УДК:517.9

Т.Є. Данилевич, А.П. Сеник
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра теоретичної механіки

НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ ОДНОВИМІРНИХ ПРУЖНИХ СИСТЕМ І ПАСИВНІ ЇХ ПОГЛИНАЧІ

Досліджуються поперечні коливання валу із пасивним поглиначем його коливань. Отримано диференціальні рівняння руху системи вал – вантаж (поглинач коливань), на основі яких проаналізовано вплив характеристик останнього на АФХ валу.

The transversal vibrations of billow are explored with the passive absorber of his vibrations. Differential equalizations of motion of the system are got billow – a load (absorber of vibrations) on the basis of which is analysed influencing of descriptions of the last on AfC of billow.

Актуальність. Однією із найважливіших прикладних проблем теорії коливань є розв’язання задач про врівноважування. Відомо, що тіло, яке обертається, не здійснює жодного змінного збуджувального впливу на опори чи інші його точки, якщо вісь обертання збігається з однією з головних осей інерції тіла. У процесі виготовлення та експлуатації елементів машин, які обертаються, важко точно задовольнити ці умови внаслідок порушення геометричних розмірів; неоднорідності матеріалу; порушень симетрії в розподілі мас та ін. У результаті цього під час обертання виникають змінні збуджувальні сили, які спричиняють коливання. Врівноважування стає необхідним для зменшення цих коливань, а отже, великих динамічних навантажень, що виникають у підшипниках та елементах машин, а також для створення умов для спокійного обертання. З метою зниження динамічних навантажень пружних систем використовують різноманітні демпфери, амортизатори, поглиначі коливань тощо. Одним з шляхів зниження динамічних зусиль у поперечній площині коливань можна запропонувати встановлення пасивних поглиначів, які поглинають частину енергії неврівноважених систем. Дослідження систем, розглянутих нижче, ґрунтуються на принципі одночастотності коливань у нелінійних системах з багатьма ступенями вільності і розподіленими параметрами та асимптотичний метод побудови розв’язків деяких класів нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними, які описують динамічні процеси досліджуваних систем.

Постановка задачі і методика дослідження. Розглядаємо динамічні процеси, які відбуваються під час коливань неврівноважених вертикальних валів, балок тощо. Для гасіння коливань, зумовлених неврівноваженими частинами, використаємо додаткову масу (поглинач коливань).

Модель механічної системи, яку досліджено нижче, наведено на рис. 1. Вона являє собою пружний вал, який здійснює поперечні коливання. Пасивний поглинач енергії розміщений у верхній частині вала та являє собою зосереджену масу, розміщену між кінцями пружин однакової жорсткості.

Описуючи поперечні коливання системи, за координатну вісь приймемо прямолінійну вісь x. Від неї ж визначаються відхилення вала (який для простоти вважаємо пружною балкою сталого перерізу) та елементів моделі. За таких умов поперечні коливання вала описують однією функцією двох змінних – координати x і часу t тобто $u=u(x,t)$, а відносне положення вантажу функцією $\xi = \xi(x,t)$.

Нехай: a) M масу вантажу; b) c – жорсткість пружних елементів, c) матеріал вала задовольняє нелінійний закон пружності [1]

$$\sigma = E\varepsilon + k_1\varepsilon^2\dot{\varepsilon} + k_2\dot{\varepsilon}^3 \qquad (1)$$

що являє собою паралельне поєднання Гуківського елемента з модулем пружності E і нелінійного в’язкого елемента з коефіцієнтами $\kappa_1>0$ і $\kappa_2>0$, $\varepsilon = u_x$, d) l – довжина вала; i) b – відстань до опори.

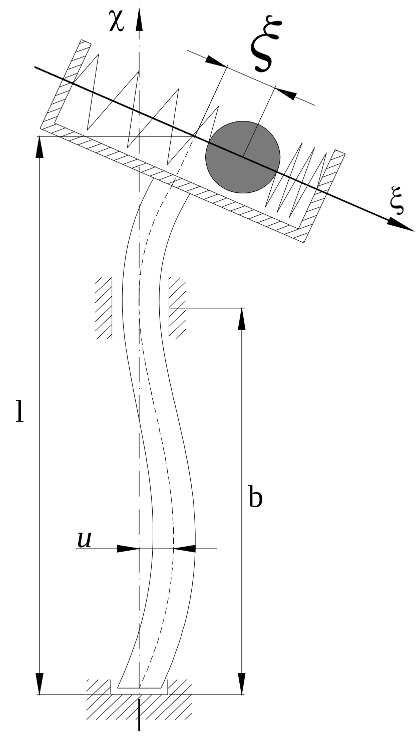

Рис. 1. Модель механічної системи

Для зручності запису позначатимемо:

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, u_{xt} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, ..., u_{xxxx} = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$$

Для отримання диференціальних рівнянь руху розглядуваної системи вал – вантаж вважаємо, що відхилення точок осі вала, вантажу маси M під час поперечних коливань відбуваються в одній площині, а маса вантажу M є мала порівняно з масою вала.

