ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№ 566, 2006, с. 76–80

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№ 566, 2006, p. 76–80

ІЗОПТИЧНІ КРИВІ ДЕЯКИХ КУБІК

І. Врублевський

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С.Бандери 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 30 вересня 2005 р.)

Виведено рівняння, які описують ізоптичні кривих, заданих параметрично. Розглянуто ізоптичні криві деяких кубік. Побудовано графіки ізоптичних півкубічної параболи, цисоїди Діоклеса, листка Декарта, строфоїди, трисектриси Маклорена, кубіки Чирнгаузена, верзієри. Графіки побудовано за допомогою комп'ютерних систем MathCAD і AutoCAD. Описано деякі властивості ізоптичних кубік.

Ключові слова: ізоптична крива, ортоптична крива, кубіка.

2000 MSC: 53A04

УДК: 514.74

Вступ

Ізоптична заданої плоскої кривої – це така траєкторія переміщення в площині вершини кута $\alpha \subset (0,\pi)$, коли в будь-якому положенні сторони кута дотикаються до заданої кривої [1, 2]. Якщо кут прямий ($\alpha = \pi/2$), ізоптична називається ортоптичною. Ізоптичні криві вперше вивчали французькі математики Філіп де ля Гір (1704) та Мішель Шаль (1837). Розглядались ізоптичні циклоїд, зокрема епі- та гіпоциклоїд [3, 4], логарифмічних [1, 3] та синусоїдальних спіралей [3, 5], конік (кривих 2-го порядку) [3,6], кардіоїди [5]. Результатів дослідження ізоптичних кубік (плоских кривих 3-го порядку) автором не виявлено. Лише в [3] наведено рівняння ортоптичної півкубічної параболи.

Метою поданої роботи є виведення рівнянь, що описують ізоптичні кривих, заданих параметрично, числове розв'язання яких за допомогою комп'ютерних систем дає змогу побудувати графіки кривих та досліджувати їх властивості.

I. Рівняння ізоптичних кривої, заданої параметрично

Для плоскої кривої, заданої в декартовій системі координат параметричними рівняннями $x = v(\varphi)$, $y = u(\varphi)$, ізоптичну визначаємо як траєкторію переміщення в площині точки перетину двох дотичних до неї, рівняння яких

$$y = \frac{u'}{v'} \cdot x - \frac{v^2}{v'} \cdot \left(\frac{u}{v}\right)', \tag{1}$$

причому кут між ними – стала величина $\alpha = \beta_1 - \beta_2$, де β_1 і β_2 – кути між віссю абсцис і відповідно першою та другою дотичною. Позначимо $k_i = \tan(\beta_i) = u_i'/v_i'$, де v_i, u_i – значення функцій при $\varphi = \varphi_i$, $i = 1, 2$ – індекси, що відповідають першій та другій дотичній. Рівняння $\tan(\alpha) = \tan(\beta_1 - \beta_2)$ запишемо наступним чином:

$$\sin(\alpha) \cdot (1 + k_1 k_2) - \cos(\alpha) \cdot (k_1 - k_2) = 0. \tag{2}$$

Прирівнявши значення x та y в двох рівняннях (1) при $\varphi = \varphi_1$ і $\varphi = \varphi_2$, після перетворень отримаємо

$$x = \frac{q_1 - q_2}{k_1 - k_2}, \quad y = \frac{k_1 q_2 - k_2 q_1}{k_1 - k_2}, \tag{3}$$

де $q_i = \left(\dfrac{u_i}{v_i}\right)' \cdot \dfrac{v_i^2}{v_i'}$.

Вважаючи один з параметрів незалежним, наприклад $0 < \varphi_1 < 2\pi$, другий параметр φ_2 визначаємо як корінь рівняння (2), а підставивши їх значення в (3), визначимо координати точок ізоптичної кривої. Отже, вирази (2), (3) – це рівняння ізоптичної кривої, заданої параметрично. Найбільша складність під час побудови ізоптичних кривих полягає в розв'язанні нелінійного рівняння (2), тому що воно може мати декілька коренів. Правильність розв'язку залежить від належного вибору першого наближення $\varphi_2 = \varphi_0$ та областей визначення параметрів φ_i .

