УДК: 517.9

І.Б. Назар, Б.І. Сокіл
Національний університет “Львівська політехніка”
кафедра теоретичної механіки

МЕТОД ВАН-ДЕР-ПОЛЯ У ДОСЛІДЖЕННІ ПЕРІОДИЧНИХ ЗБУРЕНЬ РУХОМИХ ОДНОВИМІРНИХ СИСТЕМ

Розглянуто задачу про побудову асимптотичних наближень для хвильових процесів у одновимірних рухомих нелінійно пружних середовищах обмеженої довжини. Математичною моделлю розглядуваних процесів може слугувати, за певних крайових умов, узагальнене нелінійне неавтономне хвильове рівняння. В основу досліджень покладено модифіковане за Д'Аламбером подання розв’язку на відповідну незбурену крайову задачу з подальшим застосуванням методу Ван-дер-Поля для збуреної задачі. Отримано математичні залежності, які визначають вплив пружних і кінематичних характеристик середовища на основні її параметри руху. Розглядаються резонансний і нерезонансний випадки.

A task is examinedabout the construction of the asimptotic approaching for the processes of waves in the mobilenonlinear resilient environments of the limited length. Can serve as a mathematical model of the examined processes, at certain regional terms, nonlinear non-autonomous wave equalization is generalized. It is fixed in basis of researches, modified after d’Alembert , presentation of decision on the proper unrevolted regional task with subsequent application of the Van-der- Pol for the revolted task. Mathematical dependences whichdetermine influence of resilient and kinematics descriptions of environment on its basic parameters of motion are got. Resonance and unresonance cases are examined.

Актуальність і постановка задачі. Динамічні процеси у нелінійно-пружних системах з розподіленими параметрами достатньо вивчені для випадків, коли незбурені (лінійні) їхні аналоги дозволяють для побудови розв’язків рівнянь, що описують їх рух застосовувати такі відомі методи як Фур’є чи Д’Аламбера. Проблема значно ускладнюється, якщо динамічна система характеризується поздовжнім рухом. Аналітичне дослідження останніх пов’язано із значними математичними труднощами, адже навіть для незбурених (лінійних рівнянь) не існує точних математичних методів дослідження. Проблема дещо спрощується, якщо використати фізично обґрунтоване твердження про можливість встановлення у системах із багатьма ступенями вільності і розподіленими параметрами одночастотних режимів коливань. Розглянуто задачу про побудову асимптотичних розв’язків хвильових рівнянь, які описують коливні процеси у одновимірних рухомих нелінійно-пружних середовищах обмеженої довжини. Аналітичне дослідження їх пов’язано із значними математичними труднощами, адже навіть для незбурених (лінійних рівнянь) не існує точних математичних методів дослідження. Проблема дещо спрощується, якщо використати фізично обґрунтоване твердження про можливість встановлення у системах із багатьма ступенями вільності і розподіленими параметрами одночастотних режимів коливань певної форми. Для таких нелінійних систем можна у багатьох випадках узагальнити методи збурень [1], зокрема, асимптотичні методи нелінійної механіки, метод Пуанкаре, метод Ван-дер-Поля. У роботі узагальнено метод Ван-дер-Поля для диференціального рівняння, яке описує вказані задачі за найпростіших крайових умов. Отже, принцип одночастотності коливань у нелінійних системах з багатьма ступенями вільності, метод Ван-дер-Поля і метод усереднення покладено в основу таких досліджень.

Відомо [2], що математичною моделлю поздовжніх коливань суцільного одновимірного середовища, яке рухається вздовж своєї геометричної осі із сталою чи змінною швидкістю, є диференціальне рівняння

$$u_{tt} + 2\beta u_{xt} - \alpha^2 u_{xx} = \varepsilon f(u, u_x, u_t, \theta), \qquad (1)$$

в якому α і β –сталі, які визначаються через фізико-механічні і кінематичні характеристики досліджуваного середовища; ε –малий параметр; $\varepsilon f(u, u_x, u_t, \theta)$ –аналітична функція, яка враховує нелінійно пружні властивості середовища, вплив сил опору та дисипативних сил, зовнішніх періодичних сил. Малий параметр ε у правій частині диференціального рівняння (1) вказує на малу величину останніх сил порівняно з лінійною відновлювальною силою. Ліва частина рівняння (1) містить змішану похідну лінійної і часової змінних. Це не дає змоги безпосередньо під час побудови навіть розв'язків незбуреного його аналога ($\varepsilon = 0$) застосувати відомі класичні методи Фур'є і Д'Аламбера. У [3] показано, що його одночастотні розв'язки за найпростіших крайових умов

$$u(x,t)\Big|_{x=0} = u(x,t)\Big|_{x=l} = 0\,, \tag{2}$$

можна записати у вигляді

$$u(x,t) = \frac{a}{2}(cos(\kappa x + \omega t + \varphi) - cos(\chi x - \omega t - \varphi)), \tag{3}$$

де a і φ – сталі, κ, χ – відповідно хвильові числа прямої і відбитої хвиль, ω – їхня частота.

