ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№ 566, 2006, с. 23–28

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№ 566, 2006, p. 23–28

ДО ПОБУДОВИ ОБЛАСТІ ЗБІЖНОСТІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЕЙЛЕРА СТЕПЕНЕВОГО РЯДУ АНАЛІТИЧНОЇ ФУНКЦІЇ

М. Сухорольський, О. Микитюк, В. Коломієць

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 1 вересня 2006 р.)

Досліджено область збіжності перетворення Ейлера збіжного в одиничному крузі степеневого ряду аналітичної функції. Показано, що перетворення продовжує ряд за межу його круга збіжності за умови скінченної кількості особливих точок функції або одностороннього розташування щодо координатних осей особливих точок.

Ключові слова: перетворення Ейлера, степеневий ряд, аналітична функція.

2000 MSC: 42C15

УДК: 517.53.57

Вступ

Степеневий ряд аналітичної функції $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ перегрупуванням його членів (за Ейлером [2]) можна перетворити у такий ряд:
$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(g+1)^{n+1}} \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a_k g^{n-k} z^k$, де g – комплексний параметр. Цей ряд є [1] розвиненням функції $f(z)$ за системою поліномів типу Мелліна $\left\{P_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a_k g^{n-k} z^k\right\}_{n=0}^{\infty}$, і його можна також одержати з використанням формули Коші

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)\,dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)\,dt}{t(1+g)\left(1-\frac{gt+z}{(1+g)t}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+g)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k g^{n-k} z^k}{t^{k+1}} f(t)\,dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+g)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k g^{n-k} z^k,$$

де Γ – замкнена кусково-гладка лінія, що охоплює початок координат і лежить в області аналітичності функції.

Область збіжності перетворення Ейлера збіжного в одиничному крузі степеневого ряду аналітичної функції визначається умовою розвинення в ряд відповідного виразу при перетворенні формули Коші і задається нерівністю $\max\limits_{t\in L} |\bar{t}\,z + g| < |1+g|$, де $|g| < |1+g|$; L – замкнена кусково-гладка лінія у комплексній площині t, що охоплює особливі точки функції $f\left(\frac{1}{t}\right)$.

У роботі досліджується область збіжності перетворення Ейлера ряду аналітичної функції залежно від розташування (щодо осей координат) особливих точок функції.

I. Формулювання задачі. Область збіжності перетворення

Введемо у комплексній площині полярну систему координат
$x = r cos\varphi$, $y = r sin\varphi$ $(-\pi < \varphi \le \pi,\ \ 0 \le r < \infty)$, і запишемо параметр $g = r_0 e^{i\varphi_0}$ та параметричне рівняння лінії L, $t = \rho e^{i\psi}$, де

$$\rho = \rho(\psi) \quad (-\pi < \psi \le \pi). \tag{1}$$

Область збіжності перетворення Ейлера позначимо через D і запишемо нерівність, що визначає цю область, у полярній системі координат

$$\max_{t\in L}\left[(r\rho)^2 + 2r_0 r\rho cos(\varphi - \psi - \varphi_0) + r_0^2\right] \le R^2, \tag{2}$$

де $R = \sqrt{r_0^2 + 2r_0 cos\varphi_0 + 1}$.

Нерівність $|g| < |1+g|$ є умовою того, що початок координат лежить в середині області збіжності перетворення ($r_0 < R$). Запишемо цю нерівність ще так:

$$2r_0 cos\varphi_0 + 1 > 0. \tag{3}$$

Задача полягає у побудові області збіжності перетворення Ейлера ряду аналітичної функції та дослідженні рівняння границі цієї області залежно від параметрів перетворення та розташування особливих точок функції.

Знайдемо область збіжності перетворення Ейлера ряду аналітичної функції для окремих випадків розміщення особливих точок функцій.

