ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№ 566, 2006, с. 12–19

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№ 566, 2006, p. 12–19

ПРО ЛОГАРИФМІЧНУ ПОХІДНУ МЕРОМОРФНОЇ ФУНКЦІЇ

А. Мохонько, Л. Куземко

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 30 серпня 2006 р.)

Нехай w мероморфна функція з логарифмічною особливою точкою в ∞, яка має скінченний порядок. Тоді для будь-якої однозначної вітки $w(z)$, $z \in g_{\alpha,\beta} = \{z : z = re^{i\theta},\ r_0 \le r < +\infty,\ \alpha \le \theta \le \beta\}$ отримана оцінка логарифмічної похідної мероморфної функції.

Ключові слова: мероморфна функція, логарифмічна похідна, неванліннівські характеристики.

2000 MSC: 30D15, 30D30

УДК: 517.535.4

Використовуватимемо позначення теорії мероморфних функцій [1]. Для мероморфної в C функції f скінченного порядку ρ відома нерівність Ж. Валірона [2, с.87] $|f'(z)/f(z)| < |z|^{2\rho+\varepsilon}$, $z \in C\backslash E$, E – множина кругів із скінченною сумою радіусів. Буде доведена

Теорема 1. *Якщо $w(z), z \in G = \{z : r_0 \le |z| < +\infty\}$ – мероморфна функція з логарифмічною особливою точкою в ∞, яка має скінченний порядок ρ, то для будь-якої однозначної вітки $w(z)$, $z \in g_{\alpha,\beta} = \{z : z = re^{i\theta}, r_0 \le r < +\infty, \alpha \le \theta \le \beta\}$ і $\forall \varepsilon > 0$ $\exists d = d(\alpha, \beta, \varepsilon)$:*

$$\left|\frac{d^n \ln w(z)}{dz^n}\right| < |z|^{(n+1)(\rho+1)+\varepsilon}, \quad z \in g_{\alpha,\beta}\backslash E, |z| \ge d, n \in N, \tag{1}$$

E – множина кругів на частині рімановоï поверхні $g_{\alpha,\beta}$ з центрами в нулях і полосах вітки $w(z)$, $z \in g_{\alpha,\beta}$, сума радіусів яких скінченна .

Нагадаємо означення мероморфної функції з логарифмічною особливою точкою в ∞. Нехай елемент $w_0(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (z - r_0)^n$, $z \in \{z : |z - r_0| < \varepsilon\}$, $r_0 > 0$ можна аналітично продовжити вздовж будь-якої кривої $z = \lambda(t)$, $t_0 \le t \le t_1$, $\lambda(t_0) = r_0$, яка належить $G = \{z : r_0 \le |z| < +\infty\}$, причому результатом продовження є або елемент $w_1(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (z - z_1)^n$, $z_1 = \lambda(t_1)$, або елемент вигляду $w_1(z) = \sum\limits_{n=-s}^{+\infty} \alpha_n (z - z_1)^n$, $s \in N$. Такі елементи називаються нерозгалуженими [3, т.2, с.482]. Існує дві можливості:

1) для будь-якого $z_1 \in G$ існує лише k, $k \in N$ елементів з центром z_1, які є аналітичним продовженням елемента $w_0(z)$ [3, с.475]. Множина всіх таких елементів $\forall z_1 \in G$ утворює (при $k = 1$) однозначну мероморфну або k-значну ($k \ge 2$) алгеброїдну функцію;

2) для будь-якого $z_1 \in G$ існує нескінченна множина різних нерозгалужених елементів з центром z_1, які є аналітичним продовженням елемента $w_0(z)$ (цей випадок ми нижче досліджуємо). Множину всіх таких елементів $\forall z_1 \in G$ позначимо через $w(z)$, $z \in G$ і назвемо *мероморфною функцією з логарифмічною особливістю в* ∞. Зокрема, якщо полосів немає, то $w(z)$, $z \in G$ – функція з ізольованою логарифмічною особливою точкою в ∞.

