

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ КОЛИВАНЬ У СИСТЕМАХ ІЗ ЗМІННИМ МОМЕНТОМ ІНЕРЦІЇ ЗА НЕЛІНІЙНИМ ЗАКОНОМ НА ПРИКЛАДІ ВІДЦЕНТРОВОГО РЕГУЛЯТОРА

© Чабан А.В., 2006

Запропоновано метод розрахунку електромеханічних коливних процесів у системах із змінним моментом інерції за нелінійним законом. Диференціальні рівняння системи представлені в нормальній формі Коші. Результати комп'ютерної симуляції використовуються для аналізу роботи відцентрового регулятора. Подаються результати досліджень моделі на основі фундаментальних законів аналітичної механіки та електротехніки.

The method of calculation of electromechanics hesitating processes is offered in the systems with the variable moment of inertia after a nonlinear law. Differential equalizations of the system are represented in the normalized Cauchy form. It is drawn on result of computer simulation for the analysis of work of centrifugal regulator. The results of researches of model on the basis of fundamental laws of analytical mechanics and electrical engineering are given.

Вступ. Аналіз електромеханічних коливних процесів займає чільне місце в задачах електроенергетики та прикладної механіки. Це також стосується електроприводів із змінними моментами інерції за нелінійними законами. Прикладом такої системи може бути відцентровий регулятор. Такі пристрої мають просту конструкцію, надійні в роботі та дешеві в обслуговуванні, тоді як виконують вони досить складні операції, особливо для нелінійних функціональних залежностей між вхідними та вихідними сигналами у системах управління електроприводами. Зрозуміло, що електромеханічні коливання значною мірою впливають на роботу системи та на точність і якість поставлених задач перед цим пристроєм. У цій роботі пропонується математична модель відцентрового регулятора (див. рис.1) для абсолютно жорстких валів, які з'єднуються між собою через пружну муфту в єдиний валопровід. На основі цієї моделі аналізують крутильні коливні процеси у валопроводі системи та коливні процеси поступальних рухів вантажів регулятора, а також їхній взаємний вплив один на другого.

Постановка проблеми. Математичні моделі електромеханічних коливних систем із скінченним числом вільності будують на підставі рівнянь Лагранжа другого роду, а для систем з безмежним числом вільності на підставі рівняння Ейлера, яке впливає з інтегрального варіаційного принципу Гамільтона–Остроградського [3]. Щодо нашого прикладу (див. рис.1), застосування рівнянь Лагранжа другого роду у звичайний спосіб (ми розглядаємо систему із скінченним числом вільності) є неможливе, оскільки електромеханічна система – неголономна. Тому для математичного моделювання електромеханічних коливань необхідно застосовувати загальне рівняння динаміки, яке безперечно записано на підставі фундаментальних законів аналітичної механіки, а також враховує рівняння неголономних зв'язків. Розв'язання задач такого типу ускладнюється через жорсткість диференціальних рівнянь електромеханічного стану, а це призводить до застосування неявних методів інтегрування нелінійних диференціальних рівнянь або до застосування явних методів вищого порядку, з дотриманням умови Куранта.

Аналіз останніх досліджень. Аналіз електромеханічних коливних процесів у пристроях з постійними моментами інерції описаний у багатьох працях, наприклад, [4], [5], натомість

електромеханічні коливні процеси у вищевказаних системах описано недостатньо. Існуючі методи розрахунку коливних процесів у складних системах досліджували, як правило, з постійними параметрами механічної системи, а мотори наводили математичними моделями, записаними на основі рівнянь електромагнітного кола з постійними параметрами в перетвореній системі координат[5], що не дає змоги повноцінного застосування моделі. Зрозуміло, що такі моделі не відповідають високому рівню адекватності, особливо, якщо такі пристрої працюють у багатовузлових електромашинних системах, де присутня конденсаторна батарея, а також для несиметричних режимів роботи привідного мотора як з боку ротора, так і з боку статора [6].

