ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№ 566, 2006, с. 52–58

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№ 566, 2006, p. 52–58

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ТИПУ КОЛИВАНЬ БАЛКИ П'ЯТОГО ПОРЯДКУ В ОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ

П. Пукач

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 1 липня 2006 р.)

Досліджується перша мішана задача для слабко нелінійного рівняння п'ятого порядку в обмеженій області. Розглянуте рівняння узагальнює рівняння $u_{tt} + au_{txxxx} + bu_{xxxx} + |u_t|^{p-2}u_t = f$, $p > 2$, що вивчається в теорії пружності. Отримано умови існування та єдиності узагальненого розв'язку. Класи існування та єдиності цього розв'язку є соболєвськими просторами функцій.

Ключові слова: нелінійне рівняння коливань балки, метод Гальоркіна.

2000 MSC: 35G30

УДК: 517.95

Вступ

У цій роботі досліджено першу мішану задачу в обмеженій області для слабко нелінійного рівняння

$$u_{tt} + \sum_{|\alpha|=|\beta|\le 2} (-1)^{|\alpha|} D^\beta \left(a_{\alpha\beta}(x,t) D^\alpha u_t\right) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\le 2} (-1)^{|\alpha|} D^\beta \left(b_{\alpha\beta}(x,t) D^\alpha u\right) + \sum_{1\le|\alpha|\le 2} c_\alpha(x,t) D^\alpha u + g(x,u_t) = f(x,t), \qquad (1)$$

де $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial {x_n}^{\alpha_n}}$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i = 1, ..., n$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$. Коефіцієнти $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ ($|\alpha| = |\beta| \le 2$), c_α ($1 \le |\alpha| \le 2$), g та права частина f рівняння (1) є дійсними функціями, властивості яких описано нижче. Рівняння вигляду (1), що узагальнюють модель коливання балки у середовищі з опором, вивчають у теорії пружності. Зокрема, в [1] досліджено існування слабких розв'язків мішаних задач в обмеженій області для деякої системи лінійних рівнянь з частинними похідними, одна з невідомих функцій у якій описує вертикальне зміщення балки. Відповідне рівняння такої системи є частинним випадком рівняння вигляду (1) за умов $n = 1$, $a_{\alpha\beta} = 0$, $b_{\alpha\beta} = 0$, $0 \le |\alpha| = |\beta| \le 1$, $c_\alpha = 0$, $1 \le |\alpha| \le 2$, $g(x, u_t) = 0$. Актуальність вивчення крайових задач для таких рівнянь та систем пояснюється проблемою зношування контактних поверхонь, яка є головним фактором недовговічності використання промислового устаткування [1]. Формулювання загальних математичних моделей фізико-механічних процесів, зокрема, динамічних контактів у пружних структурах, що описуються вищезгаданими рівняннями та системами, є актуальною в інженерній літературі проблемою (див. для прикладу [2–6]).

Зокрема, задача динамічного в'язкопружного тертя зі зношуванням вперше була сформульована в [2]. Загальний аналіз математичних моделей динамічних контактів між балкою та рухомою поверхнею здійснено в [3]. Термопружний контакт вивчено в [5]. Існування єдиного слабкого розв'язку квазістатичної задачі контакту з ковзаючим тертям для в'язкопружного матеріалу доведено в [6].

I. Формулювання задачі. Означення узагальненого розв'язку

В області $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $0 < T < \infty$ розглядаємо для рівняння (1) мішану задачу з початковими умовами

$$u|_{t=0} = u_0(x), \qquad (2)$$

$$u_t|_{t=0} = u_1(x) \qquad (3)$$

та крайовими умовами

$$u|_{S_T} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{S_T} = 0, \qquad (4)$$

де $S_T = \partial\Omega \times (0,T)$ – бічна поверхня області Q_T; ν – одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні $\partial\Omega$.

Припускаємо, що Ω – обмежена область з гладкою межею $\partial\Omega$ класу C^1. Позначимо $Q_\tau = \Omega \times (0,\tau)$, $\Omega_\tau = Q_T \cap \{t | t = \tau\}$ для довільного $\tau \in [0,T]$, $V = H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$.

Стосовно коефіцієнтів, правої частини рівняння (1) та початкових даних припускаємо виконання таких умов:

(A) функції $a_{\alpha\beta}$, $a_{\alpha\beta,t}$ належать до простору $L^\infty(Q_T)$, $|\alpha| = |\beta| \le 2$, причому

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(x,t)\xi_\alpha\xi_\beta \ge a_{0,2} \sum_{|\alpha|=2} |\xi_\alpha|^2$$

для довільних дійсних чисел ξ_α, $|\alpha| = 2$, та для майже всіх $(x,t) \in Q_T$, $a_{0,2} = \mathrm{const} > 0$; функції $D^2 a_{\alpha\beta}(|\alpha| = |\beta| = 2)$, $D^1 a_{\alpha\beta}(|\alpha| = |\beta| = 1)$ належать до простору $L^\infty(Q_T)$; $a_{\alpha\beta}(x,t) = a_{\beta\alpha}(x,t)$ для майже всіх $(x,t) \in Q_T$, $1 \le |\alpha| = |\beta| \le 2$;

(B) функції $b_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta,t}$ належать до простору $L^\infty(Q_T)$, $|\alpha| = |\beta| \le 2$, причому

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=2} b_{\alpha\beta}(x,t)\xi_\alpha\xi_\beta \ge b_{0,2} \sum_{|\alpha|=2} |\xi_\alpha|^2$$

