ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№ 566, 2006, с. 68–75

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№ 566, 2006, p. 68–75

НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ЕРМІТОВИМИ СПЛАЙНАМИ З ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНИМИ ЛАНКАМИ

Я. Пізюр

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 30 серпня 2006 р.)

Наведено означення ермітових сплайнів з нелінійними за параметрами виразами в ланках. Виведено формули для параметрів ермітових сплайнів з експоненціальними ланками. Доведено теореми про можливість зведення наближення функцій ермітовими сплайнами з експоненціальними ланками до многочленних ермітових сплайнів. Наведено формули для похибок наближення ермітовими сплайнами.

Ключові слова: ермітові сплайни, експоненціальна ланка, похибка апроксимації, балансне наближення.

2000 MSC: 65D05, 65D07, 65D15, 41A15, 41A46

УДК: 519.65

Вступ

Наближення функцій необхідне для практичних розрахунків під час проведення наукових досліджень і в багатьох областях техніки. Аналітично задані функції, які представлені складним виразом, часто необхідно замінити простішим виразом, так, щоб зберігались їх властивості. Це потрібно під час обчислення функцій на ЕОМ.

Для підвищення точності представлення функціональних залежностей застосовують різні методи наближення: найкращі чебишовські наближення, метод найменших квадратів, наближення сплайнами різних видів тощо. Ряд задач вимагає наближення не тільки самої функції, а й її похідних. Для цього використовують ермітові сплайни [1, 2]. З метою покращання точності наближення функцій сплайнами як ланки можна використовувати не тільки многочлени, а й нелінійні за параметрами вирази

$$F(A;x) = F(a_0, a_1, \ldots, a_m; x). \qquad (1)$$

У [5, 7, 6, 9] отримано вирази для параметрів ермітових сплайнів з логарифмічними ланками, ланками у вигляді добутку степеневої і експоненціальної функції, ланками у вигляді суми експоненти і многочлена, відношення многочлена до лінійної функції; в [3, 4] формули для похибок наближення функцій многочленними ермітовими сплайнами. За аналогією до чебишовських нелінійних наближень [10] у [8] доведено теорему, яка дає змогу зводити наближення нелінійними ермітовими сплайнами зі складними виразами в ланках (наприклад, степеневий вираз від многочлена) до многочленного ермітового сплайна.

I. Постановка задачі

На множині $X=\{x \in X : a=x_0<x_1<\ldots<x_r=b\}$ задані значення функції $f(x) \in C^n[a,b]$ та її похідних до n-го порядку включно. Потрібно побудувати ермітовий сплайн (тобто знайти вирази для параметрів ланки) з експоненціальною ланкою

$$F(A;x) = a_0 \exp\left(\sum_{i=1}^{m} a_i x^i\right), \quad x>0, \qquad (2)$$

де a_i – параметри ланки сплайна; $m+1$ – кількість параметрів ($m \geq 3$).

Мета роботи – побудувати ермітові сплайни з експоненціальними ланками і довести обмінні теореми, які уможливлюють звести наближення функцій ермітовими сплайнами з експоненціальними ланками до многочленних ермітових сплайнів. З цих теорем випливають властивості, за допомогою яких можна отримати аналітичний вираз для ядра похибки рівномірного (з однаковою максимальною похибкою на кожній ланці) наближення функцій ермітовими сплайнами з експоненціальними ланками.

II. Означення ермітових сплайнів з нелінійними за параметрами виразами в ланках

Наведемо означення ермітових сплайнів з нелінійними за параметрами виразами в ланках (далі нелінійні ермітові сплайни) з парною і непарною кількістю параметрів.

Означення 1. Нехай $f(x)$, $F(A;x) = F(a_0,a_1,\ldots,a_m;x) \in C^n[a,b]$. На множині $X =$

$\{x \in X : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_r = b\}$ задані значення функції $f(x)$ та її похідних до n-го порядку включно. Нелінійним ермітовим сплайном з парною кількістю параметрів $m+1 \quad (m = 2n+1)$ називатимемо функцію

$$S(A;x) = \sum_{k=1}^{r} F(A_k;x) * \theta((x - x_{k-1})(x_k - x)), \quad (3)$$

яка задовольняє систему рівнянь

$$f^{(i)}(x_k) - S^{(i)}(A_k;x_k) = 0; \quad i = \overline{0,n}; \quad k = \overline{0,r}, \quad (4)$$

де A_k – параметри сплайна на k-й ланці; $\theta(u)$ – функція Хевісайда;

$$\theta(u) = \begin{cases} 1, & u \geq 0 \\ 0, & u < 0 \end{cases}.$$

Із системи (4) випливає, що $S(A;x) \in C^n[a,b]$. Вираз $F(A_k;x)$ називається ланкою ермітового сплайна. Похибка наближення функції $f(x)$ за допомогою ермітового сплайна $S(A;x)$ характеризується зваженою віддаллю (функцією похибки)

$$\rho(x) = [f(x) - S(A,x)]/w(x), \quad (5)$$

де вага наближення $w(x) \in C^n[a,b]$, $w(x) \neq 0$ при $x \in [a,b]$.