У таблиці наведені формули визначення k_i, q_i залежно від параметрів φ_i або $t_i = \tan\varphi_i$ для деяких найцікавіших кубік. У примітках подано області визначення функцій ізоптичних або співвідношення між параметрами.

№ п/п	Назва кривої та її параметричні рівняння	Формула визначення k_i	Формула визначення q_i	Примітки
1	Півкубічна парабола (парабола Нейля) $v = t^2, \quad u = at^3$	$\frac{3at}{2}$	$\frac{at^3}{2}$	$-\pi/2 < \varphi_1 < \pi/2$
2	Строфоїда $v = a\frac{t^2-1}{t^2+1}$, $u = at\frac{t^2-1}{t^2+1}$	$\frac{t^4+4t^2-1}{4t}$	$a\frac{(t^2-1)^2}{4t}$	$\pi/4 \leq \varphi_1 \leq 7\pi/4$
3	Листок Декарта $v = \frac{3at}{1+t^3}$, $u = \frac{3at^2}{1+t^3}$	$t\frac{t^3-2}{2t^3-1}$	$\frac{3at^2}{2t^3-1}$	$-\pi/4 \leq \varphi_1 \leq 2\pi$
4	Трисектриса Маклорена $v = a\frac{\cos(\varphi)}{\cos(\varphi/3)}$, $u = a\frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi/3)}$	$-\frac{2\cos\frac{2\varphi}{3}+\cos\frac{4\varphi}{3}}{4\sin\frac{2\varphi}{3}\cdot\cos^2\frac{\varphi}{3}}$	$\frac{3a}{4\sin\frac{2\varphi}{3}\cdot\cos^2\frac{\varphi}{3}}$	$\pi/3 \leq \varphi_1 \leq 5\pi/3$
5	Кубіка Чирнгаузена $v = \frac{a\sin(3\varphi/2)}{2\sin^3(\varphi/2)}$, $u = \frac{a\cos(3\varphi/2)}{2\sin^3(\varphi/2)}$	$\cot\varphi$	$\frac{a}{\sin\varphi\cdot(1-\cos\varphi)}$	$\varphi_2 = \varphi_1 - \alpha + \pi$
6	Цисоїда Діоклеса $v = \frac{at^2}{1+t^2}$, $u = \frac{at^3}{1+t^2}$	$t\frac{3+t}{2}$	$\frac{at^3}{2}$	$-\pi/2 \leq \varphi_1 \leq \pi/2$
7	Верзієра (кучер Аньєзі) $v = t, \quad u = \frac{a^3}{a^2+t^2}$	$-\frac{2a^3t}{(a^2+t^2)^2}$	$-a^3\frac{a^2+3t^2}{(a^2+t^2)^2}$	$0 < \varphi_1 < \pi$

II. Графіки ізоптичних кривих кубік

За результатами обчислень, виконаних в середовищі комп'ютерної математичної системи MathCAD 2001, побудовано графіки ізоптичних кривих деяких кубік. Отримані графіки експортовано в систему AutoCAD 2000, в якій криві наведено сплайнами. Система дає змогу побудувати в будь-якій точці дотичні до кривих та поміряти кути між ними, перевіривши, в такий спосіб, правильність виконаних розрахунків та побудов. Представлено графіки таких кубік: строфоїди (рис. 1), листка Декарта (рис. 2), трисектриси Маклорена (рис. 3), кубіки Чирнгаузена (рис. 4), параболи Нейля (рис. 5), цисоїди Діоклеса (рис. 6), верзієри (рис. 7). На рисунках задані кубіки показано потовщеними лініями, ортоптичні (α=*90* $^\circ$) – тонкими суцільними, ізоптичні за інших кутів α – штриховими та штрих-пунктирними лініями. Тонкими прямими лініями показано координатні осі, дотичні до особливих точок, асимптоти.