Виберемо деякі α, β, $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$; нехай, наприклад, $\alpha > 0$. Візьмемо криву $z = r_0 e^{it} = \mu(t)$, $0 \le t \le \alpha$. Аналітично продовжимо елемент $w_0(z)$, $z \in \{z : |z - r_0| < \varepsilon\}$ вздовж кривої $\mu(t)$, $0 \le t \le \alpha$. В результаті продовження отримаємо елемент $w_\alpha(z)$ з центром у точці $z_1 = r_0 e^{i\alpha}$. Тепер аналітично продовжимо елемент $w_\alpha(z)$ вздовж всеможливих кривих $z = r(t)e^{i\theta(t)}, t_1 \le t \le t_2$, де $r(t)$, $\theta(t)$, $t_1 \le t \le t_2$ – неперервні функції, такі що $r_0 \le r(t) < \infty$, $\alpha \le \theta(t) \le \beta$, $t_1 \le t \le t_2$, $r(t_1)\ e^{i\theta(t_1)} = r_0 e^{i\alpha}$. Можливо, що $\beta - \alpha \ge 2\pi$. Множину всіх елементів, отриманих внаслідок таких продовжень, позначимо через

$$w(z), z \in g_{\alpha,\beta} = \\ = \{z : z = re^{i\theta}, r_0 \le r < +\infty, \alpha \le \theta \le \beta\} \tag{2}$$

$g_{\alpha,\beta}$ – однозв'язна область на відповідній рімановій поверхні. У цій області застосовна теорема про монодромію [3, с.488]. Тому функція $w(z), z \in g_{\alpha,\beta}$ – однозначна мероморфна функція на частині рімановоï поверхні $g_{\alpha,\beta}$ (однозначна вітка функції $w(z)$, $z \in G$).

Розглянемо неванліннівські характеристики функції $w(z), z \in g_{\alpha,\beta}$ [1, с.40]. Позначимо $\ln^+ x = \max(\ln x, 0)$, $x \ge 0$; $k = \pi/(\beta - \alpha) > 0$. Нехай $b_l = |b_l| \exp(i\theta_l)$ – полоси функції $w(z)$, $z \in g_{\alpha,\beta}$.

Приймемо

$$A_{\alpha,\beta}(r,w)=\frac{k}{\pi}\int\limits_{r_0}^{r}\left(\frac{1}{t^{k+1}}-\frac{t^{k-1}}{r^{2k}}\right)\Big(\ln^+\left|(w(te^{i\alpha})\right|+$$
$$+\ln^+\left|w\left(te^{i\beta}\right)\right|\Big)dt,$$
$$B_{\alpha,\beta}\left(r,w\right)=\frac{2k}{\pi r^k}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\ln^+\left|w\left(re^{i\theta}\right)\right|\sin k\left(\theta-\alpha\right)d\theta,$$
$$C_{\alpha,\beta}\left(r,w\right)=2k\int\limits_{r_0}^{r}c_{\alpha,\beta}\left(t,w\right)\left(\frac{1}{t^{k+1}}+\frac{t^{k-1}}{r^{2k}}\right)dt, \tag{3}$$

де $c_{\alpha,\beta}\left(t,w\right)=c_{\alpha,\beta}\left(t,\infty\right)=\sum\limits_{\substack{r_0<|b_l|\le t,\\ \alpha\le\theta_l\le\beta}}\sin k\left(\theta_l-\alpha\right)$ – функція підрахунку полосів; кожний полюс враховується таку кількість разів, яка відповідає його кратності,

$$S_{\alpha,\beta}\left(r,w\right)=A_{\alpha,\beta}\left(r,w\right)+B_{\alpha,\beta}\left(r,w\right)+C_{\alpha,\beta}\left(r,w\right), \quad r_0\le r<\infty \tag{4}$$

Якщо $\alpha=0,\ \beta=\pi$, то $k=\pi/\left(\beta-\alpha\right)=1$ і пишуть $S_{0,\pi}\left(r,w\right)=S\left(r,w\right)$, $A_{0,\pi}\left(r,w\right)=A\left(r,w\right)$, $B_{0,\pi}\left(r,w\right)=B\left(r,w\right)$, $C_{0,\pi}\left(r,w\right)=C\left(r,w\right)$, $c_{0,\pi}\left(r,w\right)=c\left(r,w\right)$.