Означення 2. Нехай $f(x)$, $F(A;x) = F(a_0,a_1,\ldots,a_m;x) \in C^n[a,b]$. На множині $X = \{x \in X : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_r = b\}$ задані значення функції $f(x)$ та її похідних до n-го порядку включно, а на множині $X' = \{x_i'\}_{i=1}^{r} = \{(x_{i-1}+x_i)/2\}_{i=1}^{r}$ задані значення функції $f(x)$. Нелінійним ермітовим сплайном з непарною кількістю параметрів $m+1 \quad (m = 2n+2)$ називатимемо функцію виду (3), яка задовольняє систему рівнянь

$$\begin{cases} f^{(i)}(x_k) - S^{(i)}(A;x_k) = 0; \quad i = \overline{0,n}; \quad k = \overline{0,r} \\ f(x_k') - S(A;x_k') = 0, \quad k = \overline{1,r}. \end{cases} \quad (6)$$

Із означень випливає, що для визначення параметрів кожної ланки конкретного нелінійного ермітового сплайна необхідно розв'язати систему рівнянь (4) або (6).

III. Виведення формул для параметрів ермітових сплайнів з експоненціальними ланками

Сімейство цих ермітових сплайнів має ланку, яку подано виразом (2). Оскільки наближаючий вираз (2) не змінює знака, то цим виразом можна наближувати функції, що не змінюють знака. Припустимо для конкретності, що $f(x) > 0$. Побудуємо ланки ермітового сплайна при $m = 3$ і $m = 4$.

При $m = 3$ отримаємо ермітовий сплайн з парною кількістю параметрів $m+1 = 4$. Ланка такого сплайна має вигляд

$$F(A;x) = a_0 \exp\left(a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3\right). \quad (7)$$

Згідно з означенням 1 параметри ланки ермітового сплайна (3) з ланкою (7) задовольняють системі рівнянь (4)

$$\begin{cases} f_0 - a_0 \exp\left(a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3\right) = 0 \\ f_0' - a_0 \left(a_1 + 2a_2 x_0 + 3a_3 x_0^2\right) \times \\ \qquad \times \exp\left(a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3\right) = 0 \\ f_1 - a_0 \exp\left(a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3\right) = 0 \\ f_1' - a_0 \left(a_1 + 2a_2 x_1 + 3a_3 x_1^2\right) \times \\ \qquad \times \exp\left(a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3\right) = 0 \end{cases}, \quad (8)$$

де x_0 – ліва, а x_1 – права границі ланки; $x_0 < x_1$, $f_i^{(j)} = f^{(j)}(x_i)$, $i = 0,1$, $j = 0,1$. Розв'яжемо систему (8) щодо невідомих a_i, $i = \overline{0,3}$.

Із першого і третього рівнянь системи знаходимо вирази для параметра a_0:

$$a_0 = f_0 \exp\left(-\left(a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3\right)\right),$$

$$a_0 = f_1 \exp\left(-\left(a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3\right)\right). \quad (9)$$

Прирівнюємо між собою вирази для a_0 і отримаємо вираз для a_1:

$$a_1 = \frac{1}{x_1 - x_0}\left(\ln\frac{f_1}{f_0} - a_3\left(x_1^3 - x_0^3\right) - a_2\left(x_1^2 - x_0^2\right)\right). \quad (10)$$

Підставляємо перший вираз для a_0 і вираз для a_1 в друге рівняння системи (8) і отримаємо

$$a_3\left(2x_0^2 - x_0 x_1 - x_1^2\right) + a_2\left(x_0 - x_1\right) = \frac{f_0'}{f_0} + \frac{\ln\frac{f_0}{f_1}}{x_1 - x_0}. \quad (11)$$

Підставляємо другий вираз для a_0 і вираз для a_1 в четверте рівняння системи (8) і отримаємо

$$a_3\left(2x_1^2 - x_0 x_1 - x_0^2\right) + a_2\left(x_1 - x_0\right) = \frac{f_1'}{f_1} + \frac{\ln\frac{f_0}{f_1}}{x_1 - x_0}. \quad (12)$$

Ми отримали систему двох лінійних рівнянь (11) і (12) щодо двох невідомих a_2 і a_3. Розв'язавши її, отримаємо

$$a_3 = \frac{\dfrac{f_1'}{f_1} + \dfrac{f_0'}{f_0} + 2\dfrac{\ln\dfrac{f_0}{f_1}}{x_1 - x_0}}{\left(x_1 - x_0\right)^2}, \quad (13)$$

$$a_2 = \frac{\left(2x_0^2 - x_0 x_1 - x_1^2\right) a_3 - \dfrac{f_0'}{f_0} - \dfrac{\ln\dfrac{f_0}{f_1}}{x_1 - x_0}}{x_1 - x_0}.$$

Із формул (9), (10) і (13) для параметрів a_0, a_1, a_2 і a_3 випливає, що необхідною умовою існування наближення ермітовим сплайном з ланкою (7) є виконання умови $f(x) > 0$.

