ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№ 566, 2006, с. 20–22

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№ 566, 2006, p. 20–22

НОВІ ОЦІНКИ ВИНЯТКОВОЇ МНОЖИНИ В ТЕОРЕМАХ ТИПУ БОРЕЛЯ

Т. Сало

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 3 травня 2006 р.)

Встановлено нові оцінки виняткової множини в асимптотичній рівності між логарифмами максимуму модуля і максимального члена цілого ряду Діріхле з обмеженням на зростання.

Ключові слова: ряд Діріхле, максимальний член, максимум модуля.

2000 MSC: 35C46

УДК: 517.576

Нехай $H(\Lambda)$ – клас абсолютно збіжних в $\mathbb{C}$ (цілих) рядів Діріхле

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}, \quad z \in \mathbb{C},$$

де $\Lambda = (\lambda_n)$ – деяка фіксована послідовність така, що $0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow +\infty$ $(1 < n \uparrow +\infty)$.

Для $F \in H(\Lambda)$ і $\sigma \in \mathbb{R}$ позначимо $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| e^{\sigma\lambda_n} : n > 0\}$, $\nu(\sigma) = \nu(\sigma, F) = \max\{n : |a_n| e^{\sigma\lambda_n} = \mu(\sigma, F)\}$, $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + iy)| : y \in \mathbb{R}\}$.

В [1] встановлено такий аналог теореми Бореля.

Теорема A[1]. *Для того, щоб для кожної функції $F \in H(\Lambda)$ співвідношення*

$$\ln M(\sigma, F) = (1 + o(1)) \ln \mu(\sigma, F) \tag{1}$$

справджувалось при $\sigma \to +\infty$ ззовні деякої множини E скінченної міри, необхідно і досить, щоб

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\lambda_n} < +\infty.$$

Виявляється, що твердження теореми А допускає уточнення в частині описання виняткової множини.

Нехай L – клас додатних неперервних зростаючих до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функцій. Для функції $\Phi \in L$ визначимо такі класи функцій:

$$H(\Lambda, \Phi) = \{F \in H(\Lambda) : \liminf_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln \mu(\sigma, F)}{\sigma\Phi(\sigma)} > 0\},$$

$$\overline{H}(\Lambda, \Phi) = \{F \in H(\Lambda) : \limsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln \mu(\sigma, F)}{\sigma\Phi(\sigma)} > 0\}.$$

Для вимірної за Лебегом множини $E \subset [0, +\infty)$ скінченної міри $meas E < +\infty$ і функції $h \in L$ величини

$$D_h E = \limsup_{R\to+\infty} h(R) meas(E \cap [R, +\infty)),$$

$$d_h E = \liminf_{R\to+\infty} h(R) meas(E \cap [R, +\infty))$$

назвемо відповідно її верхньою і нижньою h-щільностями у нескінченності.

У праці [2] доведено, що в підкласі $H(\Lambda, \Phi)$, за умови

$$(\forall b > 0) : \lim_{\sigma\to+\infty} h(\sigma) \sum_{\lambda_n > b\Phi(\sigma)} \frac{1}{n\lambda_n} = 0, \tag{2}$$

де $h \in L$, виняткова множина у співвідношенні (1) має нульову верхню h-щільність у нескінченності.

У статті уточнено описання виняткової множини у співвідношенні (1) в підкласі $\overline{H}(\Lambda, \Phi)$.

Нехай $L_1 = \{h \in L : h(x + O(1)) = O(h(x))$ $(x \to +\infty)\}$.

Справедлива теорема.

Теорема. *Нехай $h \in L_1$, $\Phi \in L$. Якщо для функції $F \in \overline{H}(\Lambda, \Phi)$ виконується умова (2), то співвідношення (1) справджується при $\sigma \to +\infty$ $(\sigma \notin E, d_h(E) = 0)$.*

Варто зауважити, що доведення цієї теореми в частині встановлення асимптотичної рівності (1) загалом повторює доведення відповідних теорем з [1–3], а в частині оцінювання величини міри виняткової множини – у певному сенсі повторює міркування, застосовані в [4] для доведення теореми 2.