Постановка задачі. У цій роботі ставиться задача побудови високоадекватної математичної моделі відцентрового регулятора, що приводиться в рух асинхронним електроприводом через фрикційний варіатор. Застосування фазної системи координат струмів для асинхронного мотора дає змогу урахування будь-яких видів несиметрії як з боку статора, так і з боку ротора. Метою статті є й наведення рівнянь стану системи в нормальній формі Коші, а також результатів комп'ютерної симуляції у вигляді рисунків.

Математична модель системи. Для побудови математичної моделі електроприводу із змінним моментом інерції за нелінійним законом використаємо пристрій, принципову схему якого наведено на рис. 1.

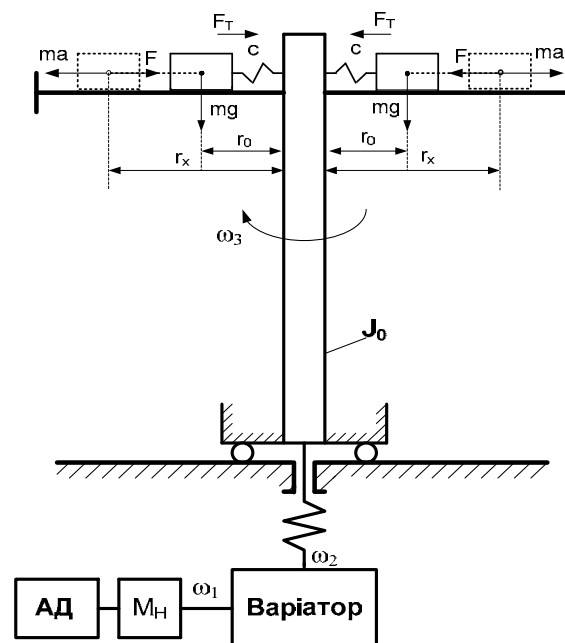


Рис. 1. Принципова схема відцентрового регулятора

Зауважимо, що вантажі розміщені симетрично один відносно одного (див. рис.1) та рухаються синхронно в часі.

Оскільки система, зображена на рисунку, є неголономна, то записати рівняння Лагранжа другого роду у звичний спосіб неправомірно. Тому математичну модель механічної частини електроприводу наведемо на основі загального рівняння динаміки [2–4]. Стосовно нашого пристрою це рівняння набуде вигляду

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} + \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} - Q_2 + \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_2} \right) h_{2i} = 0, \quad (1)$$

де $i = 1, 3, 4$

$$q_1 = \varphi_1, \dot{q}_1 = \frac{dq_1}{dt} = \omega_1, q_2 = \varphi_2, \dot{q}_2 = \frac{dq_2}{dt} = \omega_2, q_3 = \varphi_3, \dot{q}_3 = \frac{dq_3}{dt} = \omega_3, q_4 = r, \dot{q}_4 = \frac{dq_4}{dt} = v \quad (2)$$

$$T = J \frac{\omega_1^2}{2} + \frac{\omega_3^2}{2} (J_0 + J_3(r)) + 2 \frac{mv^2}{2}, \Pi = \frac{c_1(\varphi_2 - \varphi_3)^2}{2} + 2 \frac{c(r_0 - r)^2}{2}, \Phi = \frac{v_1(\omega_2 - \omega_3)^2}{2} + 2 \frac{v(v_0 - v)^2}{2} \quad (3)$$

$$Q_1 = M_E - M_H, Q_2 = 0, Q_3 = -2rF_K, Q_4 = 2(m\omega^2 r - k_T mg) \quad (4)$$