При $m = 4$ отримаємо ермітовий сплайн з непарною кількістю параметрів $m + 1 = 5$. Ланка такого сплайна має вигляд

$$F(A;x) = a_0 \exp\left(a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4\right). \quad (14)$$

Згідно з означенням 2 параметри ланки (14) ермітового сплайна (3) задовольняють системі рівнянь (6):

$$\begin{cases} f_0 - a_0 \exp\left(a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3 + a_4 x_0^4\right) = 0 \\ f_0' - a_0 \left(a_1 + 2a_2 x_0 + 3a_3 x_0^2 + 4a_4 x_0^3\right) \times \\ \quad \times \exp\left(a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3 + a_4 x_0^4\right) = 0 \\ f_1 - a_0 \exp\left(a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 + a_4 x_1^4\right) = 0 \\ f_2 - a_0 \exp\left(a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_2^3 + a_4 x_2^4\right) = 0 \\ f_2' - a_0 \left(a_1 + 2a_2 x_2 + 3a_3 x_2^2 + 4a_4 x_2^3\right) \times \\ \quad \times \exp\left(a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_2^3 + a_4 x_2^4\right) = 0 \end{cases}, \quad (15)$$

де $x_0 < x_1 < x_2$, $f_i^{(j)} = f^{(j)}(x_i)$, $i = \overline{0,2}$, $j = 0, 1$. Розв'яжемо систему (15) щодо невідомих a_i, $\quad i = \overline{0,4}$. Із першого, третього і четвертого рівнянь системи (15) знайдемо вирази для a_0:

$$a_0 = f_i \exp\left(-\left(a_1 x_i + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3 + a_4 x_i^4\right)\right), \quad i = \overline{0,2}. \quad (16)$$

Прирівнявши вирази для a_0 (16) із першого і четвертого та першого і третього рівнянь системи (15), отримаємо два вирази для a_1:

$$a_1 = \frac{1}{x_1 - x_0}\Big(\ln\frac{f_1}{f_0} - a_4\left(x_1^4 - x_0^4\right) - a_3\left(x_1^3 - x_0^3\right) - a_2\left(x_1^2 - x_0^2\right)\Big), \quad (17)$$

$$a_1 = \frac{1}{x_2 - x_0}\Big(\ln\frac{f_2}{f_0} - a_4\left(x_2^4 - x_0^4\right) - a_3\left(x_2^3 - x_0^3\right) - a_2\left(x_2^2 - x_0^2\right)\Big). \quad (18)$$

Прирівнявши між собою вирази для a_1 із (17) і (18), отримаємо рівняння

$$\alpha_1 = \beta_1 a_4 + \zeta_1 a_3 + \gamma_1 a_2, \quad (19)$$

де

$$\alpha_1 = \frac{\ln\left(\frac{f_1}{f_0}\right)}{x_1 - x_0} - \frac{\ln\left(\frac{f_2}{f_0}\right)}{x_2 - x_0},$$

$$\beta_1 = (x_1 + x_0)\left(x_1^2 + x_0^2\right) - (x_2 + x_0)\left(x_2^2 + x_0^2\right),$$

$$\zeta_1 = x_1^3 - x_2^3 + x_0 x_1 (x_0 + x_1) - x_0 x_2 (x_0 + x_2),$$

$$\gamma_1 = x_1 - x_2.$$

Підставивши перший вираз для a_0 (16) і перший вираз для a_1 (17) в друге рівняння системи (15), отримаємо рівняння

$$\alpha_2 = \beta_2 a_4 + \zeta_2 a_3 + \gamma_2 a_2, \quad (20)$$

де

$$\alpha_2 = \frac{\ln\left(\frac{f_1}{f_0}\right)}{x_1 - x_0} - \frac{f_0'}{f_0},$$

$$\beta_2 = x_1^3 + x_0 x_1 (x_0 + x_1) - 3x_0^3,$$

$$\zeta_2 = x_1^2 + x_0 x_1 - 2x_0^2,$$

$$\gamma_2 = x_1 - x_0.$$

Підставивши третій вираз для a_0 (16) і перший вираз для a_1 (17) в п'яте рівняння системи (15), отримаємо рівняння

$$\alpha_3 = \beta_3 a_4 + \zeta_3 a_3 + \gamma_3 a_2, \quad (21)$$

де

$$\alpha_3 = \frac{\ln\left(\frac{f_1}{f_0}\right)}{x_1 - x_0} - \frac{f_2'}{f_2},$$

$$\beta_3 = (x_0 + x_1)\left(x_0^2 + x_1^2\right) - 4x_2^3,$$

$$\zeta_3 = x_1^2 + x_0 x_1 + x_0^2 - 3x_2^2,$$

$$\gamma_3 = x_1 + x_0 - 2x_2.$$

Ми отримали систему трьох лінійних рівнянь (19–21) щодо трьох невідомих a_2, a_3 і a_4. Розв'язавши її, отримаємо

