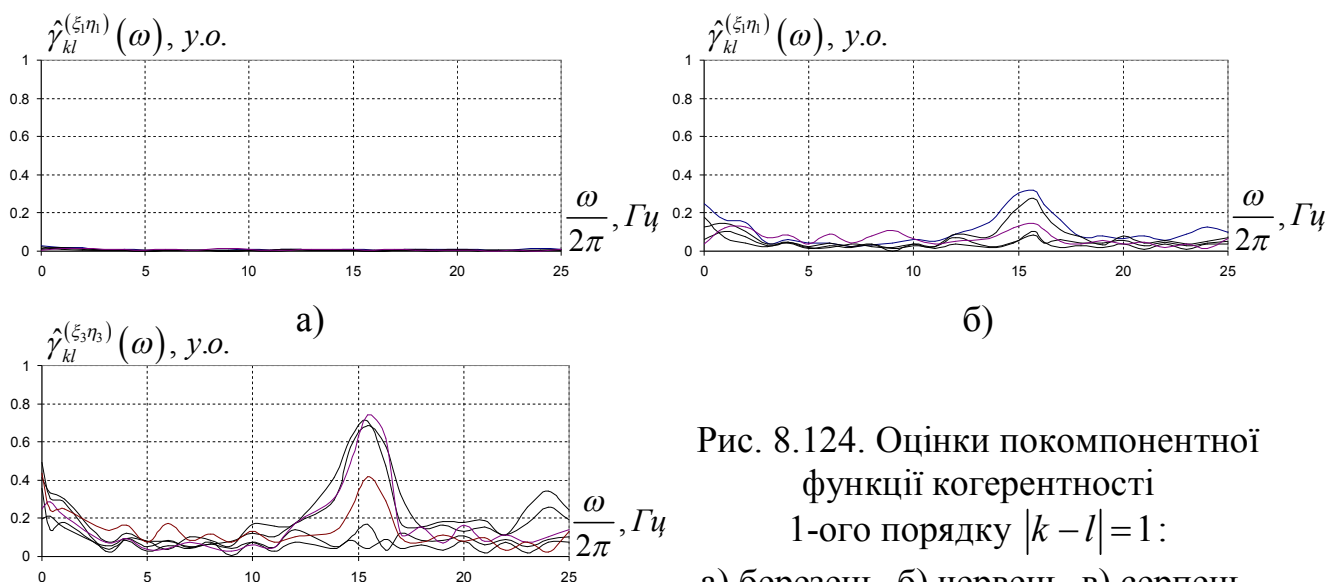


Рис. 8.124. Оцінки покомпонентної функції когерентності 1-ого порядку $|k-l|=1$: а) березень, б) червень, в) серпень.

Видно, що більшість стаціонарних компонентів корелюють в смузі 13–16 Гц, максимуму функцій когерентності досягають в точці, близькій до 16 Гц. Даний факт дає змогу стверджувати про наявність дефекту “обертовий зрив”.

Характеристики сигналів, використані вище, показали свою ефективність при виявленні й інших дефектів підшипникових вузлів: “вихрова змазка”, збільшення зазорів між валом та бабітовою прокладкою, відколювання бабіту.

8.5. Аналіз вібраційних сигналів бездефектного підшипника кочення відібраних на вібромеханічному стенді ВМС-1

З використанням вібромеханічного стенду ВМС-1 було відібрано вертикальну та горизонтальну складові вібрації бездефектного підшипника кочення (рис. 8.125). З наведених графіків чітко видно, що у вібраційних сигналах домінують коливання з періодом обертання валу (50 Гц). Потужність вертикальної складової вібраційного сигналу майже на 25% перевищує потужність горизонтальної.

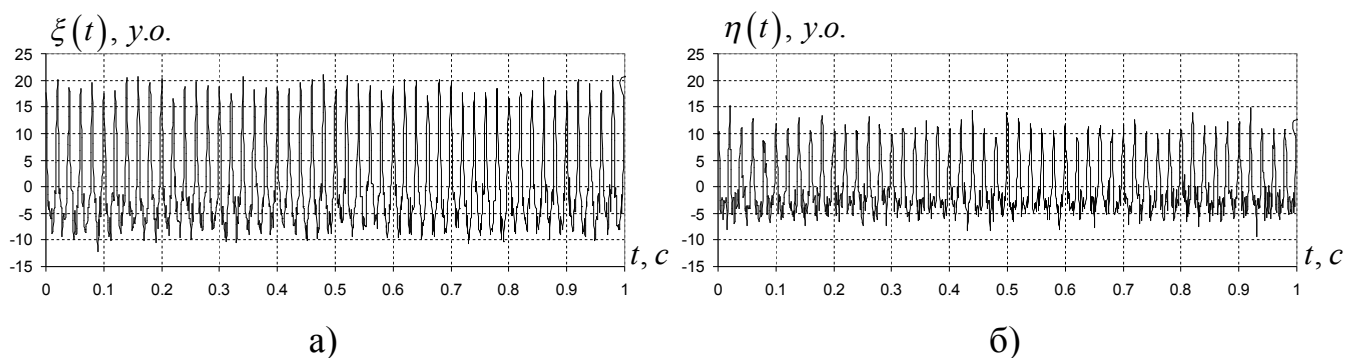


Рис. 8.125. Вібраційні сигнали вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації бездефектного підшипника кочення

Кореляційні функції вертикальної та горизонтальної складових вібраційного сигналу бездефектного підшипника кочення (рис. 8.126) в стаціонарному наближенні мають вигляд незникаючих коливань з частотою, що відповідає частоті обертання валу. У вібраційних сигналах детерміновані коливання за потужністю значно переважають стохастичні складові. Співвідношення сигнал/шум як для вертикальної так і для горизонтальної складових вібрації становить 100:1.

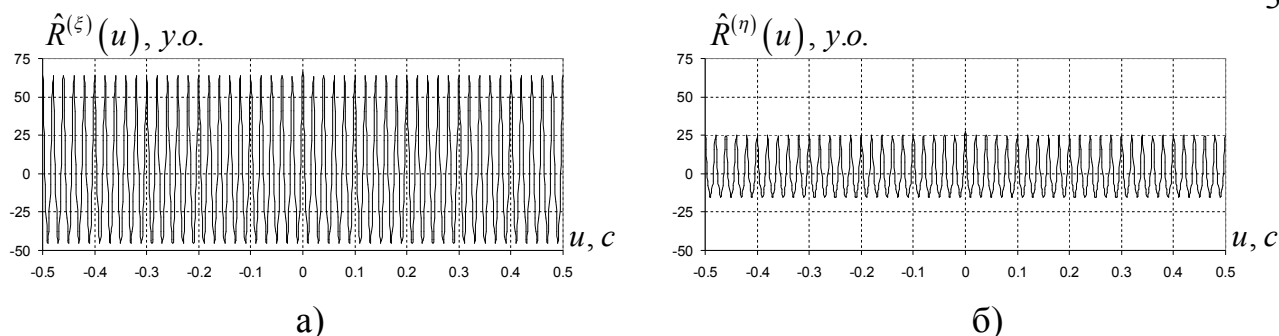


Рис. 8.126. Кореляційні функції вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації бездефектного підшипника кочення

У спектральних густинах потужності вібраційних сигналів (рис. 8.127) присутні гармонічні складові (у вертикальній – 4, а горизонтальній – 3), що відповідають частоті обертання валу.

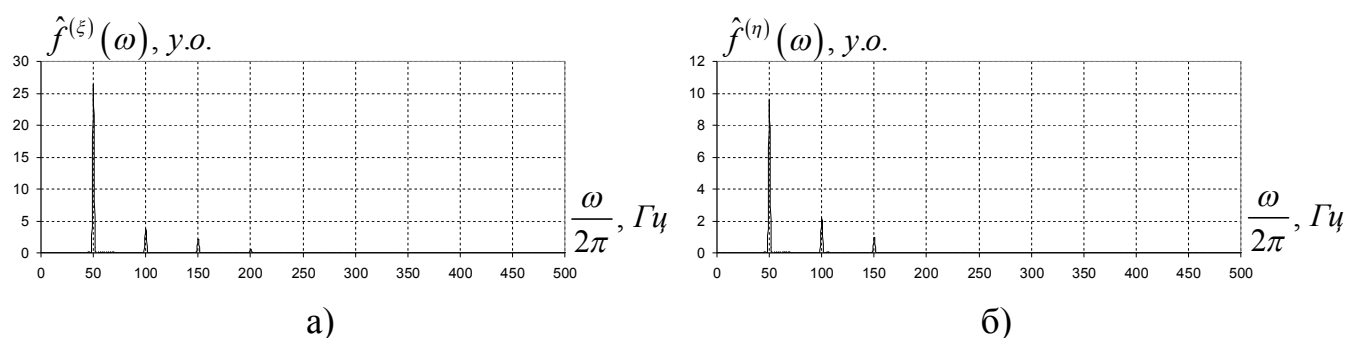


Рис. 8.127. Спектри вібраційних сигналів вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації бездефектного підшипника кочення.

Використовуючи компонентний метод оцінили математичне сподівання сигналів та розділили детерміновані та стохастичні складові сигналів. Математичні сподівання горизонтальної та вертикальної складових вібрації бездефектного підшипника кочення наведені на рис. 8.128. З цих рисунків бачимо, що у вібраційних сигналах домінують коливання з періодом обертання валу (50 Гц). Потужність математичного сподівання вертикальної складової вібраційного сигналу майже в 2 рази перевищує потужність горизонтальної.

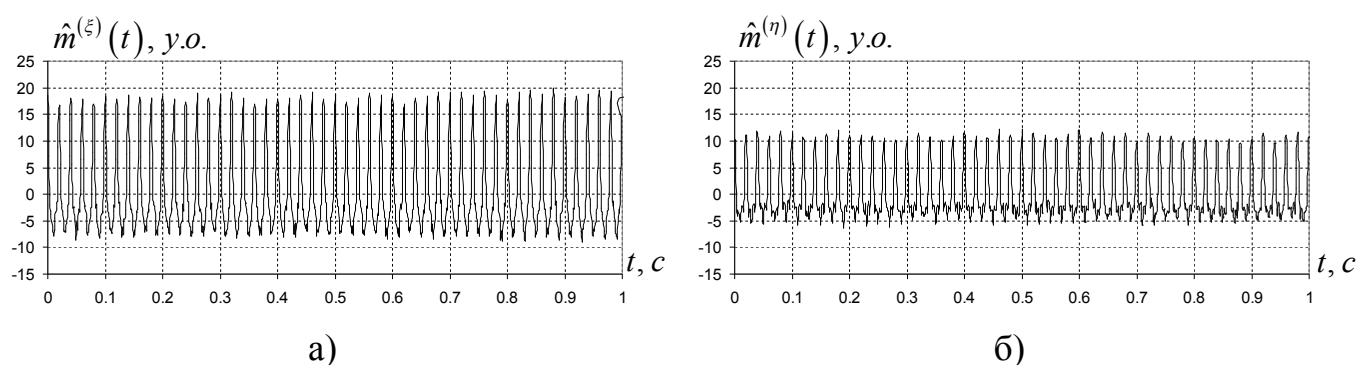


Рис. 8.128. Математичні сподівання вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації бездефектного підшипника кочення.

У гармонічному складі математичного сподівання (рис. 8.129) вертикальної складової присутні перші чотири кратні періоду обертання валу гармоніки, а горизонтальної – перші три.

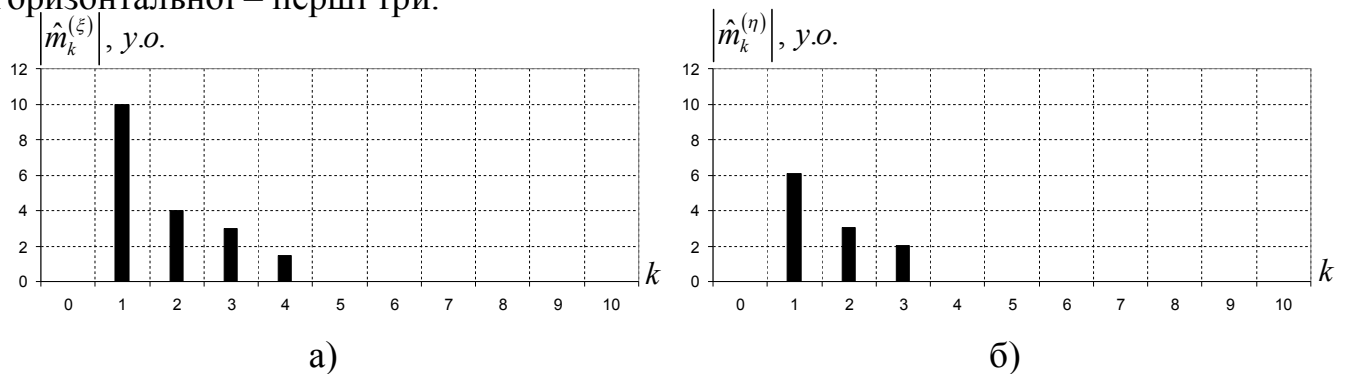


Рис. 8.129. Компоненти матсподівання вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації бездефектного підшипника кочення.

У стохастичних складових вібраційних сигналів модуляції стаціонарними випадковими процесами основних гармонічних складових сигналів не виявлено. Стохастичні складові вібраційних сигналів вертикальної та горизонтальної складових є стаціонарними, що свідчить про відсутність локальних дефектів у підшипниковому вузлі (рис. 8.130). Потужність стохастичної складової вертикальної вібрації співмірна з потужністю стохастичної складової горизонтальної вібрації.

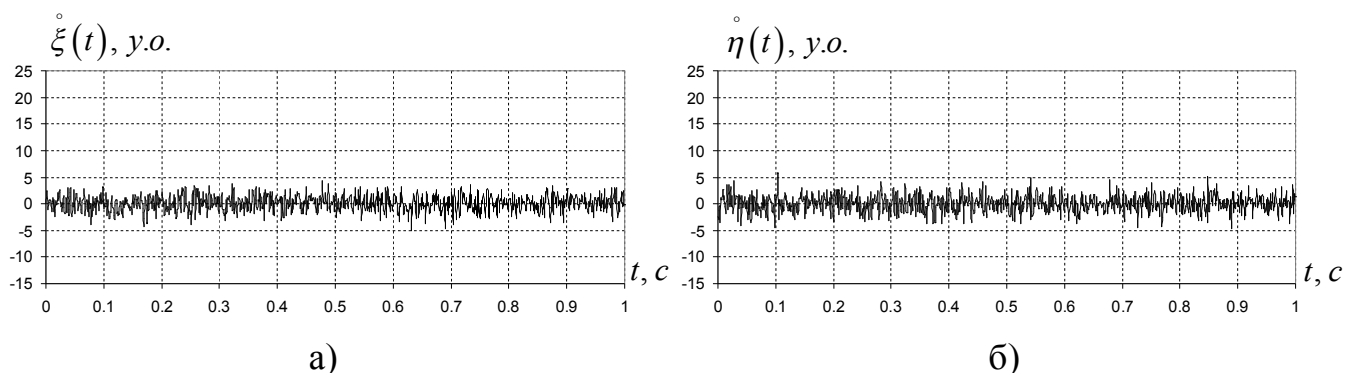


Рис. 8.130. Стохастичні складові вібраційних сигналів вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації бездефектного підшипника кочення

Кореляційні функції стохастичних складових вертикальної та горизонтальної складових вібрації бездефектного підшипника кочення мають вигляд швидкозникаючих функцій (рис. 8.131).

