ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
“ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”
“Фізико-математичні науки”
№ 566, 2006, с. 41–51

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
“Physical and mathematical sciences”
№ 566, 2006, p. 41–51

КРАЙОВА ЗАДАЧА З НЕЛОКАЛЬНИМИ ДВОТОЧКОВИМИ УМОВАМИ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

В. Ільків

Національний університет “Львівська політехніка”
вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 13 червня 2006 р.)

В області, що є декартовим добутком відрізка $[0,T]$ і p-вимірного тора Ω_p, досліджено нелокальну задачу зі загальними лінійними двоточковими умовами для строго гіперболічного (хвильового) рівняння $u_{tt} + a^2\Delta u$, де $a = a(t) > 0$ — неперервно диференційовна на $[0,T]$ функція, $\Delta = \sum_{j=1}^{p} \partial^2/\partial x_j^2$ — оператор Лапласа.

Задача є некоректною за Адамаром і пов’язана з проблемою малих знаменників. За допомогою метричного підходу доведено теорему про оцінки знизу малих знаменників. На підставі таких оцінок отримано умови існування та єдиності розв’язку задачі у просторах Соболєва періодичних за змінними $x_1, \ldots, x_p$ функцій.

Ключові слова: гіперболічне рівняння, простори Соболєва, малі знаменники.

2000 MSC: 35G30

УДК: 517.946

Вступ

Задачі з двоточковими нелокальними умовами для рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними досліджувалися багатьма авторами [1, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 18]. У роботах [6, 7, 8, 9, 11, 12, 15] такі задачі вивчено для систем диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами у шкалах просторів Соболєва періодичних за просторовими змінними функцій. Ці задачі є некоректними за Адамаром, а умови їх розв’язності пов’язані з проблемою оцінювання знизу малих знаменників, які виникають в рядах Фур’є, що зображають формальні розв’язки цих задач.

Вирішення проблеми малих знаменників здійснюється на основі метричного підходу [7, 8, 9, 15, 16, 17]. У межах цього підходу розглядається не окрема задача, а множина задач. Елементами цієї множини є задачі із фіксованими даними (коефіцієнтами диференціальних рівнянь, коефіцієнтами крайових умов чи іншими параметрами), які утворюють певну область у просторі даних. Існування та єдиність розв’язку у відповідній шкалі просторів доводиться для майже всіх (за мірою Лебега) точок згадуваної області або для всіх точок підобласті, міра якої відрізняється від міри області на довільне мале число.

Для рівнянь та систем рівнянь зі сталими коефіцієнтами встановлено розв’язність деяких нелокальних задач у шкалі просторів Соболєва $\mathbf{H}_q(\Omega_p)$, $q \in \mathbb{R}$.

Для рівнянь зі змінними коефіцієнтами існують приклади нелокальних задач, які не є розв’язними у шкалі просторів Соболєва. Зокрема нелокальна задача з двоточковими умовами для одного рівняння зі змінним коефіцієнтом

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial u}{\partial x} - \cos t\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (t,x) \in [0,T] \times \Omega_1,$$

$$\nu u(0,x) - \mu u(\pi,x) = \varphi(x), \quad x \in \Omega_1,$$

де a, ν, μ — довільні дійсні числа, $|\nu| \neq |\mu|$, має єдиний розв’язок

$$u(t,x) = \exp(iaDt + \sin t \cdot D^2)\big(\nu - \mu e^{ia\pi D}\big)^{-1}\varphi(x),$$

причому $u(\pi/2,\cdot) \in \mathbf{L}_2(\Omega_1)$ для довільної функції $\varphi(x) \notin \mathbf{H}_q(\Omega_1)$ і довільного дійсного числа q.

У роботі показано, що для строго гіперболічних рівнянь зі змінними за t коефіцієнтами нелокальна задача розв’язна у просторах Соболєва, подібно до нелокальних задач для рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Розглянуто нелокальну задачу для рівняння типу коливань струни

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2(t)\Delta u$$

із загальними нелокальними двоточковими умовами.

Встановлено оцінки знизу для малих знаменників, які виникли під час дослідження задачі, та гладкість і оцінку норми розв’язку задачі у просторах Соболєва.

Аналогічно можна дослідити нелокальні задачі для довільного строго гіперболічного рівняння другого порядку, а також для строго гіперболічних рівнянь вищих порядків.

I. Постановка задачі

Позначимо p-вимірний тор змінної $x = (x_1, \ldots, x_p)$ через Ω_p, циліндричну область змінних t та x – через $\mathcal{D}^p$, а саме $\Omega_p = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, $\mathcal{D}^p = [0,T] \times \Omega_p$.

В області $\mathcal{D}^p$ розглядається строго гіперболічне (хвильове) рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2(t)\Delta u = 0, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2}, \quad (1)$$

і нелокальні умови

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ \partial u/\partial t \end{pmatrix}\Big|_{t=0} + \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ \partial u/\partial t \end{pmatrix}\Big|_{t=T} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

де $a(t) > 0$ та неперервно диференційовна на відрізку $[0,T]$ функція, коефіцієнти a, b, c, d та a_1, b_1, c_1, d_1 — комплексні числа, модуль яких не перевищує одиницю. Функції $\varphi_1 = \varphi_1(x)$, $\varphi_2 = \varphi_2(x)$ є заданими 2π-періодичними функціями, а функція $u = u(t,x)$ є шуканим 2π-періодичним розв'язком задачі (1), (2).

Для довільного дійсного числа q введемо простір 2π-періодичних функцій $\mathbf{H}_q(\Omega_p)$, який є поповненням множини тригонометричних многочленів

$$\varphi(x) = \sum_k \widehat{\varphi}(k) e^{ikx}$$

за нормою

$$\|\varphi\|^2_{\mathbf{H}_q(\Omega_p)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \widetilde{k}^{2q} |\widehat{\varphi}(k)|^2,$$

де $k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $kx = k_1x_1 + \cdots + k_px_p$, $\widetilde{k} = \sqrt{1 + k_1^2 + \cdots + k_p^2}$.

Простори $\mathbf{H}_q(\Omega_p)$, $q \in \mathbb{R}$, утворюють шкалу просторів $\mathbf{H}(\Omega_p)$ за змінною q.

Вивчається питання розв'язності задачі (1), (2) у шкалі просторів $\mathbf{H}(\Omega_p)$, а саме, встановлюються умови, за яких задача (1), (2) має розв'язок u, який для всіх значень $t \in [0,T]$ разом із похідною по t належить до шкали просторів $\mathbf{H}(\Omega_p)$ для довільних елементів φ_1 та φ_2 із цієї шкали.

Означення 1. Розв'язком задачі (1), (2) із шкали просторів $\mathbf{H}(\Omega_p)$ називаємо двічі неперервно диференційовну на інтервалі $[0,T]$ функцію u таку, що для кожного $t \in [0,T]$ елементи $u(t,\cdot)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot)$ належать до шкали просторів $\mathbf{H}(\Omega_p)$, і u задовольняє рівняння (1) та умови (2) у слабкому сенсі, тобто для всіх $t \in [0,T]$ та для всіх тригонометричних многочленів $w = w(x)$ виконуються рівності

$$\int_{\Omega_p} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2(t)\Delta u\right) w\, dx = 0,$$

$$\int_{\Omega_p} \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ \partial u/\partial t \end{pmatrix}\Big|_{t=0} + \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ \partial u/\partial t \end{pmatrix}\Big|_{t=T} - \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}\right] w\, dx = 0.$$

Зауваження 1. Якщо $u \in \mathbf{H}_\sigma(\Omega_p)$ — розв'язок задачі (1), (2), то

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,\cdot) \in \mathbf{H}_{\sigma-2}(\Omega_p),$$

причому

$$\Big\|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,\cdot)\Big\|_{\mathbf{H}_{\sigma-2}(\Omega_p)} = a(t)\|u\|_{\mathbf{H}_\sigma(\Omega_p)}.$$