$$q_2 = h_{21}q_1 + h_2, h_{21} = \frac{q_2}{q_1} = \frac{1}{u(t)}, \quad (5)$$

де $h_2 = 0$, $h_{23} = h_{24} \equiv 0$; T – кінетична енергія руху системи; Π – потенціальна енергія системи; Φ – дисипативна функція Релея; Q_i – узагальнені сили; φ_1 – кут повороту асинхронного мотора; φ_2 – кут повороту вторинного вала варіатора; φ_3 – кут повороту регулятора; ω_1 – кутова швидкість асинхронного мотора; ω_2 – кутова швидкість вторинного вала варіатора; ω_3 – кутова швидкість регулятора; $u(t)$ – передатне число (функція) варіатора; r_0 – нерухома координата центру мас вантажів; r – рухома координата центру мас вантажів; v – поступальна швидкість руху вантажів; m – маса вантажів; g – прискорення вільного падіння; M_E – електромагнітний момент приводного асинхронного мотора; M_H – момент навантаження електропривода; k_T – коефіцієнт тертя між напрямними рейками та вантажами; F_K – сила Коріоліса.

Подамо рівняння руху системи для узагальненої координати та швидкості q_1, \dot{q}_1 на основі (1)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \omega_1} + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial \omega_2} \right) \frac{1}{u(t)} = Q_1 \quad (6)$$

Беручи до уваги (5), отримаємо диференціальне рівняння кутової швидкості вторинного вала варіатора

$$\frac{d\omega_2}{dt} = (Ju(t))^{-1} \left(M_E - M_H - J \frac{du(t)}{dt} \omega_2 - \frac{c_1(\varphi_2 - \varphi_3)}{u(t)} - \frac{v_1(\omega_2 - \omega_3)}{u(t)} \right) \quad (7)$$

Подамо рівняння руху системи для узагальненої координати та швидкості q_3, \dot{q}_3 , узявши до уваги вираз

$$\frac{dJ_2(r)}{dt} = \frac{d}{dt} 2mr^2 = 4mr\dot{r}, F_K = 2m\omega_3 v \quad (8)$$

Тоді отримаємо диференціальне рівняння для кутової швидкості регулятора на основі (1)

$$\frac{d\omega_3}{dt} = (J_0 + 2mr^2)^{-1} (-8mr\dot{r}\omega_3 + c_1(\varphi_2 - \varphi_3) + v_1(\omega_2 - \omega_3)) \quad (9)$$

Рівняння руху системи для узагальненої координати та швидкості q_4, \dot{q}_4 , узявши до уваги співвідношення:

$$\frac{\partial J_2(r)}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} 2mr^2 = 4mr \frac{\partial r}{\partial v} = 0, \text{ бо } \frac{\partial r}{\partial v} = \frac{\partial r}{\partial \dot{r}} \equiv 0 \quad (10)$$

отримаємо диференціальне для рівняння швидкості поступального руху вантажів регулятора на основі (1)

$$\frac{dv}{dt} = \frac{m\omega^2 r - k_T mg + c(r_0 - r) - vv}{m} \quad (11)$$

Зауважимо

$$v_0 = \frac{dr_0}{dt} \equiv 0$$

Доповнимо систему рівнянь (7), (9), (11) рівняннями узагальнених координат (2)

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = \omega_2, \quad \frac{d\varphi_3}{dt} = \omega_3, \quad \frac{dr}{dt} = v \quad (12)$$

Подамо математичну модель асинхронного мотора у фазних координатах [1]:

$$\frac{di_S}{dt} = A_S(u_S - R_S i_S) + A_{SR} \Pi(-\Omega \Psi_R - R_R i_R) \quad (13)$$

$$\frac{di_R}{dt} = \Pi^{-1} A_{RS}(u_S - R_S i_S) + \Pi^{-1} A_R \Pi(-\Omega \Psi_R - R_R i_R) + \Omega i_R \quad (14)$$

$$A_S = \alpha_S(1 - \alpha_S G), \quad A_{SR} = A_{RS} = \alpha_S \alpha_R G, \quad A_R = \alpha_R(1 - \alpha_R G) \quad (15)$$