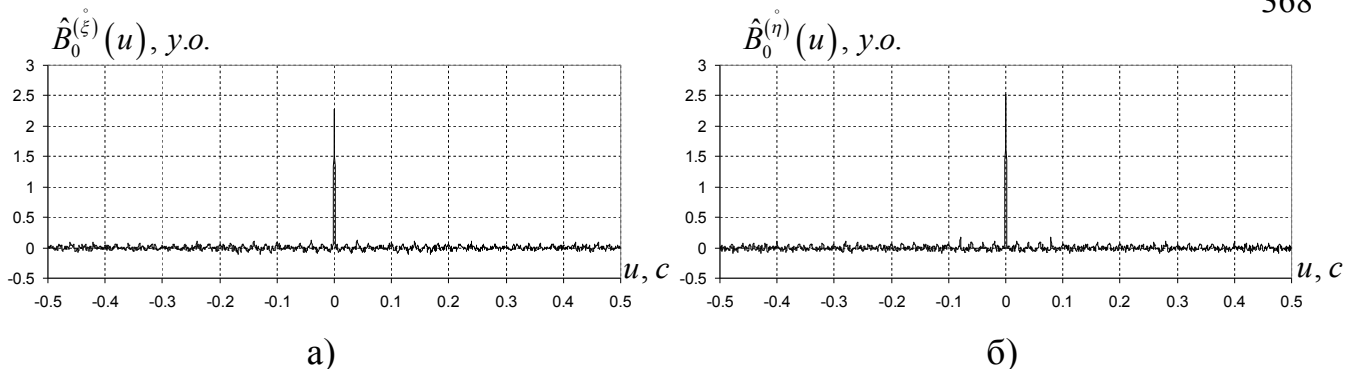


Рис. 8.131. Кореляційна функція стохастичної складової вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації бездефектного підшипника кочення

Спектри стохастичних складових вертикальної та горизонтальної вібрації бездефектного підшипника кочення мають вигляд флуктуацій на рівні нуля (рис. 8.132).

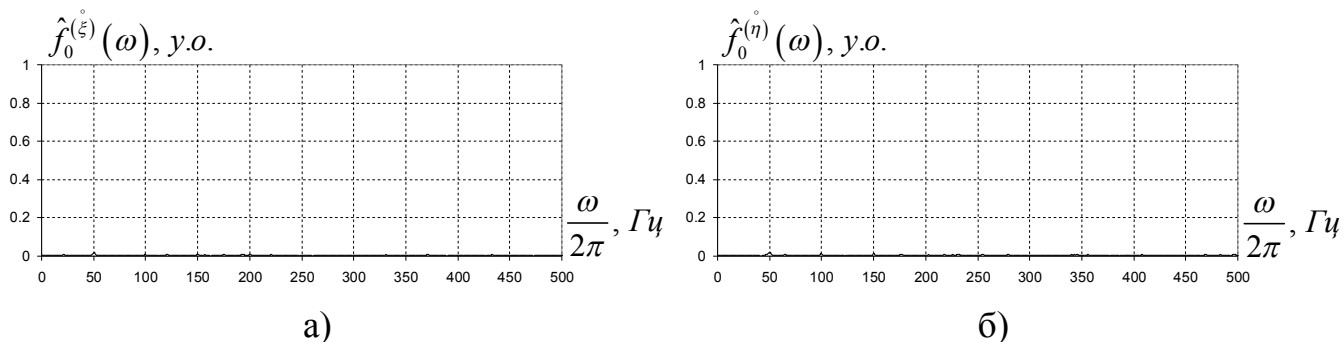


Рис. 8.132. Спектр стохастичної складової вібраційних сигналів вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації бездефектного підшипника кочення

Обчисливши когерентні функціонали пошуку прихованих періодичностей [146] у стохастичних складових вібраційних сигналів для вертикальної і горизонтальної складових встановлено, що вони мають характер слабких флуктуацій відносно певного рівня та не мають екстремумів (рис. 8.133).

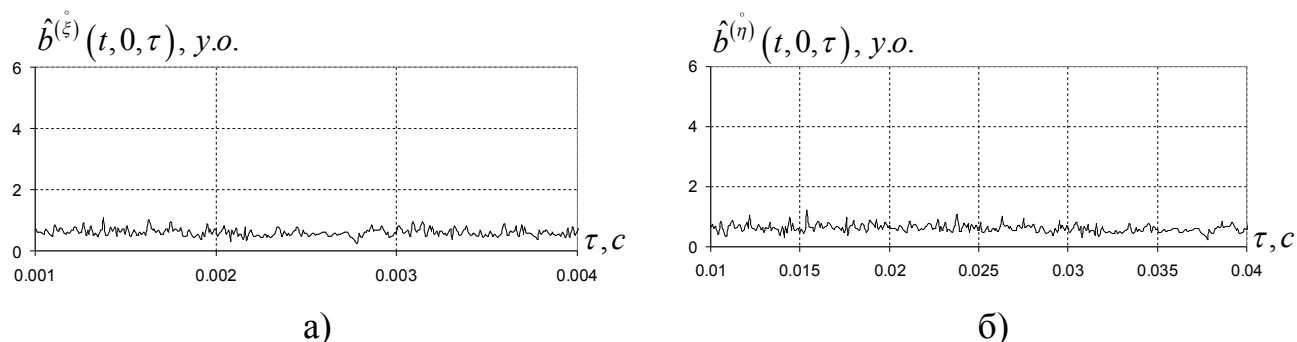


Рис. 8.133. Функціонал оцінки періоду стохастичної складової вібраційних сигналів вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації бездефектного підшипника кочення.

Використовуючи компонентний метод для оцінювання імовірнісних характеристик ПНВП оцінено дисперсії стохастичних складових вертикальної та горизонтальної вібрації (рис. 8.134) та їх компонентів Фур'є (рис. 8.135).

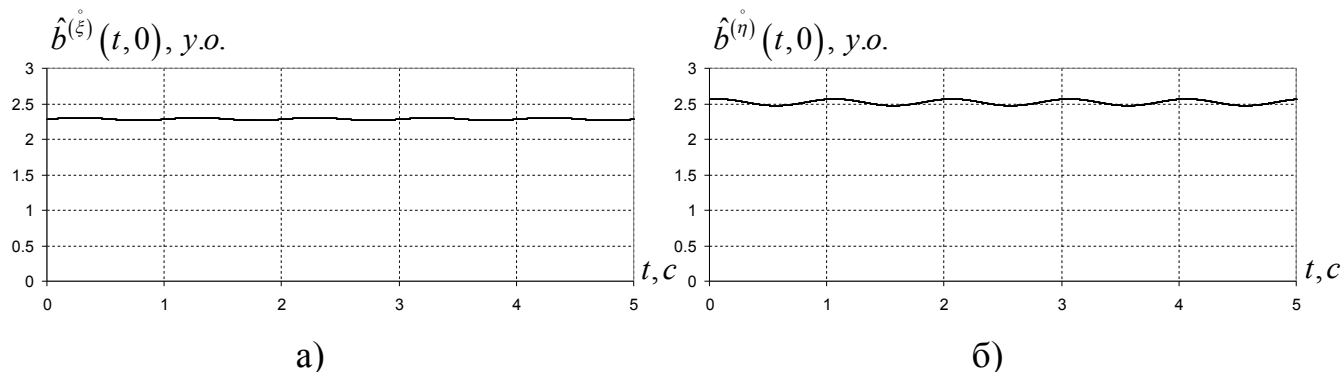


Рис. 8.134. Дисперсія стохастичної складової вібраційних сигналів вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації бездефектного підшипника кочення.

З наведених рисунків дисперсії (рис. 8.10) видно, що величина дисперсії за період обертання валу змінюється мало відносно певного рівня, що свідчить про стаціонарний характер цих складових.

Серед значущих компонентів Фур'є дисперсій стохастичних складових вібраційних сигналів присутні тільки нульові компоненти, що ще раз підтверджує стаціонарний характер стохастичних складових.

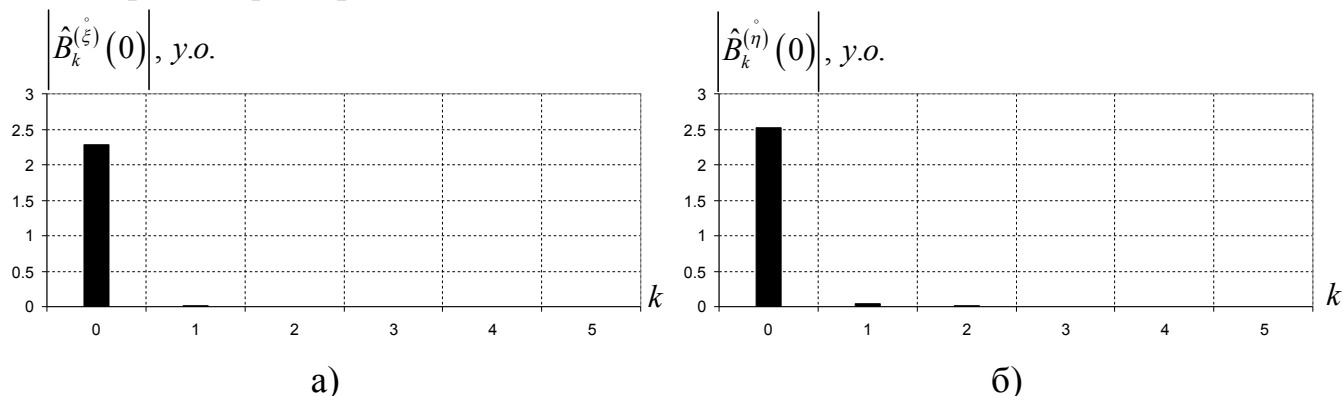


Рис. 8.135. Компоненти дисперсії стохастичної складової вібраційних сигналів вертикальної (а) та горизонтальної (б) складових вібрації бездефектного підшипника кочення.

Таким чином, проводити подальший взаємний аналіз двох вібраційних сигналів не потрібно, так як характеристики, які ми обчислили (рис. 8.126–8.135) вказують, що вібраційні сигнали відібрані за допомогою вібродіагностичної системи ПУЛЬС з допомогою вібромеханічного стенду ВМС-1 є бездефектними.

8.6. Висновки до розділу 8

1. Описані функціональна та структурна схема розробленої системи ПУЛЬС, яка служить для відбору та обробки вібраційних сигналів обертових механізмів. Коротко охарактеризовані основні функціональні можливості системи. Наведені електричні схеми її найбільш важливих елементів. Система успішно випробувана на створеному вібро-механічному стенді ВМС-1.

2. З використання системи ПУЛЬС встановлені характерні особливості взаємокореляційних та взаємоспектральних характеристик горизонтальної і вертикальної вібрацій підшипникових вузлів центрифуги Flottweg Z4E. Показано, що такі вібрації є періодично нестационарно зв'язаними. Їх взаємокореляційні компоненти мають форму швидкозникаючих коливань з виразними викидами, які слідує через період взаємонестационарності. Значення нульового взаємоспектрального компонента, а також вищих взаємоспектральних компонентів, які помітно відрізняються від нуля, зосереджені в смузі 0.6–2 кГц. Встановлено, що взаємопов'язаність нестационарних властивостей сигналів є сильнішою, ніж їх пов'язаність у стаціонарному наближенні.

3. Показано, інтегральна функція когерентності вібрацій центрифуги має вигляд гребінки в смузі 0.5–2.5 кГц. Переніс по частоті у вищу смугу пояснюється тим, що гармоніки з частотою обертання вала промодульовані високочастотними смуговими процесами, спектри яких також гребінчасті. Такий висновок впливає також з аналізу покомпонентних функцій когерентності. Виявлені властивості функцій когерентності є наслідком того, що розподіленні дефекти обертового вузла, який проявляється у нерівномірному радіальному навантаженні, супроводжується також розвинутим локальним. Останній має ударний характер. Виявлений дефект був підтверджений під час ремонту обертового вузла.

4. Проведено взаємний статистичний аналіз вертикальної і горизонтальної складових вібрацій електродвигуна вугільного конвеєра. Встановлені характерні особливості їх спектрально-кореляційної структури. Гармонічний склад оцінки

взаємкореляційної функції є нешироким (до п'яти гармонік). Взаємкореляційні компоненти мають вигляд зникаючих коливань з малопомітними викидами. Значення нульового та вищого взаємспектральних компонентів в основному зосереджені в смузі до 250 Гц помітними є вже їх значення в смузі вищих частот – біля 1000 Гц. Інтегральна функція когерентності має вигляд гребінки в основі низьких частот, яка помітно зсунута відносно області частот, що відповідають частотам гармонік обертання вала. Частотні залежності покомпонентної функції когерентності також мають гребінчастий вигляд. Такі властивості функцій когерентності можна пояснити наявністю розподіленого дефекту – нерівномірного навантаження на зовнішнє кільце, а також появою його локального руйнування.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі вирішено нову науково-прикладну проблему – розроблено методи взаємного спектрально-кореляційного аналізу вібраційних сигналів на основі їх математичних моделей у вигляді періодично корельованих випадкових процесів, що дало можливість виявляти дефекти механізмів на ранніх стадіях їх розвитку, проводити їх локалізацію та встановлювати типи.

Отримано такі основні наукові та практичні результати:

1. Розвинуто спектрально-кореляційну теорію зв'язаних ПКВП-сигналів – математичних моделей двохвимірних вібраційних сигналів. Проаналізовані представлення рядами Фур'є взаємокореляційної та взаємоспектральної функції, встановлені властивості їх коефіцієнтів Фур'є. Отримано формули, які пов'язують ці величини зі взаємокореляційними функціями та взаємоспектральними густинами стаціонарних випадкових процесів, що описують стохастичну амплітуду й фазову модуляцію несучих гармонік вібросигналів. З такою модуляцією безпосередньо пов'язані відомості про ті чи інші дефекти обертових вузлів. Розглянуті окремі випадки взаємокореляційних і взаємоспектральних залежностей, встановлені їх характерні особливості. Обґрунтована доцільність використання спектрально-кореляційних характеристик для виявлення та встановлення типів дефектів.