□ *Доведення.* Нехай $n(t) = \sum_{\lambda_n \le t} 1$ – лічильна функція послідовності (λ_n). Оскільки $\frac{1}{n} \sim \ln(n+1) - \ln n$ $(n \to +\infty)$, то умову (2) можна записати у вигляді

$$\lim_{\sigma\to+\infty} h(\sigma) \int_{b\Phi(\sigma)}^{+\infty} \frac{d \ln n(t)}{t} = 0.$$

Звідси випливає існування неперервної функції $C(t) \uparrow +\infty$ $(t \to +\infty)$ такої, що для $b > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} h(\varphi(b\lambda_n)) \int_{\lambda_n}^{+\infty} C(t) \frac{d \ln n(2t)}{t} = 0, \tag{3}$$

де $\varphi(x)$ — функція, обернена до $\Phi(t)$.

Нехай $\alpha(t) = \int_0^t C(x)\frac{d\ln n(2x)}{x}$, $\tau_n = \alpha(\lambda_n)$, $\alpha_n = exp\{-\int_0^{\lambda_n}\alpha(t)dt\}$. Розглянемо ряд Діріхле

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{|a_n|}{\alpha_n}e^{z\lambda_n}.$$

Зауважимо, що $\frac{|a_n|}{\alpha_n}e^{\sigma\lambda_n} \le |a_n|e^{(\sigma+\alpha(\lambda_n))\lambda_n} \le |a_n|e^{(\sigma+A)\lambda_n}$, де $A = \int_0^{+\infty} C(t)\frac{d\ln n(2t)}{t}$. Тому $f \in H(\Lambda)$.

Нехай (κ_j) – послідовність точок стрибка $\nu(\sigma, f)$, тобто $\nu(\sigma, f) = j$ при $\sigma \in [\kappa_j, \kappa_{j+1})$ і, якщо $\nu(\kappa_{j+1}, f) = j+p$, то $\kappa_{j+1} = \cdots = \kappa_{j+p} < \kappa_{j+p+1}$.

Якщо $(\sigma - \tau_j) \in [\kappa_j, \kappa_{j+1})$, то за означенням максимального члена $\mu(\sigma, f)$ для всіх $n \ge 0$

$$\frac{|a_n|}{\alpha_n}e^{(\sigma-\tau_j)\lambda_n} \le \frac{|a_j|}{\alpha_j}e^{(\sigma-\tau_j)\lambda_j}.$$

Звідси при $\sigma \in [\kappa_j + \tau_j, \kappa_{j+1} + \tau_j)$ та $n \ne j$

$$\frac{|a_n|e^{\sigma\lambda_n}}{|a_j|e^{\sigma\lambda_j}} \le \frac{\alpha_n}{\alpha_j}e^{\tau_j(\lambda_n-\lambda_j)} =$$
$$= exp\left\{-\int_{\lambda_j}^{\lambda_n}(\alpha(t) - \alpha(\lambda_j))dt\right\} < 1. \tag{4}$$

Тому, для центрального індексу $\nu(\sigma, F) = j$ при $\sigma \in [\kappa_j + \tau_j, \kappa_{j+1} + \tau_j)$. Отже, з (4) отримуємо при $n \ge 0$ і $\sigma \notin \bigcup_{j=1}^{+\infty}[\kappa_j + \tau_{j-1}, \kappa_j + \tau_j] = E$

$$\frac{|a_n|e^{\sigma\lambda_n}}{\mu(\sigma, F)} \le exp\left\{-\int_{\lambda_\nu}^{\lambda_n}(\alpha(t) - \alpha(\lambda_\nu))dt\right\} =$$
$$= exp\left\{-\int_{\lambda_\nu}^{\lambda_n}(\lambda_n - t)d\alpha(t)\right\} = \tag{5}$$
$$= exp\left\{-\int_{\lambda_\nu}^{\lambda_n}\frac{\lambda_n - t}{t}C(t)d\ln n(2t)\right\},$$

де $\nu = \nu(\sigma, F)$.