$$a_2 = \frac{(\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)(\zeta_3\beta_1 - \zeta_1\beta_3) - (\zeta_2\beta_1 - \zeta_1\beta_2)(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)}{(\gamma_1\beta_2 - \gamma_2\beta_1)(\zeta_1\beta_3 - \zeta_3\beta_1) + (\zeta_2\beta_1 - \zeta_1\beta_2)(\gamma_1\beta_3 - \gamma_3\beta_1)},$$

$$a_3 = \frac{\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2 + (\gamma_1\beta_2 - \beta_1\gamma_2) a_2}{\beta_1\zeta_2 - \zeta_1\beta_2}, \quad (22)$$

$$a_4 = \frac{\alpha_1 - \zeta_1 a_3 - \gamma_1 a_2}{\beta_1}.$$

Із формул (16), (17), (18) і (22) для параметрів a_0, a_1, a_2, a_3 і a_4 випливає, що необхідною умовою існування наближення ермітовим сплайном з ланкою (14) є виконання умови $f(x) > 0$.

Приклад 1. Для функції $f(x) = \dfrac{1}{2+x^2}$ на інтервалі $[0.1,\ 0.5]$ побудувати ермітовий сплайн з експоненціальною ланкою (7) і ермітовий кубічний сплайн з ланкою $F(B,x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$, знайти числові значення параметрів ланок, оцінити похибки наближення.

Для знаходження параметрів $a_i,\ i = \overline{0,3}$ ермітового сплайна з експоненціальною ланкою скористаємось формулами (9), (10) і (13). Вирази для параметрів кубічного ермітового сплайна можна знайти із системи (4). Вона є лінійною щодо параметрів $b_i,\ i = \overline{0,3}$. Розв'язавши її, отримаємо формули для обчислення значень параметрів:

$$b_3 = \frac{2\left(\dfrac{f_1' + f_0'}{2} - \dfrac{f_1 - f_0}{h}\right)}{h^2},$$

$$b_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{f_1' - f_0'}{h} - 3b_3\left(x_0 + x_1\right)\right),$$

$$b_1 = \frac{f_1 - f_0}{h} - b_3\left(x_0^2 + x_0 x_1 + x_1^2\right) - b_2\left(x_0 + x_1\right),$$

$$b_0 = \tfrac{1}{2}\Big(f_1 + f_0 + b_3\left(x_0^3 + x_1^3\right) - b_2\left(x_0^2 + x_1^2\right) - \\ - b_1\left(x_0 + x_1\right)\Big).$$

Максимальні значення абсолютної Δ і відносної δ похибок наближення функції $f(x)$ обчислимо за формулою (5). Результати обчислень наведено в таблиці:

Експоненціальна ланка		Кубічна ланка	
a_0	4.9988731106E-1	b_0	4.9981161082E-1
a_1	1.2519086701E-1	b_1	4.6643509954E-3
a_2	-5.4384922641E-1	b_2	-2.8800167215E-1
a_3	5.5116317105E-3	b_3	1.1440860927E-1
Δ	5.8315966726E-5	Δ	8.9808566827E-5
δ	1.2159323397E-4	δ	1.8711411625E-4

Як можна побачити, ермітовий сплайн з експоненціальною ланкою наближає функцію $f(x) = \dfrac{1}{2+x^2}$ краще, ніж кубічний ермітовий сплайн, бо його максимальні абсолютна і відносна похибки наближення є меншими від похибок кубічного ермітового сплайна.

IV. Обмінні теореми для ермітових сплайнів з експоненціальними ланками

З [10] відомо, що знаходження найкращого чебишовського наближення деякими нелінійними виразами можна звести до знаходження найкращого чебишовського наближення многочленами. В основу такого зведення покладено обмінні теореми. Покажемо, що аналогічні теореми існують також і для ермітових сплайнів.

Теорема 1. *Нехай для функції $y(x) = \ln\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$, $(y(x),\ f(x),\ g(x)\ \in\ C^n[a,b],\ f(x)\,g(x)\ \neq\ 0$ при $x \in [a,b])$ існує єдине наближення ермітовим сплайном з парною кількістю $m+1$ параметрів з вузлами $\{x_k\}_{k=0}^{r}\,(x_k < x_{k+1})$ і ланками виду*

$$\beta_{0k} + \chi\left(x, \beta_{1k}, ..., \beta_{mk}\right) = \beta_{0k} + \chi(x), \qquad (23)$$

$$m = 2n+1, \quad k = \overline{1,r}.$$

Тоді для функції $f(x)$ на проміжку $[a,b]$ з тими самими вузлами існує єдине наближення ермітовим сплайном з парною кількістю параметрів і ланками виду

$$A_k g(x) \exp\left(\chi\left(x, \alpha_{1k}, ..., \alpha_{mk}\right)\right) \equiv \\ \equiv A_k g(x) \exp\left(\chi(x)\right), \quad A_k \neq 0, \quad k = \overline{1,r}. \qquad (24)$$