Випадок 1. Розглянемо випадок задачі, коли $\varphi_0 = 0$, і лінія L вироджується у відрізок $0 \le \rho \le 1$, $\psi = \psi_0$. Цей випадок характерний для функції $f(z)$, аналітичної у комплексній площині з вирізаним променем $1 \le r < \infty$, $\varphi = \psi_0$ і, відповідно, зі степеневим рядом, збіжним в одиничному крузі. Замкнену лінію L виберемо так, що при обході точки $t = \rho e^{i\psi}$

спочатку по нижньому, а потім по верхньому <берегах> відрізка полярний кут не змінюється, $\psi = \psi_0$, а параметр ρ змінюється спочатку від нуля до одиниці, а потім від одиниці до нуля. Максимальне значення лівої частини нерівності (2) за умови $\psi = \psi_0$ досягається при $\rho = 1$. Тому ця нерівність набуде вигляду: $r^2+2r_0 r cos\left(\varphi - \psi_0\right)+r_0^2 < R^2$ або $\left|z + r_0 e^{i\psi_0}\right| < r_0+1$. Вона визначає область збіжності перетворення Ейлера – круг з центром у точці $-r_0 e^{i\psi_0}$ і радіусом $r_0 + 1$. Очевидно центр цього круга, початок координат і особлива точка $e^{i\psi_0}$ функції $f\left(z\right)$ лежать на одній прямій і, відповідно, круг містить при $r_0 > 0$ одиничний круг збіжності степеневого ряду функції $f\left(z\right)$.

Випадок 2. Розглянемо випадок задачі, коли $\varphi_0 = 0$, і лінія L вироджується у два відрізки $0 \le \rho \le 1, \ \ \psi = \psi_1$ і $0 \le \rho \le 1, \ \ \psi = \psi_2 \quad \left(\psi_1 < \psi_2\right)$. Ці вимоги задовольняє функція $f\left(z\right)$, аналітична у комплексній площині з вирізаними двома променями $1 \le r < \infty, \ \ \varphi = \psi_1$ і $1 \le r < \infty, \ \ \varphi = \psi_2$. Тоді замкнену лінію L виберемо так, що точка $t = \rho e^{i\psi}$ пробігає спочатку нижній і верхній <береги> першого відрізка при $\psi = \psi_1$, а потім нижній і верхній <береги> другого відрізка при $\psi = \psi_2$. Область збіжності перетворення одержимо як перетин двох кругів $\left|z + r_0 e^{i\psi_1}\right| < r_0 + 1$ і $\left|z + r_0 e^{i\psi_2}\right| < r_0 + 1 \quad \left(r_0 > 0\right)$, кожний з яких містить круг збіжності ряду. Очевидно перетин побудованих кругів містить також одиничний круг (збіжності степеневого ряду функції).

Одержані результати можна узагальнити.

Твердження 1. Нехай аналітична функція $f\left(z\right)$ розвивається у степеневий ряд, що збігається в одиничному крузі з центром у початку координат, особливі точки функції $f\left(\frac{1}{t}\right)$ лежать на k відрізках $0 \le \rho \le 1, \quad \psi = \psi_m \quad \left(\psi_{m-1} < \psi_m, \ \ m = \overline{1,k}\right)$. Тоді перетворення Ейлера степеневого ряду функцій $f\left(z\right)$ збігається в області, яка є перетином k кругів $\left|z + r_0 e^{i\psi_m}\right| < r_0 + 1 \quad \left(m = \overline{1,k}, \ \ r_0 > 0\right)$ і ця область містить круг збіжності степеневого ряду функції $f\left(z\right)$.

II. Рівняння границі області збіжності перетворення Ейлера

Позначимо границю області збіжності перетворення через Γ і запишемо її рівняння

$$\max_{t\in L}\left[\left(r\rho\right)^2 + 2r_0 r\rho cos\left(\varphi - \psi - \varphi_0\right) + r_0^2\right] = R^2. \quad (4)$$

Рівняння (4) задає внутрішню обвідну Γ сім'ї кіл (якщо вона існує), залежних від параметра ψ,

$$\left(r\rho\right)^2 + 2r_0\left(r\rho\right) cos\left(\varphi - \psi - \varphi_0\right) + r_0^2 = R^2 \qquad (5)$$

або у явному вигляді

$$r = \frac{1}{\rho}\left[\sqrt{r_0^2 cos^2\left(\varphi - \psi - \varphi_0\right) + 2r_0 cos\varphi_0 + 1} - r_0 cos\left(\varphi - \psi - \varphi_0\right)\right].$$

Знайдемо умову, за якої існує обвідна сім'ї кіл (5) і запишемо її рівняння. Вважаємо, що лінія L є опуклою і похідна від функції $\rho = \rho\left(\psi\right)$ неперервна функція. Продиференціюємо рівняння (5) по ψ,

$$r\rho\rho' + \rho r_0 sin\left(\varphi - \psi - \varphi_0\right) + \rho' r_0 cos\left(\varphi - \psi - \varphi_0\right) = 0, \quad (6)$$

де $\rho' = \frac{d\rho}{d\psi}$.