для довільних дійсних чисел ξ_α, $|\alpha| = 2$, та для майже всіх $(x,t) \in Q_T$, $b_{0,2} = \mathrm{const} > 0$; функції $D^2 b_{\alpha\beta}(|\alpha| = |\beta| = 2)$, $D^1 b_{\alpha\beta}(|\alpha| = |\beta| = 1)$ належать до простору $L^\infty(Q_T)$; $b_{\alpha\beta}(x,t) = b_{\beta\alpha}(x,t)$ для майже всіх $(x,t) \in Q_T$, $1 \le |\alpha| = |\beta| \le 2$;

(C) функції c_α, $c_{\alpha,t}$ належать до простору $L^\infty(Q_T)$, $1 \le |\alpha| \le 2$;

(G) функція $g(x,\eta)$ – вимірна за x, неперервна за η, причому для довільних $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ та для майже всіх $x \in \Omega$: $(g(x,\xi) - g(x,\eta))(\xi - \eta) \ge g_0|\xi - \eta|^p$, $|g(x,\eta)| \le g_1|\eta|^{p-1}$, де g_0, g_1 – додатні сталі, $p > 2$; функція g_ξ – неперервна за змінною ξ для майже всіх $x \in \Omega$;

(F) $f \in L^{p'}(Q_T)$, $p' = p/(p-1)$; $f_t \in L^2(Q_T)$;

(U) $u_0 \in V$, $u_1 \in V \cap L^{2p-2}(\Omega)$.

Означення 1. Узагальненим розв'язком задачі (1)–(4) в області Q_T називаємо функцію u, яка задовольняє включення

$$u \in C([0,T]; H_0^2(\Omega)),$$

$$u_t \in C\left([0,T]; L^2(\Omega)\right) \cap L^\infty\left((0,T); H_0^2(\Omega)\right) \cap L^p(Q_T),$$

$$u_{tt} \in L^\infty\left((0,T); L^2(\Omega)\right) \cap L^2\left((0,T); H_0^2(\Omega)\right),$$

умови (2) та інтегральну тотожність

$$\int_{Q_\tau}\left[-u_t v_t + \sum_{|\alpha|=|\beta|\le 2} a_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u_t D^\beta v\right]dxdt +$$

$$+\int_{Q_\tau}\left[\sum_{|\alpha|=|\beta|\le 2} b_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u D^\beta v - f(x,t)v\right]dxdt +$$

$$+\int_{Q_\tau}\left[\sum_{1\le|\alpha|\le 2} c_\alpha(x,t)D^\alpha u v + g(x,u_t)v\right]dxdt +$$

$$+\int_\Omega [u_t(x,\tau)v(x,\tau) - u_1(x)v(x,0)]\,dx = 0 \qquad (5)$$

для довільного $\tau \in (0,T]$ і для довільної функції $v \in L^2((0,T); H_0^2(\Omega)) \cap L^p((0,T); L^p(\Omega))$ такої, що $v_t \in L^2((0,T); L^2(\Omega))$.

II. Існування та єдиність узагальненого розв'язку

Теорема 1. *Нехай виконуються умови **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(G)**, **(F)**, **(U)**. Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок u задачі (1)–(4) в Q_T.*

□ *Доведення.*

Існування. Для доведення існування розв'язку задачі (1) – (4) використаємо схему доведення теореми 6.1 [7, с. 234]. Розглянемо в області Q_T послідовність гальоркінських наближень $u^N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} C_k^N(t)\omega_k(x)$, де $N = 1, 2, ...$, $\{\omega_k\}$ – ортонормована в $L^2(\Omega)$ система лінійно незалежних елементів простору $V \cap L^{2p-2}(\Omega)$ таких, що лінійні комбінації $\{\omega_k\}$ щільні в $V \cap L^{2p-2}(\Omega)$. При цьому функції C_k^N визначаємо як розв'язки задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\int_\Omega\left[u_{tt}^N\omega_k + \sum_{|\alpha|=|\beta|\le 2} a_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u_t^N D^\beta\omega_k\right]dx +$$

$$+\int_\Omega\left[g(x,u_t^N)\omega_k - f(x,t)\omega_k\right]dx +$$

$$+\int_\Omega \sum_{|\alpha|=|\beta|\le 2} b_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u^N D^\beta\omega_k dx +$$

$$+\int_\Omega \sum_{1\le|\alpha|\le 2} c_\alpha(x,t)D^\alpha u^N D^\beta\omega_k dx = 0, \qquad (6)$$

$$C_k^N(0) = u_{0,k}^N,\ k = 1, ..., N,\ u_0^N(x) = \sum_{k=1}^N u_{0,k}^N\omega_k(x),$$

$$C_{kt}^N(0) = u_{1,k}^N,\ k = 1, ..., N,\ u_1^N(x) = \sum_{k=1}^N u_{1,k}^N\omega_k(x),$$

$$\left\|u_0^N - u_0\right\|_V \to 0,\ \left\|u_1^N - u_1\right\|_{V\cap L^{2p-2}(\Omega)} \to 0,$$