$$\Psi_S = \Psi = \Pi \Psi_R, \quad \Psi_R = \Pi^{-1} \Psi_S, \quad \Psi = \tau(i_S + \Pi i_R), \quad (16)$$

$$\Pi = \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \sin(p_0 u(t) \gamma + 2\pi/3) & -\sin(p_0 u(t) \gamma) \\ \sin(p_0 u(t) \gamma) & -\sin(p_0 u(t) \gamma - 2\pi/3) \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\Pi^{-1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -\sin(p_0 u(t) \gamma - 2\pi/3) & \sin(p_0 u(t) \gamma) \\ -\sin(p_0 u(t) \gamma) & \sin(p_0 u(t) \gamma + 2\pi/3) \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\Omega = \Pi \frac{d\Pi^{-1}}{dt} = -\Pi^{-1} \frac{d\Pi}{dt} = \frac{p_0 u(t) \omega}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} T + b_A i_A & b_B i_A \\ b_A i_B & T + b_B i_B \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$i = i_S + \Pi i_R, \quad R = 1/(\alpha_S + \alpha_R + \rho), \quad T = 1/(\alpha_S + \alpha_R + \tau), \quad b = \frac{2R - T}{3 i_m^2}, \quad \tau = \left(\frac{\Psi_m}{i_m} \right)^{-1} \quad (20)$$

$$b_A = b(2i_A + i_B), \quad b_B = b(2i_B + i_A), \quad \rho = \left(\frac{\partial \Psi_m}{\partial i_m} \right)^{-1} \quad (21)$$

де u_S – фазна напруга живлення мотора; R_S, R_R – опір обмотки фази статора і ротора, відповідно; i_S, i_R – струм фази статора і ротора, відповідно; Ψ_R – повне потокозчеплення фази ротора; α_S, α_R – обернені індуктивності статора і ротора, відповідно; Ψ – основне потокозчеплення мотора; p_0 – кількість пар магнітних полюсів статора, γ – електричний кут повороту ротора, Ψ_m – потокозчеплення намагнічення, i_m – струм намагнічення мотора.

Вираз електромагнітного моменту набуде такого вигляду[1]:

$$M_E = \sqrt{3} p_0 u(t) (i_{RA}^{\Pi} i_{SB}^{\Pi} - i_{RB}^{\Pi} i_{SA}^{\Pi}) / \tau, \quad \begin{bmatrix} i_{RA}^{\Pi} & i_{RB}^{\Pi} \end{bmatrix}^T = \Pi \begin{bmatrix} i_{RA} & i_{RB} \end{bmatrix}^T \quad (22)$$

Тепер сумісному інтегруванню підлягає система (7), (9), (11)–(22). Інтегрування здійснювали за допомогою прикладної програми *Visual FORTRAN* методом Рунге–Кутта четвертого порядку та неявним Ейлера, що дало практично однакові результати. Це означає, що диференціальні рівняння електромеханічного стану невисокої жорсткості.

Результати комп'ютерної симуляції. Комп'ютерну симуляцію процесів здійснювали у три етапи для електромеханічної системи, наведеної на рис. 1. Параметри регулятора та варіатора такі: $m = 2$ кг, $J_0 = 0,1$ кгм², $r_0 = 0,1$ м, $u(t) = 10 + t, t \in [0, 10]$ М_н = 20 Н. Параметри мотора такі: $U_H = 380$ В; $p_0 = 2$; $P_H = 0,6$ кВт. $I_H = 1,6$ А .

Наведемо результати комп'ютерної симуляції у вигляді рисунків.