II. Побудова та оцінка розв'язку

Введемо вектор-функції

$$U = \begin{pmatrix} u \\ \partial u/\partial t \end{pmatrix}, \qquad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

і запишемо задачу (1), (2) у векторно-матричному вигляді

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a^2(t)\Delta & 0 \end{pmatrix} U, \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} U(0,x) + \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} U(T,x) = \varphi(x). \quad (5)$$

Якщо вектор-функція

$$U(t,x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} U_k(t) e^{ikx},$$

а вектор-функція

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \widehat{\varphi}(k) e^{ikx},$$

де

$$U_k(t) = \begin{pmatrix} U_{k1}(t) \\ U_{k2}(t) \end{pmatrix}, \quad \widehat{\varphi}(k) = \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_1(k) \\ \widehat{\varphi}_2(k) \end{pmatrix},$$

то, згідно з означенням 1, вектор-функція $U_k = U_k(t)$ є розв'язком нелокальної задачі

$$\frac{dU_k}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2(t)\|k\|^2 & 0 \end{pmatrix} U_k, \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} U_k(0) + \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} U_k(T) = \widehat{\varphi}(k), \quad (7)$$

причому $\|k\|^2 = \widetilde{k}^2 - 1 = k_1^2 + \cdots + k_p^2$, $k \in \mathbb{Z}^p$.

При цьому виконуються рівності

$$u_k(t) = U_{k1}(t), \quad \frac{du_k}{dt}(t) = U_{k2}(t),$$

тому розв'язок задачі (1), (2) матиме такий вигляд:

$$u(t,x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} U_{k1}(t) e^{ikx}, \quad \frac{du}{dt}(t,x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} U_{k2}(t) e^{ikx}.$$

Якщо $k \neq 0$, то матриця системи (6)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2(t)\|k\|^2 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \rho_k^2(t) & 0 \end{pmatrix},$$

де
$$\rho_k(t) = ia(t)\|k\|,$$
має два прості уявні власні значення $\rho_k(t)$ та $-\rho_k(t)$.

При $k = 0$ власні значення $\pm\rho_k(t)$ збігаються і матриця системи (6) має такий вигляд:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
тобто
$$\frac{dU_{k1}}{dt} = U_{k2}, \qquad \frac{dU_{k2}}{dt} = 0.$$
Загальний розв'язок останньої системи диференціальних рівнянь
$$U_k(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{01} \\ C_{02} \end{pmatrix}$$
при підстановці в умову (7) дає систему лінійних алгебричних рівнянь
$$\begin{pmatrix} a + a_1 & b + a_1 T + b_1 \\ c + c_1 & d + c_1 T + d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{01} \\ C_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_1(0) \\ \widehat{\varphi}_2(0) \end{pmatrix} \qquad (8)$$
для визначення сталих C_{01} і C_{02}. Матриця $\Delta(0)$ системи (8) має визначник
$$\det \Delta(0) = \begin{vmatrix} a & a_1 \\ c & c_1 \end{vmatrix} T + \begin{vmatrix} a + a_1 & b + b_1 \\ c + c_1 & d + d_1 \end{vmatrix} =$$
$$= (ac_1 - ca_1)T + (a + a_1)(d + d_1) - (c + c_1)(b + b_1).$$
Якщо
$$\det \Delta(0) = 0,$$
то система (8) не має розв'язку або має безліч розв'язків, якщо ж
$$\det \Delta(0) \neq 0,$$
то система (8) має єдиний розв'язок
$$\begin{pmatrix} C_{01} \\ C_{02} \end{pmatrix} = \Delta^{-1}(0) \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_1(0) \\ \widehat{\varphi}_2(0) \end{pmatrix}.$$

Якщо $k \neq 0$, а отже $\rho_k(t) \neq 0$ на $[0, T]$, то маємо для матриці системи (6) таку факторизацію:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \rho_k^2(t) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho_k(t) & -\rho_k(t) \end{pmatrix} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} \rho_k(t) & 0 \\ 0 & -\rho_k(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho_k(t) & -\rho_k(t) \end{pmatrix}^{-1},$$
причому
$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho_k(t) & -\rho_k(t) \end{pmatrix} = -2\rho_k(t),$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho_k(t) & -\rho_k(t) \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \rho_k^{-1}(t) \\ 1 & -\rho_k^{-1}(t) \end{pmatrix}.$$
Зробимо заміну шуканих вектор-функцій
$$U_k(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho_k(t) & -\rho_k(t) \end{pmatrix} Z_k(t),$$
тоді нова шукана вектор-функція
$$Z_k(t) = \begin{pmatrix} 1 & \rho_k^{-1}(t) \\ 1 & -\rho_k^{-1}(t) \end{pmatrix} \frac{U_k(t)}{2}$$
є розв'язком системи диференціальних рівнянь
$$\frac{dZ_k}{dt} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho_k(t) & -\rho_k(t) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{d\rho_k(t)}{dt} Z_k =$$
$$= \begin{pmatrix} \rho_k(t) & 0 \\ 0 & -\rho_k(t) \end{pmatrix} Z_k.$$
Враховуючи, що
$$\frac{d\rho_k(t)}{dt} = ia'(t)\|k\|,$$
маємо таку задачу для знаходження функції Z_k:
$$\frac{dZ_k}{dt} = \rho_k(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} Z_k + \frac{a'(t)}{2a(t)} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} Z_k, \quad (9)$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho_k(0) & -\rho_k(0) \end{pmatrix} Z_k(0) + \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho_k(T) & -\rho_k(T) \end{pmatrix} Z_k(T) = \widehat{\varphi}(k). \quad (10)$$
Розв'язок задачі існує, єдиний і має вигляд
$$Z_k(t) = Y_k(t) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho_k(0) & -\rho_k(0) \end{pmatrix}^{-1} \Delta^{-1}(k) \widehat{\varphi}(k) \quad (11)$$
за виконання умови
$$\det \Delta(k) \neq 0, \qquad (12)$$
де $Y_k(t)$ – нормальна в точці $t = 0$ фундаментальна система розв'язків системи диференціальних рівнянь (9), матриця
$$\Delta(k) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho_k(T) & -\rho_k(T) \end{pmatrix} \times$$
$$\times Y_k(T) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho_k(0) & -\rho_k(0) \end{pmatrix}^{-1}. \quad (13)$$

Нехай $\|A\|$ позначає евклідову норму матриці A, тобто
$$\|A\| = \sqrt{\operatorname{tr}(A^* A)},$$
де A^* — ермітово спряжена з матрицею A матриця, $\operatorname{tr} B$ — слід матриці B. Оцінимо норму $\|Y_k\|$ фундаментальної матриці $Y_k = Y_k(t)$.

Лема 1. *Якщо на проміжку* $[\tau', \tau''] \subset [0, T]$ *функція* $a'(t)$ *є невід'ємною, тобто* $a'(t) \geq 0$, *то виконуються нерівності*
$$\frac{a(\tau')}{a(\tau'')} \|Y_k(\tau')\| \leq \|Y_k(\tau'')\| \leq \|Y_k(\tau')\|, \qquad (14)$$
якщо ж функція $a'(t)$ *є недодатною* ($a'(t) \leq 0$), *то виконуються нерівності*
$$\|Y_k(\tau')\| \leq \|Y_k(\tau'')\| \leq \frac{a(\tau')}{a(\tau'')} \|Y_k(\tau')\|. \qquad (15)$$

$\square$ *Доведення.* Перша із матриць

$$\rho_k(t)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{a'(t)}{2a(t)}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

є косоермітовою, а друга – ермітовою, тому для матриці Y_k^*, виконується рівність

$$\frac{dY_k^*}{dt} = \rho_k(t)Y_k^*\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{a'(t)}{2a(t)}Y_k^*\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Цю рівність разом із рівністю (9) для матриці Y_k використовуємо для перетворення формули

$$\frac{d}{dt}\Big(\|Y_k\|^2\Big) = \operatorname{tr}\Big(\frac{dY_k^*}{dt}Y_k + Y_k^*\frac{dY_k}{dt}\Big)$$