Оскільки, не зменшуючи загальності, можна вважати $a_0 = 1$, то з (5) при $n = 0$ для $\sigma \notin E$ маємо $\ln\mu(\sigma, F) \ge \int_0^{\lambda_\nu} C(t)d\ln n(2t)$, тому

$$\ln n(2\lambda_\nu) = o\left(\ln\mu(\sigma, F)\right) \tag{6}$$

при $\sigma \to +\infty$ $(\sigma \notin E)$. Нехай $m = \min\{n : \lambda_n \ge 2\lambda_\nu\}$. Тоді при $\sigma \notin E$ з (5) отримуємо

$$\sum(\sigma) = \frac{1}{\mu(\sigma, F)}\sum_{\lambda_n \ge 2\lambda_\nu}|a_n|e^{\sigma\lambda_n} \le$$
$$\le \sum_{\lambda_n \ge 2\lambda_\nu} exp\left\{-\int_{\lambda_\nu}^{\lambda_n}\frac{\lambda_n - t}{t}C(t)d\ln n(2t)\right\} \le$$
$$\le \sum_{\lambda_n \ge 2\lambda_\nu} exp\left\{-\int_{\lambda_\nu}^{\frac{\lambda_n}{2}} C(\lambda_\nu)\frac{\lambda_n - t}{t}d\ln n(2t)\right\} \le \tag{7}$$
$$\le \sum_{\lambda_n \ge 2\lambda_\nu} exp\left\{-C(\lambda_\nu)\left(\ln n(\lambda_n) - \ln n(2\lambda_\nu)\right)\right\}.$$

Зауважимо тепер, що при $\nu \to +\infty$

$$\sum_{\lambda_n \ge 2\lambda_\nu} exp\left\{-C(\lambda_\nu)\ln n(\lambda_n)\right\} = \sum_{k=m+1}^{+\infty}\frac{1}{k^{C(\lambda_\nu)}} \le$$
$$\le \sum_{k=m+1}^{+\infty}\int_{k-1}^{k}\frac{dt}{t^{C(\lambda_\nu)}} = \int_m^{+\infty}\frac{dt}{t^{C(\lambda_\nu)}} =$$
$$= \frac{1}{C(\lambda_\nu) - 1}\frac{1}{m^{C(\lambda_\nu)-1}} = o\left(\frac{1}{(n(2\lambda_\nu) - 1)^{C(\lambda_\nu)-1}}\right).$$

Звідси і з (7) при $\sigma \to +\infty$ $(\sigma \notin E)$ маємо $\sum(\sigma) = o(n(2\lambda_\nu))$, тому, застосовуючи (6), при $\sigma \to +\infty$ $(\sigma \notin E)$ послідовно отримуємо

$$M(\sigma, F) \le \sum_{\lambda_n \le 2\lambda_\nu}|a_n|e^{\sigma\lambda_n} + \mu(\sigma, F)\sum(\sigma) \le$$
$$\le (1 + o(1))n(2\lambda_\nu)\mu(\sigma, F)$$

та

$$\frac{\ln M(\sigma, F)}{\ln\mu(\sigma, F)} \le 1 + \frac{\ln((1 + o(1))n(2\lambda_\nu))}{\ln\mu(\sigma, F)} = 1 + o(1).$$

Залишилось показати, що $d_h(E) = 0$.

У випадку, коли $\kappa_j < \kappa_{j+1}$ для $\sigma \in [\kappa_j + \tau_j, \kappa_{j+1} + \tau_j)$ маємо

$$meas(E \cap [\sigma, +\infty)) = meas(E \cap [\kappa_{j+1} + \tau_j, +\infty)) \le$$
$$\le \sum_{k=j}^{+\infty}(\tau_{k+1} - \tau_k) = \int_{\lambda_j}^{+\infty} C(t)\frac{d\ln n(2t)}{t}. \tag{8}$$