З рівнянь (5) і (6), виключивши параметр ψ, одержимо рівняння обвідної. Запишемо його у параметричному вигляді (параметр ψ). Спочатку, з рівнянь (5) і (6) визначимо полярний радіус точки $z \in \Gamma$, а також косинус та синус кута $\varphi - \psi - \varphi_0$,

$$r = \frac{\sqrt{r_0^2 + A} - \sqrt{r_0^2 - Ak^2}}{\rho\sqrt{1 + k^2}}, \qquad (7)$$

$$cos\left(\varphi - \psi - \varphi_0\right) = \frac{1}{r_0}\frac{\sqrt{r_0^2 - Ak^2}}{\sqrt{1 + k^2}},$$
$$sin\left(\varphi - \psi - \varphi_0\right) = -\frac{k}{r_0}\frac{\sqrt{r_0^2 + A}}{\sqrt{1 + k^2}}, \qquad (8)$$

де $k = \frac{\rho'(\psi)}{\rho(\psi)}$; $A = 2r_0 cos\varphi_0 + 1$. Потім, перетворивши формули (8), одержимо косинус та синус полярного кута точки $z \in \Gamma$

$$cos\varphi = \frac{1}{r_0}\frac{\sqrt{r_0^2 - Ak^2}}{\sqrt{1 + k^2}} cos\left(\psi + \varphi_0\right) + \frac{k}{r_0}\frac{\sqrt{r_0^2 + A}}{\sqrt{1 + k^2}} sin\left(\psi + \varphi_0\right),$$

$$sin\varphi = \frac{1}{r_0}\frac{\sqrt{r_0^2 - Ak^2}}{\sqrt{1 + k^2}} sin\left(\psi + \varphi_0\right) - \frac{k}{r_0}\frac{\sqrt{r_0^2 + A}}{\sqrt{1 + k^2}} cos\left(\psi + \varphi_0\right).$$

За формулами $x = rcos\varphi$, $y = rsin\varphi$ з урахуванням формули (7) одержимо параметричні рівняння обвідної

$$\begin{cases} x = \dfrac{r}{r_0\sqrt{1+k^2}}\left[\sqrt{r_0^2 - Ak^2}cos\left(\psi+\varphi_0\right) - k\sqrt{r_0^2+A}sin\left(\psi+\varphi_0\right)\right], \\ y = \dfrac{r}{r_0\sqrt{1+k^2}}\left[\sqrt{r_0^2 - Ak^2}sin\left(\psi+\varphi_0\right) + k\sqrt{r_0^2+A}cos\left(\psi-\varphi_0\right)\right]. \end{cases} \tag{9}$$

Умова визначеності відповідних аналітичних виразів $r_0^2 - k^2\left(\psi\right)A \geq 0$ і нерівність (3) становлять умови існування обвідної сім'ї кіл. Запишемо їх так:

$$2r_0cos\varphi_0 + 1 > 0, r_0^2 - k^2\left(\psi\right)\left(2r_0cos\varphi_0+1\right) \geq 0. \tag{10}$$

Приймаючи в другій умові (10) $k = k_{max}$, одержимо квадратне рівняння для визначення найменшого значення параметра r_0, за якого існує обвідна,

$$r_0^2 - k_{max}^2\left(2r_0cos\varphi_0+1\right) = 0, \tag{11}$$

де $k_{max} = \max\limits_{-\pi<\psi\leq\pi}\left|\frac{\rho'(\psi)}{\rho(\psi)}\right|$.