У цій же роботі зроблено спробу побудови асимптотичного розв'язку для цього диференціального рівняння шляхом узагальнення асимптотичного методу Крилова–Боголюбова–Митропольського (КБМ). Він доволі громіздкий і в багатьох випадках для дослідження інженерних задач вимагає значних математичних викладок. У цій роботі зроблено спробу отримати дещо спрощений варіант вказаної задачі, проте він зручний, на наш погляд, для багатьох інженерних досліджень.

Зауважимо, з фізичних міркувань крайові умови (2) еквівалентні умовам відсутності поперечних переміщень середовища у фіксованих точках, а розв'язок у формі (3) можна інтерпретувати як накладання двох хвиль косинусоїдальної форми однакової частоти, проте різних довжин.

Методика розв'язування. Маючи опис одночастотного процесу для незбуреного рівняння за методом Ван-дер-Поля, представлення (3) можна також вважати і розв'язком збуреного рівняння (1), тільки для останнього випадку параметри a і φ будуть вже деякими невідомими функціями незалежної змінної t, тобто

$$u(x,t) = \frac{a(t)}{2}(cos(\kappa x + \omega t + \varphi(t)) - cos(\chi x - \omega t - \varphi(t)))\,. \tag{4}$$

Для зручності математичних викладок розв'язок у формі (3) подамо у вигляді

$$u(x,t) = -a(t) sin\psi_1\, sin\psi_2\,, \tag{5}$$

де $\psi_1 = \dfrac{\kappa + \chi}{2}x, \psi_2 = \dfrac{\kappa - \chi}{2}x + \omega t + \varphi(t).$

Диференціюванням (5) за незалежними змінними x і t для збуреного рівняння (1) маємо

$$\begin{aligned} u_t &= -sin\psi_1(a_t\, sin\psi_2 + a(\omega + \varphi_t)cos\psi_2), \\ u_x &= -a\frac{\kappa+\chi}{2}cos\psi_1\, sin\psi_2 - a\frac{\kappa-\chi}{2}sin\psi_1\, cos\psi_2\,. \end{aligned} \tag{6}$$

З врахуванням того, що для незбуреного рівняння

$$u_t = -a\omega\, sin\psi_1\, cos\psi_2\,, \tag{7}$$

із (6) і (7) отримаємо

$$-sin\psi_1(a_t\, sin\psi_2 + a\varphi_t\, cos\psi_2) = 0. \tag{8}$$

Наступним диференціюванням виразу (7) знаходимо

$$\begin{aligned} u_{tt} &= -a_t\omega sin\psi_1 cos\psi_2 + a\omega(\omega + \varphi_t)sin\psi_1 sin\psi_2\,, \\ u_{xt} &= -\frac{\kappa+\chi}{2}cos\psi_1(a_t\, sin\psi_2 + a(\omega+\varphi_t)cos\psi_2) - \\ &- sin\psi_1(a_t\frac{\kappa-\chi}{2}cos\psi_2 + a\frac{\kappa+\chi}{2}(\omega+\varphi_t)sin\psi_2). \end{aligned} \tag{9}$$

Якщо отримані вирази підставити у вихідне рівняння (1), то отримаємо систему двох алгебраїчних рівнянь відносно невідомих a_t і φ_t.

$$sin\,\psi_1(\,a_t\,sin\,\psi_2+a\varphi_t\,cos\,\psi_2\,)=0\,,$$

$$\begin{gathered}a_t\left[-\left(2\beta\frac{\kappa-\chi}{2}+\omega\right)sin\,\psi_1\,cos\,\psi_2-2\beta\frac{\kappa+\chi}{2}cos\,\psi_1\,sin\,\psi_2\right]+\\+a\varphi_t\left[\left(2\beta\frac{\kappa-\chi}{2}+\omega\right)sin\,\psi_1\,sin\,\psi_2-2\beta\frac{\kappa+\chi}{2}cos\,\psi_1\,cos\,\psi_2\right]=\varepsilon f_1(\,a,\psi_1,\psi_2,\theta\,),\end{gathered}\tag{10}$$

де $f_1(\,a,\psi_1,\psi_2,\theta\,)$ – значення функції $f\,(\,u,u_x\,,u_t\,,\theta\,)$, яке відповідає $u=-a\,sin\,\psi_1\,sin\,\psi_2$.