Нехай $w(z), z\in G$ – мероморфна функція з логарифмічною особливою точкою в ∞ і $w(z), z\in\in g_{\alpha,\beta}$ її однозначна вітка. Розглянемо характеристику $S_{\alpha,\beta}\left(r,w\right)$ цієї вітки; приймемо

$$\rho_{\alpha,\beta}=\lim\ln^+S_{\alpha,\beta}\left(r,w\right)/\ln r,\quad r\to+\infty. \tag{5}$$

Порядком росту функції $w\left(z\right)$, $z\in G$ називається величина

$$\rho=\sup\rho_{\alpha,\beta},\quad\forall\alpha,\beta,\quad-\infty<\alpha<\beta<+\infty.$$

Нехай $f\left(z\right),\ z\in U=\left\{z:Imz\ge0,\ r_0\le|z|\le s\right\}$, – мероморфна функція. Не порушуючи загальності, можна вважати, що $f\left(r_0e^{i\theta}\right)\ne0,\ \infty;\ 0\le\theta\le\pi$, інакше r_0 можна збільшити. Нехай

$$F\left(z,\zeta\right)=\ln\left|\left(s^2-z\bar{\zeta}\right)\left(z-\bar{\zeta}\right)\left(z-\zeta\right)^{-1}\left(s^2-z\zeta\right)^{-1}\right|, \tag{6}$$

$z,\zeta\in U=\left\{z:Imz\ge0,\ r_0\le|z|\le s\right\}, z\ne\zeta$. Через $\partial/\partial\eta$ позначимо оператор диференціювання по внутрішній нормалі до границі U(на дузі $\left\{\zeta:\zeta=r_0\exp\left(i\theta\right),0<\theta<\pi\right\}$) від функцій $ReF\left(z,\zeta\right)$ і $\ln\left|f\left(\zeta\right)\right|$ по змінній ζ.

Лема 1. *Нехай функція $f\left(z\right)\not\equiv0$ мероморфна в $U=\left\{z:Imz\ge0,\ r_0\le|z|\le s\right\}$.*

$$\ln f\left(z\right)=\frac{i}{2\pi}\int\limits_{[-s,-r_0]\cup[r_0,s]}\ln\left|f\left(t\right)\right|\left[\frac{t+z}{t-z}-\frac{s^2+tz}{s^2-tz}\right]\frac{dt}{t}+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\ln\left|f\left(\zeta\right)\right|\left[\frac{\zeta+z}{\zeta-z}-\frac{\bar{\zeta}+z}{\bar{\zeta}-z}\right]_{\zeta=se^{i\theta}}d\theta-$$
$$-\sum_{r_0<|a_m|<s}F\left(z,a_m\right)+\sum_{r_0<|b_l|<s}F\left(z,b_l\right)+Q\left(z,s\right), \tag{7}$$

$$Q\left(z,s\right)=\frac{r_0}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\left[\ln\left|f\left(\zeta\right)\right|\frac{\partial F\left(z,\zeta\right)}{\partial\eta}-F\left(z,\zeta\right)\frac{\partial\ln\left|f\left(\zeta\right)\right|}{\partial\eta}\right]_{\zeta=r_0e^{i\theta}}d\theta+iC, \tag{8}$$

a_m – нулі функції $f\left(z\right)$, b_l – її полюси, $C=const$. Доданки, які відповідають кратним нулям або полюсам, повторюються в правій частині (7) відповідну кількість разів.

☐ *Доведення.* Якщо $t\in R$ і $z=r\exp(i\varphi)$, тоді

$$\frac{1}{2t}Re\left[i\left(\frac{t+z}{t-z}-\frac{s^2+tz}{s^2-tz}\right)\right]=\frac{r\sin\varphi}{\left|t-z\right|^2}-\frac{s^2r\sin\varphi}{\left|s^2-tz\right|^2},$$
$$Re\left[\frac{se^{i\theta}+z}{se^{i\theta}-z}-\frac{se^{-i\theta}+z}{se^{-i\theta}-z}\right]=\frac{s^2-r^2}{\left|se^{i\theta}-z\right|^2}-\frac{s^2-r^2}{\left|se^{-i\theta}-z\right|^2};$$
$$ReF\left(z,a_m\right)=\ln\left|\frac{\left(s^2-z\bar{a}_m\right)\left(z-\bar{a}_m\right)}{\left(z-a_m\right)\left(s^2-za_m\right)}\right|. \tag{9}$$