Визначаємо закон зміни функції u(x,t) і $\xi(t)$ системи вал–вантаж, використовуючи рівняння [2]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial u_t}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial u_x}\right) - \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xx}}\right) = 0 \ ,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \xi} = 0. \tag{2}$$

де L – функція Лагранжа (різниця кінетичної і потенціальної енергій механічної системи):

$$L = \frac{\rho s}{2}\int_0^l u^2{}_t dx + \frac{m}{2}u_t^2 \ \big|_{x=l} + \frac{M}{2}u_t^2 \ \big|_{x=l} + M\dot{\xi}u_t \ \big|_{x=l} - M\dot{\xi}u_t \ \big|_{x=l} u^2{}_x \ \big|_{x=l} + \frac{m}{2}\dot{\xi}^2 - M\dot{\xi}^2 u_x^2 \ \big|_{x=l} +$$
$$\frac{M}{2}\dot{\xi}^2 u_x^4 \ \big|_{x=l} - 2M\xi u_x \ \big|_{x=l} u_{xt} \ \big|_{x=l} u_t \ \big|_{x=l} - M\xi\dot{\xi}u_x \ \big|_{x=l} u_{xt} \ \big|_{x=l} - 2M\xi\dot{\xi}u_x \ \big|_{x=l} u_{xt} \ \big|_{x=l} u_x^2 \ \big|_{x=l} + \tag{3}$$
$$+ 2\xi^2 u_x^2 \ \big|_{x=l} u_{xt}^2 \ \big|_{x=l} + \frac{M}{2}\dot{\xi}u_x^2 \ \big|_{x=l} + \frac{M}{2}\xi^2 u_{xt}^2 \ \big|_{x=l} - c\xi^2 - mgl\left(1 - u_x^2 \ \big|_{x=l}\right) - Mg\xi u_x \ \big|_{x=l} - \frac{1}{2}\int_0^l \sigma dx.$$

Із (2) і (3) рівняння руху системи вал – вантаж можна записати у вигляді:

$$u_{tt}(\rho \cdot s + m + M) + u_{xxxx} = F(\xi, \dot{\xi}, \ddot{\xi}, u, u_x, u_{xt}) + p_1\left(u^2{}_{xx}u_{xxt}\right)_{xx} + p_2\left(u^3{}_{xxt}\right)_{xx} + p_3 u_{xx}, \quad (4)$$

$$\ddot{\xi} + \xi\,\frac{2c}{M} = F_1(u, u_x, u_{xt}), \quad (5)$$

$$\xi = D_1\,\frac{\cos\theta}{2c/M - \omega^2} - D_1\,\frac{\sin 2\theta}{2c/M - 4\omega^2} - D_3\,\frac{\cos 3\theta}{2c/M - 9\omega^2},$$

де F,F_1 – відомого вигляду функції, $p_1 = \dfrac{k_1 J}{l^4 \cdot \sqrt{\rho EI}}$; $p_2 = \dfrac{k_2 J\sqrt{EI}}{l^2\sqrt{\rho^3}}$; $p_3 = \dfrac{l^2}{EI}$, (ρ – погонна маса вала), а D_1, D_2, D_3 – коефіцієнти, що описують фізико-механічні характеристики елементів моделі.

Для рівнянь (4), (5) розглядаємо крайові умови, які узгоджуються із способом закріплення, тобто:

$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0,\ u_{xx}(0,t) = 0,\ u_{xx}(l,t) = 0.$$

За припущення:

а) малої маси вантажу – поглинача енергії;

б) незначного відхилення в'язко – пружних характеристик від лінійного закону для дослідження розв'язку системи (4), (5) можна використати асимптотичний метод нелінійної механіки, відповідно до якого розв'язок рівняння (4) шукатимемо за рівнянням:

$$u(x,t) = aX(x)T(\psi) + \varepsilon u_1(a, \psi, \gamma, x), \quad (5)$$

де a – амплітуда одночастотних коливань, ε – малий додатний параметр, $u_1(a,\psi,\gamma,x)$ – періодична за ψ і γ функція з періодом 2π; X(x) – функція, яка визначає форму коливань і для розглянутого випадку крайових умов має вигляд:

$$X(x) = \sin\frac{k\pi x}{b},\ k = 1,2,.... \quad (6)$$

Амплітуда і частота коливань ψ – змінні величини, і закони їхньої зміни залежать від правих частин рівнянь (4), (5). Оскільки на систему діють періодичні збурення, для її дослідження потрібно розглянути нерезонансний ($\omega \neq \nu$) і резонансний ($\omega = \nu$, $\gamma = \psi - \theta$) випадки. Закони зміни амплітуди і фази коливань відповідно до [2] визначаються звичайними диференціальними рівняннями