$N \to +\infty$. На підставі теореми Каратеодорі [8, с. 54] існує неперервний розв'язок такої задачі Коші, що має абсолютно неперервну похідну по t на проміжку $[0,\tau_0]$ для деякого $\tau_0 \le T$. З отриманих нижче оцінок випливатиме, що $\tau_0 = T$. Помножимо кожне рівняння системи (6) на C_{kt}^N, підсумуємо усі рівняння за k від 1 до N та проінтегруємо результат по t на проміжку $[0,\tau]$, $\tau \le T$. В результаті одержимо рівність

$$\int_{Q_\tau} u_{tt}^N u_t^N dxdt + \int_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|\le 2} a_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u_t^N D^\beta u_t^N dxdt +$$

$$+\int_{Q_\tau}\left[g(x,u_t^N)u_t^N - f(x,t)u_t^N\right]dxdt + \int_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|\le 2}\Big[b_{\alpha\beta}(x,t)\times$$

$$\times D^\alpha u^N D^\beta u_t^N + \sum_{1\le|\alpha|\le 2} c_\alpha(x,t)D^\alpha u^N u_t^N\Big]dxdt = 0. \qquad (7)$$

З врахуванням умов теореми проведемо перетворення та оцінки інтегралів (7). Зокрема, отримаємо

$$\int\limits_{Q_\tau} u_{tt}^N u_t^N dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\left|u_t^N(x,\tau)\right|^2 dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\left|u_1^N(x)\right|^2 dx;$$

$$\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u_t^N D^\beta u_t^N dxdt \geq$$

$$\geq a_{0,2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=2}\left|D^\alpha u_t^N\right|^2 dxdt;$$

$$\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|=2} b_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u^N D^\beta u_t^N dxdt \ =$$

$$= \int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|=2}\left(b_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u^N D^\beta u^N\right)_t dxdt -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|=2} b_{\alpha\beta,t}(x,t)D^\alpha u^N D^\beta u^N dxdt \geq$$

$$\geq \frac{b_{0,2}}{2}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=2}\left|D^\alpha u^N(x,\tau)\right|^2 dx -$$

$$-\frac{b_{1,2}n}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=2}\left|D^\alpha u^N\right|^2 dxdt -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=|\beta|=2} b_{\alpha\beta}(x,0)D^\alpha u_0^N D^\beta u_0^N dx,$$

де $b_{1,2} = \max\limits_{|\alpha|=|\beta|=2}\ \operatorname*{esssup}\limits_{(x,t)\in Q_T}|b_{\alpha\beta,t}(x,t)|$;

$$\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=2} c_\alpha(x,t)D^\alpha u^N u_t^N dxdt \leq C_1(c_2,\delta_1,n)\times$$

$$\times\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=2}\left|D^\alpha u^N\right|^2 dxdt + \delta_1 T\int\limits_{\Omega_\tau}\left|u_t^N\right|^2 dx,$$

де $\delta_1 > 0$, $C_1 > 0$, $c_2 = \max\limits_{|\alpha|=2}\ \operatorname*{esssup}\limits_{(x,t)\in Q_T}|c_\alpha(x,t)|$.

Для подальших оцінок використаємо нерівність

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha w|^2 dxdt \leq \delta_0\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha w|^2 dxdt +$$

$$+C(\delta_0)\int\limits_{\Omega}|w|^2 dxdt, \tag{8}$$

$\delta_0 > 0$, $C(\delta_0) > 0$, правильну для довільної функції $w \in H_0^2(\Omega)$. Доведемо нерівність (8), записавши очевидну рівність

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=2} D^\alpha w w dxdt = \int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=1} D^\alpha(D^\alpha w w)dxdt -$$

$$-\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha w|^2 dxdt = -\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha w|^2 dxdt.$$

Звідси легко отримаємо (8), використовуючи нерівність Коші.

На підставі (8) матимемо

$$\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|=1} a_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u_t^N D^\beta u_t^N dxdt \leq$$

$$\leq \delta_2 C_2(a_1,n)\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=2}\left|D^\alpha u_t^N\right|^2 dxdt + \delta_3 C_4(a_1,n)\times$$

$$\times\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=2}\left|D^\alpha u_t^N\right|^2 dxdt + C_5(a_1,\delta_3,n)\int\limits_{Q_\tau}|u_t^N|^2 dxdt,$$

де $a_1 = \max\limits_{|\alpha|=|\beta|=1}\ \operatorname*{esssup}\limits_{(x,t)\in Q_T}|a_{\alpha\beta}(x,t)|$, $\delta_2 > 0$, $\delta_3 > 0$, $C_2 > 0$, $C_3 > 0$, $C_4 > 0$, $C_5 > 0$.

У подібний спосіб оцінимо інтеграл

$$\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|=1} b_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u^N D^\beta u_t^N dxdt \ =$$

$$= \int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|=1} b_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u_t^N D^\alpha\Big[u^N(x,0) +$$

$$+\int\limits_0^t u_t^N(x,\tau)d\tau\Big]dxdt \leq b_1\delta_4\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=2}\left|D^\alpha u_t^N\right|^2 dxdt +$$

$$+ b_1 C_6(\delta_4,T)\int\limits_{Q_\tau}|u_t^N|^2 dxdt + C_7(\delta_4)\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha u_0^N|^2 dx,$$

де $b_1 = \max\limits_{|\alpha|=|\beta|=1}\ \operatorname*{esssup}\limits_{(x,t)\in Q_T}|b_{\alpha\beta}(x,t)|$, $\delta_4 > 0$ – довільна стала, $C_6 > 0$, $C_7 > 0$.