Нехай $\Delta_k\left(k = \overline{1,r}\right)$ – величина найбільшої абсолютної похибки наближення функції $y(x)$ на проміжку $[x_k, x_{k+1}]$ ермітовим сплайном з ланкою (23), а $\delta_k\left(k = \overline{1,r}\right)$ – величина найбільшої відносної похибки наближення функції $f(x)$ на проміжку $[x_k, x_{k+1}]$ ермітовим сплайном з ланкою виду (24). Тоді між параметрами наближень існують співвідношення

$$A_k = \exp\left(\beta_{0k}\right), \quad \alpha_{ik} = \beta_{ik}, \quad i = \overline{1,m}; \qquad (25)$$

$$\delta_k = 1 - \exp\left(-\Delta_k\right), \quad k = \overline{1,r}. \qquad (26)$$

□ *Доведення.* Сплайн з ланкою виду (23) характеризується системою рівнянь

$$y^{(i)}\left(x_{k-1}\right) - \left(\beta_{0k} + \chi\left(x_{k-1}\right)\right)^{(i)} = 0,$$

$$y^{(i)}\left(x_k\right) - \left(\beta_{0k} + \chi\left(x_k\right)\right)^{(i)} = 0, \qquad (27)$$

$$k = \overline{1,r}, \quad i = \overline{0,n},$$

а сплайн з ланкою виду (24) характеризується, згідно з (5), системою рівнянь

$$\left(1-\frac{g\left(x_{k-1}\right)}{f\left(x_{k-1}\right)}A_k\exp\left(\chi\left(x_{k-1}\right)\right)\right)^{(i)}=0,$$

$$\left(1-\frac{g\left(x_k\right)}{f\left(x_k\right)}A_k\exp\left(\chi\left(x_k\right)\right)\right)^{(i)}=0, \qquad (28)$$

$$k=\overline{1,r},\quad i=\overline{0,n}.$$

Далі будемо опускати індекс, який вказує на належність параметра до k-ї ланки. Із системи (28) при $i=0$ матимемо

$$1-\frac{g\left(x\right)}{f\left(x\right)}A\exp\left(\chi\left(x\right)\right)=0.$$

Подамо A як $\exp\left(\beta_0\right)$, прологарифмуємо це рівняння і отримаємо

$$\ln\left|\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}\right|-\beta_0-\chi\left(x\right)=0,$$

де $\ln\left|\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}\right|\equiv y\left(x\right)$. Тобто при $i=0$ рівняння із системи (28) зведене до рівняння із системи (27).

При $i=1$ рівняння із системи (28) має вигляд

$$\frac{A\exp\left(\chi\left(x\right)\right)}{f\left(x\right)}\left(\frac{g\left(x\right)f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}-g'\left(x\right)-g\left(x\right)\chi'\left(x\right)\right)=0.$$

Помножимо чисельник і знаменник цього рівняння на $g\left(x\right)$:

$$\frac{Ag\left(x\right)\exp\left(\chi\left(x\right)\right)}{f\left(x\right)}\left(\left(\ln\left|\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}\right|\right)'-\chi'\left(x\right)\right)=0.$$

Оскільки з умови теореми A, $f\left(x\right)$, $g\left(x\right)$ не дорівнюють нулю, то рівність досягатиметься за умови, що

$$\left(\ln\left|\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}\right|\right)'-\chi'\left(x\right)=0,$$

а це і є рівняння із системи (27) при $i=1$.

Використовуючи метод математичної індукції, покажемо, що рівняння із системи (28) зводяться до рівнянь із системи (27) за довільних i. Нехай це доведено для $i=s-1$. Доведемо для $i=s$. Рівняння із системи (27) при $i=s$

$$\left(\ln\left|\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}\right|\right)^{(s)}-\chi^{(s)}\left(x\right)=0.$$

Для $i=s-1$ рівняння із системи (28) має вигляд

$$\frac{Ag\left(x\right)\exp\left(\chi\left(x\right)\right)}{f\left(x\right)}\left[\left(\ln\left|\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}\right|\right)^{(s-1)}-\chi^{(s-1)}\left(x\right)\right]=0.$$

Продиференціюємо це рівняння і отримаємо

$$A\left[\left(\frac{g\left(x\right)\exp\left(\chi\left(x\right)\right)}{f\left(x\right)}\right)'\times\right.$$
$$\times\left(\left(\ln\left|\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}\right|\right)^{(s-1)}-\chi^{(s-1)}\left(x\right)\right)+$$
$$\left.+\frac{g\left(x\right)\exp\left(\chi\left(x\right)\right)}{f\left(x\right)}\left(\left(\ln\left|\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}\right|\right)^{(s)}-\chi^{(s)}\left(x\right)\right)\right]=0.$$

Перший доданок в квадратних дужках дорівнює нулю через рівність нулю останнього співмножника. Рівняння набере вигляду

$$\frac{Ag\left(x\right)\exp\left(\chi\left(x\right)\right)}{f\left(x\right)}\left[\left(\ln\left|\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}\right|\right)^{(s)}-\chi^{(s)}\left(x\right)\right]=0.$$

Множник, який стоїть перед квадратними дужками, не дорівнює нулю з умов теореми, отже, нулю дорівнює вираз у квадратних дужках. А це і є рівняння із системи (27). Отже, ми довели, що за довільних i рівняння в системах (27) і (28) еквівалентні, а, значить, і системи рівносильні. Тому $\alpha_i=\beta_k$ при $i=\overline{1,m}$, а $A=\exp\left(\beta_0\right)$.