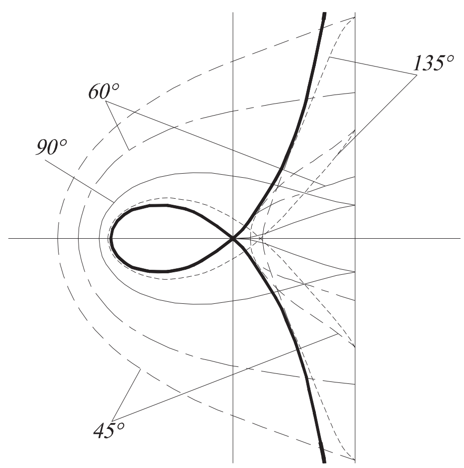

Рис. 1. Ізоптичні строфоїди

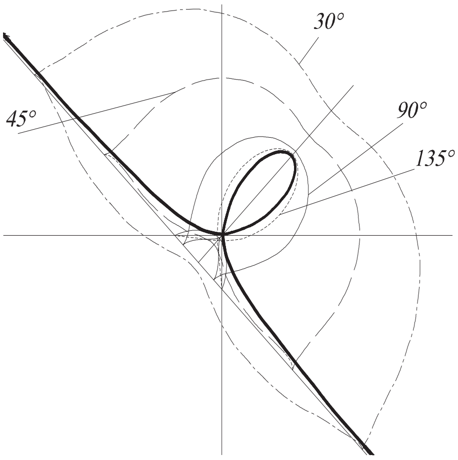

Рис. 2. Ізоптичні листка Декарта

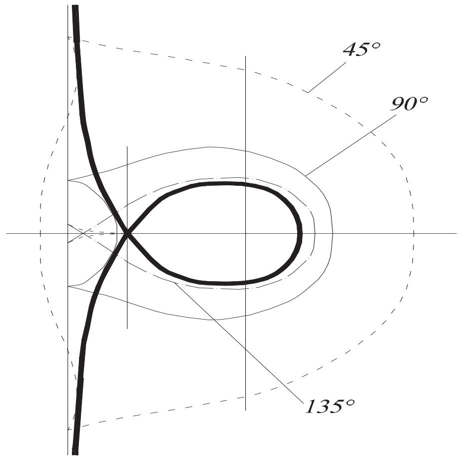

Рис. 3. Ізоптичні трисектриси Маклорена

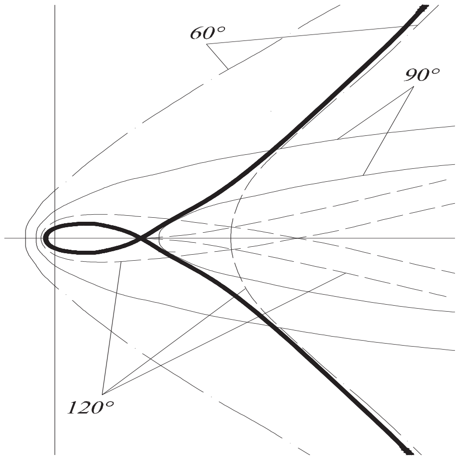

Рис. 4. Ізоптичні кубіки Чирнгаузена

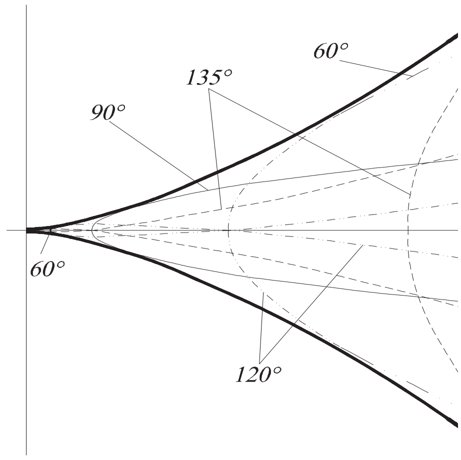

Рис. 5. Ізоптичні півкубічної параболи

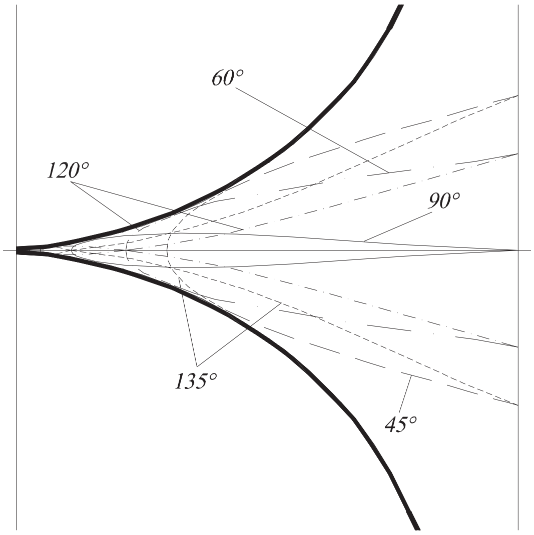

Рис. 6. Ізоптичні цисоїди Діоклеса

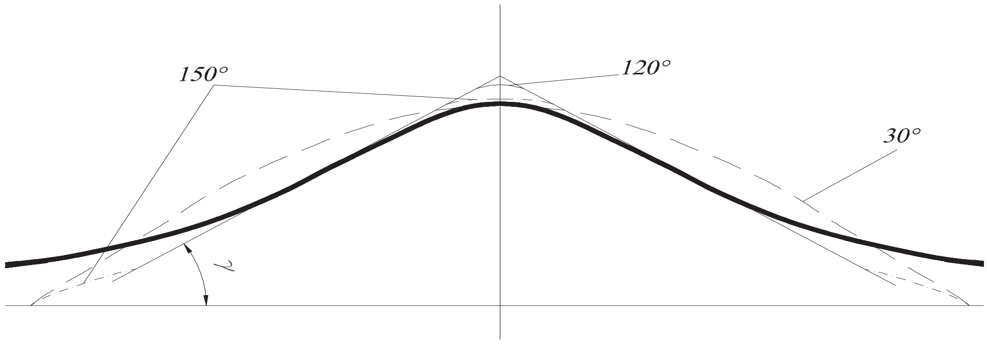

Рис. 7. Ізоптичні верзієри

III. Деякі властивості ізоптичних розглянутих кубік

Ізоптичні кубік – алгебраїчні криві вищих порядків, рівняння яких у вигляді $f(x, y) = 0$ досить громіздкі та мало придатні для практичного використання. Лише ортоптичні деяких кубік описуються порівняно простими формулами.

Для двох значень кутів α, пов'язаних співвідношенням $\alpha_1 = \pi - \alpha_2$, рівняння (2), (3) описують однакові криві. Ізоптичні при гострому і тупому кутах α_1 і α_2 будуть різними гілками цієї кривої, або частинами тієї ж гілки, обмежені точками дотику до заданої кубіки, точками, розташованими на асимптотах, або дотичними до кубіки в особливих точках. Розглянуті кубіки схожі на деякі алгебраїчні криві вищих порядків або трансцендентні криві. Наприклад, строфоїда нагадує одну з гілок конхоїди Нікомеда, цисоїда Діоклеса – трактрису, верзієра – криву Гауса тощо. Ізоптичні схожих кривих будуть мати схожі властивості.