Завершимо оцінювання інтегралів рівності (7):

$$\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=1} c_\alpha(x,t)D^\alpha u^N u_t^N dxdt \leq$$

$$\leq \frac{c_1}{2}n\varkappa\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=2}\left|D^\alpha u^N\right|^2 dxdt + \frac{c_1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\left|u_t^N\right|^2 dx,$$

де $c_1 = \max\limits_{|\alpha|=1}\ \operatorname*{esssup}\limits_{(x,t)\in Q_T}|c_\alpha(x,t)|$, $\varkappa$ – константа нерівності Фрідріхса [9, с. 33] в області Q_T;

$$\int\limits_{Q_\tau} a_{00}(x,t)\left|u_t^N\right|^2 dxdt \leq a_0\int\limits_{Q_\tau}\left|u_t^N\right|^2 dxdt,$$

де $a_0 = \operatorname*{esssup}\limits_{(x,t)\in Q_T}|a_{00}(x,t)|$;

$$\int\limits_{Q_\tau} b_{00}(x,t)u^N u_t^N dxdt = \int\limits_{Q_\tau} b_{00}(x,t)[u^N(x,0) +$$

$$+\int\limits_0^t u_t^N(x,\tau)d\tau]u_t^N dxdt \leq C_8(b_0,T)\int\limits_{Q_\tau}\left|u_t^N\right|^2 dxdt +$$

$$C_9(b_0,T)\int\limits_{\Omega}\left|u_0^N\right|^2 dx, \text{ де } b_0 = \operatorname*{esssup}\limits_{(x,t)\in Q_T}|b_{00}(x,t)|;$$

$$\int\limits_{Q_\tau} g(x, u_t^N) u_t^N dxdt \geq g_0 \int\limits_{Q_\tau} \left|u_t^N\right|^p dxdt;$$

$$\int\limits_{Q_\tau} f u_t^N dxdt \leq \delta_5 \int\limits_{Q_\tau} \left|u_t^N\right|^p dxdt + C_{10} \int\limits_{Q_\tau} |f|^{p'} dxdt,$$

де δ_5 – довільна додатна стала, C_{10} – деяка додатна стала, що залежить від p, δ_5.

Враховуючи наведені вище оцінки, отримаємо

$$(1 - 2\delta_1 T) \int\limits_{\Omega} \left|u_t^N(x,\tau)\right|^2 dx + 2(a_{0,2} - \delta_2 C_2 - \delta_3 C_3 -$$

$$- 2b_1\delta_4) \int\limits_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=2} \left|D^\alpha u_t^N\right|^2 dxdt + b_{0,2} \times$$

$$\times \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|=2} \left|D^\alpha u^N(x,\tau)\right|^2 dx + 2(g_0 - \delta_5) \int\limits_{Q_\tau} \left|u_t^N\right|^p dxdt \leq$$

$$\leq 2\left(C_3 + C_5 + C_6 + C_8 + \frac{c_1}{2} + a_0\right) \int\limits_{Q_\tau} \left|u_t^N\right|^2 dxdt +$$

$$+ (b_{1,2} n + 2C_1 + c_1 n \varkappa) \int\limits_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=2} \left|D^\alpha u^N\right|^2 dxdt +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} \left|u_1^N\right|^2 dx + 2C_{10} \int\limits_{Q_\tau} |f|^{p'} dxdt +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} b_{\alpha\beta}(x,0) D^\alpha u_0^N D^\beta u_0^N dx +$$

$$+ 2C_7 \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u_0^N|^2 dx + 2C_9 \int\limits_{\Omega} \left|u_0^N\right|^2 dx.$$

Якщо позначити

$$y(\tau) = \int\limits_{\Omega} \left[\left|u_t^N(x,\tau)\right|^2 + \sum_{|\alpha|=2} \left|D^\alpha u^N(x,\tau)\right|^2\right] dx,$$

то з останньої нерівності після вибору достатньо малих сталих $\delta_1 - \delta_5$ можна отримати оцінку

$$y(\tau) \leq C_{11} + C_{12} \int\limits_0^\tau y(t) dt,$$

де C_{11}, C_{12} – деякі додатні сталі, що не залежать від u^N. Тоді на підставі леми Гронуола

$$\int\limits_{\Omega} \left[\left|u_t^N(x,\tau)\right|^2 + \sum_{|\alpha|=2} \left|D^\alpha u^N(x,\tau)\right|^2\right] dx \leq C_{11} e^{C_{12} T}.$$

Якщо врахуємо наведені вище оцінки, то отримаємо

$$\int\limits_{\Omega} \left[\left|u_t^N(x,\tau)\right|^2 + \sum_{|\alpha|=2} \left|D^\alpha u^N(x,\tau)\right|^2\right] dx + \tag{9}$$

$$+ \int\limits_{Q_\tau} \left[\sum_{|\alpha|=2} \left|D^\alpha u_t^N\right|^2 + \left|u_t^N\right|^p\right] dxdt \leq C_{13}$$

для довільних $\tau \in (0, T]$, де C_{13} – додатна стала, що не залежить від N.