Система диференціальних рівнянь (10) визначає невідомі функції a_t і φ_t у вигляді

$$\begin{aligned}a_t&=\frac{-a\varepsilon f_1(\,a,\psi_1,\psi_2,\theta\,)\,sin\,\psi_1\,cos\,\psi_2}{\Delta},\\ \varphi_t&=\frac{\varepsilon f_1(\,a,\psi_1,\psi_2,\theta\,)\,sin\,\psi_1\,sin\,\psi_2}{\Delta},\end{aligned}\tag{11}$$

де $\Delta=a\,sin^2\,\psi_1(\,\omega+2\beta\frac{\kappa-\chi}{2}\,)$.

Її можна дещо спростити: помноживши праву і ліву частину отриманих диференціальних рівнянь на Δ після усереднення за змінною x на інтервалі $[0,l\,]$, отримуємо

$$\begin{gathered}\dot a=-\frac{\varepsilon}{(\omega+2\beta\frac{\kappa-\chi}{2})}\int_0^l f(\,a,\frac{\kappa+\chi}{2}x,\frac{\kappa-\chi}{2}x+\omega t+\varphi,\theta)sin\frac{\kappa+\chi}{2}x\,cos(\frac{\kappa-\chi}{2}x+\omega t+\varphi)dx,\\ \dot\varphi=\frac{\varepsilon}{a(\,\omega+2\beta\frac{\kappa-\chi}{2}\,)}\int_0^{2\pi} f\,(\,a,\frac{\kappa+\chi}{2}x,\frac{\kappa-\chi}{2}x+\omega t+\varphi,\theta\,)\,sin\frac{\kappa+\chi}{2}x\,sin(\frac{\kappa-\chi}{2}x+\omega t+\varphi\,)dx.\end{gathered}\tag{12}$$

Виходячи із періодичності за θ правих частин диференціальних рівнянь (12), для них треба розглядати два випадки: нерезонансний $(\,m\omega\neq n\mu\,)$ і резонансний $(\,m\omega=n\mu\,)$

Нерезонансний випадок. Що стосується нерезонансного випадку, то амплітуда і частота процесу незначною мірою залежать від частоти змушувальної сили. Це дає змогу для першого наближення у системі (12) провести усереднення за довжиною стрижня x і фазами власних $\vartheta=\omega t+\varphi$ та вимушених коливань θ

$$\begin{gathered}\dot a=\frac{\varepsilon}{4(\,\omega+2\beta\frac{\kappa-\chi}{2}\,)l\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{l} f\,(\,a,\frac{\kappa+\chi}{2}x,\frac{\kappa-\chi}{2}x+\vartheta,\theta\,)\,sin\frac{\kappa+\chi}{2}x\,cos(\frac{\kappa-\chi}{2}x+\vartheta\,)dxd\theta d\vartheta,\\ \dot\varphi=\frac{\varepsilon}{4a(\,\omega+2\beta\frac{\kappa-\chi}{2}\,)l\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{l} f\,(\,a,\frac{\kappa+\chi}{2}x,\frac{\kappa-\chi}{2}x+\vartheta,\theta\,)\,sin\frac{\kappa+\chi}{2}x\,sin(\frac{\kappa-\chi}{2}x+\vartheta\,)dxd\theta d\vartheta.\end{gathered}\tag{16}$$

Отже, у нерезонансному випадку динамічний процес системи, рух якої описується крайовою задачею (1), (2), у першому наближенні асимптотичного розкладу має вигляд (3), проте параметри, які описують закони зміни амплітуди і фази як функції часу, визначаються диференціальними рівняннями (16). Система рівнянь відносно нескладна і в багатьох випадках вона інтегрується в квадратурах.