Ізоптичні верзієри існують при $\alpha<\gamma$ і $\alpha>\pi$-2γ, де γ – кут між віссю абсцис і дотичною в точці перегину ($\gamma = \arctan 3\sqrt{3}/8 \approx 33°$). При $\pi - 2\gamma < \alpha < \pi - \gamma$ це дуги кривої, обмежені дотичними до точок перегину, біля вершини верзієри (рис. 7, α=*120* °). Ізоптичні інших розглянутих кубік існують за будь-якого $\alpha \subset (0, \pi)$. Вони складаються з декількох гілок (за винятком ортоптичних), причому для доповняльних гострого і тупого кутів гілки сходяться в точках, розташованих на асимптотах, а для кубік, що не мають асимптот (парабола Нейля, кубіка Чирнгаузена), – у невласних точках. Хоча б одна з гілок ізоптичної ($\alpha \neq \pi/2$) дотикається до кубіки в двох симетричних точках, і в цих точках ізоптична для кута α переходить в ізоптичну для кута $\pi - \alpha$.

Ортоптичні кубік з асимптотами – замкнені криві з точками звороту, розташованими на асимптотах (усі розглянуті кубіки), точкою звороту, що збігається з вузловою точкою кубіки, (строфоїда, листок Декарта) та з точками дотику до кубіки (трисектриса Маклорена, цисоїда). Ортоптична параболи Нейля – дотична до неї в точках $(2/9a, \pm 2\sqrt{2}/27a)$ парабола $729a^2y^2 = 108ax - 16$. При =1 це рівняння наведено в [3], але з помилкою. Ортоптична кубіки Чирнгаузена – крива четвертого порядку, що розпадається на дві гілки гіпербол (одна з них дотична до кубіки в двох симетричних точках) з паралельними асимптотами.

IV. Висновки

Виведені рівняння ізоптичних кривих, заданих параметрично, дають змогу чисельно порахувати координати точок і побудувати графіки. Отримано графіки ізоптичних декількох кубік, аналіз яких дає можливість виявити їх властивості. Перспективою подальшої роботи у цьому напрямку вважається дослідження ізоптичних алгебраїчних кривих вищих порядків, трансцендентних кривих, а також дослідження ізоптичних поверхонь.

Література

[1] Савелов А.А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения: Справочное руководство. – М.: Физматгиз, 1960. – 296 с.

[2] Врублевський І.Й. Термінологія при визначенні ізоптичних кривих і поверхонь // Наукова конференція професорсько-викладацького складу Інституту прикладної математики та фундаментальних наук. – Львів: НУ "ЛП" – 2005. – С. 85.

[3] Yates R.C. A Handbook on Curves and Their Properties. – Ann Arbor, MI: J.W. Edwards, 1952, p. 138–140.

[4] Xah Lee. Visual Dictionary of Famous Plane Curves and Their Properties. – http:// xahlee.org/ SpecialPlaneCurves_dir.

[5] Index et notations courbes planes // www.mathcurve.com/courbes2d.

[6] Врублевський І.Й. Побудова ізооптичних кривих еліпса // Вісник Національного університету "Львівська політехніка". "Фізико-математичні науки". – Львів: НУ "ЛП". – 2004. – № 518. – С.15–18.

[7] Wrublewsky I., Pulkevich I. Isogonals of Convex Figures // Proc. of the 10^{th} Intern. Conf. on Geometry and Graphics. – Vol. 2, Kyiv, 2002. – P. 49–52.

ISOPTIC CURVES OF SPECIAL CUBICS

I. Wrublewsky

"Lviv polytechnic" National University
12 S.Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine

The equations describing the isoptics of parametrically determined curves are obtained. The isoptics of special cubics are investigated. For the next cubics: semicubic parabola of Neil, cissoid of Diocles, folium of Decartes, strophoid, trisectrix of MacLaurin, Tschirnhausen's cubic, witch of Agnesi the graphs of the isoptics are constructed with aid of the computer systems MathCAD and AutoCAD. The properties of the isoptics of special cubics are described.

Keywords: isoptic curve, orthoptic curve, cubic.

2000 MSC: 53A04

UDK: 514.74