до вигляду

$$\frac{d}{dt}\Big(\|Y_k\|^2\Big) = \frac{a'(t)}{a(t)}\operatorname{tr}\Big(Y_k^*\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}Y_k\Big). \qquad (16)$$

Оскільки власними значеннями ермітової матриці

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

є числа -2 і 0, то слід матриці

$$Y_k^*\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}Y_k$$

є недодатним, а саме:

$$-2\|Y_k\|^2 \le \operatorname{tr}\Big(Y_k^*\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}Y_k\Big) \le 0.$$

У точках неспадання ($a'(t) \ge 0$) функції $a(t)$ права частина рівності (16) недодатна і

$$-2\frac{a'(t)}{a(t)}\|Y_k\|^2 \le \frac{d}{dt}\Big(\|Y_k\|^2\Big) \le 0,$$

тому

$$0 \le \frac{d}{dt}\Big(\ln\big(a(t)\|Y_k\|\big)\Big) \le \frac{d}{dt}\Big(\ln\big(a(t)\big)\Big); \qquad (17)$$

в точках незростання ($a'(t) \le 0$) функції $a(t)$ права частина рівності (16) невід'ємна, тому

$$0 \le \frac{d}{dt}\Big(\|Y_k\|^2\Big) \le -2\frac{a'(t)}{a(t)}\|Y_k\|^2$$

або

$$\frac{d}{dt}\Big(\ln\big(a(t)\big)\Big) \le \frac{d}{dt}\Big(\ln\big(a(t)\|Y_k\|\big)\Big) \le 0. \qquad (18)$$

Нехай на проміжку $[\tau', \tau'']$ виконуються нерівності (17) або (18), тоді після інтегрування на цьому проміжку відповідно отримуємо оцінки

$$0 \le \ln\left(\frac{a(\tau'')Y_k(\tau'')}{a(\tau')Y_k(\tau')}\right) \le \ln\left(\frac{a(\tau'')}{a(\tau')}\right)$$

та

$$\ln\left(\frac{a(\tau'')}{a(\tau')}\right) \le \ln\left(\frac{a(\tau'')Y_k(\tau'')}{a(\tau')Y_k(\tau')}\right) \le 0,$$

із яких отримуємо нерівності (14) і (15) для норми матриці $Y_k(t)$. $\blacksquare$

Наслідок 1. Якщо функція $a(t)$ на проміжку $[0,T]$ є сталою, то функція $\|Y_k\|$ є також сталою на цьому проміжку, причому

$$\|Y_k(t)\| = \|Y_k(0)\| = \sqrt{2}.$$

$\square$ *Доведення.* Справді, в цьому випадку обидві нерівності (14) і (15) справджуються для довільного проміжку $[\tau', \tau''] \subset [0,T]$ і перетворюються в нерівності

$$\|Y_k(\tau')\| \le \|Y_k(\tau'')\| \le \|Y_k(\tau')\|,$$

або

$$\|Y_k(\tau')\| = \|Y_k(\tau'')\|.$$

Обчислимо значення $\|Y_k(t)\|$ при $t = 0$; маємо формулу

$$\|Y_k(0)\| = \left(\operatorname{tr}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^{1/2} = \sqrt{2}$$

для визначення сталої. $\blacksquare$

Нехай похідна $a'(t)$ змінює на проміжку $[0,T]$ свій знак $l-1$ раз, де $l \in \mathbb{N}$, і $t_0 = 0$, $t_l = T$.

Якщо $l \ge 2$, то існують числа $t_1, t_2, \ldots, t_{l-1}$ та числа $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_l$ такі, що для $j = 1, \ldots, l$ виконуються нерівності $t_{j-1} < \tau_j < t_j$, на проміжку $[t_{j-1}, t_j]$ функція $a'(t)$ не змінює знак, і для $j = 1, \ldots, l-1$ виконуються умови

$$a'(\tau_j)a'(\tau_{j+1}) < 0, \quad a'(t_j) = 0.$$

Позначимо через A_j, $j = 0, 1, \ldots, l$, значення $a(t)$ в точці t_j.

Наслідок 2. Якщо функція $a'(t)$ не змінює знак на проміжку $[0,T] = [t_0, t_l] = [t_0, t_1]$, то на цьому проміжку у випадку $a'(\tau_1) > 0$ виконуються нерівності

$$\frac{A_0}{a(t)} \le \frac{||Y_k(t)||}{\sqrt{2}} \le 1, \qquad (19)$$

зокрема

$$\frac{A_0}{A_1} \le \frac{||Y_k(t_1)||}{\sqrt{2}} \le 1, \qquad (20)$$

і нерівності

$$1 \le \frac{||Y_k(t)||}{\sqrt{2}} \le \frac{A_0}{a(t)}, \qquad (21)$$

$$1 \le \frac{||Y_k(t_1)||}{\sqrt{2}} \le \frac{A_0}{A_1} \qquad (22)$$

у випадку $a'(\tau_1) < 0$.

□ *Доведення.* З нерівностей (14) для проміжків $[0,t]$ і $[0,t_1]$ із врахуванням наслідку 1 отримуємо формули (19) і (20).

Аналогічно, формули (21) і (22) отримуємо з нерівностей (15) для цих же проміжків. ■

Наслідок 3. Якщо функція $a'(t)$ один раз змінює знак на проміжку $[0,T]$, то у випадку $a'(\tau_1)>0$ виконуються нерівності (19) на проміжку $[0,t_1]$ і нерівності (20) та нерівності

$$\frac{A_0}{A_1}\le\frac{||Y_k(t)||}{\sqrt{2}}\le\frac{A_1}{a(t)} \tag{23}$$

на проміжку $[t_1,t_2]=[t_1,t_l]=[t_1,T]$, зокрема

$$\frac{A_0}{A_1}\le\frac{||Y_k(t_2)||}{\sqrt{2}}\le\frac{A_1}{A_2}, \tag{24}$$

а у випадку $a'(\tau_1)<0$ виконуються нерівності (21) на проміжку $[0,t_1]$ і нерівності (22) та нерівності

$$\frac{A_1}{a(t)}\le\frac{||Y_k(t)||}{\sqrt{2}}\le\frac{A_0}{A_1} \tag{25}$$

на проміжку $[t_1,t_2]=[t_1,t_l]=[t_1,T]$, зокрема

$$\frac{A_1}{A_2}\le\frac{||Y_k(t_2)||}{\sqrt{2}}\le\frac{A_0}{A_1}. \tag{26}$$

□ *Доведення.* Справедливість нерівностей (19), (20) на проміжку $[0,t_1]$ і нерівностей (21), (22) випливає із наслідку 1.

Нехай $t\in[t_1,t_2]$, тоді у випадку $a'(\tau_1)>0$ маємо нерівності (20) та для τ_2 нерівність $a'(\tau_2)<0$. Це означає виконання на відрізку $[t_1,t]$ нерівності (15), тобто

$$\|Y_k(t_1)\|\le\|Y_k(t)\|\le\frac{A_1}{a(t)}\|Y_k(t_1)\|.$$

Поділивши останні нерівності на $\|Y_k(t_1)\|$ і помноживши почленно на нерівність (20), отримаємо нерівність (23), а при $t=t_2$ нерівність (24).

У випадку $a'(\tau_1)<0$ маємо нерівності (22) та для τ_2 нерівність $a'(\tau_2)>0$. Це означає виконання на відрізку $[t_1,t]$ нерівності (14), тобто

$$\frac{A_1}{a(t)}\|Y_k(t_1)\|\le\|Y_k(t)\|\le\|Y_k(t_1)\|.$$

Із цих нерівностей та нерівностей (22) отримуємо нерівності (25) і (26). ■

У загальному випадку оцінки фундаментальної матриці подано в лемі.