Тому формулу Неванлінни [1, с. 15, теор. 2.1 і 2.3] можна подати у вигляді

$$\ln|f(z)| = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{[-s,-r_0]\cup[r_0,s]} \ln|f(t)|\, Re\left(i\left(\frac{t+z}{t-z} - \frac{s^2+tz}{s^2-tz}\right)\right)\frac{dt}{t} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi \ln\left|f\left(se^{i\theta}\right)\right| Re\left[\frac{se^{i\theta}+z}{se^{i\theta}-z} - \frac{se^{-i\theta}+z}{se^{-i\theta}-z}\right]d\theta -$$

$$- \sum_{r_0<|a_m|<s} ReF(z,a_m) + \sum_{r_0<|b_l|<s} ReF(z,b_l) + \frac{r_0}{2\pi}\int\limits_0^\pi \left[\ln|f(\zeta)|\frac{\partial ReF(z,\zeta)}{\partial\eta} - ReF(z,\zeta)\frac{\partial \ln|f(\zeta)|}{\partial\eta}\right]_{\zeta=r_0e^{i\theta}} d\theta. \quad (10)$$

Права і ліва частини (7) містять аналітичні функції від z. Враховуючи (10), дійсні частини цих функцій збігаються; з умов Коші-Рімана випливає, що функції рівні з точністю до константи. ■

Нехай $\{a_m\}$ – множина нулів, $\{b_l\}$ – множина полюсів мероморфної функції $f(z)$, $z \in D = \{z : Imz \geq 0,\ r_0 \leq |z| < \infty\}$. Позначимо через $\{c_q\}$ теоретико-множинну суму послідовностей $\{a_m\}$, $\{b_l\}$; $c_q = |c_q|\, e^{i\theta_q} \in \{c_q\}$, а через (див. (3))

$$c(t,0,\infty) = c(t,f) + c(t,1/f) = \sum_{r_0<|c_q|<t} \sin\theta_q \quad - \quad (11)$$

функцію підрахунку нулів і полюсів функції f.

Лема 2. *Нехай $R > r > r_0$. Тоді*

$$c(r,0,\infty) \leq \frac{R^2 r C(R,0,\infty)}{2(R-r)(R+r)}. \quad (12)$$

□ *Доведення.* З визначення характеристики $C(r,f)$ випливає

$$C(R,0,\infty) = C(R,f) + C\left(R,f^{-1}\right) \geq$$

$$\geq 2\int\limits_r^R c(t,0,\infty)\left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{R^2}\right)dt \geq$$

$$\geq 2c(r,0,\infty)\int\limits_r^R \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{R^2}\right)dt =$$

$$= \frac{2(R-r)(R+r)}{R^2 r} c(r,0,\infty).$$

Звідси отримуємо (12). ■

Лема 3. *Нехай $f(z), z \in D$ – мероморфна функція скінченного порядку ρ . Якщо $z = r\exp(i\varphi)$, $r_0 < |z|, Imz > 0$, то $\forall n \in N \quad \forall \varepsilon > 0$*

$$\left|\frac{d^n \ln f(z)}{dz^n}\right| < \frac{|z|^{(n+1)(\rho+1)+\varepsilon}}{\sin^{2n}\varphi}, \quad z \notin E, \quad (13)$$

E – множина кругів із скінченною сумою радіусів , $n \in N$.

□ *Доведення.* Продиференціюємо (7) n разів по z, отримаємо:

$$\frac{d^n}{dz^n}\ln f(z) = \frac{i}{2\pi}\int\limits_{[-s,-r_0]\cup[r_0,s]} \ln|f(t)|\left(\frac{t+z}{t-z} - \frac{s^2+tz}{s^2-tz}\right)_z^{(n)}\frac{dt}{t} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi \ln|f(\zeta)|\left(\left[\frac{\zeta+z}{\zeta-z} - \frac{\bar\zeta+z}{\bar\zeta-z}\right]_{\zeta=se^{i\theta}}\right)_z^{(n)} d\theta -$$

$$- \sum_{r_0<|a_m|<s} F_z^{(n)}(z,a_m) + \sum_{r_0<|b_l|<s} F_z^{(n)}(z,b_l) + Q_z^{(n)}(z,s) \quad (14)$$