За умовою $F \in \overline{H}(\Lambda, \Phi)$, тому існують число $K = K_F > 0$ і послідовність $(\sigma_j)_{j=0}^{+\infty}$, зростаюча до $+\infty$ при $j \to +\infty$ такі, що

$$K\sigma_j\Phi(\sigma_j) \le \ln\mu(\sigma_j, F) \qquad (j \ge 1).$$

Зауважимо, що для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$

$$\ln\mu(\sigma, f) = \max\{\ln|a_n| + \int_0^{\lambda_n}\alpha(t)dt + \sigma\lambda_n\} \ge$$
$$\ge \max\{\ln|a_n| + \sigma\lambda_n\} = \ln\mu(\sigma, F),$$

отже $f \in \overline{H}(\Lambda, \Phi)$ і виконується

$$K\sigma_j\Phi(\sigma_j) \le \ln\mu(\sigma_j, f) \qquad (j \ge 1).$$

Оскільки

$$\ln\mu(\sigma, f) = \ln\mu(0, f) + \int_0^\sigma \lambda_{\nu(t,f)}dt \le 2\sigma\lambda_{\nu(\sigma-0,f)},$$

то

$$\sigma_j \le \varphi\left(\frac{2}{K}\lambda_{\nu(\sigma_j-0,f)}\right) \tag{9}$$

при $j \ge 0$, де $\varphi(t)$ – обернена функція до $\Phi(t)$.

Нехай послідовність $(\sigma_j^*)_{j=0}^{+\infty}$ означено за допомогою рівності

$$\sigma_j^* = \sigma_j + \tau_{n_j},$$

де n_j – номер проміжку $[\kappa_n, \kappa_{n+1})$ до якого належить σ_j. Тоді $\kappa_{n_j} < \kappa_{n_j+1}$ і $\sigma_j^* \in [\kappa_{n_j} + \tau_{n_j}, \kappa_{n_j+1} + \tau_{n_j})$. Беручи до уваги нерівність (9) отримуємо

$$h(\sigma_j^*) = h(\sigma_j + \tau_{n_j}) \le$$

$$\le h\left(\varphi(\frac{2}{K}\lambda_{\nu(\sigma_j - 0, f)}) + \int_0^{\lambda_{n_j}} C(t)\frac{d\ln n(2t)}{t}\right) \le$$

$$\le h\left(\varphi(\frac{2\lambda_{n_j}}{K}) + A\right),$$

позаяк $\nu(\sigma - 0, f) \le j$ при $\sigma \in [\kappa_j, \kappa_{j+1})$.

Враховуючи (8) та умови теореми $h \in L_1$ і (3), отримуємо

$$h(\sigma_j^*) meas(E \cap [\sigma_j^*, +\infty)) = o(1) \qquad (j \to +\infty),$$

тобто $d_h E = 0$ і теорему доведено. ■

Зауваження. З доведення теореми випливає, що досить вимагати виконання умови (2) за деякого $b \ge \frac{2}{K_F}$.

Література

[1] Скаскив О.Б. О поведении максимального члена ряда Дирихле, задающего целую функцию // Матем. заметки. – 1985. – Т.37, №1. – С.41–47.

[2] Сало Т.М., Скасків О.Б. Оцінки виняткової множини в теоремах типу Бореля // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 1999. – Вип.54 – С.171–174.

[3] Шеремета М.Н. Об эквивалентности логарифмов максимума модуля и максимального члена ряда Дирихле // Матем. заметки. – 1987. – Т.42, №2. – С.215–226.

[4] Сало Т.М. Про величину виняткової множини в асимптотичній рівності максимального члена та суми цілого ряду Діріхле швидкого зростання // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2002. – Вип.60 – С.115–121.

NEW ESTIMATES OF MEASURE OF EXCEPTIONAL SET IN THE THEOREMS OF BOREL TYPE

T. Salo

National University "Lvivska Politechnika"
12 S. Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine

In this paper the new estimates of exceptional sets in asymptotic relation between the logarithm of maximum modulus and the logarithm of maximal term of entire Dirichlet series which have boundaries for the growth is obtain.

Keywords: entire Dirichlet, maximal term, maximum modul.

2000 MSC: 35C46

UDK: 517.576