Лема 2. *Нехай похідна $a'(t)$ функції $a(t)$ на проміжку $[0,T]$ змінює свій знак $l-1$ раз, причому $l\ge 3$, і числа $t_1,\dots,t_{l-1}$ та $\tau_1,\dots,\tau_l$ є вибраними, тоді на проміжках $[t_{j-1},t_j]\subset[0,T]$ справджуються такі оцінки для фундаментальної матриці системи диференціальних рівнянь* (9).

Якщо $t\in[t_{2s-2},t_{2s-1}]$, то у випадку $a'(\tau_1)>0$ виконуються нерівності

$$\frac{A_0A_2\cdots A_{2s-4}A_{2s-2}}{A_1A_3\cdots A_{2s-3}a(t)}\le\frac{||Y_k(t)||}{\sqrt{2}}\le\frac{A_1A_3\cdots A_{2s-3}}{A_2A_4\cdots A_{2s-2}}, \tag{27}$$

у випадку $a'(\tau_1)<0$ – нерівності

$$\frac{A_1A_3\cdots A_{2s-3}}{A_2A_4\cdots A_{2s-2}}.\le\frac{||Y_k(t)||}{\sqrt{2}}\le\frac{A_0A_2\cdots A_{2s-4}A_{2s-2}}{A_1A_3\cdots A_{2s-3}a(t)}; \tag{28}$$

якщо $t\in[t_{2s-1},t_{2s}]$, то у випадку $a'(\tau_1)>0$ виконуються нерівності

$$\frac{A_0A_2\cdots A_{2s-2}}{A_1A_3\cdots A_{2s-1}}\le\frac{||Y_k(t)||}{\sqrt{2}}\le\frac{A_1A_3\cdots A_{2s-3}A_{2s-1}}{A_2A_4\cdots A_{2s-2}a(t)}, \tag{29}$$

у випадку $a'(\tau_1)<0$ – нерівності

$$\frac{A_1A_3\cdots A_{2s-3}A_{2s-1}}{A_2A_4\cdots A_{2s-2}a(t)}\le\frac{||Y_k(t)||}{\sqrt{2}}\le\frac{A_0A_2\cdots A_{2s-2}}{A_1A_3\cdots A_{2s-1}}. \tag{30}$$

При $s=1$ нерівності (27)–(30) *розуміємо як нерівності* (19), (21), (23) *і* (25) *відповідно.*

□ *Доведення.* Для доведення леми використаємо метод математичної індукції, припустивши виконання відповідних нерівностей (27)–(30) для всіх проміжків $[t_0,t_1],[t_1,t_2],\dots,[t_{2s-1},t_{2s}]$. Доведемо ці нерівності для таких проміжків: $[t_{2s},t_{2s+1}]$ і $[t_{2s+1},t_{2s+2}]$.

Нехай t належить проміжку $[t_{2s},t_{2s+1}]$.

У випадку $a'(\tau_1)>0$ маємо, що й $a'(\tau_{2s+1})>0$. Це означає, що на проміжку $[t_{2s},t_{2s+1}]$ виконуються нерівності (14), які запишемо у вигляді

$$\frac{A_{2s}}{a(t)}\le\frac{\|Y_k(t)\|}{\|Y_k(t_{2s})\|}\le 1,$$

а на проміжку $[t_{2s-1},t_{2s}]$ виконуються нерівності (29), а саме:

$$\frac{A_0A_2\cdots A_{2s-2}}{A_1A_3\cdots A_{2s-1}}\le\frac{||Y_k(t_{2s})||}{\sqrt{2}}\le\frac{A_1A_3\cdots A_{2s-3}A_{2s-1}}{A_2A_4\cdots A_{2s-2}A_{2s}}.$$

Перемноживши нерівності отримаємо формулу (27) для проміжку $[t_{2s},t_{2s+1}]$.

У випадку $a'(\tau_1)<0$ отримуємо для проміжку $[t_{2s},t_{2s+1}]$ формулу (28) відповідно перемноживши нерівності (15) для проміжку $[t_{2s},t_{2s+1}]$ і нерівності (30) для проміжку $[t_{2s-1},t_{2s}]$.

Аналогічно отримуються формули (29) і (30) для проміжку $[t_{2s+1},t_{2s+2}]$ на підставі формул (27) і (28) для проміжку $[t_{2s},t_{2s+1}]$ і формул формул (14) і (15) для проміжку $[t_{2s+1},t_{2s+2}]$. ■

Із леми 2 отримуємо незалежні від k оцінки фундаментальної матриці $Y_k(t)$.

Введемо число

$$A=\max_{t\in[0,T]}a(t)/\min_{t\in[0,T]}a(t)=A_{\max}/A_{\min},$$

яке визначає розмах коливань функції $a(t)$. Очевидно, що $A>1$.

Наслідок 4. На проміжку $[0,t_{2j}]\subset[0,T]$ справджуються оцінки

$$A^{-j}\le\frac{\|Y_k(t)\|a(t)}{\sqrt{2}A_0}\le A^{j}, \tag{31}$$

а на проміжку $[0,T]$ – оцінки

$$A^{-J}\le\frac{\|Y_k(t)\|a(t)}{\sqrt{2}A_0}\le A^{J}, \tag{32}$$

де J є цілою частиною числа $(l+1)/2$.

III. Теорема існування та єдиності розв'язку

За допомогою оцінок (31) та (32) встановимо достатні умови існування та єдиності розв'язку задачі (1), (2) у шкалі просторів Соболєва.

Теорема 1. *Якщо коефіцієнти Фур'є $\widehat{\varphi}_k$, $k\in\mathbb{Z}^p$, вектор-функції φ задовольняють умову*

$$\left\|\begin{pmatrix}\rho_k(0)&0\\0&1\end{pmatrix}\Delta^{-1}(k)\widehat{\varphi}(k)\right\|\le C\widetilde{k}^{\sigma}, \tag{33}$$

де $C>0$, $\sigma\in\mathbb{R}$ – деякі сталі, які не залежать від вектора k, то у шкалі просторів Соболєва існує єдиний розв'язок $u=u(t,x)$ задачі (1), (2) такий, що для всіх $t\in[0,T]$

$$u(t,\cdot)\in\mathbf{H}_{\sigma_1}(\Omega_p),\quad \frac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot)\in\mathbf{H}_{\sigma_1-1}(\Omega_p), \tag{34}$$

де $\sigma_1<1-\sigma-p/2$.

□ *Доведення.* Із формули (11) отримуємо рівність

$$\begin{pmatrix}\rho_k(t)&0\\0&1\end{pmatrix}U_k(t)=\begin{pmatrix}\rho_k(t)&0\\0&1\end{pmatrix}\times$$
$$\times\begin{pmatrix}1&1\\\rho_k(t)&-\rho_k(t)\end{pmatrix}Y_k(t)\times$$
$$\times\begin{pmatrix}1&1\\\rho_k(0)&-\rho_k(0)\end{pmatrix}^{-1}\Delta^{-1}(k)\widehat{\varphi}(k)=$$
$$=\frac{a(t)}{A_0}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}Y_k(t)\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}^{-1}\times$$
$$\times\begin{pmatrix}\rho_k(0)&0\\0&1\end{pmatrix}\Delta^{-1}(k)\widehat{\varphi}(k),$$

з якої, переходячи до норм, маємо скалярну рівність

$$\Big(a^2(t)\|k\|^2|U_{k1}(t)|^2+|U_{k2}(t)|^2\Big)^{1/2}=\frac{\sqrt{2}a(t)}{A_0}\times$$
$$\times\left\|Y_k(t)\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\rho_k(0)&0\\0&1\end{pmatrix}\Delta^{-1}(k)\widehat{\varphi}(k)\right\|.$$

Оцінюючи норму справа, отримуємо нерівність

$$\Big(a^2(t)\|k\|^2|U_{k1}(t)|^2+|U_{k2}(t)|^2\Big)^{1/2}\le$$
$$\le\frac{a(t)}{A_0}\|Y_k(t)\|\left\|\begin{pmatrix}\rho_k(0)&0\\0&1\end{pmatrix}\Delta^{-1}(k)\widehat{\varphi}(k)\right\|.$$