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a,\gamma), \gamma = \psi - \theta, \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \omega - \nu + \varepsilon B_1(a,\gamma) - \end{aligned} \quad (7)$$

для резонансного випадку і

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a,), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \varepsilon B_1(a,) - \end{aligned} \quad (8)$$

для нерезонансного випадку.

Отже, задача побудови першого наближенння розв'язку рівняння полягає у знаходженні функцій $A_1(a), B_1(a)$ для нерезонансного випадку і $A_1(a,\gamma)$, $B_1(a,\gamma)$ для резонансного випадку.

Знаходячи відомим способом праві частини рівнянь (7), (8), отримуємо такі співвідношення:

для нерезонансного випадку

$$\begin{aligned} \frac{da}{t} &= ap_1k^4\,\frac{\pi^3}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{b}{8k\pi}\sin\left(2kl\frac{\pi}{b}\right)\right) + ap_2k^2\,\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2} - 8bk\pi\sin\left(2kl\frac{\pi}{b}\right)\right) - \\ &- 3a^3p_3k^8\,\frac{\pi^6}{64}\left(\frac{1}{8} - \frac{b}{\pi k}\sin\left(4\pi k\frac{l}{b}\right) + \frac{b}{36\pi k}\sin\left(4k\pi\frac{l}{b}\right)\right) \end{aligned} \quad (9)$$

для резонансного випадку

$$\frac{da(t)}{t} = -Mb\varepsilon D_1 q \sin\gamma \frac{1-\cos{}^{k\pi}\!/_{b}}{4\pi^2 \nu pk({}^{2c}\!/_{m}-\omega^2)} - Mk^2 \varepsilon q a^2 \frac{\cos^2({}^{\pi k}\!/_{b}}{4p\pi}\left[\frac{\pi D_1}{4}\frac{\sin\gamma-\cos\gamma}{{}^{2c}\!/_{m}-\omega^2} - \pi D_3 \frac{\cos^3\gamma+\frac{1}{4}\sin\gamma+\frac{3}{4}\cos\gamma}{{}^{2c}\!/_{m}-9\omega^2} - 2\pi D_3 \frac{\sin\gamma\cos\gamma}{{}^{2c}\!/_{m}-9\omega^2}\right]*$$

$$*\left(1-\cos\left(lk\frac{\pi}{b}\right)\right) - \frac{3a^3 p_1 \pi^7 k^8 \varepsilon}{16}\left[\frac{b}{4k\pi}\sin 2k\frac{l\pi}{b} - \frac{1}{8} - \frac{b}{144\cdot k\pi}\sin 4kl\frac{\vartheta}{b}\right] + ap_2 \varepsilon k^4 \frac{\pi^3}{4\nu}\left(\frac{1}{2}-\frac{b}{8k\pi}\sin 2k\pi\frac{l}{b}\right) + ap_3 \varepsilon k^4 \frac{\pi^3}{4\nu}* \quad (10)$$

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{b}{8k\pi}\sin 2kl\frac{\pi}{b}\right)$$

$$\frac{d\gamma(t)}{t} = \omega - \nu + M\left(b\varepsilon\frac{qD_1\cos(\gamma)(1-\cos(k\pi/b)}{4\nu\pi^2 kp({}^{2c}\!/_{m}-\omega)}\right) + Mk^2 q\varepsilon a^2 \frac{\cos({}^{k\pi}\!/_{b})}{4p\nu}* \quad (11)$$

$$\left[\pi D_1(\cos\gamma+\frac{1}{4}\sin\gamma)+\pi D_3(12\cos^3\gamma-9\cos\gamma+\sin\gamma\cos^2\gamma+\frac{1}{4}\sin\gamma)-\pi D_2(\sin\gamma\cos^2\gamma+\frac{1}{4}\cos^2\gamma-\frac{1}{4}\right](1-\cos{}^{k\pi}\!/_{b})$$

Нижче на рис. 2 показано закон зміни в часі амплітуди коливань для нерезонансного випадку за певних значень параметрів; на рис. 3, 4 – закон зміни амплітуди коливань вала від фізико-механічних характеристик поглинача коливань.