Виконуються рівності

$$\left(\frac{t+z}{t-z} - \frac{s^2+tz}{s^2-tz}\right)_z^{(n)} = \frac{2tn!}{(t-z)^{n+1}} - \frac{2s^2t^n n!}{(s^2-zt)^{n+1}}, \quad (15)$$

$$\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z} - \frac{\bar\zeta+z}{\bar\zeta-z}\right)_z^{(n)} = \frac{2\zeta n!}{(\zeta-z)^{n+1}} - \frac{2\bar\zeta n!}{\left(\bar\zeta-z\right)^{n+1}}, \quad (16)$$

$$(F(z,\zeta))_z^{(n)} = -\frac{\left(\bar\zeta\right)^n (n-1)!}{\left(s^2 - z\bar\zeta\right)^n} - \frac{(n-1)!}{\left(\bar\zeta - z\right)^n} + \frac{(n-1)!}{(\zeta-z)^n} + \frac{\zeta^n (n-1)!}{(s^2 - z\zeta)^n}. \quad (17)$$

На дузі $\left\{\zeta : \zeta = r_0 e^{i\theta}, 0 < \theta < \pi\right\}$ похідна по внутрішній нормалі по змінній $\zeta = \rho e^{i\theta}$ має вигляд $\partial F(z,\zeta)/\partial\eta = \partial F(z,\rho\exp(i\theta))/\partial\rho$. Тому

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \eta}\right|_{\zeta=r_0e^{i\theta}}=\frac{-z}{s^2e^{i\theta}-zr_0}+\frac{1}{ze^{-i\theta}-r_0}+ +\frac{z}{s^2e^{-i\theta}-zr_0}-\frac{1}{ze^{i\theta}-r_0}. \quad (18)$$

Продиференціюємо (18) n разів по z, отримаємо

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial F\left(z,r_0e^{i\theta}\right)}{\partial \eta}\right)_z^{(n)}=-\frac{s^2e^{i\theta}r_0^{n-1}}{\left(s^2e^{i\theta}-zr_0\right)^{n+1}}- -\frac{e^{-in\theta}}{\left(r_0-ze^{-i\theta}\right)^{n+1}}+\frac{s^2e^{-i\theta}r_0^{n-1}}{\left(s^2e^{-i\theta}-zr_0\right)^{n+1}}+\frac{e^{in\theta}}{\left(r_0-ze^{i\theta}\right)^{n+1}}. \quad (19)$$

Нехай

$$r_0+1<|z|<s,\quad s>\max\left(2r_0,r_0+1\right), \quad (20)$$

тоді $\left|s^2e^{i\theta}-zr_0\right|>s^2-sr_0$, $\left|s^2e^{-i\theta}-zr_0\right|>s^2-sr_0$; $\left|r_0-ze^{-i\theta}\right|>1$, $\left|r_0-ze^{i\theta}\right|>1$.

Тому з (19) випливає

$$\left|\left(\frac{\partial F\left(z,r_0e^{i\theta}\right)}{\partial \eta}\right)_z^{(n)}\right|<4n!. \quad (21)$$

Нехай виконується (20) і $|\zeta|=r_0$. Тоді $\left|z-\bar{\zeta}\right|>1$, $|z-\zeta|>1$; $\left|s^2-z\bar{\zeta}\right|>s\left(s-r_0\right)>sr_0$, $\left|s^2-z\zeta\right|>s^2-sr_0>sr_0$, і (17) можна оцінити так:

$$\left.\left|\left(F\left(z,\zeta\right)\right)_z^{(n)}\right|\right|_{|\zeta|=r_0}<4\left(n-1\right)\ !. \quad (22)$$

Оскільки $f\left(r_0e^{i\theta}\right)\neq 0,\ \infty$, то $\left|\ln\left|f\left(r_0e^{i\theta}\right)\right|\right|<K$, $\left.\left|\partial\ln\left|f\left(\zeta\right)\right|/\partial\eta\right|\right._{\zeta=r_0e^{i\theta}}<K$, $0\le\theta\le\pi$, $K=const$, тому, враховуючи (8), (21), (22), отримуємо

$$\left|\left(Q\left(z,s\right)\right)_z^{(n)}\right|<4r_0Kn!,\quad K=const, \quad (23)$$

K не залежить від z і s.