Резонансний випадок. Зупинимось тільки на випадку головного резонансу, тобто $\omega\approx\mu$. Відомо [4], що у вказаному випадку динамічний процес істотно залежить від різниці фаз власних і вимушених коливань ($\omega t+\varphi=\theta-\gamma$, γ – різниця фаз).

$$\dot{\gamma} = \mu - \omega - \dot{\varphi}$$

$$\dot{a} = -\frac{\varepsilon}{(\omega + 2\beta\frac{\kappa-\chi}{2})l}\int_0^l f(a,\frac{\kappa+\chi}{2}x,\frac{\kappa-\chi}{2}x+\theta-\gamma,\theta)\sin\frac{\kappa+\chi}{2}x\cos(\frac{\kappa-\chi}{2}x+\theta-\gamma)dx$$

$$\dot{\gamma} = \mu - \omega - \frac{\varepsilon}{a(\omega + 2\beta\frac{\kappa-\chi}{2})l}\int_0^l f(a,\frac{\kappa+\chi}{2}x,\frac{\kappa-\chi}{2}x+\theta-\gamma,\theta)\sin\frac{\kappa+\chi}{2}x\sin(\frac{\kappa-\chi}{2}x+\theta-\gamma)dx \qquad (13)$$

Із отриманого випливає, що параметри, які визначають закони зміни основних характеристик хвильового процесу, є повільно змінними величинами (амплітуда і частота хвильового процесу за один період змінюються на величину порядку ε). Отже, точність отриманих виразів не зміниться, якщо у них допустити відхилення порядку вищого ніж ε. Це дає змогу для останньої системи застосувати апарат усереднення за змінною θ і замінити її простішою.

$$\dot{a} = -\frac{\varepsilon}{(\omega + 2\beta\frac{\kappa-\chi}{2})\pi l}\int_0^{2\pi}\int_0^l f(a,\frac{\kappa+\chi}{2}x,\frac{\kappa-\chi}{2}x+\theta-\gamma,\theta)\sin\frac{\kappa+\chi}{2}x\cos(\frac{\kappa-\chi}{2}x+\theta-\gamma)dxd\theta,$$

$$\dot{\gamma} = \mu - \omega - \frac{\varepsilon}{a(\omega + 2\beta\frac{\kappa-\chi}{2})\pi l}\int_0^{2\pi}\int_0^l f(a,\frac{\kappa+\chi}{2}x,\frac{\kappa-\chi}{2}x+\theta-\gamma,\theta)\sin\frac{\kappa+\chi}{2}x\sin(\frac{\kappa-\chi}{2}x+\theta-\gamma)dxd\theta. \qquad (14)$$

Отже, у резонансному випадку рух системи описується залежністю

$$u(x,t) = \frac{a}{2}(\cos(\kappa x + \theta - \gamma) - \cos(\chi x + \gamma - \theta)),$$

в якій амплітуда і різниця фаза коливань як функції часу визначаються диференціальними рівняннями (14).

Збурені крайові умови. Узагальнимо отримані результати на коливні процеси у рухомих системах, які описуються диференціальним рівнянням (1) при крайових умовах

$$u(x,t)\big|_{x=0} = \varepsilon f_1(u,u_x,u_t,\theta)\big|_{x=0},$$

$$u(x,t)\big|_{x=l} = \varepsilon g_1(u,u_x,u_t,\theta)\big|_{x=l}, \qquad (17)$$

в яких праві частини є 2π – періодичними за θ функціями.

Крайові умови (17) показують, що у точках з фіксованими координатами існують періодичні збурення, і застосувати безпосередньо викладену вище методику для розв’язування крайової задачі (1), (17) не вдається. Отже, формальною заміною змінних

$$u(x,t) = \upsilon(x,t) + \varepsilon w(x,t) \qquad (18)$$

задачу із збуреними крайовими умовами можна звести до розв’язаної задачі з однорідними крайовими умовами. Нехай функція $w(x,t)$ є розв’язком диференціального рівняння $w_{xx} = 0$ і задовольняє крайові умови

$$w(x,t)\big|_{x=0} = f_1(\upsilon,\upsilon_x,\upsilon_t,\theta)\big|_{x=0}$$

$$w(x,t)\big|_{x=l} = g_1(\upsilon,\upsilon_x,\upsilon_t,\theta)\big|_{x=l}, \qquad (19)$$

Тоді, виходячи із (18) і (19), функція $\upsilon(x,t)$ повинна бути розв’язком диференціального рівняння

$$\upsilon_{tt} + 2\beta\upsilon_{xt} - \alpha^2\upsilon_{xx} = \varepsilon[f(\upsilon,\upsilon_x,\upsilon_t,\theta) - w_{tt} - 2\beta w_{xt}] \qquad (20)$$

і задовольняти однорідні крайові умови вигляду (2).