Використовуючи формулу (32), отримуємо для всіх $t\in[0,T]$ таку нерівність:

$$\Big(a^2(t)\|k\|^2|U_{k1}(t)|^2+|U_{k2}(t)|^2\Big)^{1/2}\le$$
$$\le\sqrt{2}A^J\left\|\begin{pmatrix}\rho_k(0)&0\\0&1\end{pmatrix}\Delta^{-1}(k)\widehat{\varphi}(k)\right\|, \tag{35}$$

або, враховуючи формулу (33), нерівність

$$\Big(a^2(t)\|k\|^2|U_{k1}(t)|^2+|U_{k2}(t)|^2\Big)^{1/2}\le\sqrt{2}CA^J\widetilde{k}^{\sigma}. \tag{36}$$

Оскільки для всіх векторів $k\ne0$ виконуються нерівності $\widetilde{k}^2\le2\|k\|^2$ і

$$\widetilde{k}^2|u_k(t)|^2\le$$
$$\le 2A_{\min}^{-2}\Big(a^2(t)\|k\|^2|U_{k1}(t)|^2+|U_{k2}(t)|^2\Big), \tag{37}$$

$$\left|\frac{du_k(t)}{dt}\right|^2\le a^2(t)\|k\|^2|U_{k1}(t)|^2+|U_{k2}(t)|^2, \tag{38}$$

то з нерівностей (36)–(38) випливають нерівності

$$\widetilde{k}^{2\sigma_1}|u_k(t)|^2\le\frac{4C^2A^{2J}\widetilde{k}^{2\sigma_1-2+2\sigma}}{A_{\min}^2}=\frac{4C^2A^{2J}}{A_{\min}^2}\widetilde{k}^{\sigma_2},$$

$$\widetilde{k}^{2\sigma_1-2}\left|\frac{du_k(t)}{dt}\right|^2\le2C^2A^{2J}\widetilde{k}^{2\sigma_1-2+2\sigma}=2C^2A^{2J}\widetilde{k}^{\sigma_2},$$

де $\sigma_2<-p$. Обчислюючи норми розв'язку u та його похідної $\partial u/\partial t$, отримуємо незалежні від t оцінки

$$\|u\|^2_{\mathbf{H}_{\sigma_1}(\Omega_p)}\le|u_0(t)|^2+\frac{4C^2A^{2J}}{A_{\min}^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}}\widetilde{k}^{\sigma_2},$$

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{\mathbf{H}_{\sigma_1-1}(\Omega_p)}\le\left|\frac{du_0(t)}{dt}\right|^2+2C^2A^{2J}\sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}}\widetilde{k}^{\sigma_2}.$$

Із збіжності ряду

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}}\widetilde{k}^{\sigma_2}$$

випливають включення (34). ■

Умови (33) теореми 1 пов'язані з правими частинами φ_1 і φ_2 нелокальних умов (2). Для одних правих частин вони виконуються, а для інших не виконуються, крім того нема залежності числа σ від гладкості цих правих частин. Для встановлення розв'язності задачі (1), (2) у шкалі просторів $\mathbf{H}(\Omega_p)$ досліджуємо, коли виконуються нерівності (33) зразу для всіх функцій із певного простору шкали $\mathbf{H}(\Omega_p)$.

Позначимо через $\Psi_j(k)$, $j=1,2,3,4$, елементи матриці $\Delta(k)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, так, що

$$\Delta(k)=\begin{pmatrix}\Psi_1(k) & \Psi_2(k)\\ \Psi_3(k) & \Psi_4(k)\end{pmatrix},$$

$$\det\Delta(k)=\Psi_1(k)\Psi_4(k)-\Psi_2(k)\Psi_3(k), \qquad (39)$$

і нехай

$$\begin{pmatrix}\Phi_1(k) & \Phi_2(k)\\ \Phi_3(k) & \Phi_4(k)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ \rho(T) & -\rho(T)\end{pmatrix}\times$$
$$\times Y_k(T)\begin{pmatrix}1 & 1\\ \rho(0) & -\rho(0)\end{pmatrix}^{-1},$$

тоді виконуються рівності

$$\Delta(k)=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Phi_1(k) & \Phi_2(k)\\ \Phi_3(k) & \Phi_4(k)\end{pmatrix},$$

тобто

$$\begin{aligned}\Psi_1(k)&=a+a_1\Phi_1(k)+b_1\Phi_3(k),\\ \Psi_2(k)&=b+a_1\Phi_2(k)+b_1\Phi_4(k),\\ \Psi_3(k)&=c+c_1\Phi_1(k)+d_1\Phi_3(k),\\ \Psi_4(k)&=d+c_1\Phi_2(k)+d_1\Phi_4(k).\end{aligned}$$

Якщо виконується умова

$$\Phi(k)=\max\big(1,|\Phi_1(k)|,|\Phi_2(k)|,|\Phi_3(k)|,|\Phi_4(k)|\big), \quad (40)$$

то для кожного $j=1,2,3,4$ справджуються нерівності

$$|\Psi_j(k)|\le 3\Phi(k).$$

На основі цих нерівностей встановлюємо, що модуль кожного елемента вектора

$$\Delta^{-1}(k)\widehat{\varphi}(k)=\begin{pmatrix}\dfrac{\Psi_4(k)\widehat{\varphi}_1(k)-\Psi_2(k)\widehat{\varphi}_2(k)}{\det\Delta(k)}\\[2ex] \dfrac{\Psi_1(k)\widehat{\varphi}_2(k)-\Psi_3(k)\widehat{\varphi}_1(k)}{\det\Delta(k)}\end{pmatrix}$$

оцінюється зверху числом

$$\frac{3\Phi(k)\big(|\widehat{\varphi}_1(k)|+|\widehat{\varphi}_2(k)|\big)}{|\det\Delta(k)|}\le\frac{3\sqrt{2}\Phi(k)\|\widehat{\varphi}(k)\|}{|\det\Delta(k)|}.$$

звідси випливає оцінка для лівої частини нерівності (33) через норму правої частини $\widehat{\varphi}(k)$ умов (7)

$$\left\|\begin{pmatrix}\rho_k(0) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Delta^{-1}(k)\widehat{\varphi}(k)\right\|\le$$
$$\le 3\sqrt{2}\max(A_0,1)\frac{\widetilde{k}}{|\det\Delta(k)|/\Phi(k)}\|\widehat{\varphi}(k)\|. \quad (41)$$

IV. Дослідження малих знаменників

Наступним кроком є встановлення оцінок знизу дробів

$$|\det\Delta(k)|/\Phi(k), \quad k\in\mathbb{Z}^p,$$

які є функціями параметрів a, b, c, d, a_1, b_1, c_1 і d_1.

Для довільного вектора параметрів вихідної задачі $\alpha=(a,b,c,d,a_1,b_1,c_1,d_1)\in\mathcal{O}^8$, де $\mathcal{O}$ – одиничний круг з центром у початку координат комплексної площини, такої оцінки , взагалі, не існує. Якою б малою не була (наперед задана) функція $\chi(k)$, знайдеться такий вектор $\alpha\in\mathcal{O}^8$, що безліч разів виконується нерівність

$$|\det\Delta(k)|/\Phi(k)<\chi(k).$$

Такі знаменники називаються малими знаменниками. Вирішення проблеми малих знаменників, тобто встановлення для них оцінки знизу, є задачею метричної теорії діофантових наближень, в основі якої є метричний підхід до розглядуваних задач.

Малі знаменники виникають під час дослідження різних задач для диференціальних та диференціально-операторних рівнянь, а також задач в інших галузях математики. Ці задачі, як правило, є некоректними (умовно коректними).