2. Для кількісного опису взаємозв'язку між властивостями нестационарності двох ПКВП-сигналів, яка проявляється в періодичній зміні за часом їх взаємних спектральних характеристик, обґрунтована формула для інтегральної функції когерентності. Визначення цієї величини зводиться до знаходження характеристик корельованості гармонічних складових двох ПКВП-сигналів – взаємоспектральних компонентів. Показано, що введена функція когерентності не змінюється при лінійних перетвореннях. Така інваріантність зумовлена відповідними зсувами за частотою як нульових спектральних компонентів кожного з сигналів, так і вищих взаємоспектральних компонентів, які характеризують корельованість гармонік різних сигналів. Властивість

інваріантності дає можливість використовувати введену величину при виявленні нелінійних спотворень сигналів, які мають місце при виникненні дефектів.

3. Введена покомпонентна функція когерентності, яка визначається взаємоспектральними густинами окремих модулюючих процесів, що дає можливість детальніше проаналізувати взаємозв'язок ПКВП-сигналів, уникаючи при цьому впливу переносу частот, який виникає при модуляції. Доведена інваріантність цієї величини по відношенню до лінійних перетворень. Показано, що покомпонентна функція когерентності, побудована на основі спектральних густин модулюючих процесів однакових номерів, має такі ж властивості, як функція когерентності стаціонарних випадкових сигналів. Встановлені властивості покомпонентної функції когерентності є переконливим доказом доцільності її використання при розв'язанні задач вібродіагностики.

4. Розвинуто методи когерентного взаємкореляційного аналізу ПКВП-сигналів. Отримано умови асимптотичної незміщеності та слухності оцінок взаємкореляційної функції та її коефіцієнтів Фур'є, які визначаються на основі відліків, що відбираються через період нестационарності. Для можливих оцінок взаємкореляційних характеристик, які відрізняються способами центрування на когерентні оцінки математичних сподівань сигналів, виведено асимптотичні формули для коефіцієнтів Фур'є зміщення й дисперсії оцінок, які описують залежності цих величин від довжини відрізка реалізації та кореляційних компонентів сигналу. Показано, що обчислення статистичної похибки оцінювання навіть нульового взаємного кореляційного компонента не може бути проведене без врахування вищих компонентів. Це підкреслює ту важливу роль, яку відіграє вибір сигналів при їх статистичних дослідженнях.

5. З метою обґрунтованого вибору інтервалу дискретизації проведено аналіз дискретних оцінок взаємкореляційних компонентів, які знаходяться на основі інтегральних сум. Показано, що дискретизація приводить до збільшення як регулярної, так флуктуаційної складової похибок оцінювання, які зумовлені ефектами накладання першого та другого роду. Формули для зміщення й дисперсії в загальному випадку містять додаткові члени, величини яких є одного

порядку зі значеннями основних. Отримані умови відсутності ефектів накладання першого й другого роду, які не співпадають з умовами теореми про дискретизацію Котельникова-Шеннона. При їх виконанні похибки дискретизації визначаються різницями між відповідними інтегралами і їх інтегральними сумами.

6. Когерентні оцінки взаємкореляційних характеристик проаналізовані для амплітудно-модульованих сигналів. Для вибраних апроксимацій авто- та взаємкореляційних функцій модулюючих процесів отримані залежності статистичних характеристик оцінок від довжини відрізка реалізації, кроку дискретизації і параметрів сигналів. На основі таких залежностей проаналізовано вплив нестационарності на похибки оцінювання. Показано, що відносні середньоквадратичні похибки ростуть зі збільшенням зсуву, тому їх апріорі вибрані величини можуть бути отримані тільки для зсувів, менших від деякої заданої величини u_m – точки усікання корелограми. Така точка усікання може бути вибрана, виходячи з розрахунків, проведених для вибраних параметрів обробки та параметрів сигналів.

7. Досліджені компонентні оцінки взаємкореляційної функції, які знаходяться на основі тригонометричного полінома, коефіцієнти якого обчислюються за допомогою інтегральних перетворень Фур'є скінчених відрізків реалізацій сигналів. Показано, що компонентні оцінки є ефективнішими від когерентних, особливо при малому числі гармонік. З ростом числа гармонік ефективність компонентних оцінок спадає і в асимптотиці компонентні оцінки переходять у когерентні. Для порівняння ефективності когерентних і компонентних оцінок отримані представлення зміщення й дисперсії оцінок у вигляді родів Фур'є, коефіцієнти яких визначаються інтегральними перетвореннями кореляційних компонентів. Встановлено, що відносні значення як зміщення, так і дисперсії компонентних оцінок збільшуються з ростом зсуву, тому точка усікання корелограми повинна вибиратися з використанням формул для статистичних характеристик як першого, так і другого порядків.

8. Отримані та проаналізовані формули для статистичних характеристик дискретних компонентних оцінок взаємкореляційної функції. Показано, що вирішальний вплив на ефективність дискретних компонентних оцінок має гармонічний склад тієї чи іншої характеристики та швидкість зникання кореляційних зв'язків. Досліджені ефекти накладання першого й другого роду, отримані умови їх відсутності. Виведені формули для коефіцієнтів Фур'є зміщення та дисперсії, які за виконання таких умов дають можливість обчислити середньоквадратичну похибку оцінок в залежності від величини вибірки K , кроку дискретизації h , точки усікання корелограми u_m , а також параметрів сигналу і на цій основі провести обґрунтований вибір параметрів обробки.

9. Розроблені теоретичні основи емпіричного непараметричного взаємкореляційного аналізу ПКВП-сигналів. Для оцінювання взаємспектральної густини і взаємспектральних компонентів обґрунтовано корелограмний метод, який є узагальненням на випадок зв'язаних ПКВП методу Блекмана-Т'юкі. Доведено асимптотичну незміщеність і слухність оцінок. Для когерентного й компонентного методів оцінювання взаємкореляційної функції отримані асимптотичні формули для коефіцієнтів Фур'є зміщення й дисперсії оцінок взаємспектральних характеристик, які виражають залежності цих величин від спектральних компонентів, довжини реалізації, форми вибраного вікна, точки усікання корелограми. Показано, що середньоквадратична похибка оцінювання містить дві складові, одна з яких зменшується, а друга збільшується при розширенні спектрального вікна. Тому точку усікання корелограми слід вибирати виходячи з вимог до роздільної здатності, так і похибки оцінювання. Обчислення, проведені з використанням отриманих формул для конкретних параметричних моделей сигналів, дають змогу знайти обидві складові похибки і на цій основі зробити обґрунтований вибір параметрів взаємспектральної обробки. Такі обчислення також дають змогу порівняти ефективність когерентного й компонентного взаємспектрального аналізу.

10. З метою дослідження впливу кроку дискретизації на якість оцінювання проведено аналіз оцінок взаємспектральних характеристик, які знаходяться за

дискретними даними. Встановлено, що як систематичні похибки, так і середньоквадратичні відхилення оцінок містять додаткові складові, які залежать від значень характеристик, що оцінюються, на кратних до $\frac{2\pi}{\Delta u}$ частотах, де Δu - крок дискретизації за зсувом, тобто мають місце ефекти накладання. Ефектів накладання можна позбутися тільки у випадку, коли взаємоспектральні характеристики сигналів відрізняються від нуля в обмеженій смузі $[-\omega_m, \omega_m]$ за умови $\Delta u < \frac{\pi}{\omega_m}$. Статистичні похибки дискретних оцінок тоді мало відрізнятимуться від похибок неперервних, а їх числові значення можуть бути обчислені на основі отриманих формул для конкретних апроксимацій спектральних компонентів і вибраного вікна.

11. Когерентний метод взаємкореляційного аналізу ПКВП-сигналів узагальнено на випадок, коли період їх взаємної нестационарності є невідомим. Показано, що когерентні статистики, сформовані на основі взаємкореляційного добутку значень реалізацій сигналів, які відбираються через так званий пробний період, мають по відношенню до періоду нестационарності селективні властивості, і точки їх екстремальних значень можна розглядати як його оцінки, а величини цих екстремумів як оцінки взаємкореляційних функцій. На основі аналізу оцінок періоду як розв'язків певного типу нелінійних рівнянь, отриманих за методом малого параметра, доведена їх асимптотична незміщеність і слушність і показано, що зміщення має порядок $O(N^{-2})$, а дисперсія - $O(N^{-3})$. У першому наближенні отримані формули для зміщення й дисперсії оцінок періоду дають можливість обчислити середньоквадратичну похибку оцінювання в залежності від довжини реалізації і параметрів, які описують авто- та взаємкореляційну структуру сигналу.

12. Досліджено селективні властивості неперервного й дискретного перетворень Фур'є, де замість істинного значення періоду використовується деяка пробна величина. За допомогою методу малого параметра доведено, що точки екстремальних значень таких перетворень є асимптотично незміщеними й

слухними оцінками періоду, а самі екстремуми – оцінками взаємкореляційних компонентів. Їх зміщення має порядок $O(\theta^{-2})$, а дисперсія - $O(\theta^{-3})$. В першому наближенні отримано асимптотичні формули для цих величин, які описують їх залежності від довжини реалізації та авто- та взаємкореляційних компонентів. Встановлено, що дисперсії оцінок є обернено пропорційними до добутку номера кореляційного компонента, який оцінюється і його абсолютної величини. Показано, що за будь-якого кроку дискретизації оцінки періоду залишаються збіжними, однак величина кроку дискретизації суттєво впливає на швидкість збіжності, яка значно зменшується при наявності ефектів накладання першого й другого роду. Виведено умови відсутності ефектів накладання і показано, що при їх виконанні різниця між статистичними похибками неперервних і дискретних оцінок визначається тільки швидкістю зникання кореляційних зв'язків.

13. Обґрунтовані алгоритми та створено програмне забезпечення взаємкореляційного й взаємспектрального аналізу ПКВП-сигналів, яке дає можливість знаходити період взаємної нестационарності, обчислювати взаємкореляційну функцію, взаємспектральну густину, взаємкореляційні і взаємспектральні компоненти, а також інтегральну і покомпонентну функції когерентності. Дане програмне забезпечення було верифіковане на основі комп'ютерних симуляційних моделей і стало однією зі складових розроблених у ФМІ НАНУ України вібродіагностичних систем, з використанням яких, за безпосередньої участі автора, було успішно проведено цілий ряд діагностичних робіт на підприємствах України, що підтверджено відповідними актами.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Абрамов И. Л. Вибродиагностика энергетического оборудования. Учебное пособие по дисциплине “Диагностика в теплоэнергетике” / И. Л. Абрамов. – Кемерово : КузГТУ, 2011. – 81 с.
2. Александров А. Я. Вибрация и вибродиагностика судового электрооборудования / А. В. Барков, Н. А. Баркова, В. А. Шафранский – Л. : Судостроение, 1986. – 276 с.
3. Андерсон Т. Введение в многомерный статистический анализ / Пер. с англ. Ю. Ф. Кичатова, Е. С. Кочеткова, Н. С. Райбмана; под ред. Б. В. Гнеденко. – М. : Физматгиз, 1963. – 501 с.
4. Барков А. В. Мониторинг и диагностика роторных машин по вибрации : Учеб. пособие / А. В. Барков, Н. А. Баркова, А. Ю. Азовцев. – Санкт-Петербург, 2000. – 158 с.
5. Бельшев А. П. Вероятностный анализ морских течений / А. П. Бельшев, Ю. П. Клеванцов, В. А. Рожков – Л. : Гидрометеиздат, 1983. – 264 с.
6. Бендат Дж. Прикладной анализ случайных данных / Дж. Бендат, А. Пирсол – М. : Мир, 1989. – 546 с.
7. Бендат Дж. Применения корреляционного и спектрального анализа / Дж. Бендат, А. Пирсол – М. : Мир, 1983. – 312 с.
8. Бенткус Р. Выделение скрытых периодичностей / Р. Бенткус, Ю. Сушинскас // Применение теории вероятностей и математической статистики. – 1985. – Вып. 6. – С. 77–78.
9. Биргер И. А. Техническая диагностика / И. А. Биргер – М. : Машиностроение, 1978. – 240 с.
10. Бруевич Н. Г. Основы нелинейной точности и надежности устройств / Н. Г. Бруевич - М. : Наука, 1976. – 136 с.
11. Василенко В. М. Статистические характеристики вертикальной структуры течений в Атлантическом океане / В. М. Василенко, Б. Л. Гаврилин, А. П. Мирабель - Изв. АН СССР. ФАО. – 1972. – Т. 8. – № 10. – С. 1042–1051.

- 12.Василина Ю. Т. Анализ нестационарных модулированных случайных сигналов вибраций в системах технической диагностики / Ю. Т. Василина В. Ю. Михайлишин, И. Н. Яворский // Надежность. Современное состояние, проблемы, перспективы. I-ая Украинская науч.-техн. конф. – Киев, 1995. – С. 92–93.
- 13.Василина Ю. Т. Виявлення прихованих періодичностей в сигналах вібрації машинного обладнання / Ю. Т. Василина В. Ю. Михайлишин, І. М. Яворський // 2-га Українська конф. з автоматичного керування “Автоматика-1995”. – Львів, 1995. – С. 48–49.
- 14.Василина Ю. Т. Комп’ютерні технології статистичного аналізу сигналів вібрації для контролю технічного стану та діагностики машин / Ю. Т. Василина, В. Ю. Михайлишин // Праці другої Всеукраїнської міжнародної конференції “Оброблення сигналів, зображень та розпізнавання образів”, УкрОбраз-1994. – Київ : Інститут кібернетики НАН України, 1994. – С. 181–183.
- 15.Гарманов А. В. Устройство для мобильных систем E20-10. Руководство пользователя / А. В. Гарманов – М., 2012. – 61 с.
- 16.Генкин М. Д. Виброакустическая диагностика машин и механизмов / М. Д. Генкин, А. Г. Соколова – М. : Машиностроение, 1987. – 288 с.
- 17.Герман В. Х. Спектральный анализ векторных временных рядов скоростей морских течений / В. Х. Герман, А. С. Цвезинский // Метеорология. – 1977. – № 12. – С. 43-49.
- 18.Гижко Ю. І. Особливості побудови інформаційно-вимірювальних систем діагностики рухомих частин електротехнічного обладнання / Ю. І. Гижко, М. В. Мислович // Праці інституту електродинаміки Національної академії наук України. 2007 – № 2 (17). – С. 107–115.
- 19.Гиттис Э. И. Аналого-цифровые преобразователи / Э. И. Гиттис, Е. А. Пискулов. – М. : Энергоатомиздат, 1981. – 360 с.
- 20.Гладышев Э. Г. Периодически и почти-периодически коррелированные процессы с непрерывным временем / Э. Г. Гладышев // Теория вероятностей и ее применения. – 1963. – Т. 3. – Вып. 2. – С. 184–189.