З цього рівняння знайдемо вираз найменшого значення цього параметра

$$r_{0(min)}{=}k_{max}\left(k_{max}cos\varphi_0{+}\sqrt{k_{max}^2cos^2\varphi_0{+}1}\right),$$
$$2r_{0(min)}cos\varphi_0{+}1{>}0. \tag{12}$$

Приклад 1. Запишемо рівняння обвідної Γ для випадку, коли L одиничне коло $\rho = 1 \quad (-\pi < \psi \leq \pi)$. Приймаючи у формулах (7) і (9) $\rho = 1$, $k = 0$, одержимо такі параметричні рівняння обвідної:

$$\begin{cases} x = \left(\sqrt{r_0^2 + 2r_0cos\varphi_0 + 1} - r_0\right)cos\left(\psi+\varphi_0\right), \\ y = \left(\sqrt{r_0^2 + 2r_0cos\varphi_0 + 1} - r_0\right)sin\left(\psi+\varphi_0\right). \end{cases}$$

Виключивши тут кут $(\psi + \varphi_0)$, одержимо рівняння кола

$$x^2 + y^2 = \left(\sqrt{r_0^2 + 2r_0cos\varphi_0 + 1} - r_0\right)^2.$$

Для випадку дійсних додатних значень параметра $g = r_0$ $(\varphi_0 = 0)$ обвідною відповідної сім'ї кіл є одиничне коло, рівняння якого $x^2 + y^2 = 1$.

III. Рівняння границі області збіжності перетворення для великих значень параметра r_0

Спростимо формули (9) за умови, що параметр r_0 приймає достатньо великі значення. Переходячи у правих частинах цих формул до границі при $r_0 \to \infty$ з урахуванням формули (7), одержимо такі параметричні рівняння обвідної:

$$\begin{cases} x{=}\dfrac{cos\varphi_0}{\rho\left(\psi\right)}\left[cos\left(\psi{+}\varphi_0\right){-}k\left(\psi\right)sin\left(\psi{+}\varphi_0\right)\right], \\ y{=}\dfrac{cos\varphi_0}{\rho\left(\psi\right)}\left[sin\left(\psi{+}\varphi_0\right){+}k\left(\psi\right)cos\left(\psi{+}\varphi_0\right)\right]. \end{cases} \tag{13}$$

Легко переконатися, що для достатньо великих значень параметра r_0 умови (10) виконуються, якщо тільки $cos\varphi_0 \geq 0$ і функція $k = k\left(\psi\right)$ не перетворюється у нескінченність ні в одній точці проміжку $(-\pi < \psi \leq \pi)$.

Розглянемо обвідні для окремих випадків рівняння (1).

Приклад 1. Розглянемо задачу відшукання областей збіжності перетворень Ейлера збіжних в одиничному крузі степеневих рядів аналітичних функцій $f^{\pm}\left(z\right)$, якщо особливі точки функцій $F^{\pm}\left(t\right) = f^{\pm}\left(\frac{1}{t}\right)$ знаходяться у середині еліпсів $L^{\pm}$, рівняння яких

$$\rho = \frac{1-\varepsilon}{1 \pm \varepsilon cos\psi} \quad \left(-\pi < \psi \leq \pi\right), \tag{14}$$

де $0 < \varepsilon < 1$.

Область збіжності перетворення визначається нерівністю (2) за умови (3). Знайдемо умови, за яких існує обвідна сім'ї кривих (5). Формули для функцій $k^{\pm} = k^{\pm}\left(\psi\right)$ і їх максимальні значення, що досягаються у точках $\psi^{\pm} = arccos\left(\mp\varepsilon\right)$, такі:

$$k^{\pm} = \frac{\pm\varepsilon sin\psi}{1 \pm \varepsilon cos\psi}, \quad k_{max} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}. \tag{15}$$

Найменше значення параметра r_0, за якого існує обвідна, знайдемо за формулою (12),

$$r_{0(min)} = \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\left(\frac{1}{\varepsilon} + cos\varphi_0\right), \quad 2r_{0(min)}cos\varphi_0{+}1 > 0.$$

Зокрема, якщо $\varphi_0{=}0$ і $\varepsilon{=}\frac{4}{5}$, то $k_{max}{=}\frac{4}{3}$ і за формулою (12) знайдемо $r_{0(min)} = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} = 4$, тобто, якщо $\varphi_0{=}0$ і $r_0{\geq}4$, то існують обвідні $\Gamma^{\pm}$ і (9) їх рівняння.