Для встановлення оцінок знизу знаменників у формулі (41), також використаємо метричний підхід; на підмножині Λ множині $\mathcal{O}^8$ задаємо міру $\operatorname{mes}\Lambda$, яка індукується мірою Лебега у просторі $\mathbb{R}^{16}$.

Теорема 1. *Нехай вирази $\det\Delta(k)$ і $\Phi(k)$ визначаються формулами (39) і (40) відповідно, тоді для довільних чисел $r>p$ та $0<\varepsilon<1$ для всіх векторів $\alpha\in\mathcal{O}^8\setminus B_\varepsilon$ виконується нерівність*

$$|\det\Delta(0)|\ge\varepsilon\frac{\max\big(\sqrt{2},(2+T)A_{\min}\big)}{6\pi A^J C_1\max\big(A_0,1\big)},$$

і для всіх векторів $k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}$ – нерівність

$$\frac{|\det\Delta(k)|}{\Phi(k)}\ge\frac{\varepsilon}{C_1}\widetilde{k}^{-r}, \quad (42)$$

де B_ε – деяка множина з мірою Лебега $\operatorname{mes}B_\varepsilon\le\varepsilon$, стала C_1, що залежить від r, визначається формулою

$$C_1=2\pi^8\left(\frac{\max\big(\sqrt{2},(2+T)A_{\min}\big)}{6\pi A^J\max\big(A_0,1\big)}+\sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}}\widetilde{k}^{-r}\right).$$

□ *Доведення.* Позначимо через $B(k)$ множину тих векторів $\alpha\in\mathcal{O}^8$, які при фіксованому $k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}$ задовольняють оцінку, протилежну до оцінки (42), а саме:

$$\frac{|\det\Delta(k)|}{\Phi(k)}<d^2(k), \quad (43)$$

де

$$d(k)=\sqrt{\frac{\varepsilon}{C_1}\widetilde{k}^{-r}}.$$

Розглянемо спочатку такі вектори $k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}$, для яких виконується рівність $\Phi(k)=1$. Тоді, згідно з формулою (39), отримаємо таку факторизацію:

$$\frac{|\det\Delta(k)|}{\Phi(k)}=\big|\Psi_4(k)\big|\left|\Psi_1(k)-\frac{\Psi_2(k)\Psi_3(k)}{\Psi_4(k)}\right|, \quad (44)$$

Розглянемо множину тих чисел $d \in \mathcal{O}$, для яких виконується нерівність

$$|d + c_1\Phi_2(k) + d_1\Phi_4(k)| < d(k) \tag{45}$$

при інших фіксованих елементах вектора $\alpha \in \mathcal{O}^8$. Ця множина є частиною круга радіуса $d(k)$, тому її міра менша, ніж площа $\pi d^2(k)$ цього круга. Інтегруючи по всіх інших змінних α' на множині $\mathcal{O}^7$, отримуємо оцінку

$$\mathrm{mes} B_0'(k) < \pi^8 d^2(k),$$

де $B_0'(k)$ – множина векторів $\alpha \in \mathcal{O}^8$, для яких виконується нерівність (45).

Розглянемо множину тих чисел a, для яких, при інших фіксованих елементах вектора $\alpha \in \mathcal{O}^8 \setminus B_0'(k)$, виконується нерівність

$$\left| a + a_1\Phi_1(k) + b_1\Phi_3(k) - \frac{\Psi_2(k)\Psi_3(k)}{\Psi_4(k)} \right| < d(k). \tag{46}$$

Ця множина також має міру, меншу, ніж число $\pi d^2(k)$, тому множина $B_0''(k)$ тих $\alpha \in \mathcal{O}^8 \setminus B_0'(k)$, для яких виконується нерівність (46), має міру

$$\mathrm{mes} B_0''(k) < \pi^8 d^2(k).$$

Якщо $\alpha \notin B_0'(k) \cup B_0''(k)$, то виконуються протилежні до нерівностей (45) і (46) нерівності, а отже, згідно з формулою (44), не виконується оцінка (43), тому

$$B_0(k) \subset B_0'(k) \cup B_0''(k)$$

і справджується нерівність

$$\mathrm{mes} B(k) < 2\pi^8 d^2(k) = \frac{2\pi^8 \varepsilon}{C_1} \widetilde{k}^{-r}. \tag{47}$$

Якщо $\Phi(k) = |\Phi_j(k)|$, то замість (44) використовуємо такі факторизації матриці $|\det \Delta(k)/\Phi_j(k)|$ при $j = 1, 2, 3, 4$ відповідно:

$$\begin{gathered}
\left| d + \det \begin{pmatrix} 1 & \Phi_2(k)/\Phi_1(k) \\ \Psi_3(k) & c_1\Phi_2(k) + d_1\Phi_4(k) \end{pmatrix} \right| \times \\
\times \left| a_1 + \Omega_1(k) / \det \begin{pmatrix} \Phi_1(k) & \Phi_2(k) \\ \Psi_3(k) & \Psi_4(k) \end{pmatrix} \right|, \\
\left| a + \det \begin{pmatrix} a_1\Phi_1(k) + b_1\Phi_3(k) & \Psi_2(k) \\ \Phi_1(k)/\Phi_2(k) & 1 \end{pmatrix} \right| \times \\
\times \left| c_1 + \Omega_2(k) / \det \begin{pmatrix} \Psi_1(k) & \Psi_2(k) \\ \Phi_1(k) & \Phi_2(k) \end{pmatrix} \right|, \\
\left| d + \det \begin{pmatrix} 1 & \Phi_4(k)/\Phi_3(k) \\ \Psi_3(k) & c_1\Phi_2(k) + d_1\Phi_4(k) \end{pmatrix} \right| \times \\
\times \left| b_1 + \Omega_3(k) / \det \begin{pmatrix} \Phi_3(k) & \Phi_4(k) \\ \Psi_3(k) & \Psi_4(k) \end{pmatrix} \right|, \\
\left| a + \det \begin{pmatrix} a_1\Phi_(k) + b_1\Phi_3(k) & \Psi_2(k) \\ \Phi_3(k)/\Phi_4(k) & 1 \end{pmatrix} \right| \times \\
\times \left| d_1 + \Omega_4(k) / \det \begin{pmatrix} \Psi_1(k) & \Psi_2(k) \\ \Phi_3(k) & \Phi_4(k) \end{pmatrix} \right|,
\end{gathered} \tag{48}$$

де

$$\begin{aligned}
\Omega_1(k) &= \det \begin{pmatrix} a + b_1\Phi_3(k) & b + b_1\Phi_4(k) \\ \Psi_3(k) & \Psi_4(k) \end{pmatrix}, \\
\Omega_2(k) &= \det \begin{pmatrix} \Psi_1(k) & \Psi_2(k) \\ c + d_1\Phi_3(k) & d + d_1\Phi_4(k) \end{pmatrix}, \\
\Omega_3(k) &= \det \begin{pmatrix} a + a_1\Phi_1(k) & b + a_1\Phi_2(k) \\ \Psi_3(k) & \Psi_4(k) \end{pmatrix}, \\
\Omega_4(k) &= \det \begin{pmatrix} \Psi_1(k) & \Psi_2(k) \\ c + c_1\Phi_1(k) & d + c_1\Phi_2(k) \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{49}$$

Вирази під знаком модуля у формулах (48) є лінійними функціями своїх перших доданків; визначники у формулах (49) є лінійними функціями коефіцієнтів умов (2).

Міра множин, для елементів яких вказані лінійні функції у формулах (48) і (49) менші, ніж $d(k)$, є такими ж, як і у випадку $\Phi(k) = 1$, тобто для всіх векторів $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$ виконується нерівність (47).