21. Гольдин А. С. Вибрация роторных машин / А. С. Гольдин - М. : Машиностроение, 1999. – 344 с.
22. Григорьев Н. В. Вибрация энергетических машин / Н. В. Григорьев – Л. : Машиностроение, 1974. – 464 с.
23. Гуляев А. П. Металловедение. – М. : Металлургия. – 542 с.
24. Денисенко В., Халявко А. Защита от помех датчиков и соединительных проводов систем промышленной автоматизации. / В. Денисенко, А. Н. Халявко // Современные технологии автоматизации. – № 1. – 2001. – С. 68–75.
25. Джексон Р. Г. Новейшие датчики / Р. Г. Джексон – М. : Техносфера, 2007. – 384 с.
26. Джонс М. Х. Электроника – практический курс. / М. Х. Джонс – М. : Постмаркет, 1999. – 528 с.
27. Дзерин О. Ю. Метод наименьших квадратов для дослідження характеристик вібраційних сигналів / О. Ю. Дзерин, Р. М. Юзефович, І. М. Яворський, І. Й. Мацько // Матеріали V Всеукраїнської школи-семінару молодих вчених і студентів “Сучасні комп’ютерні інформаційні технології” (АСІТ-2016). – Тернопіль : Тернопільський національний економічний університет, 2016. – С. 17–19.
28. Драбич О. П. Визначення періоду корельованості періодично корельованих випадкових процесів за допомогою коваріаційних перетворень / О. П. Драбич, В. Ю. Михайлишин, І. М. Яворський // Відбір і обробка інформації. – 1999. – № 14 (90). – С. 47–52.
29. Драбич О. П. Виявлення регулярних періодичних змін сигналу і оцінювання їх періоду / О. П. Драбич, В. Ю. Михайлишин, І. М. Яворський // Відбір і обробка інформації. – 1999. – № 13 (89). – С. 26–31.
30. Драган Я. П. Методы вероятностного анализа ритмики океанологических процессов / Я. П. Драган, В. А. Рожков, И. Н. Яворский – Л. : Гидрометеопиздат, 1987. – 320 с.

31. Драган Я. П. О периодически коррелированных случайных процессах и системах с периодически изменяющимися параметрами / Я. П. Драган // Отбор и передача информации. – 1969. – № 22. – С. 22–33.
32. Драган Я. П. О представлении периодически коррелированного случайного процесса через стационарные компоненты / Я. П. Драган // Отбор и передача информации. – 1975. – № 45. – С. 7–20.
33. Драган Я. П. Периодические и периодически нестационарные случайные процессы / Я. П. Драган // Отбор и передача информации. – 1985. – № 72. – С. 3–17.
34. Драган Я. П. Ритмика морского волнения и подводные акустические сигналы / Я. П. Драган, И. Н. Яворский – К. : Наукова думка, 1982. – 247 с.
35. Дубров А. М. Многомерные статистические методы и основы эконометрики. Учебное пособие / А. М. Дубров, В. С. Мхитарян, Л. И. Трошин. – М. : Московский государственный университет экономики, статистики и информатики, 2002. – 79 с.
36. Зиновьев А. Ю. Визуализация многомерных данных / А. Ю. Зиновьев – Красноярск : Изд. КГТУ, 2000. – 180 с.
37. Иванов В. Н. Теория случайных возмущений и почти-периодические процессы / В. Н. Иванов – Саратов : Приволжское книжное изд-во, 1973. – 112 с.
38. Кісь М. Ю. Оцінка періоду гауссового періодично нестационарного випадкового процесу / М. Ю. Кісь, І. М. Яворський // Вісник НУ „Львівська політехніка”. Радіоелектроніка та комунікації. – 2002. – № 443. – С. 25–29.
39. Кобяков И. Б. Трехкомпонентный виброакселерометр для систем вибрационной диагностики технических систем / И. Б. Кобяков // Контроль. Диагностика. – № 10 (40). – 2001. – С. 17–18.
40. Коллакот Р. А. Диагностирование механического оборудования / Р. А. Коллакот – Л. : Судостроение, 1980. – 296 с.
41. Коронкевич О. І. Лінійні динамічні ситеми під дією випадкових сил / О. І. Коронкевич // Наукові записки Львівського університету. – 1957. – 44. – Вип. 8. – С. 175–183.

42. Куценко А. И. Вибрационные испытания опор турбоагрегата с использованием трехкомпонентных виброакселерометров нового поколения / А. И. Куценко, С. В. Калинин, И. Б. Кобяков // Теплоэнергетика. – № 6. – 2003. – С. 36-43.
43. Левитан Б. М. Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения / Б. М. Левитан, В. В. Жидков. – М. : Из-тво МГУ, 1978. – 204 с.
44. Лепеш Г. В. Современные методы и средства диагностики оборудования инженерных систем зданий и сооружений / Г. В. Лепеш // Технико-технологические проблемы сервиса – Санкт-Петербург, 2015. – № 4(34) – С. 3–8.
45. Марченко Б. Г. Вибродиагностика подшипниковых узлов электрических машин / Б. Г. Марченко, М. В. Мыслович – К. : Наукова думка, 1992. – 196 с.
46. Мацько І. Й. Аналіз вібраційного стану стрижня з тріщиною під дією стохастичних циклічних навантажень / І. Й. Мацько, І. М. Яворський, Р. М. Юзефович, Я. Маєвські // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2014. – Т. 50. – № 2. – С. 128–136.
47. Мацько І. Й. Аналіз коливань стержня з тріщиною під дією стохастичної вимушувальної сили / І. Й. Мацько, Р. М. Юзефович, І. Б. Кравець // Матеріали IV Всеукраїнської школи-семінару молодих вчених і студентів “Сучасні комп’ютерні інформаційні технології” (АСІТ-2014). – Тернопіль : Тернопільський національний економічний університет, 2014. – С. 100–102.
48. Мацько І. Й. Вплив параметрів демпфування та стохастичного навантаження на властивості повздовжніх коливань стрижня з тріщиною / І. Й. Мацько, І. М. Яворський, Р. М. Юзефович, З. Закжевські // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2016. – Т. 52. – № 4. – С. 118–125.
49. Мацько І. Й. Діагностування стану стержня з тріщиною за параметрами вібраційних сигналів / І. Й. Мацько, Р. М. Юзефович, І. М. Яворський, В. Б. Шевчик, І. Б. Кравець // Праці VI українсько-польської науково-технічної конференції “Електроніка та інформаційні технології” (ELIT-2014). – Львів : Львівський національний університет імені Івана Франка, 2014. – С. 128–131.

- 50.Мацько І. Й. Моделювання вібраційних сигналів підшипникових вузлів методами періодично корельованих випадкових процесів / І. Й. Мацько, І. Б. Кравець, Р. М. Юзефович // Матеріали ХІХ відкритої науково-технічної конференції молодих науковців і спеціалістів Фізико-механічного інституту ім. Г. В. Карпенка НАН України. – Львів, 2007. – С. 202–205.
- 51.Мацько І. Й. Моделювання коливань пружної пластини з тріщиною / І. Й. Мацько, І. Б. Кравець, Р. М. Юзефович, І. М. Яворський // Матеріали конференції молодих учених із сучасних проблем механіки і математики ім. акад. Я. С. Підстригача. – Львів, 2009. – С. 67–68.
- 52.Мацько І. Й. Стохастична динамічна модель сигналів вібрації підшипника кочення та їх аналіз / І. Й. Мацько, І. М. Яворський, Р. М. Юзефович, З. Закжевські // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2013. – Т. 49. – № 4.– С. 119–128.
- 53.Механіка руйнування та міцність матеріалів. Дов. посібник. Т. 5. Неруйнівний контроль та технічна діагностика // Під. ред. З. Т. Назарчука – Львів : ФМІ, 2001. – 1132 с.
- 54.Михайлишин В. Ю. Вероятностная модель периодичности сигналов геомагнитных пульсаций РС1 / В. Ю. Михайлишин, Д. С. Флигель, И. Н. Яворский // Исследование структуры и волновых свойств приземной плазмы. – М. : Наука, 1990. – С. 76–88.
- 55.Михайлишин В. Ю. Вероятностная структура сезонной изменчивости температуры воздуха / В. Ю. Михайлишин, И. Н. Яворский // Метеорология и гидрология. – 1994. – № 2. – С. 20–35.
- 56.Михайлишин В. Ю. Імовірнісні моделі та статистичні методи аналізу сигналів вібрацій для діагностики машин та конструкцій / В. Ю. Михайлишин, І. М. Яворський, Ю. Т. Васирина, О. П. Драбич, І. Ю. Ісаєв // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 1997. – № 5. – С. 61-74.
- 57.Михайлишин В. Ю. Компонентное оценивание периода стохастической повторяемости ритмических сигналов / В. Ю. Михайлишин, И. Н. Яворский // Автоматика. – 1993. – № 4. – С. 44–48.

58. Михайлишин В. Ю. Приховані періодичності : моделі, виявлення й аналіз / В. Ю. Михайлишин, І. М. Яворський // Імовірнісні моделі та обробка випадкових сигналів і полів. – Харків : Видавництво ХІРЕ, 1992. – С. 111–114.
59. Михайлишин В. Ю. Статистичекій аналіз волнових пакетов геомагнитних пульсацій типа РС1 методами періодически коррелированных случайных процессов / В. Ю. Михайлишин, Д. С. Флигель, И. Н. Яворский // Геомагнетизм и аэрономия. – 1990. – Т. 30. – № 5. – С. 757–764.
60. Михайлишин В. Ю. Статистический анализ радиофизических процессов со скрытой периодичностью / В. Ю. Михайлишин, И. Н. Яворский // Радиофизика и радиоастрономия. – 1996. – № 2. – С. 243–254.
61. Мыслович М. В. Модели усталостных дефектов в узлах электро-технического оборудования и их использование при создании акустико-эмиссионных информационно-измерительных систем диагностики / М. В. Мыслович, А. В. Улитко // Техн. електродинаміка. Темат. вип. “Проблеми сучасної електротехніки”. – 2002. – Ч. 4. – С. 114–119.
62. Мыслович М. В. Периодически коррелированные случайные процессы в задачах обработки акустической информации / М. В. Мыслович, Н. В. Приймак, Л. Н. Щербак – К. : Знание, 1980. – 26 с.
63. Мыслович М. В. Стохастически периодические случайные процессы как модели информационных сигналов / М. В. Мыслович, Б. Г. Марченко, В. Н. Зварич // Изв. ВУЗов. Радиоэлектроника. – 1995. – № 1. – С. 46–51.
64. Назарчук З. Т. Акустико-емісійне діагностування елементів конструкцій : наук.-техн. посіб. у 3 т. / З. Т. Назарчук, В. Р. Скальський – Київ : Наук. думка, 2009. – 878 с.
65. Назарчук З. Т. Застосування теорії періодично корельованих випадкових процесів до раннього виявлення дефектності обертових систем / З. Т. Назарчук, І. М. Яворський, В. Ю. Михайлишин // 3-я міжнародна конференція “Механіка руйнування матеріалів і міцність кострукцій”. – Львів, 2004. – С. 403–410.

66. Науменко А. П. Методология виброакустической диагностики поршневых машин / А. П. Науменко // Вестник МГТУ. Специальный выпуск “Двигатели внутреннего сгорания”, 2007. – С. 85–93.
67. Нелинейные эффекты – к внедрению. Информационно-рекламный сборник // Составители : С. Л. Цыфанский и В. И. Бересневич. – Рига, 2000. – 222 с.
68. Немчинов Ю. И. Сейсмостойкость зданий и сооружений : в двух частях / Ю. И. Немчинов – Киев, 2008. – 480 с.
69. Неразрушающий контроль : Справочник : в 7 т. Под общ. ред. В. В. Клюева. Т. 7 : В 2 кн. Кн. 1 : В. И. Иванов, И. Э. Власов. Метод акустической эмиссии / Кн. 2: Ф. Я. Балицкий, А. В. Барков, Н. А. Баркова и др. Вибродиагностика. – М. : Машиностроение, 2005. – 829 с.
70. Новоселов О. Н. Основы теории и расчета информационно-измерительных систем / О. Н. Новоселов, А. Ф. Фомин; под ред. А. Ф. Фомина - М. : Машиностроение, 1980. - 280 с.
71. Павлов Б. В. Акустическая диагностика механизмов / Б. В. Павлов - М. : Машиностроение, 1971. – 223 с.
72. Пат. 1024829 СССР, МКИ G01N 29/04. Способ акустического контроля тонкостенных изделий / С. Л. Цыфанский, М. А. Магоне, Ю. Н. Невский, А. Б. Милов, М. З. Фридман; собственность Рижского политехнического института. – № 3425413/25–28, заявл. 26.02.1982 ; опублик. 23.06.1983, Бюл. № 23.
73. Пат. 102759 Україна, МПК G01M 13/04, H03K 3/84, G01V 1/40. Вібраційна діагностична система / І. Б. Кравець, Р. М. Юзефович, І. Г. Стецько, П. Б. Дуб, І. М. Яворський; власник Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка Національної академії наук України. – № а 2012 00639, заявл. 20.01.2012 ; опублік. 12.08.2013, Бюл. № 15.
74. Пат. 103105 Україна, МПК G01H 11/00, G01M 7/02, G01M 13/04. Вібромеханічний стенд / Р. М. Юзефович, І. Б. Кравець, І. Г. Стецько, П. Б. Дуб, І. М. Яворський; власник Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка Національної академії наук України. – № а 2012 02316, заявл. 27.02.2012 ; опублік. 10.09.2013, Бюл. № 17.