Запишемо рівняння обвідної у неявному вигляді для великих значень параметра r_0. З рівнянь (13) з урахуванням формули (14) і першої формули (15) знайдемо

$$x = \frac{cos\varphi_0}{1-\varepsilon}\left(cos\left(\psi+\varphi_0\right) \pm \varepsilon cos\varphi_0\right),$$

$$y = \frac{cos\varphi_0}{1-\varepsilon}\left(sin\left(\psi+\varphi_0\right) \pm \varepsilon sin\varphi_0\right).$$

З цих рівнянь одержимо такі рівняння обвіднихΓ$^{\pm}$ (кіл):

$$\left(x \mp \frac{\varepsilon cos^2\varphi_0}{1-\varepsilon}\right)^2 + \left(y \mp \frac{\varepsilon cos\varphi_0 sin\varphi_0}{1-\varepsilon}\right)^2 = \frac{cos^2\varphi_0}{\left(1-\varepsilon\right)^2}.$$

Справедливе

Твердження 1. Нехай аналітичні функції $f^{\pm}\left(z\right)$ такі, що їх степеневі ряди збігаються в одиничному крузі і особливі точки функцій $f^{\pm}\left(\frac{1}{t}\right)$ містяться всередині еліпсів, рівняння яких (14). Тоді, якщо $r_0 \geq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$, $\varphi_0=0$. $0<\varepsilon<1$, то області збіжності перетворень Ейлера степеневих рядів функцій $f^{\pm}\left(z\right)$, що описуються рівняннями $\left(x \mp \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{(1-\varepsilon)^2}$, містять одиничнчй круг збіжності рядів цих функцій.

Приклад 2. Розглянемо задачу відшукання області збіжності перетворення Ейлера збіжного в одиничному крузі степеневого ряду (аналітичної функції $f\left(z\right)$) для випадку, коли особливі точки функції $f\left(\frac{1}{t}\right)$ знаходяться в середині еліпсаL, рівняння якого в полярній системі координат таке:

$$\rho = \frac{ab}{\sqrt{b^2cos^2\psi + a^2sin^2\psi}} \quad \left(-\pi < \psi \leq \pi\right). \qquad (16)$$

Тут $a = 1, \quad 0 < b \leq 1$ або $b = 1, \quad 0 < a \leq 1$.

Область збіжності перетворення Ейлера визначається нерівністю (2) за умови (3). Знайдемо умови, за яких існує обвідна сім'ї кіл (5). Вираз функції $k = k\left(\psi\right)$ і її максимальне значення такі:

$$k = -\frac{\left(a^2-b^2\right)cos\psi sin\psi}{a^2sin^2\psi + b^2cos^2\psi}, \quad k_{max} = \frac{\left|a^2-b^2\right|}{2ab},$$

$$\psi_{max} = \pm arctg\frac{b}{a}. \qquad (17)$$

Найменше значення параметра, для якого існує обвідна Γ, знайдемо за формулою (12)

$$r_{0(min)} = \frac{\left|a^2-b^2\right|}{4a^2b^2}\left(\left|a^2-b^2\right|cos\varphi_0 + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\left(a^2-b^2\right)^2cos^2\varphi_0 + 4a^2b^2}\right), 2r_{0(min)}cos\varphi_0 + 1 > 0.$$

Запишемо рівняння обвідної у неявному вигляді для достатньо великих значень параметраr_0. Рівняння (13) з урахуванням формули (16) і першої формули (17) набудуть вигляду

$$x = \frac{cos\varphi_0}{ab}\frac{a^2sin\psi sin\varphi_0 + b^2cos\psi cos\varphi_0}{\sqrt{a^2sin^2\psi + b^2cos^2\psi}},$$

$$y = \frac{cos\varphi_0}{ab}\frac{a^2sin\psi cos\varphi_0 - b^2cos\psi sin\varphi_0}{\sqrt{a^2sin^2\psi + b^2cos^2\psi}}.$$