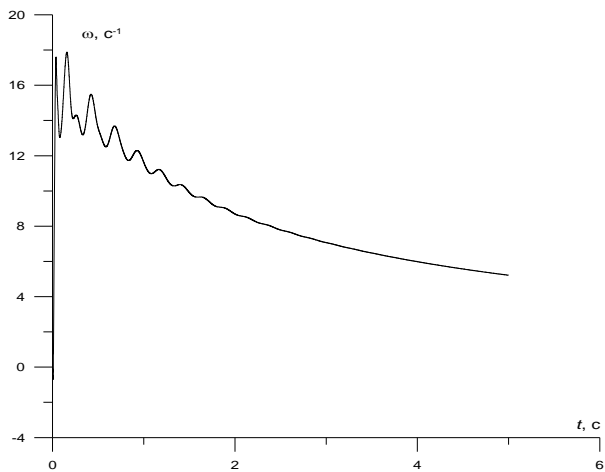


Рис. 2. Кутова швидкість регулятора як функція часу на першому етапі симуляції

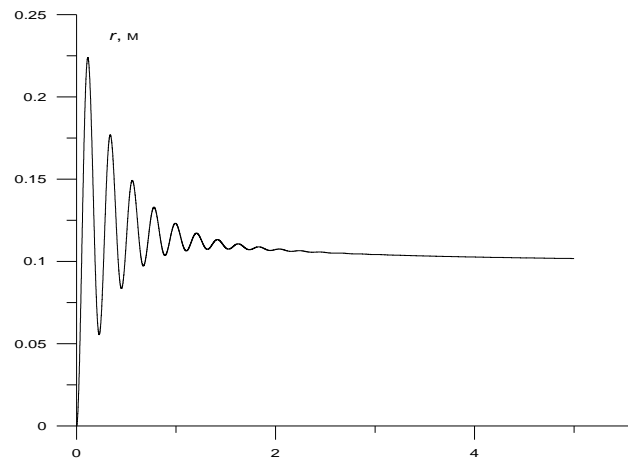


Рис. 4. Координата поступального руху центру мас регулятора як функція часу на першому етапі симуляції

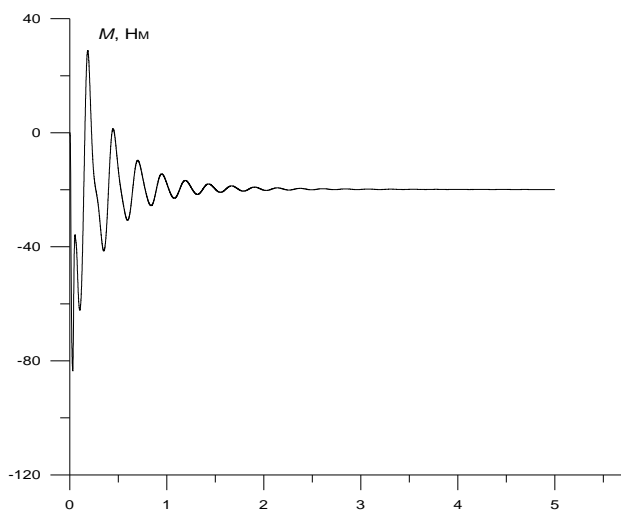


Рис. 3. Пружний момент у муфтовому з'єднанні приводу регулятора як функція часу на першому етапі симуляції

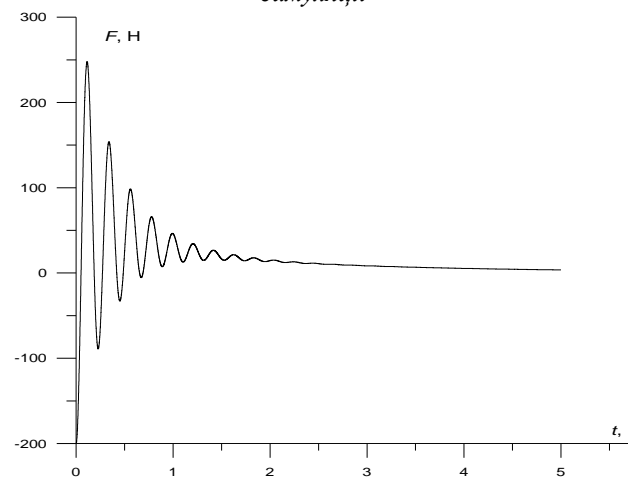


Рис. 5. Сила пружності пружини вантажу регулятора як функція часу на першому етапі симуляції