Використовуючи формулу бінома Ньютона і нескладні перетворення, (16) можна записати так:

$$\frac{1}{2n!}\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}-\frac{\bar{\zeta}+z}{\bar{\zeta}-z}\right)_z^{(n)}= =\frac{\sum\limits_{j=0}^{n+1}C_{n+1}^{j}\left(-z\right)^{n+1-j}\left(\zeta\bar{\zeta}^{j}-\bar{\zeta}\zeta^{j}\right)}{\left(\zeta-z\right)^{n+1}\left(\bar{\zeta}-z\right)^{n+1}}. \quad (24)$$

Оскільки

$$x^n-y^n=\left(x-y\right)\left(x^{n-1}+x^{n-2}y+...+xy^{n-2}+y^{n-1}\right), \quad (25)$$

то чисельник в правій частині (24) можна зобразити у вигляді

$$\left(-z\right)^{n+1}\left(\zeta-\bar{\zeta}\right)+\sum_{j=2}^{n+1}C_{n+1}^{j}\left(-z\right)^{n+1-j}|\zeta|^2\left(\bar{\zeta}^{j-1}-\zeta^{j-1}\right)= =\left(\zeta-\bar{\zeta}\right)\left(\left(-z\right)^{n+1}-\sum_{j=2}^{n+1}C_{n+1}^{j}\left(-z\right)^{n+1-j}|\zeta|^2\sum_{p=0}^{j-2}\bar{\zeta}^{p}\zeta^{j-2-p}\right). \quad (26)$$

Якщо $\zeta=se^{i\theta}$, тоді $\zeta-\bar{\zeta}=2i\left|\zeta\right|\sin\theta$. Тому з (26) і формул

$$\sum_{j=0}^{n}jC_n^j=n2^{n-1},\quad \sum_{j=0}^{n}C_n^j=2^n \quad (27)$$

випливає оцінка чисельника дробу в правій частині (24) ($|z|<|\zeta|=s$)

$$\left|\sum_{j=0}^{n+1}C_{n+1}^{j}\left(-z\right)^{k+1-j}|\zeta|^2\left(\bar{\zeta}^{j-1}-\zeta^{j-1}\right)\right|< <2\sin\theta s^{n+2}\left(1+\sum_{j=2}^{n+1}C_{n+1}^{j}\left(j-1\right)\right)< <2\sin\theta\ s^{n+2}\left(n2^n+2\right).$$

Звідси і з (24) отримуємо

$$\left.\left|\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}-\frac{\bar{\zeta}+z}{\bar{\zeta}-z}\right)_z^{(n)}\right|\right|_{\zeta=s}<\frac{Ks^{n+2}\sin\theta}{\left(s-r\right)^{2n+2}}, \quad (28)$$

$K=4n!\left(n2^n+2\right)$ – не залежить від s. Аналогічно перетворимо і оцінимо (15).

$$\frac{1}{2n!}\left(\frac{t+z}{t-z}-\frac{s^2+tz}{s^2-tz}\right)_z^{(n)}= =\frac{t\left(s^2-zt\right)^{n+1}-s^2t^n\left(t-z\right)^{n+1}}{\left(t-z\right)^{n+1}\left(s^2-zt\right)^{n+1}}. \quad (29)$$

Чисельник дробу в правій частині (29) можна записати у вигляді

$$t\sum_{j=0}^{n+1} C_{n+1}^{j}\left(-zt\right)^{n+1-j}s^{2j}-s^2t^n\sum_{j=0}^{n+1} C_{n+1}^{j}\left(-z\right)^{n+1-j}t^{j}=$$
$$=\sum_{j=0}^{n+1} C_{n+1}^{j}\left(-z\right)^{n+1-j}\left(t^{n+2-j}s^{2j}-s^2t^{n+j}\right)=$$
$$=ts^2\left(\sum_{j=2}^{n+1} C_{n+1}^{j}\left(-zt\right)^{n+1-j}\left(\left(s^2\right)^{j-1}-\left(t^2\right)^{j-1}\right)\right)-\left(-z\right)^{n+1}t^n\left(s^2-t^2\right)= \tag{30}$$
$$=\left(s^2-t^2\right)\left(ts^2\sum_{j=2}^{n+1} C_{n+1}^{j}\left(-zt\right)^{n+1-j}\sum_{k=0}^{j-2}\left(s^2\right)^{j-2-k}\left(t^2\right)^{k}-\left(-z\right)^{n+1}t^n\right).$$

Оскільки $|z|\le s$, $|t|\le s$, то враховуючи (30), (27), чисельник дробу в правій частині (29) можна оцінити так:

$$\left|t\left(s^2-zt\right)^{n+1}-s^2t^n\left(t-z\right)^{n+1}\right|<$$
$$<\left(s^2-t^2\right)|t|\,s^{2n}\left(n2^n+2\right). \tag{31}$$