Знайти розв’язок крайової задачі для функції $w(x,t)$ не становить значних математичних труднощів:

$$w(x,t)=\frac{1}{l}[(g_1(\upsilon,\upsilon_x,\upsilon_t,\gamma)\big|_{x=l}-f_1(\upsilon,\upsilon_x,\upsilon_t,\gamma)\big|_{x=0})x+lf_1(\upsilon,\upsilon_x,\upsilon_t,\gamma)\big|_{x=0}]\,. \qquad (21)$$

Тому вказана заміна приводить до розв’язаної вище задачі. З врахуванням останнього приходимо до розв’язаної задачі з однорідними крайовими умовами.

$$\begin{gathered}\upsilon_{tt}+2\beta\upsilon_{xt}-\alpha^2\upsilon_{xx}=\varepsilon\{f(u,u_x,u_t,\mu t)-\frac{1}{l}[(g_{1tt}(\upsilon,\upsilon_x,\upsilon_t,\gamma)\big|_{x=l}\\ -f_{1tt}(\upsilon,\upsilon_x,\upsilon_t,\gamma)\big|_{x=0})x++lf_{1tt}(\upsilon,\upsilon_x,\upsilon_t,\gamma)\big|_{x=0}]-\\ 2\beta[\frac{1}{l}(g_{1t}(\upsilon,\upsilon_x,\upsilon_t,\gamma)\big|_{x=l}-f_{1t}(\upsilon,\upsilon_x,\upsilon_t,\gamma)\big|_{x=0})\},\\ \upsilon(x,t)\big|_{x=0}=\upsilon(x,t)\big|_{x=l}=0\,.\end{gathered} \qquad (22)$$

Як приклад розглянемо нелінійні коливання рухомого канату з врахуванням в’язко-пружної сили [] і гармонійного періодичного збурення, тобто у випадку, коли права частина рівняння (1) має вигляд

$$\varepsilon f(u,u_x,u_t,\theta)=\varepsilon u_t(1-u^2)+E\cos\theta\,.$$

Тоді амплітудно-частотна характеристика коливань канату в нерезонансному випадку описується диференціальними рівняннями

$$\dot a=\frac{-\varepsilon a\omega(1-a^2\frac{3}{16})}{4l\pi(\omega+2\beta\frac{\kappa-\chi}{2})},$$

$$\dot\varphi=0\,.$$

У випадку головного резонансу ($\omega=\mu$) диференціальні рівняння (14) набувають вигляду

$$\dot a=\frac{-\varepsilon a\omega(1-a^2\frac{3}{16})}{4\pi l(\omega+2\beta\frac{\kappa-\chi}{2})}-\cos\gamma\frac{\varepsilon E\pi A}{2l^2\pi^2(\omega+2\beta\frac{\kappa-\chi}{2})}-\sin\gamma\frac{\varepsilon E\pi B}{2l^2\pi^2(\omega+2\beta\frac{\kappa-\chi}{2})},$$

$$\dot\gamma=\mu-\omega-C\pi\cos\gamma-D\pi\sin\gamma\,,$$

де $A=D=\int_0^l\sin\frac{\kappa+\chi}{2}x\cos\frac{\kappa-\chi}{2}xdx$, $B=C=\int_0^l\sin\frac{\kappa+\chi}{2}x\sin\frac{\kappa-\chi}{2}xdx$.

Висновки. Розроблена у роботі методика дослідження коливних процесів рухомих одновимірних нелінійно пружних середовищ дає змогу отримати математичні залежності, які визначають закони зміни амплітуди і частоти одночастотного динамічного процесу як для резонансного, так і нерезонансного випадків. Вона відносно проста у математичній реалізації, отримані розрахункові формули показують на принципову різницю коливних процесів рухомих і нерухомих середовищ, зокрема навіть постійна швидкість лінійно пружного середовища приводить до зміни частоти власних його коливань.

1. Найфе А.Х. Методы возмущений. – М.: Мир, 1976. – 456 с. 2. Доценко П.Д. Колебание и устойчивость движущейся полосы // Машиноведение. – 1969. – №5. – с. 18–24. 3. Мартинців М.П., Сокіл Б.І., Сокіл М.Б. Хвильові процеси в однорідних нелінійно пружних системах і методи їх дослідження // Зб. “Лісове господарство, лісова, паперова і деревообробна промисловість”. – Львів: УкрДЛТУ, 2003. Вип.28. – С.81–89. 4. Митропольский Ю.А., Мосеенков Б.И. Асимптотические решения уравнений в частных производных. – К.: Вища школа, 1976. – 592 с.