З цих рівнянь знайдемо $tg\psi$ і полярний радіус $r = \sqrt{x^2+y^2}$ точки $z \in \Gamma$

$$tg\psi = \frac{b^2}{a^2}\frac{xsin\varphi_0 + ycos\varphi_0}{xcos\varphi_0 - ysin\varphi_0},$$

$$r^2 = \frac{cos^2\varphi_0}{a^2b^2}\frac{a^4sin^2\psi + b^4cos^2\psi}{a^2sin^2\psi + b^2cos^2\psi}.$$

Виключивши тут параметр ψ, одержимо рівняння лінії Γ

$$\frac{a^2\left(xcos\varphi_0 - ysin\varphi_0\right)^2}{cos^2\varphi_0} + \frac{b^2\left(xsin\varphi_0 + ycos\varphi_0\right)}{cos^2\varphi_0} = 1$$

Це рівняння еліпса, велика вісь якого утворює кут φ_0 з віссю Ox.

При $\varphi_0 = 0$ одержимо рівняння: $a^2x^2 + b^2y^2 = 1$. Оскільки тут $a = 1, \quad 0 < b \leq 1$ або $0 < a \leq 1, \quad b = 1$, то області збіжності перетворень Ейлера степеневих рядів (збіжних в одиничному крузі) відповідних аналітичних функцій містять одиничний круг (область збіжності цих степеневих рядів).

Справедливе

Твердження 2. Нехай аналітична функція $f\left(z\right)$ така, що її степеневий ряд збігається в одиничному крузі і особливі точки функції $f\left(\frac{1}{t}\right)$ містяться всередині еліпса, рівняння якого (16). Тоді, якщо $r_0 \geq \frac{\left|a^2-b^2\right|}{4a^2b^2}\left(\left|a^2-b^2\right| + \sqrt{\left(a^2-b^2\right)^2 + 4a^2b^2}\right)$ і $\varphi_0=0$, то область збіжності перетворення Ейлера степеневого ряду функції $f\left(z\right)$, що описується рівнянням $a^2x^2 + b^2y^2 \leq 1$, містить круг збіжності ряду цієї функції.

IV. Рівняння границі області збіжності перетворення для малих значень параметра

Розглянемо перетворення Ейлера збіжного в одиничному крузі степеневого ряду аналітичної функції для випадку часткового виконання умов (10). Вважаємо, що область збіжності перетворення описується нерівністю (2) і справджується умова (3). При цьому значення величин r_0 і φ_0 вибрані так, що друга умова (10) не виконується в інтервалі $]\psi_1, \psi_2[$,

$$r_0^2 - k^2\left(\psi\right)\left(2r_0cos\varphi_0 + 1\right) < 0, \quad 2r_0cos\varphi_0 + 1 > 0.$$

Значення кінцевих точок інтервалу$]\psi_1, \psi_2[$, в якому не існує обвідна відповідної сім'ї кіл, знайдемо з умов

$$r_0^2 - k^2(\psi_i)(2r_0 cos\varphi_0 + 1) = 0, \quad \psi_1 < \psi_0 < \psi_2, \quad (18)$$

де $k(\psi) = \frac{\rho'(\psi)}{\rho(\psi)}$; $k^2(\psi_0) = \max\limits_{-\pi<\psi\leq\pi} k^2(\psi)$. Позначимо цю частину кривої L через L^2.

Позначимо через Γ^2 ту частину границі області збіжності перетворення, якій відповідає лінія L^2, тобто $r_0^2 - k^2(\psi)(2r_0 cos\varphi_0 + 1) < 0$ і не існує обвідна відповідної сім'ї кіл. Іншу частину границі, для якої справджується умова (10) і яка описується рівняннями (9) позначимо через Γ^1. Рівняння для визначення кінцевих точок інтервалу $]\psi_1, \psi_2[$ одержимо з першої умови (18),

$$\left[\frac{\rho'(\psi)}{\rho(\psi)}\right]^2 = \frac{r_0^2}{2r_0 cos\varphi_0 + 1}. \quad (19)$$