З нерівності (9) робимо висновок про існування деякої підпослідовності $\{u^{N_k}\}$ послідовності $\{u^N\}$ такої, що

$$u^{N_k} \to u \quad * - \text{слабко в} \quad L^\infty((0,T); H_0^2(\Omega));$$

$$u_t^{N_k} \to u_t \quad * - \text{слабко в} \quad L^\infty((0,T); L^2(\Omega));$$

$$u_t^{N_k} \to u_t \quad \text{слабко в} \quad L^2((0,T); H_0^2(\Omega));$$

$$u_t^{N_k} \to u_t \quad \text{слабко в} \quad L^p((0,T); L^p(\Omega))$$

при $N_k \to \infty$. Зауважимо також, що

$$\left\|u_t^N\right\|_{L^p((0,T);L^p(\Omega))} \leq C_{14}, \quad C_{14} = \text{const} > 0. \tag{10}$$

Продиференціюємо систему (6) за змінною t, помножимо на C_{ktt}^N, підсумуємо усі рівняння за k від 1 до N та проінтегруємо результат по проміжку $[0, \tau]$, $\tau \leq T$. Одержимо рівність

$$\int\limits_{Q_\tau} u_{ttt}^N u_{tt}^N dxdt + \int\limits_{Q_\tau} \Bigg(\sum_{|\alpha|=|\beta|\leq 2} a_{\alpha\beta,t}(x,t) D^\alpha u_t^N D^\beta u_{tt}^N +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=|\beta|\leq 2} a_{\alpha\beta}(x,t) D^\alpha u_{tt}^N D^\beta u_{tt}^N +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=|\beta|\leq 2} \left[b_{\alpha\beta,t}(x,t) D^\alpha u^N + b_{\alpha\beta}(x,t) D^\alpha u_t^N\right] D^\beta u_{tt}^N +$$

$$+ \sum_{1\leq|\alpha|\leq 2} \left[c_{\alpha,t}(x,t) D^\alpha u^N + c_\alpha(x,t) D^\alpha u_t^N\right] u_{tt}^N \Bigg) dxdt +$$

$$+ \int\limits_{Q_\tau} \left[g_t(x, u_t^N) u_{tt}^N - f_t(x,t) u_{tt}^N\right] dxdt = 0. \tag{11}$$

З врахуванням умов теореми проведемо перетворення та оцінки інтегралів рівності (11). Отримаємо

$$\int\limits_{Q_\tau} u_{ttt}^N u_{tt}^N dxdt = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \left|u_{tt}^N(x,\tau)\right|^2 dx - \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \left|u_{tt}^N(x,0)\right|^2 dx;$$

$$\int\limits_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(x,t) D^\alpha u_{tt}^N D^\beta u_{tt}^N dxdt \geq$$

$$\geq a_{0,2} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=2} \left|D^\alpha u_{tt}^N\right|^2 dxdt;$$

$$\int\limits_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} a_{\alpha\beta,t}(x,t) D^\alpha u_t^N D^\beta u_{tt}^N dxdt \leq$$

$$\leq a_{1,2}\delta_6 \int\limits_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=2} \left|D^\alpha u_{tt}^N\right|^2 dxdt +$$

$$+ C_{15}(a_{1,2}, \delta_6, n) \int\limits_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u_t^N|^2 dxdt,$$

$a_{1,2} = \max\limits_{|\alpha|=|\beta|=2} \operatorname*{esssup}\limits_{(x,t)\in Q_T} |a_{\alpha\beta,t}(x,t)|$, $\delta_6 > 0$, $C_{15} > 0$;

$$\int\limits_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} a_{\alpha\beta}(x,t) D^\alpha u^N_{tt} D^\beta u^N_{tt} dxdt \le$$

$$\le a_1\delta_7 \int\limits_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=2} \left|D^\alpha u^N_{tt}\right|^2 dxdt +$$

$$+ C_{16}(a_1,\delta_7,n) \int\limits_{Q_\tau} \left|u^N_{tt}\right|^2 dxdt, \ \delta_7 > 0, \ C_{16} > 0;$$

$$\int\limits_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} a_{\alpha\beta,t}(x,t) D^\alpha u^N_t D^\beta u^N_{tt} dxdt \le$$

$$\le a_{1,1}\delta_8 T \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|=2} \left|D^\alpha u^N_t(x,\tau)\right|^2 dx +$$

$$+ C_{17}(a_{1,1},\delta_8) \int\limits_{Q_\tau} |u^N_{tt}|^2 dxdt +$$

$$+ a_{1,1}\delta_9 \int\limits_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=2} \left|D^\alpha u^N_{tt}\right|^2 dxdt + C_{18} \int\limits_{Q_\tau} \left|u^N_{tt}\right|^2 dxdt,$$

$a_{1,1} = \max\limits_{|\alpha|=|\beta|=1} \operatorname*{esssup}\limits_{(x,t)\in Q_T} |a_{\alpha\beta,t}(x,t)|$, $\delta_8 > 0$, $\delta_9 > 0$, $C_{17} > 0$, $C_{18}(a_{1,1},\delta_9,n) > 0$;

$$\int\limits_{Q_\tau} a_{00,t}(x,t) u^N_t u^N_{tt} dxdt \le \frac{a_{0,1}}{2} \int\limits_{Q_\tau} \left|u^N_{tt}\right|^2 dxdt +$$

$$+ \frac{a_{0,1}}{2} \int\limits_{Q_\tau} \left|u^N_t\right|^2 dxdt, \ \ a_{0,1} = \operatorname*{esssup}\limits_{(x,t)\in Q_T} |a_{00,t}(x,t)|;$$

$$\int\limits_{Q_\tau} a_{00}(x,t) \left|u^N_{tt}\right|^2 dxdt \le a_0 \int\limits_{Q_\tau} \left|u^N_{tt}\right|^2 dxdt.$$