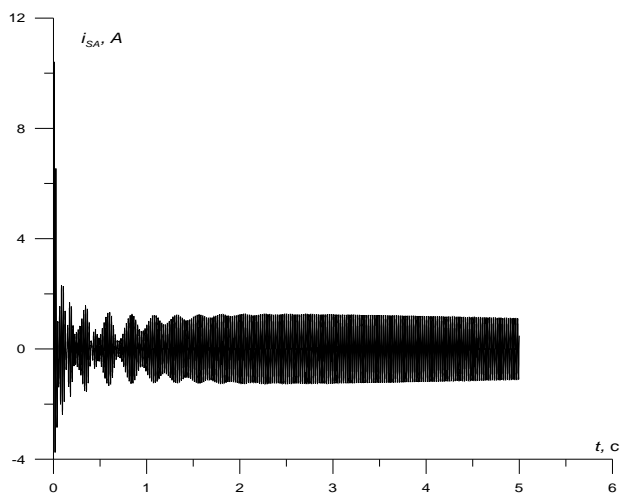


Рис. 6. Струм фази статора приводного мотора як функція часу на першому етапі симуляції

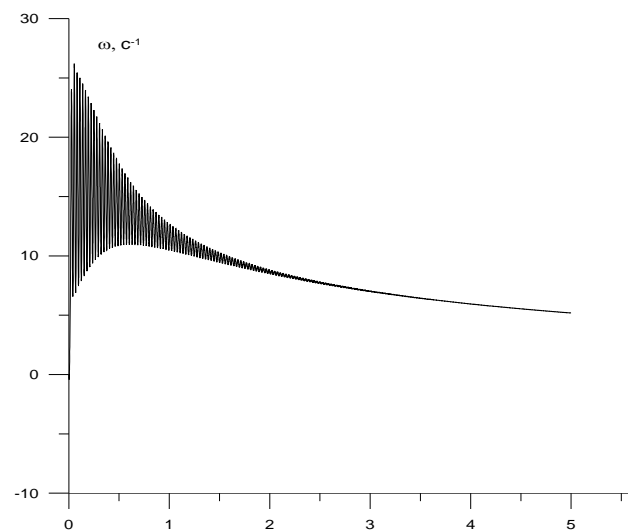


Рис. 7. Кутова швидкість регулятора як функція часу на другому етапі симуляції

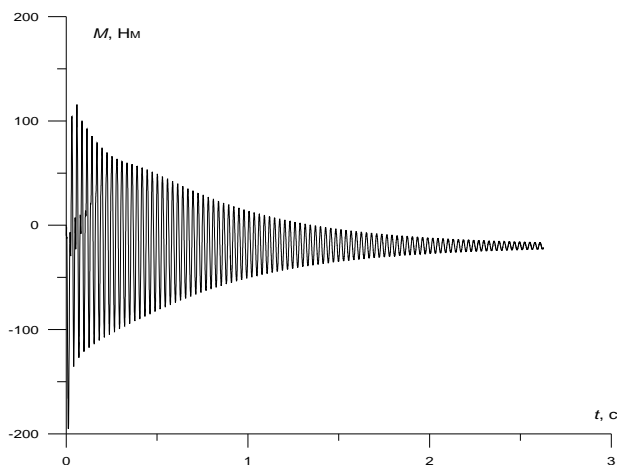


Рис. 8. Пружний момент у муфтовому з'єднанні приводу регулятора як функція часу на другому етапі симуляції