За формулами (9) з урахуванням рівняння (19) знайдемо координати граничних точок (x_1, y_1), (x_2, y_2) лінії Γ^2,

$$\begin{aligned} x_i &= -k(\psi_i)\frac{2r_0 cos\varphi_0 + 1}{r_0\rho(\psi_i)} sin(\psi_i + \varphi_0), \\ y_i &= k(\psi_i)\frac{2r_0 cos\varphi_0 + 1}{r_0\rho(\psi_i)} cos(\psi_i + \varphi_0) \end{aligned} \quad (20)$$

Рівняння (3) при будь-якому фіксованому значенні кута ψ є рівнянням кола. Тому лінія Γ^2 може складатися хіба-що з дуг кіл, рівняння яких одержимо з (4) для значень ψ з інтервалу $\psi_1 \leq \psi \leq \psi_2$. Рівняння цих дуг в полярній системі координат таке:

$$r = \frac{1}{\rho(\psi)}\left[-r_0 cos(\varphi - \psi - \varphi_0) + \sqrt{r_0^2 cos^2(\varphi - \psi - \varphi_0) + 2r_0 cos\varphi_0 + 1}\right]. \quad (21)$$

Приклад. Знайдемо границю області збіжності перетворення Ейлера для випадку лінії L^-, що описується рівнянням

$$\rho = \frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon cos\psi} \quad (-\pi < \psi \leq \pi), \quad (22)$$

$\varphi_0 = 0$, малих значень параметра r_0 і часткового виконання умови (10). Для функції $k(\psi)$ одержимо такий вираз:

$$k(\psi) = \frac{-\varepsilon sin\psi}{1-\varepsilon cos\psi}. \quad (23)$$

Максимальне значення функції $k^2(\psi)$ досягається при $cos\psi_0 = \varepsilon$ і дорівнює

$$k^2(\psi_0) = \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}. \quad (24)$$

З рівняння (19) з урахуванням виразу функції (23) одержимо рівняння для визначення кінцевих точок інтервалу $]\psi_1, \psi_2[$,

$$\frac{\varepsilon^2 sin^2\psi}{(1-\varepsilon cos\psi)^2} = \frac{r_0^2}{2r_0+1}, \quad (25)$$

Розв'язок рівняння (25) такий:

$$cos\psi_i = \frac{1}{\varepsilon}\left[\left(\frac{r_0}{r_0+1}\right)^2 \pm \sqrt{1-\left(\frac{r_0}{r_0+1}\right)^2}\sqrt{\varepsilon^2-\left(\frac{r_0}{r_0+1}\right)^2}\right]. \quad (26)$$

Максимальне значення параметра r_0 $(-\frac{1}{2} < r_0 < < r_{0(max)})$, за якого Γ^2 вироджується у точку, шукаємо з рівняння (25) з урахуванням умови (24), $\frac{r_0^2}{2r_0+1} = \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}$. Звідки маємо $r_{0(max)} = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$. Цьому значенню параметра відповідає такий розв'язок рівняння (25): $cos(\pm\psi_0) = \varepsilon$.

Якщо справджується умова

$$\varepsilon\left(\sqrt{1+\varepsilon^2}+\varepsilon\right) \leq r_0 \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}, \quad (27)$$

то рівняння (25) має два додатні корені, що визначають два інтервали $\psi_1 < \psi < \psi_2$ і $-\psi_2 < \psi < -\psi_1$. Ці інтервали відповідають двом відрізкам лінії Γ^2, рівняння яких мають вигляд (21).

Для значень параметра r_0 таких, що $0 < r_0 < \varepsilon\left(\sqrt{1+\varepsilon^2}+\varepsilon\right)$, рівняння (25) має один додатний корінь

$$cos(\pm\psi_1) = \frac{1}{\varepsilon}\left[\left(\frac{r_0}{r_0+1}\right)^2 + \sqrt{1-\left(\frac{r_0}{r_0+1}\right)^2}\sqrt{\varepsilon^2-\left(\frac{r_0}{r_0+1}\right)^2}\right],$$

і тому лінії Γ^2 відповідає один інтервал зміни параметра ψ, $]\psi_1,\ \pi] \cup]-\pi,\ \pi]$. Тоді рівняння лінії Γ^2 запишемо з урахуванням формул (21) у вигляді

$$r = \frac{1}{\rho(\psi)}\left[-r_0 cos(\varphi-\psi) + \sqrt{r_0^2 cos^2(\varphi-\psi) + 2r_0 + 1}\right], \quad \psi \in]\psi_1,\ \pi] \cup]-\pi,\ \pi]$$