75. Пат. 1201762 СССР, МКИ G01N 29/04. Способ акустического контроля тонкостенных изделий / Цыфанский С. Л., Магоне М. А., Ожиганов В. М.; собственность Рижского политехнического института. – № 3776027/25–28, заявл. 25.07.1984; опублик. 30.12.1985, Бюл. № 48.
76. Петрухин В. В. Основы вибродиагностики и средства измерения вибрации. Учеб. пособие / В. В. Петрухин, С. В. Петрухин – Вологда: Инфра-Инженерия, 2010. – 168 с.
77. Писаренко Г. С. Опір матеріалів. Підручник / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський; за ред. Г. С. Писаренка – К.: Вища школа, 1993. – 655 с.
78. Пустахайлов С. К. Обзор современных методов мониторинга электрических машин / С. К. Пустахайлов // Вузовская наука – Северо-Кавказскому региону: Материалы VII регион. НТК. – Ставрополь: Сев. Кав. ГТУ, 2003. – С. 48–49.
79. Рожков В. А. Методы вероятностного анализа океанологических процессов / В. А. Рожков – Л.: Гидрометеиздат, 1987. – 320 с.
80. Серебренников М. Г. Выявление скрытых периодичностей / М. Г. Серебренников, Л. А. Первозванский – М.: Наука, 1965. – 244 с.
81. Симчера В. М. Методы многомерного анализа статистических данных: учебн. пособ. / В. М. Симчера – М.: Финансы и статистика, 2008. – 400 с.
82. Смирнов В. И. Методы и средства функциональной диагностики и контроля технологических процессов на основе электромагнитных датчиков. Монография / В. И. Смирнов. – Ульяновск: Ульяновский государственный технический университет, 2001. – 190 с.
83. Соболев В. И. Основы измерений в многомерных системах / В. И. Соболев – М.: Энергия, 1975. – 241 с.
84. Сотников А. Л. Внедрение систем диагностирования / А. Л. Сотников, В. А. Сидоров, А. В. Лукичев // Машинознавство і деталі машин: Матеріали 4-ої регіональної науково-методичної конференції. – Донецьк: ДонГТУ, 2002. – С. 81–87.
85. Стеценко А. А. Оценка технического состояния составных частей компрессоров / А. А. Стеценко, О. И. Бедрий, Р. А. Беззубцев, О. А. Стеценко //

- Тр. 2 всеукр. науч.-практ. конф. по охр. труда. – Киев : Национальный институт охраны труда, 1997. – С. 286–296.
86. Тихонов А. И. Информационные структуры датчиков механических величин / А. И. Тихонов // Датчики и Системы, 2000. – Вып. 6. – С. 11–16.
87. Трощенко В. Т. Деформирование и разрушение металлов при многоцикловом нагружении / В. Т. Трощенко – К. : Наук. думка, 1981. – 342 с.
88. Трощенко В. Т. Циклические деформации и усталость металлов : В 2-х т. / [В. Т. Трощенко, Л. А. Хамаза, В. В. Покровский и др.]; под ред. В. Т. Трощенко – К. : Наук. думка, 1985. – Т. 1 – 216 с. ; Т. 2 – 224 с.
89. Фрайден Дж. Современные датчики / Дж. Фрайден – М. : Техносфера, 2005. – 592 с.
90. Хинчин А. Я. Теория корреляции стационарных случайных процессов / А. Я. Хинчин // Успехи матем. наук. – 1938. – № 5. – С. 42–51.
91. Худых М. И. Эксплуатационная надежность и долговечность оборудования текстильных предприятий. / М. И. Худых - М. : Легкая индустрия, 1980. – 334 с.
92. Цыфанский С. Л. Математические методы моделирования колебаний транспортных устройств с грузами как больших нелинейных механических систем / С. Л. Цыфанский – Пермь, 1969. – 411 с.
93. Цыфанский С. Л. Нелинейные и параметрические колебания вибрационных машин технологического назначения. / С. Л. Цыфанский, В. И. Бересневич, А. Б. Окс – Рига : Зинатне, 1991. – 231 с.
94. Цыфанский С. Л. Новизна подходов нелинейной вибродиагностики / С. Л. Цыфанский // Вопросы динамики и прочности. – Рига : Зинатне, 1991. – Вып. 53. – С. 115–125.
95. Цыфанский С. Л. Новые технологии, основанные на использовании явления высоковольтного электрического разряда в жидкости / С. Л. Цыфанский, В. И. Бересневич // Машиностроитель, 1996. – № 1. – С. 23.
96. Цыфанский С. Л. Об использовании нелинейных эффектов для обнаружения трещин в стержневых элементах конструкций / М. А. Магоне, В. М. Ожиганов // Дефектоскопия. – 1985. – № 3. – С. 77–82.

97. Цыфанский С. Л. Повышение чувствительности процедур вибродиагностики за счет ввода нелинейных элементов в структуру объекта контроля / С. Л. Цыфанский, В. И. Бересневич // Вопросы динамики и прочности. – Рига : Рижский технический университет, 1992. – Вып. 55. – С. 73–91.
98. Цыфанский С. Л. Практическое использование нелинейных эффектов в вибрационных машинах / С. Л. Цыфанский, В. И. Бересневич, А. Б. Окс – Санкт-Петербург : Политехника, 1992. – 95 с.
99. Цыфанский С. Л. Предмет, цель, диагностические признаки и задачи нелинейной вибродиагностики / С. Л. Цыфанский // Вопросы динамики и прочности. – Рига : Зинатне, 1991 - Вып. 53. – С. 106–114.
100. Цыфанский С. Л. Разработка электро-разрядного гидравлического стенда для генерирования ударных импульсов / С. Л. Цыфанский, Г. М. Гуревич, В. А. Шаргородский // Нелинейные колебания механических систем. Тезисы докладов 2-й Всесоюзной конференции. – Горький, 1990. – Ч. 2. – С. 215.
101. Цыфанский С. Л. Технологические процессы и машины, основанные на использовании электрогидравлического эффекта / С. Л. Цыфанский, В. И. Бересневич // Техника машиностроения, 1996. – № 2. – С. 94–97.
102. Цыфанский С. Л. Электрическое моделирование колебаний сложных нелинейных механических систем./ С. Л. Цыфанский – Рига : Зинатне, 1979. – 180 с.
103. Чинков В. Цифрові вимірювальні прилади / В. Чинков. – Харків : НТУ “ХПІ”, 2008. – 508 с.
104. Шевчик В. Б. Взаємкореляційний аналіз періодично нестационарних випадкових сигналів / В. Б. Шевчик, І. Й. Мацько, Р. М. Юзефович // Матеріали ІІІ Всеукраїнської школи-семінару молодих вчених і студентів “Сучасні комп’ютерні інформаційні технології” (АСІТ-2013). – Тернопіль : Тернопільський національний економічний університет, 2013. – С. 62.
105. Шевчик В. Б. Виявлення дефектів вузлів механічних систем з використанням векторної діагностики / В. Б. Шевчик, І. Й. Мацько, Р. М. Юзефович, І. Б. Кравець // 8-ма міжнародна науково-технічна конференція молодих

- учених та спеціалістів “Зварювання та суміжні технології”. – Київ : Інститут електрозварювання ім. Є. О. Патона НАН України, 2015. – С. 192.
106. Шевчик В. Б. Дослідження оцінок кореляційних інваріантів векторних періодично нестаціонарних вібраційних сигналів / В. Б. Шевчик, І. Й. Мацько, Р. М. Юзефович // Матеріали IV Всеукраїнської школи-семінару молодих вчених і студентів “Сучасні комп’ютерні інформаційні технології” (АСІТ-2014). – Тернопіль : Тернопільський національний економічний університет, 2014. – С. 104–106.
107. Шевчик В. Б. Методи статистичного аналізу векторних періодично корельованих випадкових процесів у вібродіагностиці / В. Б. Шевчик, І. М. Яворський, Р. М. Юзефович, І. Й. Мацько // Друга міжнародна наукова конференція пам’яті професора Володимира Поджаренка “Вимірювання, контроль та діагностика в технічних системах” (ВКДТС-2013). – Вінниця : Вінницький національний технічний університет, 2013. – С. 20.
108. Ширман А.Р. Практическая вибродіагностика и мониторинг состояния механического оборудования. / А. Р. Ширман, А. Б. Соловьев – М. : Библиогр., 1996. – 276 с.
109. Шульженко Н. Г. Помехоустойчивые измерители вибрации и их применение в динамике машин / Н. Г. Шульженко, Л. Д. Метелев, В. И. Цыбулько, Ю. Г. Ефремов // Вибрации в технике и технологиях. – 2005. – № 2 (40). – С. 104–107.
110. Шульженко Н. Г. Средства вибродіагностики, оценки термостойкости и ресурса энергетического и транспортного оборудования / Н. Г. Шульженко, Ю. Г. Ефремов, П. П. Гонтаровский // Вибрация машин : измерение, снижение, защита. – Донецк : ДонГТУ, 2012. – № 3 (30). – С. 40–43
111. Юзефович Р. М. Векторна діагностика підшипника кочення з використанням вібромеханічного стенду ВМС-1 / Р. М. Юзефович, І. Й. Мацько, І. М. Яворський, Г. Р. Трохим, І. Б. Кравець, І. Г. Стецько // Матеріали 5-ї міжнародної конференції “Механіка руйнування матеріалів і міцність

- конструкцій”. – Львів : Національний університет “Львівська політехніка”, 2014. – С. 823–828.
112. Юзефович Р. М. Взаємкореляційний когерентний аналіз циклостационарних процесів / Р. М. Юзефович, І. М. Яворський, І. Б. Кравець, І. Й. Мацько // Матеріали II Всеукраїнської школи-семінару молодих вчених і студентів “Сучасні комп’ютерні інформаційні технології” (АСІТ-2012). – Тернопіль : Тернопільський національний економічний університет, 2012. – С. 62.
113. Юзефович Р. М. Визначення періоду регулярної складової періодично нестационарних випадкових процесів / Р. М. Юзефович, І. Й. Мацько, І. М. Яворський // Праці проблемно-наукової міжгалузевої конференції “Інформаційні проблеми комп’ютерних систем, юриспруденції, економіки та моделювання”. – Тернопіль-Бучач, 2009. – С. 238–242.
114. Юзефович Р. М. Використання схеми Бюй-Балло для виявлення періодичних змін властивостей флуктуаційної складової коливань / Р. М. Юзефович, І. Й. Мацько, І. М. Яворський // 5-а міжнародна науково-технічна конференція молодих учених та спеціалістів “Зварювання та суміжні технології”. – Київ, 2009. – С. 170.
115. Юзефович Р. М. Дослідження властивостей компонентної оцінки взаємкореляційної функції періодично нестационарних випадкових сигналів / Р. М. Юзефович, І. М. Яворський, І. Б. Кравець, І. Й. Мацько // Праці одинадцятої Всеукраїнської міжнародної конференції “Оброблення сигналів, зображень та розпізнавання образів”, УкрОбраз-2012. – Київ : Інститут кібернетики НАН України, 2012. – С. 31–34.
116. Юзефович Р. М. Дослідження властивостей оцінки найменших квадратів характеристик періодично нестационарних випадкових сигналів / Р. М. Юзефович, І. М. Яворський, І. Й. Мацько, І. Б. Кравець // Праці десятої Всеукраїнської міжнародної конференції “Оброблення сигналів, зображень та розпізнавання образів”, УкрОбраз-2010. – Київ : Інститут кібернетики НАН України, 2010. – С. 93–96.

117. Юзефович Р. М. Дослідження властивостей оцінок взаємоспектральних компонентів періодично нестационарних випадкових сигналів / Р. М. Юзефович, І. М. Яворський, І. Й. Мацько, В. Б. Шевчик // Праці дванадцятої Всеукраїнської міжнародної конференції “Оброблення сигналів, зображень та розпізнавання образів”, УкрОбраз-2014. – Київ : Інститут кібернетики НАН України, 2014. – С. 47–50.
118. Юзефович Р. М. Дослідження оцінки зміщення взаємоспектральної густини при когерентному спектральному аналізі вібраційних сигналів / Р. М. Юзефович, І. М. Яворський, І. Й. Мацько, В. Б. Шевчик // Матеріали V Всеукраїнської школи-семінару молодих вчених і студентів “Сучасні комп’ютерні інформаційні технології” (АСІТ-2015). – Тернопіль : Тернопільський національний економічний університет, 2015. – С. 39–41.
119. Юзефович Р. М. Дослідження покомпонентної функції когерентності взаємозв’язаних періодично корельованих випадкових процесів / Р. М. Юзефович, І. М. Яворський, І. Й. Мацько, О. Ю. Дзерин // Праці IV науково-технічної конференції “Обчислювальні методи і системи перетворення інформації”. – Львів : Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, 2016. – С. 128–132.
120. Юзефович Р. М. Застосування когерентного функціоналу для визначення періоду регулярної складової періодичного нестационарного сигналу / Р. М. Юзефович, І. Й. Мацько, І. М. Яворський // Праці дев’ятої Всеукраїнської міжнародної конференції “Оброблення сигналів, зображень та розпізнавання образів”, УкрОбраз-2008. – Київ : Інститут кібернетики НАН України, 2008. – С. 11–14.
121. Юзефович Р. М. Компонентний аналіз взаємкореляційних функцій циклостационарних багатомірних процесів / Р. М. Юзефович, І. М. Яворський, І. Б. Кравець, І. Й. Мацько // Праці II науково-технічної конференції “Обчислювальні методи і системи перетворення інформації”. – Львів : Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, 2012. – С. 144–146.

122. Юзефович Р. М. О свойствах оценок корреляционных характеристик нестационарных модулированных сигналов / Р. М. Юзефович // Изв. ВУЗов. Радиоэлектроника. – 2012. – Т. 55, № 6. – С. 36–44.
123. Юзефович Р. М. Оцінка періоду кореляційної функції з використанням схеми Бюй-Балло / Р. М. Юзефович, І. Й. Мацько, І. Б. Кравець // Матеріали ХХ відкритої науково-технічної конференції молодих науковців і спеціалістів Фізико-механічного інституту ім. Г. В. Карпенка НАН України. – Львів, 2009. – С. 380–383.
124. Юзефович Р. М. Оцінювання взаємоспектральних компонентів періодично нестационарних випадкових сигналів / Р. М. Юзефович // Вісник Національного університету “Львівська політехніка”. Серія : Радиоелектроніка та телекомунікації : зб. наук. пр. – 2014. – № 796. – С. 14–21.
125. Явленский А. К. Теория динамики и диагностики систем трения качения / А. К. Явленский, К. Н. Явленский – Л. : ЛГУ, 1978. – 184 с.
126. Явленский К. Н. Вибродиагностика и прогнозирование качества механических систем / К. Н. Явленский, А. К. Явленский – Л. : Машиностроение, 1983. – 239 с.
127. Яворский И. Н. Дискретные оценки взаимокорреляционных компонентов периодически коррелированных случайных сигналов / И. Н. Яворский, Р. М. Юзефович, И. Й. Мацько, З. Закжевски // Изв. ВУЗов. Радиоэлектроника. – 2014. – Т. 57, № 2. – С. 29–42.
128. Яворский И. Н. Когерентные оценки корреляционных характеристик взаимосвязанных периодически коррелированных случайных процессов / И. Н. Яворский, Р. М. Юзефович, И. Й. Мацько, З. Закжевски // Изв. ВУЗов. Радиоэлектроника. – 2012. – Т. 55, № 9. – С. 26–36.
129. Яворский И. Н. Компонентный корреляционный анализ векторных периодически нестационарных случайных процессов / И. Н. Яворский, Р. М. Юзефович, И. Й. Мацько, В. Б. Шевчик // Изв. ВУЗов. Радиоэлектроника. – 2014. – Т. 57. – № 9. – С. 29–41.