Оскільки $z=re^{i\varphi}$, $t\in R$, $|\ t|\le s$, то

$$\left|s^2-zt\right|\ge s\left(s-r\right),\quad |z-t|\ge r\sin\varphi,$$
$$|z-t|\ge |\ t|\sin\varphi. \tag{32}$$

Тому з (29), (31), (32) випливає

$$\left|\left(\frac{t+z}{t-z}-\frac{s^2+tz}{s^2-tz}\right)_z^{(n)}\right|\le$$
$$\le\frac{|t|\,s^{n+2}2n!\left(n2^n+2\right)}{r^n\left(s-r\right)^{n+1}\sin^{n+1}\varphi}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{s^2}\right). \tag{33}$$

Запишемо співвідношення (17) у вигляді

$$\frac{\left(F\left(z,\zeta\right)\right)_z^{(n)}}{(n-1)!}=\left(\frac{\zeta^n}{\left(s^2-z\zeta\right)^n}-\frac{\bar\zeta^n}{\left(s^2-z\bar\zeta\right)^n}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{\left(\zeta-z\right)^n}-\frac{1}{\left(\bar\zeta-z\right)^n}\right). \tag{34}$$

Вирази в дужках у правій частині (34) зведемо до спільних знаменників. У співвідношенні, яке ми розглядаємо $\zeta=|\zeta|\,e^{i\theta}$; $z=re^{i\varphi}$; $|\zeta|$, $|z|<s$, тому

$$\left|s^2-z\zeta\right|,\left|s^2-z\bar\zeta\right|>s\left(s-r\right),\left|\bar\zeta-z\right|>r\sin\varphi. \tag{35}$$

Враховуючи (25), (35) і тотожність $\zeta-\bar\zeta==2i\,|\zeta|\sin\theta$, отримуємо оцінку для (34)

$$\left|\left(F\left(z,\zeta\right)\right)_z^{(n)}\right|<$$
$$<2^nn!s^n\sin\theta\left(\frac{1}{(s-r)^{2n}}+\frac{1}{|\zeta-z|^n\,r^n\sin^n\varphi}\right). \tag{36}$$

Враховуючи (14), (23), (28), (33), (36), знаходимо

$$\frac{1}{K}\left|\frac{d^n\ln f\left(z\right)}{dz^n}\right|<\frac{s^{n+2}}{\pi r^n\left(s-r\right)^{n+1}\sin^{n+1}\varphi}\int\limits_{[-s,-r_0]\cup[r_0,s]}\left|\ln\left|f\left(t\right)\right|\right|\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{s^2}\right)dt+$$
$$+\frac{s^{n+3}}{(s-r)^{2n+2}}\frac{1}{\pi s}\int\limits_0^{\pi}\left|\ln\left|f\left(se^{i\theta}\right)\right|\right|\sin\theta\;d\theta+\frac{s^n}{(s-r)^{2n}}\sum_{r_0<|c_q|<s}\sin\theta_q+ \tag{37}$$
$$+\frac{s^n}{r^n\sin^n\varphi}\sum_{r_0<|c_q|<s}\frac{\sin\theta_q}{\left|z-c_q\right|^n}+1,\ K=const>0.$$

Відомо [1, с.39-41], що

$$\left|\ln|f|\right|=\ln^+|f|+\ln^+|1/f|;\quad \ln^+x=\max\left(\ln x,0\right),\quad x\ge 0;$$

$$B(r,f)+B\left(r,\frac{1}{f}\right),A(r,f)+A\left(r,\frac{1}{f}\right),$$
$$C(r,f)+C\left(r,\frac{1}{f}\right)<2S(r,f)+const. \tag{38}$$

Існує неспадна неперервна функція $\overset{\circ}{S}(r,f)$, така що $S(r,f)=\overset{\circ}{S}(r,f)+\mathrm{O}(1)$, $r\to+\infty$, [1, с. 43, теор. 5.4]. Тому, враховуючи означення неванліннівських характеристик (3) ($\alpha=0$, $\beta=\pi$, $k=\pi/(\beta-\alpha)=1$), а також (11), (12), (38), отримуємо

$$\left|\frac{d^n\ln f(z)}{dz^n}\right|<\frac{Ks^{n+2}}{(s-r)^{n+1}}\left(\frac{1}{r^n\sin^{n+1}\varphi}+\right.$$
$$\left.+\frac{s}{(s-r)^{n+1}}\right)(S(s,f)+1)+$$
$$+K\frac{s^n}{r^n\sin^n\varphi}\sum_{r_0<|c_q|<s}\frac{\sin\theta_q}{|z-c_q|^n}+K, \tag{39}$$
$$K=const>0.$$