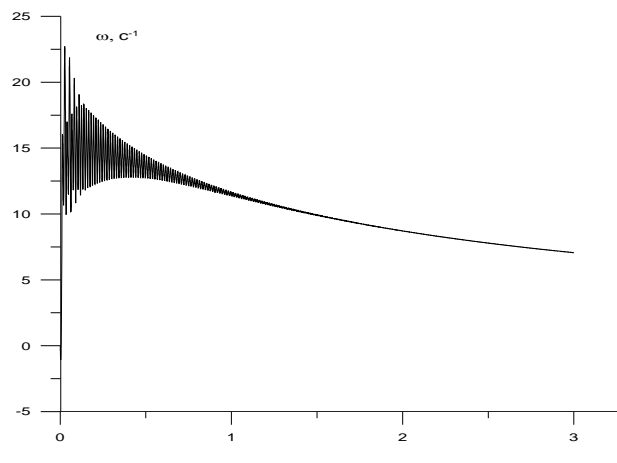


Рис. 10. Кутова швидкість регулятора як функція часу на третьому етапі симуляції

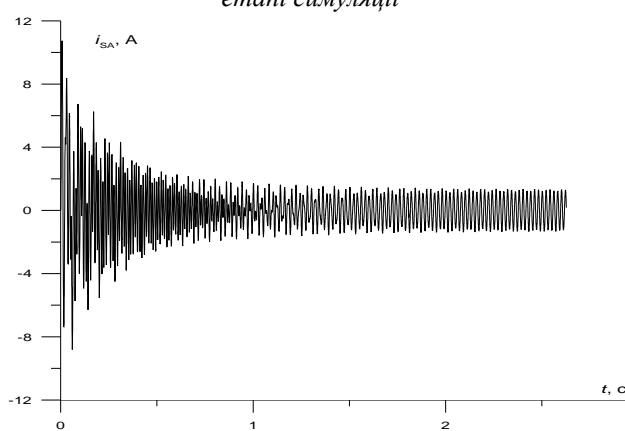


Рис. 9. Струм фази статора приводного мотора як функція часу на другому етапі симуляції

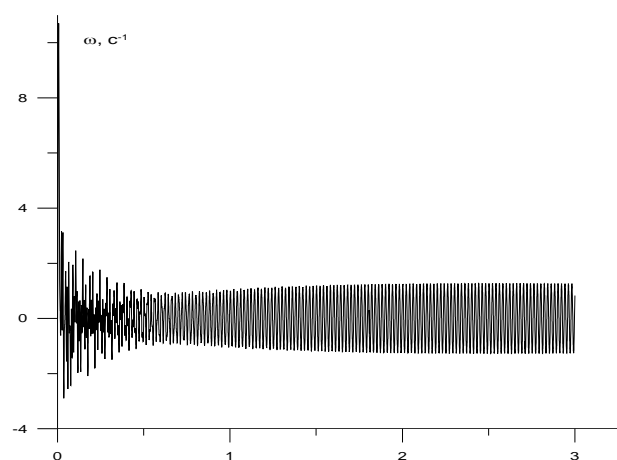


Рис. 11. Струм фази статора приводного мотора як функція часу на третьому етапі симуляції

Аналіз результатів комп'ютерної симуляції. На першому етапі симуляцію здійснювали за власних частот системи, діапазон яких знаходився в межах 5–10 Гц. Цей діапазон значною мірою залежить від жорсткості муфтового з'єднання та пружин регулятора. Зауважимо, що власні частоти системи є функцією як швидкості обертання регулятора, так і швидкості поступального руху вантажів. Тому ці частоти можна розглядати не як конкретні числа, а лише як величини, що знаходяться в певному діапазоні, причому діапазони частот визначають експериментально з рисунків.