130. Яворский И. Н. Метод наименьших квадратов при статистическом анализе периодически коррелированных случайных процессов / И. Н. Яворский, Р. М. Юзефович, И. Б. Кравец, З. Закжевски // Изв. ВУЗов. Радиоэлектроника. – 2011. – Т. 54, № 1. – С. 54–64.
131. Яворский И. Н. О статистическом анализе периодически коррелированных случайных процессов / И. Н. Яворский // Радиотехника и электроника. – 1985. – № 6. – С. 1096–1104.
132. Яворский И. Н. Об одном методе оценки периода периодически коррелированных случайных процессов / И. Н. Яворский // Труды Всесоюзной школы-семинара по статистической гидроакустике. – М., 1984. – С. 52–55.
133. Яворский И. Н. Об оценке периода периодически коррелированных случайных процессов / И. Н. Яворский // Отбор и передача информации. – 1986. – № 73. – С. 12–21.
134. Яворский И. Н. Применение схемы Бюй-Балло при статистическом анализе ритмических сигналов / И. Н. Яворский // Изв. ВУЗов. Радиоэлектроника. – 1984. – Т. 27. – С. 31–37.
135. Яворский И. Н. Свойства оценок характеристик периодически коррелированных случайных процессов при предварительном определении периода коррелированности / И. Н. Яворский, Р. М. Юзефович, И. Б. Кравец, И. Й. Мацько // Изв. ВУЗов. Радиоэлектроника. – 2012. – Т. 55, № 8. – С. 3–14.
136. Яворский И. Н. Статистический анализ векторных периодически коррелированных случайных процессов / И. Н. Яворский // Отбор и передача информации. – 1987. – № 76. – С. 3–12.
137. Яворский И. Н. Стохастические модели вибросигналов и их анализ для исследования состояния механических систем / И. Н. Яворский, Р. М. Юзефович, И. Й. Мацько, П. А. Семенов // Управляющие системы и машины. – 2015. – № 6 (260). – С. 34–42.
138. Яворский И. Н. Функция когерентности взаимосвязанных периодически нестационарных случайных процессов / И. Н. Яворский, Р. М. Юзефович,

- И. Й. Мацько, З. Закжевски // Изв. ВУЗов. Радиоелектроника. – 2016. – Т. 59. – № 3. – С. 40–51.
139. Яворський І. М. Аналіз сигналів вібрації при дослідженні зразків бурильних труб / І. М. Яворський, Р. М. Юзефович, І. Б. Кравець, І. Й. Мацько // Матеріали 5-ї міжнародної науково-технічної конференції “Сучасні комп’ютерні системи та мережі: розробка та використання”. – Львів : Національний університет “Львівська Політехніка”, 2011. – С. 169–172.
140. Яворський І. М. Векторна вібраційна діагностика підшипників кочення / І. М. Яворський, І. Й. Мацько, Р. М. Юзефович, І. Б. Кравець // Праці міжнародної науково-технічної конференції “Конструкційна міцність матеріалів та ресурс обладнання АЕС” (РЕСУРС-2012). – Київ : Інститут проблем міцності ім. Г.С. Писаренка НАН України, 2012. – С. 133–135.
141. Яворський І. М. Векторна діагностика підшипника кочення при розвитку дефекту на зовнішньому кільці / І. М. Яворський, І. Й. Мацько, Р. М. Юзефович, І. Б. Кравець // Вібрації в техніці та технологіях. – 2014. – № 2 (74). – С. 101–110.
142. Яворський І. М. Взаємозв’язані періодично корельовані випадкові процеси / І. М. Яворський, І. Б. Кравець, Р. М. Юзефович // Відбір і обробка інформації. – 2011. – № 34 (110) – С. 69–77.
143. Яворський І. М. Взаємкореляційний когерентний аналіз періодично нестационарних випадкових сигналів / І. М. Яворський, Р. М. Юзефович, І. Б. Кравець, І. Й. Мацько // Відбір і обробка інформації. – 2012. – № 36 (112). – С. 5–13.
144. Яворський І. М. Виділення детермінованої складової періодично нестационарних випадкових процесів методом найменших квадратів / І. М. Яворський, Р. М. Юзефович, І. Б. Кравець // Відбір і обробка інформації. – 2010. – № 32 (108). – С. 16–25.
145. Яворський І. М. Визначення періоду регулярної складової періодично нестационарних випадкових процесів / І. М. Яворський, Р. М. Юзефович,

- І. Й. Мацько // Тези IV міжнародної науково-технічної конференції “Датчики, прилади та системи” (ДПС–2008). – Ялта, 2008. – С. 59–60.
146. Яворський І. М. Віброакустична система ВАС-1 для ранньої вібраційної діагностики обертових механізмів / І. М. Яворський, Р. М. Юзефович, І. Б. Кравець, І. Й. Мацько, І. Г. Стецько, П. П. Луферчик // Наука та інновації. – Київ : НАН України, 2013. – № 3. – С. 19–26.
147. Яворський І. М. Вплив розміру тріщини на кореляційну структуру вібраційного сигналу / І. М. Яворський, І. Й. Мацько, І. Б. Кравець, Р. М. Юзефович // Відбір і обробка інформації. – № 31 (107). – 2009. – С. 39–46.
148. Яворський І. М. Гармонічний аналіз кореляційних інваріантів векторних періодично нестационарних вібраційних сигналів / І. М. Яворський, І. Й. Мацько, Р. М. Юзефович, В. Б. Шевчик // Відбір і обробка інформації. – 2015. – № 42 (118). – С. 11–18.
149. Яворський І. М. Дослідження динаміки зміни взаємокореляційних зв'язків стаціонарних компонентів вібраційних сигналів тонкої деталі при розвитку тріщини / І. М. Яворський, І. Б. Кравець, Р. М. Юзефович, І. Й. Мацько // Вісник Черкаського державного технологічного університету. – № 3. – 2010. – С. 103–106.
150. Яворський І. М. Дослідження методів виділення стаціонарних компонентів періодично корельованих випадкових процесів на основі комп'ютерного моделювання / І. М. Яворський, І. Ю. Ісаєв, І. Б. Кравець, Р. М. Юзефович // Відбір і обробка інформації. – № 29 (105). – 2008. – С. 37–42.
151. Яворський І. М. Дослідження причин підвищеної вібрації турбогенераторів № 4 та № 5 типу ТГВ-200 Бурштинської ТЕС / І. М. Яворський, Я. В. Сторожук, Р. М. Юзефович, І. Й. Мацько, І. Б. Кравець, І. Г. Стецько // Матеріали V міжнародної конференції “Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій”. – Львів : Національний університет “Львівська Політехніка”, 2014. – С. 829–834.
152. Яворський І. М. Дослідження ритміки природних явищ та її характерних особливостей в системах різного походження / І. М. Яворський,

- Р. М. Юзефович, І. Й. Мацько // Відбір і обробка інформації. – 2014. – № 40 (116). – С. 59–72.
153. Яворський І. М. Імовірнісна структура сигналів вібрації тіла з тріщиною / І. М. Яворський, І. Б. Кравець, І. Й. Мацько, Р. М. Юзефович // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні. – 2011. – № 45. – С. 452–459.
154. Яворський І. М. Інваріантний кореляційний аналіз векторних періодично корельованих випадкових процесів / І. М. Яворський, Р. М. Юзефович, І. Й. Мацько, І. Б. Кравець // Відбір і обробка інформації. – 2011. – № 35 (111). – С. 22–31.
155. Яворський І. М. Інформаційно-вимірювальна система для багатовимірної вібраційної діагностики / І. М. Яворський, Р. М. Юзефович, І. Б. Кравець, І. Й. Мацько, І. Г. Стецько // Проблемы машиностроения. – 2013. – Т. 16, № 3. – С. 45–50.
156. Яворський І. М. Інформаційно-вимірювальна система ранньої вібраційної діагностики / І. М. Яворський, Р. М. Юзефович, І. Б. Кравець, І. Й. Мацько, І. Г. Стецько // Матеріали 7-ї Національної науково-технічної конференції “Неруйнівний контроль та технічна діагностика”. – Київ : Інститут електрозварювання ім. О. Б. Патона НАН України, 2012. – С. 373–377.
157. Яворський І. М. Розробка інформаційно-вимірювальної системи для багатомірної діагностики обертових вузлів машинних комплексів / І. М. Яворський, І. Б. Кравець, Р. М. Юзефович, І. Г. Стецько, І. Й. Мацько // Проблеми ресурсу і безпеки експлуатації конструкцій, споруд та машин. – Київ : Інститут електрозварювання ім. О. Б. Патона НАН України, 2012. – С. 50–56.
158. Яворський І. М. Когерентне оцінювання взаємоспектральної густини циклостаціонарних багатовимірних процесів / І. М. Яворський, Р. М. Юзефович, І. Й. Мацько, П. О. Семенов // Праці III науково-технічної конференції “Обчислювальні методи і системи перетворення інформації”. – Львів : Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, 2014. – С. 76–79.

159. Яворський І. М. Когерентний взаємоспектральний аналіз періодично нестационарних вібраційних сигналів / І. М. Яворський, Р. М. Юзефович, І. Й. Мацько, В. Б. Шевчик // Відбір і обробка інформації. – 2014. – № 41 (117). – С. 12–19.
160. Яворський І. М. Когерентний взаємоспектральний аналіз часових рядів / І. М. Яворський, Р. М. Юзефович, І. Й. Мацько // Відбір і обробка інформації. – 2016. – № 43 (119). – С. 32–38.
161. Яворський І. М. Компонентний взаємкореляційний аналіз періодично нестационарних випадкових сигналів / І. М. Яворський, Р. М. Юзефович, І. Й. Мацько, І. Б. Кравець // Відбір і обробка інформації. – 2012. – № 37 (113). – С. 10–18.
162. Яворський І. М. Математичні моделі та аналіз стохастичних коливань / І. М. Яворський. – Львів: Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, 2013. – 804 с.
163. Яворський І. М. Математичні моделі, виявлення та аналіз прихованих періодичностей / І. М. Яворський, В. Ю. Михайлишин // Відбір і обробка інформації. – 2001. – № 15 (91). – С. 87–95.
164. Яворський І. М. Методи і засоби ранньої вібраційної діагностики механізмів циклічної дії / І. М. Яворський, Р. М. Юзефович, І. Б. Кравець, І. Й. Мацько // Праці III міжнародної науково-технічної конференції “Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій”. – Львів, 2012. – С. 13.
165. Яворський І. М. Методи і засоби ранньої діагностики обертових механізмів / І. М. Яворський, П. П. Драбич, І. Б. Кравець та ін. // Праці Міжнар. наук.-техн. конференції “Ресурс, надійність та ефективність використання енергетичного обладнання”. – Харків, 2010. – С. 31-38.
166. Яворський І. М. Методи підвищення ефективності статистичного аналізу сигналів вібрації підшипникових опор турбоагрегатів теплоелектростанцій / І. М. Яворський, І. Ю. Ісаєв, І. Б. Кравець та ін. // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2009. – № 3. – С. 49–59.

167. Яворський І. М. Методи та засоби ранньої діагностики підшипникових вузлів турбоагрегатів ТЕС / І. М. Яворський, Р. М. Юзефович, І. Б. Кравець, І. Й. Мацько, І. Г. Стецько // Енергетика та електрифікація. – 2012. – № 8. – С. 58–67.
168. Яворський І. М. Обґрунтування величини кроку дискретизації у процесі компонентного взаємкореляційного аналізу періодично нестационарних випадкових сигналів / І. М. Яворський, Р. М. Юзефович, І. Й. Мацько // Відбір і обробка інформації. – 2013. – № 38 (114). – С. 22–31.
169. Яворський І. М. Оцінювання кореляційних інваріантів періодично нестационарних вібраційних сигналів / І. М. Яворський, Р. М. Юзефович, І. Й. Мацько, В. Б. Шевчик // Відбір і обробка інформації. – 2013. – № 39 (115) – С. 15–23.
170. Яворський І. М. Оцінювання характеристик періодично нестационарних випадкових сигналів методом найменших квадратів / І. М. Яворський, Р. М. Юзефович, І. Й. Мацько, І. Б. Кравець // Праці І науково-технічної конференції “Обчислювальні методи і системи перетворення інформації”. – Львів : Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, 2010. – С. 143–146.
171. Яворський І. М. Розробка вібродіагностичної системи для визначення дефектів промислового обладнання з використанням методів нестационарної статистичної обробки вібраційних та акустичних коливань / І. М. Яворський, Р. М. Юзефович, І. Б. Кравець, І. Й. Мацько, І. Г. Стецько // Техническая диагностика и неразрушающий контроль. – 2015. – № 4. – С. 36–41.
172. Яворський І. М. Розробка вібродіагностичної системи для визначення дефектів промислового обладнання з використанням методів нестационарної статистичної обробки вібраційних та акустичних коливань / І. М. Яворський, Р. М. Юзефович, І. Б. Кравець, І. Й. Мацько, І. Г. Стецько // Проблеми ресурсу і безпеки експлуатації конструкцій, споруд та машин. –

Київ : Інститут електрозварювання ім. О. Б. Патона НАН України, 2015. – С. 135–142.

173. Яворський І. М. Розробка інформаційно-вимірювальної системи для вібродіагностики підшипників великих стаціонарних агрегатів / І. М. Яворський, П. П. Драбич, І. Ю. Ісаєв та ін. // Проблеми ресурсу і безпеки експлуатації конструкцій, споруд та машин. – К. : Інститут електрозварювання ім. Є. О. Патона, 2009. – С. 113–122.
174. Яворський І. М. Стохастична модель вібраційного сигналу бездефектного підшипника кочення / І. М. Яворський, І. Й. Мацько, І. Б. Кравець, Р. М. Юзефович // Відбір і обробка інформації. – № 28 (104). – 2008. – С. 23–29.
175. Яворський І. М. Схема Бюй-Балло для виявлення періодичних змін кореляційних характеристик стохастичних коливань / І. М. Яворський, Р. М. Юзефович, І. Й. Мацько // Відбір і обробка інформації. – № 30 (106). – 2009. – С. 12–19.
176. Яглом А. М. Корреляционная теория стационарных случайных функций / А. М. Яглом – Л. : Гидрометеиздат, 1981. – 280 с.
177. Analog Devices, Inc. CMOS $\pm 5V/+5V$, 4 Ω Single Switches ADG619/ADG620. – 2001–2007. – 16 p.
178. Analog Devices, Inc. LC²MOS 4 Ω Ron SPST Switches ADG451/ADG452/ADG453. – 2006. – 16 p.
179. Analog Devices, Inc. Precision, Very Low Noise, Low Input Bias Current Operational AD8671/AD8672/AD8674. – 2004–2013. – 20 p.
180. Analog Devices, Inc. Ultralow Noise, High Speed, BiFET Op Amp AD745. – 2002. – 12 p.
181. Antoni J. Cyclostationary modeling of rotating machine vibration signals / J. Antoni, F. Bonnardot, A. Raad, El Badaoui // Mechanical systems and signal processing. – 2004. – Vol. 18. – P. 1285–1314.
182. Antoni J. Cyclostationarity by examples / J. Antoni // Mechanical systems and signal processing. – 2009. – Vol. 23. – P. 987–1036.