Крім того, отримаємо

$$\int\limits_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} b_{\alpha\beta}(x,t) D^\alpha u^N_t D^\beta u^N_{tt} dxdt \ge$$

$$\ge \frac{b_{0,2}}{2} \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|=2} \left|D^\alpha u^N_t(x,\tau)\right|^2 dx -$$

$$- \frac{b_{1,2} n}{2} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=2} \left|D^\alpha u^N_t\right|^2 dxdt -$$

$$- \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} b_{\alpha\beta}(x,0) D^\alpha u^N_t(x,0) D^\beta u^N_t(x,0) dx;$$

$$\int\limits_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} b_{\alpha\beta,t}(x,t) D^\alpha u^N D^\beta u^N_{tt} dxdt \le$$

$$\le b_{1,2}\delta_{10} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=2} \left|D^\alpha u^N_{tt}\right|^2 dxdt +$$

$$+ C_{20}(b_{1,2},\delta_{10}) \int\limits_{Q_\tau} \left|D^\alpha u^N\right|^2 dxdt, \ \delta_{10} > 0, \ C_{20} > 0;$$

$$\int\limits_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} b_{\alpha\beta}(x,t) D^\alpha u^N_t D^\beta u^N_{tt} dxdt \le$$

$$\le b_1\delta_{11} T \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|=2} \left|D^\alpha u^N_t(x,\tau)\right|^2 dx + C_{21}(b_1,\delta_{11}) \times$$

$$\times \int\limits_{Q_\tau} \left|u^N_t\right|^2 dxdt + b_1\delta_{12} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=2} \left|D^\alpha u^N_t\right|^2 dxdt +$$

$$+ C_{22}(b_1,\delta_{12}) \int\limits_{Q_\tau} \left|u^N_{tt}\right|^2 dxdt,$$

$\delta_{11} > 0$, $\delta_{12} > 0$, $C_{21} > 0$, $C_{22} > 0$;

$$\int\limits_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} b_{\alpha\beta,t}(x,t) D^\alpha u^N D^\beta u^N_{tt} dxdt \le$$

$$\le b_{1,1}\delta_{13} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=2} \left|D^\alpha u^N_{tt}\right|^2 dxdt + C_{23}(b_{1,1},\delta_{13}) \times$$

$$\times \int\limits_{Q_\tau} \left|u^N_{tt}\right|^2 dxdt + C_{24}(b_{1,1},\varkappa) \int\limits_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=2} \left|D^\alpha u^N\right|^2 dxdt,$$

$b_{1,1} = \max\limits_{|\alpha|=|\beta|=1} \operatorname*{esssup}\limits_{(x,t)\in Q_T} |b_{\alpha\beta,t}(x,t)|$, $\delta_{13} > 0$, $C_{23} > 0$, $C_{24} > 0$;

$$\int\limits_{Q_\tau} b_{00,t}(x,t) u^N u^N_{tt} dxdt \le C_{25}(b_{0,1},\varkappa) \times$$

$$\times \int\limits_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=2} \left|D^\alpha u^N\right|^2 dxdt + \frac{b_{0,1}}{2} \int\limits_{Q_\tau} \left|u^N_{tt}\right|^2 dxdt,$$

$b_{0,1} = \operatorname*{esssup}\limits_{(x,t)\in Q_T} |b_{00,t}(x,t)|$, $C_{25} > 0$;

$$\int\limits_{Q_\tau} b_{00}(x,t) u^N_t u^N_{tt} dxdt \le \frac{b_0}{2} \int\limits_{Q_\tau} \left[\left|u^N_t\right|^2 + \left|u^N_{tt}\right|^2 \right] dxdt.$$

А також отримаємо

$$\int\limits_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=2} c_{\alpha,t}(x,t) D^\alpha u^N u^N_{tt} dxdt \le$$

$$\le C_{26}(c_{2,1},n) \int\limits_{Q_\tau} \Big[\sum_{|\alpha|=2} \left|D^\alpha u^N\right|^2 + \left|u^N_{tt}\right|^2 \Big] dxdt,$$

$c_{2,1} = \max\limits_{|\alpha|=|\beta|=2} \operatorname*{esssup}\limits_{(x,t)\in Q_T} |c_{\alpha,t}(x,t)|$, $C_{26} > 0$;

$$\int\limits_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=2} c_\alpha(x,t) D^\alpha u^N_t u^N_{tt} dxdt \le c_2\delta_{14} T \times$$

$$\times \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|=2} \left|D^\alpha u^N_t(x,\tau)\right|^2 dx + C_{27}(\delta_{14},c_2) \times$$

$$\times \int\limits_{Q_\tau} \left|u^N_{tt}\right|^2 dxdt, \quad C_{27} > 0;$$

$$\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=1}c_{\alpha,t}(x,t)D^\alpha u^N u_{tt}^N dxdt \le C_{28}(c_{1,1},n,\varkappa)\times$$

$$\times\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=2}\left|D^\alpha u^N\right|^2 dxdt+\frac{c_{1,1}}{2}\int\limits_{Q_\tau}\left|u_{tt}^N\right|^2 dxdt,$$

$c_{1,1}=\max\limits_{|\alpha|=|\beta|=1}\operatorname*{esssup}\limits_{(x,t)\in Q_T}|c_{\alpha,t}(x,t)|$, $C_{28}>0$;

$$\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=1}c_\alpha(x,t)D^\alpha u_t^N u_{tt}^N dxdt \le c_1\delta_{15}T\times$$

$$\times\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=2}\left|D^\alpha u_t^N(x,\tau)\right|^2 dx+C_{29}(\delta_{15},c_1)\times$$

$$\times\int\limits_{Q_\tau}\left|u_t^N\right|^2 dxdt+\frac{c_1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\left|u_{tt}^N\right|^2 dxdt,\quad C_{29}>0;$$

$$\int\limits_{Q_\tau}g_t(x,u_t^N)u_{tt}^N dxdt\ge 0;$$

$$\int\limits_{Q_\tau}f_t u_{tt}^N dxdt\le\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\left|u_{tt}^N\right|^2 dxdt+\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}|f_t|^2 dxdt.$$