Доведемо справедливість співвідношення (26) для похибок наближення. Оскільки системи (27) і (28) рівносильні, то точки, в яких досягаються максимальні похибки, збігаються. Нехай $\hat{x}$ точка, в якій досягається максимальна похибка наближення функції $y\left(x\right)$ ермітовим сплайном з ланкою (23). Тоді похибка в цій точці дорівнює

$$\Delta_k=y\left(\hat{x}\right)-\beta_0-\chi\left(\hat{x}\right).$$

Із цієї рівності випливає, що

$$1-\exp\left(-\Delta_k\right)=1-\frac{g\left(\hat{x}\right)}{f\left(\hat{x}\right)}A\exp\left(\chi\left(\hat{x}\right)\right).$$

У правій частині маємо відносну похибку наближення функції $f\left(x\right)$ ермітовим сплайном з ланкою (24) на проміжку $[x_k,x_{k+1}]$. Звідси $\delta_k=1-\exp\left(-\Delta_k\right)$. Теорема доведена. ∎

За допомогою цієї теореми можна звести знаходження наближення ермітовим сплайном з ланкою (24) до знаходження наближення ермітовим сплайном з більш простою ланкою (23). Зокрема, наближення функції $f\left(x\right)$ ермітовим сплайном з ланкою $A\exp\left(\sum\limits_{j=1}^{m}\alpha_j x^j\right)$ зводиться до наближення функції $y\left(x\right)=\ln\left|f\left(x\right)\right|$ ермітовим сплайном з ланкою $\sum\limits_{j=0}^{m}\beta_j x^j$. При цьому найбільша відносна похибка першого наближення виражається через найбільшу абсолютну похибку другого наближення.

Для ермітових сплайнів з непарною кількістю параметрів справедлива така сама обмінна теорема, що й для ермітових сплайнів з парною кількістю параметрів.

Теорема 2. *Нехай для функції* $y(x) = ln\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|$, *(*$y(x)$, $f(x)$, $g(x) \in C^n[a,b]$, $f(x)g(x) \neq 0$ *при* $x \in [a,b]$*) існує єдине наближення ермітовим сплайном з непарною кількістю* $m+1$ *параметрів з вузлами* $\{x_k\}_{k=0}^{r}$ $(x_k < x_{k+1})$ *і ланками виду*

$$\beta_{0k} + \chi(x, \beta_{1k}, ..., \beta_{mk}) = \beta_{0k} + \chi(x), \qquad (29)$$

$$m = 2n + 2, \quad k = \overline{1,r}.$$

Тоді для функції $f(x)$ *на проміжку* $[a,b]$ *з тими самими вузлами існує єдине наближення ермітовим сплайном з непарною кількістю параметрів і ланками виду*

$$\begin{gathered} A_k g(x)\exp(\chi(x, \alpha_{1k}, ..., \alpha_{mk})) \equiv \\ \equiv A_k g(x)\exp(\chi(x)), \quad A_k \neq 0, \quad k = \overline{1,r}. \end{gathered} \qquad (30)$$

Нехай $\Delta_k\left(k = \overline{1,r}\right)$ *– величина найбільшої абсолютної похибки наближення функції* $y(x)$ *на проміжку* $[x_k, x_{k+1}]$ *ермітовим сплайном з ланкою (29), а* $\delta_k\left(k = \overline{1,r}\right)$ *– величина найбільшої відносної похибки наближення функції* $f(x)$ *на проміжку* $[x_k, x_{k+1}]$ *ермітовим сплайном з ланкою виду (30). Тоді між параметрами наближень існують співвідношення*

$$A_k = \exp(\beta_{0k}), \quad \alpha_{ik} = \beta_{ik}, \quad i = \overline{1,m}, \qquad (31)$$

$$\delta_k = 1 - \exp(-\Delta_k), \quad k = \overline{1,r}. \qquad (32)$$

□ *Доведення.* В теоремі 1 до системи рівнянь (27) додається рівняння

$$y(z) - (\beta_0 + \chi(z)) = 0, \quad z = \frac{(x_k + x_{k+1})}{2}, \qquad (33)$$

а до системи рівнянь (28) рівняння

$$1 - \frac{g(z)}{f(z)}A\exp(\chi(z)) = 0. \qquad (34)$$

Для доведення цієї теореми для ермітових сплайнів з непарною кількістю параметрів необхідно довести еквівалентність рівнянь (33) і (34). Для цього перепишемо (34) у вигляді

$$\frac{f(z)}{g(z)} = A\exp(\chi(z)),$$

прологарифмуємо і отримаємо

$$\ln\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right) = \ln(A) + \chi(z),$$

де із умови теореми 2 $\ln\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| = y(x)$, а $\ln(A) = \beta_0$. Тобто рівняння (34) зведено до (33). Теорема доведена. ■

Приклад 1. Для функції $f(x) = \dfrac{1}{2+x^2}$ перевірити правильність обмінної теореми.