183. Bendat J. S. Random Data : Analysis and Measurement Procedures / J. S. Bendat, A. G. Piersol – New York : John Wiley&Sons, 2010. – 640 p.
184. Buys Ballot. Les changements periodiaues de temperature / Buys Ballot – Utrecht, Kemink et Fils, 1847. – 123 p.
185. Capdessus C. Cyclistatony processes : application in gear faults early diagnosis / C. Capdessus, M. Sidahmed, J. L. Lacoume // Mechanical Systems and Signal Processing. – 2000. – Vol. 14 (3). – P. 371–385.
186. Chatfield C. The analysis of time series : An introduction. Fifth edition. / C. Chatfield – London, New York, Chapman & Hall/CRC, 1982. – 283 p.
187. Cyclostationarity in Communications and Signal Processing // Ed. by W. A. Gardner – New York : IEEE Press, 1994. – 504 p.
188. Dalpiaz G. Effectiveness and sensitivity of vibration processing techniques for local fault detection in gears / G. Dalpiaz, A. Rivola, R. Rubini // Mechanical Systems and Signal Processing. – 2000. – Vol. 14 (3). – P. 387–412.
189. Dandawate A. V. Statistical tests for presence of cyclostationarity / A. V. Dandawate, G. B. Giannakis // IEEE Transactions on Signal Processing. – 1994. – Vol. 42. – № 9. – P. 2355–2369.
190. Е 20-10. РУКОВОДСТВО ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ. - М. : L-Card , 2008. – 61 p.
191. Eltabach M. Broken rotor bars detection by a new non-invasive diagnostic procedure / M. Eltabach, J. Antoni, G. Shanina, S. Sieg-Zieba, X. Carniel // Mechanical Systems and Signal Processing. – 2009. – 23 (4). – P. 1398–1412.
192. Gammaitoni L. Extraction of periodic signals from a noise background / L. Gammaitoni, E. Menichella-Saetta, S. Santucci, F. Marchesoni // Physics Letters A. – 1989. – Vol. 142. – P. 59–62.
193. Gardner W. A. Characterization of cyclostationary random signal processes / W. A. Gardner, L. E. Franks // IEEE Trans. Inf. Theory. – 1975. – IT-21. – P. 4–14.
194. Gardner W. A. Cyclostationarity : Half century of research / W. A. Gardner, A. Napolitano, L. Paural // Signal Processing. – 2006. – Vol. 86, № 4. – P. 639–697.

195. Gardner W. A. Exploitation of spectral redundancy in cyclostationary signals / W. A. Gardner // *IEEE Signal Processing Magazine*. – 1991. – Vol. 8, № 2. – P. 14–30.
196. Gardner W. A. Introduction to random processes with application to signals and systems / W. A. Gardner – New York : Macmillan, 1985. – 434 p.
197. Gardner W. A. On the spectral coherence of nonstationary processes / W. A. Gardner // *IEEE Transactions on Signal Processing*. – 1991. – Vol. 39, № 2. – P. 424–430.
198. Giannakis G. B. Harmonics in multiplicative and additive noise : Parameter estimation using cyclic statistics / G. B. Giannakis, G. Zhou // *IEEE Trans. Signal Process.* – 1995. – Vol. 43. – P. 2217–2221.
199. Gonella J. A Rotary-component method for analyzing meteorological and oceanographic vector time series / J. Gonella // *Deep Sea Res.* – 1972. – Vol. 19. – P. 833–846.
200. Hinich M. J. A statistical theory of signal coherence / M. J. Hinich // *IEEE Journal of Oceanic Engineering*. – 2000. – Vol. 25, № 2. – P. 254–259.
201. Hinich M. J. Detecting a hidden periodic signal when its period is unknown / M. J. Hinich // *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*. – 1982. – Vol. ASSP-30. – № 5. – P. 747–750.
202. Hurd H. L. Graphical methods for determining the presence of periodic correlation / H. L. Hurd, N. L. Gerr // *Journal of Time Series Analysis*. – 1991. – 12. – P. 337–350.
203. Hurd H. L. Periodically correlated random sequences. spectral theory and practice / H. L. Hurd, A. Miamee – New Jersey : Wiley-Interscience, 2007. – 353 p.
204. Irving A. Condition monitoring, stress analysis and full-scale fatigue testing of R&D wind turbine blades / A. Irving, V. Sainov, S. Tsyfansky, H. Heerkes et al. // *PECO 1993 Project Summaries*. – Brussels, Belgium, 1996. - P. 384–385.
205. Isayev I. Comparison of the coherent and the component methods for estimating the characteristics of the periodically correlated random processes / Ihor Isayev, Ihor Javorskyj, Roman Yuzefovych // *Proceedings of 15th European Signal*

- Processing Conference (EUSIPCO-2007). – Poznań, Poland, 2007. – P. 1862–1866.
206. Javors'kyj I. Detecting of hidden periodicities of time-series generated by nonlinear processes in magnetoplasma/ I. Javors'kyj, V. Mykhajlyshyn // *Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. Conference Proceedings.* – Lviv, 1996. – P. 397–400.
207. Javorskyj I. Coherent covariance analysis of periodically correlated random processes / I. Javorskyj, I. Isaev, Z. Zakrzewski, S. P. Brooks // *Signal Processing.* – 2007. – Vol. 87. – P. 13–32.
208. Javorskyj I. Component covariance analysis for periodically correlated random processes / Ihor Javorskyj, Ihor Isayev, Jacek Majewski, Roman Yuzefovych // *Signal Processing.* – 2010. – Vol. 90, Is. 4. – P. 1083–1102.
209. Javorskyj I. Discrete estimators of characteristics for periodically correlated time series / Ihor Javors'kyj, Ivan Matsko, Roman Yuzefovych, Zbignev Zakrzewski // *Digital Signal Processing.* – 2016. – 53. – P. 25–40.
210. Javorskyj I. Coherent estimation of probabilistic characteristics for periodically correlated random processes in the case of preliminary determination of period / Ihor Javorskyj, Roman Yuzefovych, Ihor Kravets, Ivan Matsko // *Proceedings of the XIth International Conference on Modern Problems of Radio Engineering Telecommunications and Computer Science (TCSET'2012) Dedicated to 60th Anniversary of the Radio Department at the Lviv Polytechnic National University.* – Lviv : Lviv Polytechnic National University, 2012. – P. 60.
211. Javorskyj I. Linear filtration methods for statistical analysis of periodically correlated random processes. – Part II : Harmonic series representation / I. Javor'skyj, I. Leśkow, I. Kravets, I. Isayev, E. Gajecka // *Signal Processing.* – 2011. – 91. – P. 2506–2519.
212. Javor'skyj I. Linear filtration methods for statistical analysis of periodically correlated random processes. – Part I : Coherent and component methods and their generalization / I. Javor'skyj, I. Leśkow, I. Kravets, I. Isayev, E. Gajecka // *Signal Processing.* – 2012. – 92. – P. 1559–1566.

213. Javorskyj I. Methods of periodically correlated random processes and their generalizations / Ihor Javorskyj, Roman Yuzefovych, Ihor Kravets, Ivan Matsko // Cyclostationarity : Theory and methods. Lecture notes in mechanical engineering / Eds. F. Chaari, J. Leskow, A. Sanches-Ramirez. – New York : Springer International Publishing Switzerland, 2014. – P. 73–93.
214. Javorskyj I. Probabilistic models and investigation of hidden periodicities/ I. Javorskyj, V. Mykhajlyshyn // Appl. Math. Letters. – 1996. – Vol. 9. – № 2. – P. 21–23.
215. Javorśkyj I. The methods of probabilistic analysis of stochastic recurrence. oscillations and their applications to study time changeability of physical phenomena / I. Javorśkyj, V. Mykhajlyshyn // Proc. of Int. Data Analysis Conf. (IDA'2000). – Insbruck, 2000. – P. 85–86.1
216. Javorskyj I. The stochastic recurrence structure of geophysical phenomena / Ihor Javorskyj, Roman Yuzefovych, Ivan Matsko, Ihor Kravets. // Cyclostationarity : Theory and Methods II / Eds. F. Chaari, J. Leskow, A. Napolitano, R. Zimroz, A. Wylomanska, A. Dudek – New York : Springer International Publishing Switzerland, 2015. – P. 55–88.
217. Javorskyj I. M. The probabilistic analysis of stochastic oscillation / I. M. Javorskyj // Informatisation Technologies and Systems. – Part 1. – 1999. – Vol. 2. – № 1. – P. 42–64 ; Part 2. – 2002. – Vol. 5. – № 1–2. – P. 168–184.
218. Jaworski I. Funkcja koherencji łącznie okresowo niestacjonarnych sygnałów losowych / Ihor Jaworski, Roman Juzefowycz, Zbignev Zakrzewski, Jacek Majewski // Przegląd Telekomunikacyjny. – Poland, 2015. – № 8–9. – S. 1396–1401.
219. Jaworski I. Koherentny estymator okresu regularnej składowej okresowo niestacjonarnych sygnałów losowych / Ihor Jaworski, Roman Juzefowych, Ivan Maćko, Zbignev Zakrzewski // Przegląd Telekomunikacyjny. – Poland, 2008. – № 8–9. – S. 1032–1038.
220. Jaworski I. Metoda najmniejszych kwadratów w statystycznej analizie okresowo niestacjonarnych sygnałów losowych / Ihor Jaworski, Roman Juzefowycz,

- Ihor Kraweć, Zbignev Zakrzewski // *Przegląd Telekomunikacyjny*. – Poland, 2010. – № 8–9. – S. 1451–1460.
221. Jaworski I. Wzajemna kowariacyjna analiza okresowo niestacjonarnych sygnałów losowych / Ihor Jaworski, Roman Juzefowych, Zbignev Zakrzewski // *Przegląd Telekomunikacyjny*. – Poland, 2012. – № 8–9. – S. 737–745.
222. Jaworski I. Wzajemna analiza widmowa okresowo niestacjonarnych sygnałów losowych / Ihor Jaworski, Roman Juzefowych, Zbignev Zakrzewski, Jacek Majewski // *Przegląd Telekomunikacyjny*. – Poland, 2014. – № 8–9. – S. 900–904.
223. Kay S. *Modern Spectral Estimation : Theory and Application* / S. Kay – New Jersey : Prentise Hall, 1987. – 543 p.
224. Khinchine A. Korrelations theorie der stationare stochastischen processes / A. Khinchine // *Math. Ann.* – 1934. – № 109. – P. 604–615.
225. Konkar P. K. Fault Diagnosis of a rotor bearing systems using response surface method / P. K. Konkar, S. P. Harsha, P. Kumar, S. C. Sharmal // *European Journal of Mechanics – A/Solids*. – 2009. – 28. – P. 841–857.
226. Koopmans L. H. *The spectral analysis of time series*. / L. H. Koopmans – New York : Academic Press, 1974. – 366 p.
227. Linear Technology Corporation. LTC1069-7 8th Order Lowpass Filter. – 2008. – 10 p.
228. McDonald G. J. Spectral analysis of time series generated by non linear processes / G. J. MacDonal // *Rev. Geophys. Space Phys.* – 1989. – Vol. 27. – P. 449–469.
229. McCormick A. C. Cyclostationarity in rotating machine vibrations / A. C. McCormick, A. K. Nandi // *Mechanical Systems and Signal Processing*. – 1998. – Vol. 12 (2). – P. 225–242.
230. Mykhajlyshyn V. Fine structure statistical analysis of wave packets observed on the Ground and on Geos-1/ V. Mykhajlyshyn, I. Iavorskyi // *Proc. of the international conference of electromagnetics in advanced applications*. – Torino, 1997. – P. 45–47.
231. Napolitano A. Cyclostationarity : New trends and applications / A. Napolitano // *Signal Processing*. – 2016.– 120. – P. 385–408.

232. Napolitano A. Generalizations of cyclostationary signal processing : Spectral analysis and applications – Wiley-IEEE Press, 2012. – 492 p.
233. Nataraj C. The effect of bearing cage run-out on the non-linear dynamics of a rotating shaft / C. Nataraj, S. P. Harsha // Communications in nonlinear science and numerical simulation. – 2008. – 13. – P. 822–838.
234. Newton H. J. A method for determining periods in time series / H. J. Newton, M. Pagano // Journal of American Statistical Association. – 1983. – 78. – P. 152–157.
235. Obuchowski J. Identification of cyclic components in presence of non-Gaussian noise application to crusher bearings damage detection / J. Obuchowski, A. Wylomanska, R. Zimroz // Journal of Vibroengineering, – 2015. – Vol. 17, № 3. – P. 1242–1252.
236. Obuchowski J. The local maxima method for enhancement of time–frequency map and its application to local damage detection in rotating machines / J. Obuchowski, A. Wylomanska, R. Zimroz // Mechanical Systems and Signal Processing. – 2014. – 46. – P. 389–405.
237. Shean-Tsong Chiu Detecting periodic components in a white Gaussian time series / Chiu Shean-Tsong // Journal of the Royal Statistical Society, Series B. Methodological. – 1989. – 51 (2). – P. 249–259.
238. Shuster A. On lunar and solar periodicities of earthquakes / A. Shuster // A Proceedings of the Royal Society of London. – 1897. – Vol. 61. – P. 455–465.
239. Shuster A. On the investigation of hidden periodicities with application to supposed 26 day period of meteorological phenomena / A. Shuster // Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity. – 1898. – № 3. – P. 13–41.
240. Shuster A. On the periodicities of sunspots / A. Shuster // Transactions of the Royal Society of London. – 1906. – Series A. – Vol. 206. – P. 69–100.
241. Siegel A. F. Testing for periodicity in a time series / A. F. Siegel // J. Amer. Statist. Assoc. – 1980. – 75. – P. 345–348.
242. Tsyfansky S. Nonlinear phenomena resulting from high-voltage discharge in fluid and their utilization in vibration engineering / S. Tsyfansky, V. Beresnevich // Proceedings of the IUTAM / IFToMM Symposium on Synthesis of Nonlinear

- Dynamical Systems (Riga, Latvia, 1998), Editors : E. Lavendelis and M. Zakrzhevsky. – Kluwer Academic Publishers, Dordrecht / Boston / London, 2000. – P. 257–266.
243. Tukey J. W. An introduction to the calculations of numerical spectrum analysis. Spectral Analysis of Time Series / J. W. Tukey – New York : Wiley, 1968. – P. 25–46.
244. Walker A. M. On the estimation of a harmonic component in a time series with stationary independent residuals/ A. M. Walker // *Biometrika*. – 1971. – Vol. 58. – № 1. – P. 21–36.
245. Wiener N. Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series / N. Wiener – New York : Technology Press and Wiley, 1949.
246. Wiener N. Generalized harmonic analysis / N. Wiener // *Acta Mathematica*. – 1930. – Vol. 55. – P. 117–258.
247. Yaglom A. M. Correlation theory of stationary and related random functions / A. M. Yaglom – New York : Springer-VerLag, 1987. – 526 p.
248. Yeung G. K. Search-efficient methods of detection of cyclostationary signals / G. K. Yeung, W. A. Gardner // *IEEE Transactions on Signal Processing*. – 1996. – Vol. 44. – № 5. – P. 1214–1223.
249. Yuzefovych R. Selection of sampling step for correlation analysis of cyclostationary processes / Roman Yuzefovych // *Proceedings of the XIth International Conference on Modern Problems of Radio Engineering Telecommunications and Computer Science (TCSET'2012) Dedicated to 60th Anniversary of the Radio Department at the Lviv Polytechnic National University*. – Lviv : Lviv Polytechnic National University, 2012. – P. 68.
250. Zhou G. Harmonics in multiplicative and additive noise : Performance analysis of cyclic estimators / G. Zhou, G. B. Giannakis // *IEEE Trans. Signal Process*. – 1995. – Vol. 43. – P. 1445–1460.
251. Zimroz R. Metody adaptacyjnej w diagnostyce układów napędowych maszyn górniczych / R. Zimroz – Wrocław : Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego, 2010. – 317 s.