Після належного вибору достатньо малих сталих $\delta_6-\delta_{15}$ та після врахування отриманих вище збіжностей з наведених оцінок інтегралів рівності (11) одержимо нерівність

$$\int\limits_{\Omega}\left|u_{tt}^N(x,\tau)\right|^2 dxdt+\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha u_{tt}^N(x,\tau)|^2dx+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=2}\left|D^\alpha u_{tt}^N\right|^2 dxdt\le C_{30}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha u_t^N|^2dxdt+$$

$$+C_{31}+C_{32}\int\limits_{\Omega}\left|u_{tt}^N(x,0)\right|^2 dx, \tag{12}$$

де додатні сталі C_{30}, C_{31}, C_{32} не залежать від N. Розглянемо далі систему (6) при $t=0$, помножимо її на $C_{ktt}^N(0)$. Одержимо після підсумовування за k від 1 до N, що

$$\int\limits_{\Omega}\Big[\left|u_{tt}^N(x,0)\right|^2+\sum_{|\alpha|=|\beta|\le 2}(-1)^{|\alpha|}D^\beta\left(a_{\alpha\beta}(x,0)D^\alpha u_t^N(x,0)\right)\times$$

$$\times u_{tt}^N(x,0)+\sum_{|\alpha|=|\beta|\le 2}(-1)^{|\alpha|}D^\beta\left(b_{\alpha\beta}(x,0)D^\alpha u^N(x,0)\right)\times$$

$$\times u_{tt}^N(x,0)+\sum_{1\le|\alpha|\le 2}c_\alpha(x,0)D^\alpha u^N(x,0)u_{tt}^N(x,0)\Big]dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega}\Big[g(x,u_t^N(x,0))-f(x,0)u_{tt}^N(x,0)\Big]dx. \tag{13}$$

За умов теореми проведемо стандартні оцінки доданків рівності (13). Отримаємо, що

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=|\beta|\le 2}(-1)^{|\alpha|}D^\beta\left(a_{\alpha\beta}(x,0)D^\alpha u_t^N(x,0)\right)\times$$

$$\times u_{tt}^N(x,0)dx\le C_{33}\left\|u_1^N\right\|_V^2+\delta_{16}\int\limits_{\Omega}\left|u_{tt}^N(x,0)\right|^2 dx,$$

$\delta_{16}>0$, стала $C_{33}>0$ залежить від $D^2a_{\alpha\beta}(x,0)$ ($|\alpha|=|\beta|=2$), $D^1a_{\alpha\beta}(x,0)$ ($|\alpha|=|\beta|=1$), $a_{\alpha\beta}(x,0)$ ($|\alpha|=|\beta|\le 2$) та δ_{16};

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=|\beta|\le 2}(-1)^{|\alpha|}D^\beta\left(b_{\alpha\beta}(x,0)D^\alpha u^N(x,0)\right)\times$$

$$\times u_{tt}^N(x,0)dx\le C_{34}\left\|u_0^N\right\|_V^2+\delta_{17}\int\limits_{\Omega}\left|u_{tt}^N(x,0)\right|^2 dx,$$

$\delta_{17}>0$, стала $C_{34}>0$ залежить від $D^2b_{\alpha\beta}(x,0)$ ($|\alpha|=|\beta|=2$), $D^1b_{\alpha\beta}(x,0)$ ($|\alpha|=|\beta|=1$), $b_{\alpha\beta}(x,0)$ ($|\alpha|=|\beta|\le 2$) та δ_{17};

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{1\le|\alpha|\le 2}c_\alpha(x,0)D^\alpha u^N(x,0)u_{tt}^N(x,0)dx\le$$

$$\le C_{35}\left\|u_0^N\right\|_{H_0^2(\Omega)}^2+\delta_{18}\int\limits_{\Omega}\left|u_{tt}^N(x,0)\right|^2 dx,$$

$\delta_{18}>0$, стала $C_{35}>0$ залежить від $c_\alpha(x,0)$, δ_{18};

$$\int\limits_{\Omega}g\left(x,u_t^N(x,0)\right)u_{tt}^N(x,0)dx\le\frac{1}{8}\int\limits_{\Omega}\left|u_{tt}^N(x,0)\right|^2 dx+$$

$$+2g_1^2\int\limits_{\Omega}\left|u_1^N(x)\right|^{2p-2}dx;$$

$$\int\limits_{\Omega}f(x,0)u_{tt}^N(x,0)dx\le\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\left|u_{tt}^N(x,0)\right|^2 dxdt+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|f(x,0)|^2 dxdt.$$

Після належного вибору достатньо малих сталих $\delta_{16}-\delta_{18}$ одержимо нерівність

$$\int\limits_{\Omega}\left|u_{tt}^N(x,0)\right|^2 dx\le C_{36}\left\|u_0^N\right\|_V^2+C_{37}\left\|u_1^N\right\|_V^2+$$

$$+C_{38}\left\|u_1^N\right\|_{L^{2p-2}(\Omega)}^{2p-2}+C_{39}\int\limits_{\Omega}|f(x,0)|^2 dx, \tag{14}$$