Згідно з теоремою 1 наближення функції $f(x)$ ермітовим сплайном з експоненціальною ланкою (2) можна замінити наближенням функції $\ln f(x)$ многочленним ермітовим сплайном з такою самою кількістю параметрів. Знайдемо параметри кубічного ермітового сплайна, який на інтервалі $[0.1;\ 0.5]$ наближає функцію $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{2+x^2}\right)$. Для цього скористаємось формулами, наведеними в прикладі 1. В результаті отримаємо такі значення параметрів наближення $b_0 = -6.9337258384E-1$, $b_1 = 1.2519086704E-1$, $b_2 = -5.4384922644E-1$, $b_3 = 5.5116317149E-3$, $\Delta = 1.2160062943E-4$. Бачимо, що $b_i = a_i$, $i = \overline{1,3}$, де a_i – параметри наближення $f(x) = \dfrac{1}{2+x^2}$ ермітовим сплайном з експоненціальною ланкою (див. приклад 1). Згідно з умовою теореми a_0 повинно дорівнювати $\exp(b_0)$, проекспонуємо b_0 і отримаємо $\exp(-6.9337258384E-1) = 0.499887311061 = a_0$.

Перевіримо рівність похибок наближень згідно з (26):

$$\begin{gathered} 1 - \exp(-\Delta) = 1 - 0.999311639 = \\ = 0.12159323637E-4 \approx \delta. \end{gathered}$$

V. Похибки наближення нелінійними ермітовими сплайнами

З [5] відомо, що максимальна похибка μ балансного (з однаковою максимальною похибкою на кожній ланці) наближення нелінійними ермітовими сплайнами з парною кількістю параметрів у ланці має вигляд

$$\begin{gathered} \mu = \frac{1}{2^{m+1}(m+1)!r^{m+1}}\left(\int_a^b\left|\frac{\eta(f,F)}{w(x)}\right|^{\frac{1}{m+1}}dx\right)^{m+1}\times \\ \times\left[1 + O\left(\frac{b-a}{r}\right)\right], \end{gathered} \qquad (35)$$

а для ермітових сплайнів з непарною кількістю параметрів

$$\begin{gathered} \mu = \frac{M}{(m+1)!r^{m+1}}\left(\int_a^b\left|\frac{\eta(f,F)}{w(x)}\right|^{\frac{1}{m+1}}dx\right)^{m+1}\times \\ \times\left[1 + O\left(\frac{b-a}{r}\right)\right], \end{gathered} \qquad (36)$$

де r – кількість ланок сплайна на інтервалі $[a,b]$, $w(x)$ – вагова функція, $\eta(f,F)$ – ядро похибки наближення, $M = \left\|((1-t)t)^{m-k+1}\left(t - \frac{1}{2}\right)\right\|_{C[0,1]}$, k – дефект ермітового сплайна. Для ермітового сплайна з ланкою (14) кількість параметрів $m + 1 = 5$, дефект сплайна за означенням $k = 3$, величина $M = 0.8944271E-2$.

Щоб скористатись формулами (35) і (36), потрібно мати вираз для ядра похибки наближення $\eta(f,F)$, який би не залежав від параметрів $a_0, a_1, \ldots, a_m$ ланки сплайна $F(A;x)$. Вирази для конкретних ядер можна знайти, використовуючи властивості ядер похибок, які випливають із обмінних теорем.

Властивість 1. *Нехай* $f(x) > 0$ *при* $x \in [a,b]$. *Тоді*

$$\eta(f, \exp F) = f(x)\,\eta(\ln f, F). \tag{37}$$

□ *Доведення.* Із теорем 1 і 2 випливає, що наближення функції $f(x)$ на $[a,b]$ ермітовим сплайном з ланкою $\exp F(A;x)$ може бути знайдено через наближення функції $\ln f(x)$ на цьому ж проміжку ермітовим сплайном з ланкою $F(A;x)$. При цьому із формули (26) випливає, що максимальна відносна похибка δ_0 першого наближення виражається через максимальну абсолютну похибку Δ_0 другого наближення

$$\delta_0 = 1 - \exp(-\Delta_0) = \Delta_0 + o\left(\frac{\Delta_0^2}{2}\right).$$

Із рівності похибок і формули (35) матимемо

$$\int_a^b \left|\frac{\eta(f,\exp F)}{f(x)}\right|^{\frac{1}{m+1}} dx = \int_a^b |\eta(\ln f, F)|^{\frac{1}{m+1}} dx \times \left[1 + O\left(\frac{b-a}{r}\right)\right].$$

Цей вираз справедливий для довільних $f(x)$, $F(A;x)$ і проміжків $[a,b]$ лише в тому випадку, якщо підінтегральні вирази рівні між собою. Із їх рівності випливає вираз (37). ■