ДОДАТОК

Акти використання результатів дисертаційного дослідження

Товариство з обмеженою
відповідальністю
Фірма "ДІАЛАБ" ЛТД

Україна, 65009, м. Одеса, вул. Фонтанська дорога, 9-Б
тел/факс: +38 (0482) 35-73-96, 37-72-33, 37-72-47
E-mail: dialab@rtmp.odessa.ua



Общество с ограниченной
ответственностью
Фирма "ДИАЛАБ" ЛТД

Украина, 65009, г.Одесса, ул. Фонтанская дорога, 9-Б
тел/факс: +38 (0482) 35-73-96, 37-72-33, 37-72-47
E-mail: dialab@rtmp.odessa.ua

ЗАТВЕРДЖУЮ
Генеральний директор
СПЕЦІАЛІЗОВАНОГО
ЕКСПЕРТНО-ТЕХНІЧНОГО ЦЕНТРУ
ТОВ фірма "ДІАЛАБ" Лтд
д.т.н., професор

 В.М. Пустовий
" 09 " 2016 р.
АКТ

про впровадження результатів дисертаційної роботи Р.М. Юзефовича

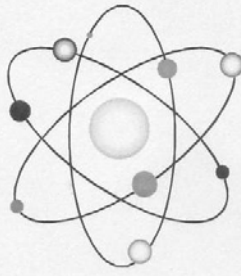
Даний акт складений про те, що запропонована в дисертаційній роботі методика взаємкореляційного та взаємспектрального аналізів для розділення джерел дефектів та встановлення їх типів використовується нашими фахівцями при проведенні технічного діагностування редукторів приводів механізмів порталних кранів для встановлення технічного стану підшипникових вузлів.

Введені Р.М. Юзефовичем інтегральна і покомпонентна функції когерентності дають можливість кількісно охарактеризувати взаємозв'язок між властивостями нестационарності стохастичних коливань, який проявляється в періодичній зміні їх імовірнісних характеристик, а також взаємозв'язку між амплітудою та фазовими модуляціями несучих гармонік стохастичних коливань, що є важливим для встановлення їх фізичної природи.

Директор
ТОВ Фірма «ДІАЛАБ» ЛТД
технічний експерт, к.т.н.

Триколенко М.В.





Приватне науково-виробниче підприємство
ІНСТИТУТ НОВІТНІХ ТЕХНОЛОГІЙ

Україна, 79053, м. Львів, вул. Наукова, 5, тел. +38 067 179 85 98, E-mail: nvp.int@gmail.com

Вихідн. № 02/10 від 11.10.2016

АКТ

про впровадження результатів дисертаційної роботи Р.М. Юзефовича

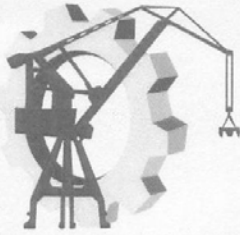
Даний акт складений про те, що з використанням розробленої вібродіагностичної системи ПУЛЬС проведено дослідження технічного стану підшипникових вузлів центрифуги Flottweg Z4E. Використовуючи отримані в роботі наукові результати та запропоновані методи взаємкореляційного і взаємспектрального аналізу, виявлено розподілений дефект обертового вузла, який проявляється у нерівномірному радіальному навантаженні, що супроводжується розвинутим локальним. Останній має ударний характер. Виявлений дефект підтверджено під час заміни підшипникового вузла центрифуги.

Результати, отримані у дисертаційній роботі, використовуються спеціалістами нашого підприємства при виконанні діагностичних робіт по встановленню технічного стану підшипникових вузлів з метою вироблення оптимальних рекомендацій щодо їх безпечної експлуатації та запобігання виникненню аварійних ситуацій.

Директор



В. Г. Калущка



Товариство з обмеженою відповідальністю
«ПОРТТЕХЕКСПЕРТ»

68600, Одеська обл., м. Ізмаїл,
пр-т Миру, 25-Б, офіс №229
тел. +38 (063) 604 26 63
E-mail: porttehexpert@ukr.net

ЄДРПОУ 39534408
Код банку 300346
Р/р 26007014142601
в ПАТ «АЛЬФА-БАНК»

Вих. № 987 від «04» серпня 2016г.

АКТ

про впровадження результатів дисертаційної роботи Р.М. Юзефовича

Даний акт укладено про те, що запропоновані у дисертаційній роботі Р. М. Юзефовича інтегральна і покомпонентна функції когерентності використовуються фахівцями ТОВ «ПОРТТЕХЕКСПЕРТ» для проведення аналізу вібраційних сигналів, записаних при виконанні робіт по комплексному дослідженню технічного стану (експертне обстеження та технічна діагностика) приводів (електродвигунів та редукторів) вугільних конвеєрів на ТОВ «ТІС-ВУГІЛЛЯ». Використання запропонованого підходу дозволило виявити на стадії зародження та встановити тип дефекту підшипникового вузла електродвигуна приводу вугільного конвеєра: розподілений дефект (нерівномірне навантаження на зовнішнє кільце), та зародження локального руйнування кільця підшипника.

Використання при аналізі вібраційних сигналів запропонованих функцій когерентності є ефективним засобом для виявлення дефектів підшипникових вузлів та встановлення їх типів.

Також, отримані в роботі Р. М. Юзефовича наукові результати та запропоновані методи взаємкореляційного і взаємспектрального аналізів для виявлення дефектів та встановлення їх типів використовуються у технічному відділі при аналізі результатів технічної діагностики приводів вугільних та зернових конвеєрів з метою розробки оптимальних рекомендацій щодо їх безпечної експлуатації та запобігання виникнення аварійних ситуацій.

Директор
ТОВ «ПОРТТЕХЕКСПЕРТ»
Технічний експерт, к.т.н.



Семенов П.А.



Підприємство "Кипер-пласт"
Україна, 70049, м. Львів, а/с 10541
тел/факс. (032) 242-13-66
www. keeperplast.com.ua, epzm@mail.lviv.ua

Гнучкі рішення для Вас

р/р 260088490 в ЗАТ АКБ "Львів" у м. Львові МФО 325268, код ЄДРПОУ 33981450

№ 25 від 19 серпня 2016 р.

АКТ

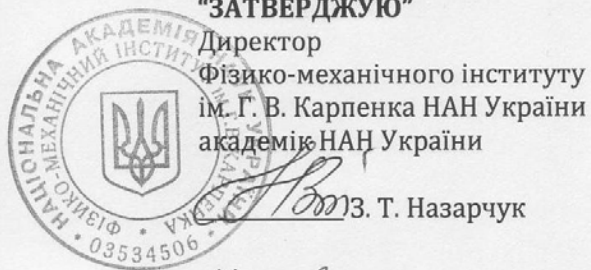
про впровадження результатів дисертаційної роботи Р.М. Юзефовича

Отримані в роботі наукові результати та запропоновані методи взаємодіяючого і взаємоспектрального аналізів, введені інтегральна та покомпонентна функції когерентності для виявлення дефектів та встановлення їх типів використовуються у відділі діагностики нашого підприємства при аналізі результатів технічної діагностики підшипникових вузлів обертових механізмів з метою вироблення оптимальних рекомендацій щодо їх безпечної експлуатації та запобігання виникнення аварійних ситуацій.

Директор

О. С. Глушко





"ЗАТВЕРДЖУЮ"

Директор
Фізико-механічного інституту
ім. Г. В. Карпенка НАН України
академії НАН України

З. Т. Назарчук
З. Т. Назарчук

"17" лютого 2016 р.

А К Т

про використання результатів дисертаційної роботи "Моделювання та статистичний аналіз взаємопов'язаних періодично нестационарних вібраційних сигналів для виявлення дефектів механізмів" к.т.н., ст.н.с., завідувача лабораторії вібродіагностики Юзефовича Романа Михайловича, представленої на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук при виконанні держбюджетних тем Фізико-механічного інституту ім. Г. В. Карпенка НАН України

Ми, що нижче підписалися, заступник директора з наукової роботи, д. т. н., проф., член-кореспондент НАН України Скальський В.Р., вчений секретар інституту, к.т.н., ст.н.с. Корній В.В., головний бухгалтер-начальник фінансово-економічного відділу Гейник Г.М., цим актом підтверджуємо, що результати дисертаційного дослідження к.т.н., ст.н.с., завідувача лабораторії вібродіагностики Юзефовича Р.М. використано під час виконання наукових завдань у рамках держбюджетних тем Фізико-механічного інституту ім. Г. В. Карпенка НАН України, зокрема:

- держбюджетної теми НАН України "Розвиток методів параметричного аналізу випадкових сигналів для діагностики об'єктів тривалої експлуатації" (2007–2009, № держреєстрації 0107U004066);
У рамках теми Юзефович Р.М. розробив теоретичні основи емпіричного непараметричного взаємкореляційного аналізу періодично корельованих випадкових сигналів. Для оцінювання взаємспектральної густини і взаємспектральних компонентів обґрунтовано корелограмний метод, який є узагальненням на випадок зв'язаних ПКВП методу Блекмана-Т'юкі.
- держбюджетної теми НАН України "Розробка методів аналізу і обробки багатомірних сигналів зі стохастичною повторюваністю та створення вимірювальних систем для вібродіагностики" (2010–2012, 0110U000433);
У рамках теми Юзефович Р.М. розвинув спектрально-кореляційну теорію зв'язаних періодично корельованих випадкових сигналів – математичних моделей двохвимірних вібраційних сигналів. Проаналізував представлення рядами Фур'є взаємкореляційної та взаємспектральної функцій, встановлені властивості їх коефіцієнтів Фур'є. Отримано формули, які пов'язують ці величини зі взаємкореляційними функціями та взаємспектральними густинами стаціонарних випадкових процесів, що описують стохастичну амплітуду й фазову модуляцію несучих гармонік вібросигналів.

- держбюджетної теми НАН України “Розробка методів і засобів багатомірного спектрального аналізу періодично нестаціонарних стохастичних коливань для задач технічної діагностики” (2013–2015, 0113U000304);

У рамках теми Юзефович Р.М. розвинув методи когерентного та компонентного взаємкореляційного і взаємспектрального аналізів періодично корельованих випадкових сигналів. Когерентний метод взаємкореляційного аналізу періодично корельованих випадкових сигналів узагальнено на випадок, коли період їх взаємної нестаціонарності є невідомим. Проведено аналіз багатомірних моделей у вигляді періодично корельованих випадкових процесів (ПКВП) та наведені методи статистичного аналізу останніх;
- держбюджетної теми НАН України “Розроблення стохастичних нелінійних моделей коливань пружних тіл і засобів їх застосування у задачах вібродіагностики втомних пошкоджень елементів конструкцій” (2016–2018, 0116U006336);

У рамках теми Юзефович Р.М. вивів та проаналізував формули для статистичних характеристик дискретних компонентних оцінок взаємкореляційної функції. Показав, що вирішальний вплив на ефективність дискретних компонентних оцінок має гармонічний склад тієї чи іншої характеристики та швидкість зникання кореляційних зв’язків. Досліджені ефекти накладання першого й другого роду, отримані умови їх відсутності.
- договору № 2.2/375 у рамках цільової комплексної програми наукових досліджень НАН України “Проблеми ресурсу і безпеки експлуатації конструкцій, споруд та машин” (РЕСУРС) “Розробка інформаційно-вимірювальної системи для вібродіагностики підшипників великих стаціонарних агрегатів” (2008–2010, 0107U005211);

У рамках договору Юзефович Р.М. описав нові можливості, які появляються при використанні методів періодично корельованих випадкових процесів у діагностиці турбоагрегатів ТЕЦ, проведено експериментальні роботи.
- договору № 2.2 у рамках цільової комплексної програми наукових досліджень НАН України “Проблеми ресурсу і безпеки експлуатації конструкцій, споруд та машин” (РЕСУРС) “Розробка інформаційно-вимірювальної системи для багатомірної діагностики обертових вузлів машинних комплексів” (2010–2012, 0110U004575);

У рамках договору Юзефович Р.М. розробив програмне забезпечення для когерентного аналізу вібрацій при невідомому періоді і описав результати обробки експериментальних даних при його використанні. Також розробив методи взаємного статистичного ПКВП-аналізу у ранній діагностиці механізмів циклічної дії.
- договору № 2.4 у рамках цільової комплексної програми наукових досліджень НАН України “Проблеми ресурсу і безпеки експлуатації конструкцій, споруд та машин” (РЕСУРС) “Розробка вібродіагностичної системи для визначення дефектів промислового обладнання з використанням методів нестаціонарної статистичної обробки вібраційних та акустичних коливань” (2013–2015, 0113U004211);

У рамках договору Юзефович Р.М. з використання вібродіагностичної системи ПУЛЬС встановив характерні особливості взаємкореляційних та взаємспектральних характеристик горизонтальної і вертикальної складових вібраційних сигналів відібраних з вузлів обертових механізмів на підприємствах України.

- договору № 2.3.1 у рамках цільової програми наукових досліджень НАН України “Надійність і довговічність матеріалів, конструкцій, обладнання та споруд” (РЕСУРС-2) “Спеціалізовані пристрої для виявлення дефектів на ранніх стадіях їх зародження при визначенні технічного стану механізмів” (2016–2020, 0116U004950).

У рамках договору Юзефович Р.М. обґрунтував алгоритми та створив програмне забезпечення взаємкореляційного й взаємоспектрального аналізу періодично корельованих випадкових сигналів, яке дає можливість знаходити період взаємної нестационарності двох вібраційних сигналів, оцінювати взаємкореляційну функцію, взаємоспектральну густину, взаємкореляційні і взаємоспектральні компоненти, а також інтегральну і покомпонентну функції когерентності.

Отримані при виконанні дисертаційної роботи результати в області взаємкореляційного та взаємоспектрального аналізів періодично нестационарних випадкових процесів є суттєвим внеском в теорію і статистику нестационарних випадкових процесів, розроблені методи взаємного статистичного аналізу дають можливість на основі експериментальних даних встановити нові закономірності стохастичних коливань різного фізичного походження. Запропоновані у дисертаційній роботі функції когерентності знайшли своє практичне застосування при обробці нестационарних вібраційних сигналів підшипникових вузлів обертових механізмів.

Заступник директора з наукової роботи,
д-р техн. наук, проф.,
член-кореспондент НАН України

В. Р. Скальський

Вчений секретар,
канд. техн. наук, ст. наук. співроб.

В. В. Корній

Головний бухгалтер–начальник ФЕВ

Г. М. Гейник