Розглянемо граничний випадок задачі, коли обвідна Γ^1 збігається з границею Γ і лінія Γ^2 вироджується у точки, тобто, $r_0 = r_{0(max)} = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$. У цьому випадку границя області збіжності перетворення описується рівняннями (9). За формулами (26), (22) знайдемо $cos\psi_i = \varepsilon$ (або $cos(\pm\psi_1) = \varepsilon$), $\rho(\pm\psi_1) = \frac{1}{1+\varepsilon}$ і за формулою (20) з урахуванням виразу (23) знайдемо точки $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$, у які вироджується крива Γ^2,

$$x_{1,2} = k(\pm\psi_1)\frac{2r_0+1}{r_0\rho(\psi_1)} sin(\pm\psi_1) = -(1+\varepsilon)^2, \quad (28)$$

$$y_{1,2} = k(\pm\psi_1)\frac{2r_0+1}{r_0\rho(\psi_1)} cos\psi_1 = \pm\varepsilon(1+\varepsilon)\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}.$$

Якщо прийняти $\varepsilon = \frac{1}{2}$, то $r_{0(max)} = 1$ і матимемо $cos(\pm\psi_1) = 0,5$, $\psi_1 = 60^0$ і такі граничні точки: $\left(-\frac{9}{4},\ \pm\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ або $(-2,25;\ \pm1,3)$, в які вироджується лінія Γ^2.

При зменшенні значення $r_0 < r_{0(max)} = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$ ділянки границі Γ^2 розширюватимуться навколо точок з координатами (28). Наприклад, якщо $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $r_{0(max)} = 1$ і прийняти $r_0 = \frac{4}{5}$ (умова (27) не справджується), то за формулою (26) знайдемо $cos(\pm\psi_1) = 0,80545$ ($\psi_1 = 36,35^0$). За формулами (20) знайдемо координати кінцевих точок двох частин кривої Γ^2, $x_1 = -1,14$, $y_1 = \pm1,61$.

V. Висновки

Область збіжності перетворення Ейлера степеневого ряду є по суті перетином нескінченної кількості кругів $|\bar{t}\,z+g| < |1+g|$ при фіксованих значеннях $t \in L$. Тому область збіжності можна побудувати графічно, як перетин скінченної кількості кругів $|\bar{t}_m\,z+g| < |1+g|$, кожному з яких відповідає фіксоване значення $t_m \in L$ $\left(m = \overline{1,N}\right)$. При достатньо великій щільності точок $t_m \in L$ графіки кіл $|\bar{t}_m\,z+g| = |1+g|$ утворюють (заштриховують) двозв'язну область, внутрішня границя якої і є границею збіжності перетворення.

Проведені в роботі дослідження встановлюють межі зміни параметрів перетворення, за яких існують обвідні відповідної сім'ї кіл. Записані рівняння цих обвідних і досліджено їх графіки.

Література

[1] Сухорольський М.А. Розвинення аналітичних функцій за системами поліномів типу Мелліна / Вісн. Нац. ун-ту "Львівська політехніка". Сер. фіз.-матем. наук. – 2005. № 346. – С. 111–115.

[2] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. – М: Наука, 1969. – 800 с.

ON THE CONSTRACTION OF CONVERGENCE DOMAIN OF EULER'S TRANSFORMATION OF POWER SERIES OF ANALYTICAL FUNCTION

M. Sukhorolski, O. Mikityuk, V. Kolomiet's

National University "Lvivska Politechnika"
12 S. Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine

The domain of convergence of Euler's transformation, convergent in the single circle of the power series of the analytical function is investigated in the paper. It is shown that the transformation continues a series beyond the boundary of the circle of convergence on condition that the number of the singular points of the function is finite and they are unilateral relative to their coordinate axes. In particular, it is shown that the series of the function singular points of which are located on the beam is summarized by the transformation in the half-plane.

Keywords: Euler's transformation, power series, analytical function.

2000 MSC: 42C15

UDK: 517.53.57