Результати симуляції на першому етапі наочно відтворені на рис. 2 – 6. Аналізуючи вказані рисунки, доходимо висновку, що за таких умов регулятор працює в нормальному режимі. Оскільки закон зміни передатного числа варіатора (див. параметри регулятора) є зростаючою функцією, то очевидно, що швидкість регулятора зменшуватиметься (рис. 2), а значення пружного моменту в муфтовому з'єднанні після загасання коливного процесу дуже повільно зменшуватиметься (рис. 3) і, як наслідок, поточна координата поступального руху центру мас вантажів регулятора r прямуватиме до початкового положення r_0 (зрозуміло, після загасання коливного процесу в системі) (рис. 4). А це приводить, своєю чергою, до зменшення сили пружності пружини регулятора (рис. 5). Зауважимо, що струм в електромеханічній системі після загасання коливного процесу поступово почне зменшуватись, що наочно показано на рис. 6.

На другому етапі симуляцію здійснювали за іншого типу пружної муфти та жорсткішої пружини. Параметри пружних елементів підбрано так, що власна частота системи знаходилась у межах 50 Гц. Тобто система в стані резонансу (оскільки частота напруги живлення мотора є також

50 Гц, а власна резонансна частота буде в межах 48,5 Гц через розсіяння енергії в статорі та роторі мотора). Аналізуючи графічні матеріали, доходимо висновку, що в стані резонансу система є непрацездатна. Значні коливання кутової швидкості регулятора (рис. 7), а відтак і кутової швидкості асинхронного мотора, можуть призвести до виходу останнього з ладу через великі навантаження. Пружний момент у муфтовому з'єднанні теж досягає критичних значень, що, своєю чергою, може призвести до серйозних поломок у регуляторі (рис. 8). Треба зазначити, що струм фази статора асинхронного мотора теж суттєво реагує на резонансні явища в електроприводі (рис. 9), хоч для мотора серйозної небезпеки це не становить (зрозуміло, для нетривалого режиму роботи регулятора).

На третьому етапі симуляцію здійснювали за власних частот системи, що знаходились в межах 55–60 Гц. Тобто параметри пружної муфти та пружин регулятора дещо відрізнялись від попереднього етапу симуляції. На рис.10 показано кутову швидкість регулятора як функцію часу. На графіку видно значні флуктації функції швидкості регулятора. Цей стан називається биттям коливань. Очевидно, що для роботи регулятора цей стан є небажаним, хоч не такий небезпечний, як резонансний. Струм фази статора також реагує на биття коливань в електроприводі (рис. 11), особливо під час пуску системи.

Висновки. Математичне моделювання електромеханічних коливань із змінним моментом інерції за нелінійним законом необхідно здійснювати на основі фундаментальних законів аналітичної механіки. Перед під'єднанням регулятора до електромеханічної системи треба відтворити на математичній моделі найімовірніші режими роботи електропривода та регулятора. Особливу увагу необхідно звернути на зміну власних частот системи за умови різних швидкостей обертання механізму.

Застосування апарату математичного моделювання дає змогу аналізувати практично будь-який режим роботи регулятора, який навіть неможливий за реальних умов. Тобто, використовуючи результати комп'ютерної симуляції, можна передбачити аварійні стани регулятора, а відтак їх уникнути.

1. Чабан А. Особливості Ψ – та A – моделей асинхронного мотора у фазних координатах // *Електротехніка і електромеханіка*. – 2005'4 – С.37–39. 2. Бутенин Н.В. Введение в аналитическую механику. – М.: Наука, 1971. – 264 с. 3. Филиппов А.А. Колебания деформируемых систем. – М.: Машиностроение, 1970. – 736 с. 4. Харченко Е.В. Динамические процессы буровых установок. – Львов: Світ, 1991. – 176 с. 5. Харченко Є.В., Колесник К.К. Зниження віброактивності привідних систем шляхом застосування пружних муфт квазінульової жорсткості // *Вісник Вінницького політехнічного інституту*. –2003. – С. 66–72. 6. Чабан А. Математична модель двовузлової електромашиної системи // *Вісник Національного університету “Львівська політехніка”*.– 2005. – С. 155–160.