Якщо $k = 0$, то

$$\det \Delta(0) = (d + d_1)\Big(a + a_1 + \frac{ac_1 - ca_1 - (c + c_1)(b + b_1)}{(d + d_1)}\Big);$$

нерівність $|d + d_1| < d(0)$, де

$$d(0) = \Big(\varepsilon \frac{\max\left(\sqrt{2}, (2 + T)A_{\min}\right)}{6\pi A^J C_1 \max\left(A_0, 1\right)}\Big)^{1/2},$$

виконується на підмножині $B'(0)$ множини $\mathcal{O}^8$, міра якої $\mathrm{mes}\ B'(0) < \pi^8 d^2(0)$, а нерівність

$$\left| \Big(a + a_1 + \frac{ac_1 - ca_1 - (c + c_1)(b + b_1)}{(d + d_1)} \Big) \right| < d(0)$$

виконується на підмножині $B''(0)$ множини $\mathcal{O}^8$, міра якої $\mathrm{mes}\ B''(0) < \pi^8 d^2(0)$, тобто на множині

$$\mathcal{O}^8 \setminus B(0) = \mathcal{O}^8 \setminus (B'(0) \cup B''(0)),$$

де

$$\mathrm{mes}\ B(0) < 2\pi^8 d^2(0),$$

виконується нерівність

$$|\det \Delta(0)| \geq d^2(0).$$

На множині $\mathcal{O}^8 \setminus B(k)$ функція $|\Delta(k)|/\Phi(k)$ вектора α задовольняє умову (33) для фіксованого ненульового цілочислового вектора k, а на множині

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}^p} \left(\mathcal{O}^8 \setminus B(k)\right) = \mathcal{O}^8 \setminus B_\varepsilon, \quad B_\varepsilon = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}^p} B(k),$$

де

$$\begin{aligned}
\mathrm{mes}\ B_\varepsilon \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \mathrm{mes}\ B(k) &< \\
&< 2\pi^8 d^2(0) + 2\pi^8 \frac{\varepsilon}{C_1} \sum_{k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}} \widetilde{k}^{-r} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

оцінка (33) виконується для всіх ненульових цілочислових векторів k. ■

Тепер із отриманої нерівності (42) та формули (41) маємо нерівність

$$\left\|\begin{pmatrix} \rho_k(0) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Delta^{-1}(k)\widehat{\varphi}(k)\right\| \le$$
$$\le \varepsilon^{-1}6\pi\sqrt{2}C_1\max(A_0,1)\widetilde{k}^{1+r}\|\widehat{\varphi}(k)\|, \quad (50)$$

яку застосуємо під час доведення теореми.

Теорема 2. *Для довільної пари чисел $r > p$ і $\varepsilon > 0$ існує така множина B_ε, міра якої $B_\varepsilon < \varepsilon$, що для всіх функцій*

$$\varphi_1 \in \mathbf{H}_{r+1}(\Omega_p), \quad \varphi_2 \in \mathbf{H}_{r+1}(\Omega_p)$$

існує єдиний розв'язок $u = u(t,x)$ задачі (1), (2), причому

$$u(t,\cdot) \in \mathbf{H}_1(\Omega_p), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot) \in \mathbf{H}_0(\Omega_p)$$

для всіх векторів множини $\mathcal{O}^8 \setminus B_\varepsilon$ і виконуються нерівності

$$\|u(t,\cdot)\|_{\mathbf{H}_1(\Omega_p)} \le \frac{1}{\varepsilon}C_2\|\varphi\|_{\mathbf{H}_{r+1}(\Omega_p)}, \quad (51)$$

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot)\right\|_{\mathbf{H}_0(\Omega_p)} \le \frac{1}{\varepsilon}C_3\|\varphi\|_{\mathbf{H}_{r+1}(\Omega_p)}, \quad (52)$$

де

$$C_2 = \sqrt{2}C_3/A_{\min}, \quad C_3 = 12\pi A^J C_1\max(A_0,1),$$

J – ціла частина числа $(l+1)/2$, $l-1$ – число змін знаку функції $a'(t)$ на проміжку $[0,T]$,

$$A = \frac{A_{\max}}{A_{\min}}, \ A_{\max} = \max_{t\in[0,T]} a(t),$$

$$A_{\min} = \min_{t\in[0,T]} a(t).$$

□ *Доведення.* Із нерівності (35) і нерівності (50), яка виконується для всіх векторів множини $\mathcal{O}^8 \setminus B_\varepsilon$, випливає для кожного вектора $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$ нерівність

$$\left(a^2(t)\|k\|^2|U_{k1}(t)|^2 + |U_{k2}(t)|^2\right)^{1/2} \le$$
$$\le \varepsilon^{-1}12\pi A^J C_1\max(A_0,1)\widetilde{k}^{1+r}\|\widehat{\varphi}(k)\|.$$

Таку нерівність разом із нерівностями (37) і (38) використовуємо для отримання нерівностей

$$\widetilde{k}^2|u_k(t)|^2 \le \frac{288\pi^2A^{2J}C_1^2\big(\max(A_0,1)\big)^2}{\varepsilon^2A_{\min}^2}\widetilde{k}^{2+2r}\|\widehat{\varphi}(k)\|^2,$$

$$\left|\frac{du_k(t)}{dt}\right|^2 \le \frac{144\pi^2A^{2J}C_1^2\big(\max(A_0,1)\big)^2}{\varepsilon^2}\widetilde{k}^{2+2r}\|\widehat{\varphi}(k)\|^2.$$

Ці нерівності виконуються також при $k = 0$. Дійсно, із системи рівнянь (8) отримуємо вектор

$$\Delta^{-1}(0)\widehat{\varphi}(0) = $$
$$= \begin{pmatrix} \dfrac{(d+d_1+c_1T)\widehat{\varphi}_1(0) - (b+b_1+a_1T)\widehat{\varphi}_2(0)}{\det\Delta(0)} \\[2ex] \dfrac{(a+a_1)\widehat{\varphi}_2(0) - (c+c_1)\widehat{\varphi}_1(0)}{\det\Delta(0)} \end{pmatrix},$$

компоненти якого оцінюються зверху числом

$$\sqrt{2}(2+T)|\det\Delta(0)|^{-1}\|\widehat{\varphi}(0)\|,$$

тобто

$$\|\Delta^{-1}(0)\widehat{\varphi}(0)\| \le 2(2+T)|\det\Delta(0)|^{-1}\|\widehat{\varphi}(0)\| =$$
$$= 2(2+T)|d(0)|^{-1}\|\widehat{\varphi}(0)\|,$$

а також для всіх $t \in [0,T]$ виконується оцінка

$$\max\left(|u_0(t)|^2, \left|\frac{du_0(t)}{dt}\right|^2\right) \le$$
$$\le \big(2(2+T)d(0)\big)^2(2+T^2)\|\widehat{\varphi}(0)\|^2.$$

З цієї оцінки маємо шукані нерівності.

За умовами теореми функції

$$\varphi_1 \in \mathbf{H}_{r+1}(\Omega_p), \quad \varphi_2 \in \mathbf{H}_{r+1}(\Omega_p),$$

тому відповідні ряди для розв'язку

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\widetilde{k}^2|u_k(t)|^2$$

та його похідної

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}|du_k(t)/dt|^2$$

є збіжними для всіх чисел $t \in [0,T]$ разом із рядом

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\widetilde{k}^{2r+2}\|\widehat{\varphi}(k)\|^2.$$

Це означає, що розв'язок задачі (1), (2) для всіх $t \in [0,T]$ приймає значення у просторі $\mathbf{H}_1(\Omega_p)$, а його похідна за t – у просторі $\mathbf{H}_0(\Omega_p)$, та виконуються оцінки

$$\|u(t,\cdot)\|^2_{\mathbf{H}_1(\Omega_p)} \le \frac{288\pi^2C_1^2\big(\max(A_0,1)\big)^2}{\varepsilon^2A^{-2J}A_{\min}^2}\|\varphi\|^2_{\mathbf{H}_{r+1}(\Omega_p)},$$

$$\left\|\frac{\partial u(t,\cdot)}{\partial t}\right\|^2_{\mathbf{H}_0(\Omega_p)} \le \frac{144\pi^2C_1^2\big(\max(A_0,1)\big)^2}{\varepsilon^2A^{-2J}}\|\varphi\|^2_{\mathbf{H}_{r+1}(\Omega_p)},$$