Тепер можна вивести аналітичний вираз для ядра похибки наближення $\eta(f,F)$ ермітовим сплайном з ланкою (2). Відомо [10], що ядро похибки наближення многочленом $P_m(x)$ степеня m має вигляд $\eta(f,F) = f^{(m+1)}(x)$. Застосувавши формулу (37), отримаємо

$$\begin{aligned}\eta(f, \exp P_m) &= f(x)\,\eta(\ln f, P_m) = \\ &= f(x)\,\frac{d^{m+1}\ln f(x)}{dx^{m+1}}.\end{aligned} \tag{38}$$

Для ермітового сплайна з експоненціальною ланкою (7) ядро матиме такий вигляд:

$$\eta(f,F) = \frac{f^{(4)}(x)}{f(x)} - \frac{4f'''(x)f'(x) + 3(f''(x))^2}{f^2(x)} + \frac{12f''(x)(f'(x))^2}{f^3(x)} + \frac{6(f'(x))^4}{f^4(x)},$$

а для ланки (14)

$$\begin{aligned}\eta(f,F) = \frac{f^{(5)}(x)}{f(x)} - \frac{5\left(f^{(4)}(x)f'(x) + 2f'''(x)f''(x)\right)}{f^2(x)} + \frac{10f'(x)\left(2f'''(x)f'(x) + 3(f''(x))^2\right)}{f^3(x)} - \\ - \frac{60f''(x)(f'(x))^3}{f^4(x)} + \frac{24(f'(x))^5}{f^5(x)}.\end{aligned}$$

Так, абсолютна похибка наближення функції $f(x)$ із прикладів 1 і 2 ермітовим сплайном з експоненціальною ланкою (7), обчислена за формулою (35), дорівнює $5.289488625E-5$, а відносна похибка дорівнює $1.107596588E-4$.

Висновки

Виведено формули для параметрів ермітових сплайнів з експоненціальними ланками, доведено теореми про можливість зведення наближення функцій ермітовими сплайнами з експоненціальними ланками до многочленних ермітових сплайнів, виведено аналітичні вирази для ядер похибок цих сплайнів. Теоретичні результати підтверджуються практичними розрахунками. Оскільки похибка ермітового сплайна з експоненціальною ланкою в деяких випадках є меншою, ніж у многочленного ермітового сплайна (див. приклад 1), то їх доцільно застосовувати для наближення функцій. Для вибору ланки ермітового сплайна при наближенні конкретної функції доцільно спочатку оцінити похибку наближення за формулами (35) або (36). Перспективою досліджень у цьому напрямку є побудова ермітових сплайнів з іншими нелінійними виразами в ланках.

Література

[1] Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 352 с.

[2] Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения. – М.: Наука, 1984. – 352 с.

[3] Лигун А.А., Сторчай В.Ф. О наилучшем выборе узлов при приближении функций локальными эрмитовыми сплайнами // Укр. мат. журн. – 1980. – 32, № 6. – С. 824–830.

[4] Лигун А.А., Шумейко А.А. Оптимальный выбор узлов при приближении функций сплайнами // Докл. АН УССР. – 1984. – А, № 6. – С. 18–22.

[5] Пізюр Я.В. Ермітові сплайни з ланками у вигляді логарифма від многочлена з парною кількістю параметрів // Вісник ДУ "Львівська політехніка". "Прикладна математика". – 1998. – № 337, Т. 2. – С. 374–377.

[6] Пізюр Я.В. Ермітові сплайни з ланками у вигляді суми експоненти і многочлена з 5-ма параметрами / VIII Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики" (25–27 вересня 2001 р., м. Львів): Тези доповідей. – С. 54.

[7] Пізюр Я.В. Ермітові сплайни з ланками у вигляді добутку степеневої і експоненціальної функції з 4-ма параметрами / XIX Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики" (24–26 вересня 2002 р., м. Львів): Тези доповідей. – С. 104–105.

[8] Пизюр Я.В., Попов Б.А. Свойства степенных эрмитовых сплайнов // Контрольно-измерительная техника. – 1988. – Вып. 44. – С. 21–28.

[9] Пізюр Я.В., Попов Б.О. Рівномірне наближення ермітовими сплайнами з парною кількістю параметрів // Контрольно-вимірювальна техніка. – 1993. – Вип. 50. – С. 8–13.

[10] Попов Б.А. Равномерное приближение сплайнами. – К.: Наук. думка, 1989. – 272 с.

APPROXIMATION OF FUNCTIONS BY HERMITE SPLINES WITH EXPONENTIAL LINKS

Ya. Pizyur

Lviv Polytechnic National University
12 S. Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine

The definition of Hermite splines with non-linear for parameters expressions in links is given. The formulas for parameters Hermite splines with exponential links are deduced. The possibility theorems about reductions approximation of functions by Hermite splines with exponential links to polynomial Hermite splines is proved. The formulas for approximation errors by Hermite splines are given.

Keywords: Hermite splines, exponential link, error of approximation, balanced approximation.

2000 MSC: 65D05, 65D07, 65D15, 41A15, 41A46

UDK: 519.65