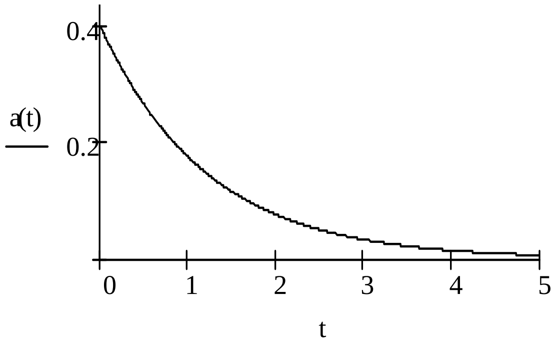

Рис. 2. Амплітудна крива для нерезонансного випадку

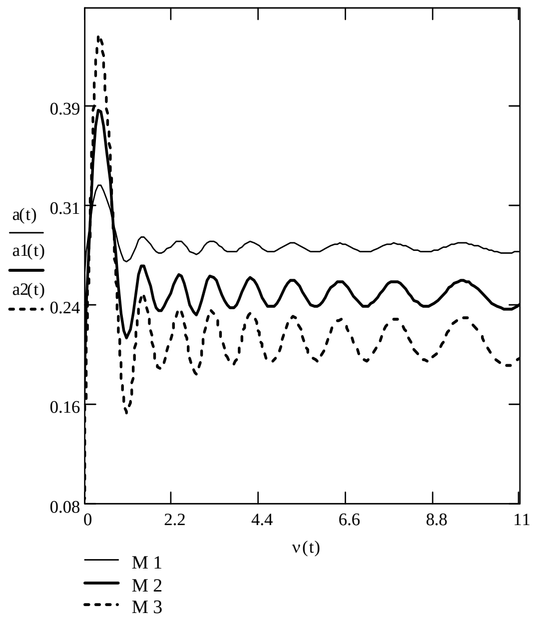

Рис.3. M>M₁> M₂ – маса поглинача

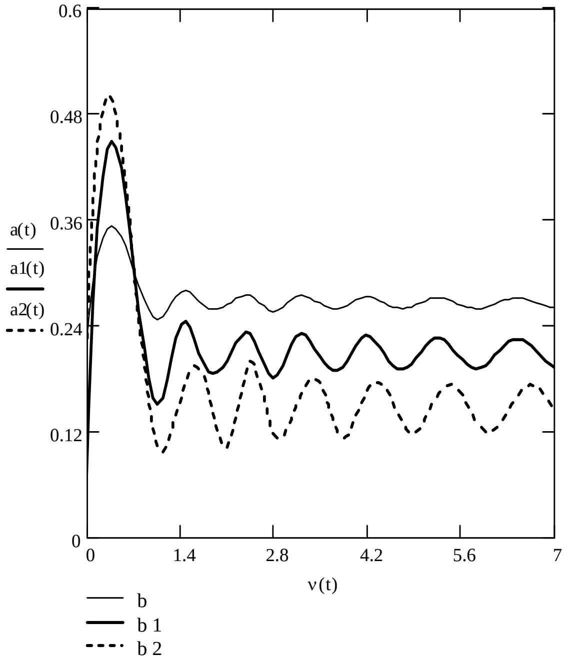

Рис.4. $b > b_1 > b_2$ *– віддаль між опорами*

Висновки. Якщо частота власних коливань вантажу не збігається із власною частотою вала, то наявність в'язко-пружних сил приводить до швидкого замикання коливань вала; а якщо ж частота власних коливань вантажу близька до власної частоти коливань вала, то амплітуда усталеного динамічного процесу суттєво залежить від маси поглинача: із збільшенням його величини усталене значення амплітуди зменшуеться, проте резонансне значення амплітуди коливань більше у випадку більшої маси поглинача (рис. 3). Що стосується віддалі між опорами, то із її збільшеннями резонансне значення амплітуди збільшується, а усталене значення зменшується.

1. Агафонов С.А., Георгиевский Д.В. Потеря устойчивости нелинейного вязкоупругого стержня под действием следящей силы. –К. Вища школа, 2004. – 13с. 2. Митропольський Ю.А., Мосеенков Б.И. Асимптотические решения уравнений в частных производных. – К.: Вища школа, 1976. – 592 с. 3.Мигулин В. В., Медведев В.И. Основы теории колебаний. – М.: Наука, 1978. – 392 с. 4. Работнов Ю.Н. Механика деформированного твердого тела. – М.: Наука., 1979.-744 с. 5. Панов Я.Г., Введение в теорию механических колебаний. – М.: Наука., 1971.-240 с. 6.Тимошенко С.П., Колебания в инженерном деле. – М.: Наука, 1983. – 449 с.