які еквівалентні шуканим оцінкам (51), (52). ■

Наслідок 1. Нехай функції

$$\varphi_1 \in \mathbf{H}_{r+q}(\Omega_p), \quad \varphi_2 \in \mathbf{H}_{r+q}(\Omega_p), \quad q \in \mathbb{R},$$

та виконуються всі інші умови теореми 2, тоді існує єдиний розв'язок $u = u(t,x)$ задачі (1), (2), причому

$$u(t,\cdot) \in \mathbf{H}_q(\Omega_p), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot) \in \mathbf{H}_{q-1}(\Omega_p)$$

для всіх векторів множини $\mathcal{O}^8 \setminus B_\varepsilon$ і виконуються нерівності

$$\|u(t,\cdot)\|_{\mathbf{H}_q(\Omega_p)} \leq \frac{1}{\varepsilon} C_2 \|\varphi\|_{\mathbf{H}_{r+q}(\Omega_p)},$$

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot)\right\|_{\mathbf{H}_{q-1}(\Omega_p)} \leq \frac{1}{\varepsilon} C_3 \|\varphi\|_{\mathbf{H}_{r+q}(\Omega_p)}.$$

Наслідок 2. Для розв'язку $u = u(t,x)$ задачі (1), (2) справджується також оцінка

$$a^2(t)\|\sqrt{\Delta} u(t,\cdot)\|_{\mathbf{H}_{q-1}(\Omega_p)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot)\right\|_{\mathbf{H}_{q-1}(\Omega_p)} \leq \\ \leq \frac{1}{\varepsilon} C_3 \|\varphi\|_{\mathbf{H}_{r+q}(\Omega_p)},$$

де оператор $\sqrt{\Delta}$ на функції

$$\eta = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \widehat{\eta}(k) e^{ikx}$$

визначається формулою

$$\sqrt{\Delta}\eta = i \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \|k\| \widehat{\eta}(k) e^{ikx}.$$

Зауваження 1. В умовах теореми 2 розв'язок задачі (1), (2) існує не лише в області $\mathcal{O}^8 \setminus B_\varepsilon$, але і в ширшій області $\mathcal{O}^8 \setminus B$, де $\operatorname{mes} B = 0$, проте для вектора $\alpha \in B_\varepsilon \setminus B$, взагалі, не виконуються оцінки (51), (52), а виконуються слабші оцінки

$$\|u(t,\cdot)\|_{\mathbf{H}_1(\Omega_p)} \leq C_4 \|\varphi\|_{\mathbf{H}_{r+1}(\Omega_p)},$$

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot)\right\|_{\mathbf{H}_0(\Omega_p)} \leq C_5 \|\varphi\|_{\mathbf{H}_{r+1}(\Omega_p)},$$

де сталі C_4 і C_5 не залежать від вектора k, але залежать від вектора α і є необмеженими на множині $B_\varepsilon \setminus B$.

Висновки

Нелокальна задача (1), (2) для рівняння коливання струни зі змінним коефіцієнтом розв'язна у просторах Соболєва скінченного порядку, як і у випадку сталого коефіцієнта. Це пояснюється строгою гіперболічністю рівняння (власні значення ρ_k та $-\rho_k$, де $\rho_k = i\|k\|a(t) \neq 0$ при $k \neq 0$), а отже, існуванням заміни з використанням матриць

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho_k & -\rho_k \end{pmatrix}, \qquad k \neq 0,$$

власних векторів, які є невиродженими та неперервно диференційовними за змінною t матрицями. За допомогою такої заміни система диференціальних рівнянь (6) зводиться до системи диференціальних рівнянь (9). Ця заміна не застосовна у випадку не строго гіперболічних рівнянь у зв'язку із виродженням відповідних матриць.

У випадку негіперболічності рівняння, оцінки відповідних фундаментальних матриць можуть бути експоненціального типу, також може не існувати згаданої вище заміни шуканих функцій, тому розв'язки нелокальних задач для таких рівнянь, взагалі, не належать шкалі просторів Соболєва.

Література

[1] Борок В.М., Фардигола Л.В. Нелокальные корректные краевые задачи в слое//Матем. заметки. – 1990. – **48**, № 1. – С. 20–25.

[2] Гантмахер Ф.А. Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552 с.

[3] Гащук П.М. Лінійні динамічні системи і звичайні диференціальні рівняння. – Львів: Українські технології, 2002. – 608 с.

[4] Гой Т.П., Пташник Б.Й. Нелокальні крайові задачі для систем лінійних рівнянь із частинними похідними зі змінними коефіцієнтами// Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 11. – С. 1478–1487.

[5] Гребенников Е.А., Рябов Ю.А. Резонансы и малые знаменатели в небесной механике. – М.: Наука, 1978. – 128 с.

[6] Задорожна Н.М. задача для систем параболічних рівнянь довільного порядку// Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1997. – Вип. 47. – С. 48–55.

[7] Ильків В.С.Многоточечная нелокальная задача для уравнений с частными производными// Дифференц. уравнения. – 1987. – **23**, № 3. – С. 487–492.

[8] Ільків В.С. Нелокальна крайова задача для нормальних анізотропних систем із частинними похідними і сталими коефіцієнтами// Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1999. – Вип. 54. – С. 96–107.

[9] Ільків В.С. Нелокальна крайова задача для систем із частинними похідними в анізотропних просторах// Нелинейные граничные задачи. – 2001. – Вып. 11. – С. 57–64.

[10] Ільків В.С. Двоточкова нелокальна крайова задача для системи неоднорідних рівнянь із ча-

стинними похідними// Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2002. – **45**, № 4. – С. 87–94.

[11] Ильких В.С., Пташник Б.И. Задача с нелокальными краевыми условиями для системы дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными конффициентами// Дифференц. уравнения. – 1984. – **20**, № 6. – С. 1012–1023.

[12] Ільків В.С., Пташник Б.Й. Зображення та дослідження розв'язків нелокальної задачі для систем диференціальних рівнянь з частинними похідними// Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 2. – С. 184–194.

[13] Кмить И.Я., Лавренюк С.П. О нелокальных задачах для двумерных гиперболических систем // Успехи мат. наук. – 1991. – **46**, № 6. – С. 149.

[14] Макаров А.А. Существование корректной двухточечной краевой задачи в слое для систем псевдодифференциальных уравнений// Дифференц. уравнения. – 1994. – **30**, № 1. – С. 144–150.

[15] Поліщук В.М. Задача з нелокальними крайовими умовами для гіперболічних систем диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами// Доп. АН УРСР. – 1979. – **А**, № 3. – С. 171–175.

[16] Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.

[17] Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.

[18] Савченко Г.Б. О корректности одной краевой задачи для систем линейных дифференциальных уравнений// Дифференц. уравнения. – 1978. – **14**, № 11. – С. 2082–2085.

BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH NONLOCAL TWOPOINT CONDITIONS FOR SECOND ORDER HYPERBOLIC EQUATION

V. Il'kiv

National University "Lvivska Politechnika"
12 S. Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine

A nonlocal problem with general linear twopoint conditions for a strongly hyperbolic (wave) equation $u_{tt} + a^2\Delta u$, where $a = a(t) > 0$ is a continuously differentiable on $[0, T]$ function, $\Delta = \sum_{j=1}^{p} \partial^2/\partial x_j^2$ is the Laplace operator, is investigated in the domain, which is the Cartesian product of the closed interval $[0, T]$ and the p-dimensional torus Ω_p.

This problem is in general Hadamard ill-posed and connected with the small denominators problem. By the metric approach the theorem touching lower bounds of small denominators has been proved. On the base of such bounds the existence and uniqueness conditions of the problem solution in Sobolev spaces of periodical functions with respect to variables$x_1, \ldots, x_p$ were obtained.

Keywords: hyperbolic equation, Sobolev spaces, small denominators.

2000 MSC: 35G30

UDK: 517.946