причому додатні сталі $C_{36}-C_{39}$ не залежать від N. Отже, враховуючи (14), з нерівності (12) після застосування леми Гроноула можна отримати: існує підпослідовність послідовності $\{u^N\}$(позначимо її для зручності знову $\{u^{N_k}\}$) така, що

$$u_{tt}^{N_k}\to u_{tt}\quad *-\text{слабко в}\quad L^\infty((0,T);H_0^2(\Omega)),$$

$$u_{tt}^{N_k}\to u_{tt}\quad\text{слабко в}\quad L^2((0,T);H_0^2(\Omega)),$$

$$u_t^{N_k}\to u_t\quad *-\text{слабко в}\quad L^\infty((0,T);H_0^2(\Omega))$$

при $N_k\to\infty$.

Крім того, на підставі оцінки (10)

$$g(x,u_t^{N_k})\to\chi\quad\text{слабко в}\quad L^{p'}(Q_T)$$

при $N_k\to\infty$. Використовуючи теорему 5.1 [7, с. 70], без обмеження загальності можна вважати, що $u_t^{N_k}\to u_t$ сильно в $L^2(Q_T)$ і майже всюди $u_t^{N_k}\to u_t$ в Q_T при $N_k\to\infty$. Отже, $\chi=g(x,u_t)$.

Аналогічно до того, як це зроблено при доведенні теореми 1.1 [7, с. 20], одержимо, що $u \in C([0,T]; H_0^2(\Omega))$, $u_t \in C\left([0,T]; L^2(\Omega)\right)$. Оскільки $u^{N_k}(\cdot,0) \to u(\cdot,0)$ слабко в V, $u_0^{N_k} \to u_0$, сильно в V, то $u(x,0) = u_0(x)$, $x \in \Omega$. Крім того, аналогічно до [7, с. 236] покажемо, що $u_t(x,0) = u_1(x)$, $x \in \Omega$. Легко показати, що функція u задовольняє інтегральній тотожності (5). Отже, u є узагальненим розв'язком задачі (1)–(4).

Єдиність. Приймемо $w = u^1 - u^2$, де u^1, u^2 – два узагальнені розв'язки задачі (1)–(4). Оскільки $u^1(x,0) = u^2(x,0)$, $u_t^1(x,0) = u_t^2(x,0)$, то, міркуючи аналогічно до того, як отримано нерівність (9), одержимо

$$\int_\Omega \left[|w_t(x,\tau)|^2 + \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha w(x,\tau)|^2 \right] dx + \int_{Q_\tau} \left[\sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha w_t|^2 + |w_t|^p \right] dxdt \le 0.$$

Отже, $u^1 = u^2$ майже скрізь в Q_T. ■

Висновки

Проблема встановлення описаних вище класів коректності викликає інтерес не лише з погляду практичного застосування, а й з точки зору теоретичного вивчення різних крайових задач, крайові умови в яких описують механічні моделі, які вивчають в теорії пружності. Видається важливим та цікавим розглянути в подальших дослідженнях аналогічні питання для мішаних задач в необмежених областях. При цьому плануємо дослідити узагальнені розв'язки як у вагових соболєвських просторах, так і в просторах локально інтегровних функцій.

Література

[1] Gu R.J., Kuttler K.L., Shillor M. Frictional wear of a thermoelastic beam// J. Math. Anal. And Appl. – **242.**– 2000.– P. 212 – 236.

[2] Strómberg N., Johansson L., Klarbring A. Derivation and analysis of a generalized standard model for a contact friction and wear// Intern. J. Solids Structures – **13.**– 1996. – P. 1817 – 1836.

[3] Andrews K.T., Shillor M., Wright S. On the dynamic vibrations of an elastic beam in frictional contact with a rigid obstacle// J. Elasticity – **42.**– 1996.– P. 1 – 30.

[4] Martins J.A.C., Oden J.T. Existence and uniqueness results for dynamic contact problems with normal and friction interface laws// Nonlin. Anal.–**11.**– 1987.– P. 407–428.

[5] Kuttler K.L., Renard Y., Shillor M. Models and simulations of dynamic frictional contact// Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. – **177.**– 1999.– P. 259 – 272.

[6] Amassad A., Shillor M., Sofonea M. A quasistatic contact problem with slip dependent coefficient of friction// Math. Methods Appl. Sci. – **22.**– 1999.– P. 267 – 284.

[7] Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.– М.: Эдиториал УРСС, 2002.

[8] Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Изд.-во иностр. лит., 1958.

[9] Гончаренко В.М. Основы теории уравнений с частными производными. – К.: Вища шк., 1985.

THE MIXED PROBLEM FOR FIFTH ORDER NONLINEAR EQUATION OF BEAM VIBRATIONS TYPE IN BOUNDED DOMAIN

P. Pukach

National University "Lvivska Politechnika"
12 S. Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine

The paper is devoted to investigation of the first mixed problem for nonlinear equation of the fifth order in bounded domain. Described equation generalizes the equation$u_{tt} + au_{txxxx} + bu_{xxxx} + |u_t|^{p-2}u_t = f$, $p > 2$, which is studied in elasticity theory. The conditions of the existence and uniqueness of generalized solution have been obtained. The classes of the existence and uniqueness are Sobolev spaces of functions.

Keywords: nonlinear equation of beam vibrations, Galerkin method.

2000 MSC: 35G30

UDK: 517.95