Нехай в (39) $s=2r$, тоді нерівність набуде такого вигляду:

$$\left|\frac{d^n\ln f(z)}{dz^n}\right|<\frac{K(S(2r,f)+1)}{r^{n-1}\sin^{n+1}\varphi}+$$
$$+\frac{K}{\sin^n\varphi}\sum_{r_0<|c_q|<2r}\frac{\sin\theta_q}{|z-c_q|^n}+K. \tag{40}$$

Припустимо, що f має скінченний порядок ρ_1. Тоді

$$S(r,f)<Kr^{\rho_2},r>r_0,\rho_2>\rho_1,K=const>0. \tag{41}$$

Беручи до уваги (12), (38), (41), отримуємо

$$c(t,0,\infty)=\sum_{r_0<|c_q|<t}\sin\theta_q<Kt^{\rho_2+1}. \tag{42}$$

З кожної точки $c_q\in D$, як з центра, проведемо коло радіуса $|c_q|^{-\rho-1}\sin\theta_q$, $\rho>\rho_2$. Через E позначимо множину точок, які лежать всередині всіх цих кіл. Покажемо, що сума довжин радіусів кругів з E скінченна. Дійсно, враховуючи властивості інтеграла Стільтьєса і нерівність (42), отримуємо ($\rho>\rho_2$):

$$\sum_{r_0<|c_q|<\infty}|c_q|^{-\rho-1}\sin\theta_q=\int_{r_0}^{\infty}t^{-\rho-1}dc(t,0,\infty)=$$
$$=c(t,0,\infty)\,t^{-\rho-1}\Big|_{r_0}^{\infty}+(\rho+1)\int_{r_0}^{\infty}c(t,0,\infty)\,t^{-\rho-2}dt<$$
$$(\rho+1)\,K\int_{r_0}^{\infty}t^{\rho_2-\rho-1}dt<const. \tag{43}$$

Визначимо $\varphi_1=\min(\varphi,\pi-\varphi)$, $z=re^{i\varphi}$, $0\le\varphi\le\pi$. Тоді $0\le\varphi_1\le\pi/2$, $\sin\varphi=\sin\varphi_1>$ $>\sin(\varphi_1/2)>(\sin\varphi)/\pi$. Позначимо $G=\left\{te^{i\theta}:r_0<t<2r,0<\theta<\pi\right\}$,

$$G_1=\left\{te^{i\theta}:r_0<t<2r,\frac{\varphi_1}{2}<\theta<\pi-\frac{\varphi_1}{2}\right\},$$
$$G_2=G\backslash G_1. \tag{44}$$

Якщо $c_q=|c_q|\,e^{i\theta_q}\in G_1$ і $z\in G\backslash E$, то $|z-c_q|>$ $>|c_q|^{-\rho-1}\sin\theta_q\ge|c_q|^{-\rho-1}\sin(\varphi_1/2)$. Тому $|z-c_q|^{-n}<(2r)^{n(\rho+1)}/\sin^n(\varphi_1/2)<Kr^{n(\rho+1)}/\sin^n\varphi$, $K=const$, і

$$\sum_{c_q\in G_1}\frac{\sin\theta_q}{|z-c_q|^n}<\frac{Kr^{n(\rho+1)}}{\sin^n\varphi}\sum_{c_q\in G_1}\sin\theta_q. \tag{45}$$

Якщо $c_q\in G_2$, то $|z-c_q|>r\sin(\varphi_1/2)$, і

$$\sum_{c_q\in G_2}\frac{\sin\theta_q}{|z-c_q|^n}<\frac{1}{r^n\sin^n(\varphi_1/2)}\sum_{c_q\in G_2}\sin\theta_q<$$
$$<\frac{K}{r^n\sin^n\varphi}\sum_{c_q\in G_2}\sin\theta_q.$$

Звідси і з (42), (45) отримуємо

$$\sum_{c_q\in G}\frac{\sin\theta_q}{|z-c_q|^n}<\frac{Kr^{n(\rho+1)}}{\sin^n\varphi}\sum_{c_q\in G}\sin\theta_q<$$
$$<\frac{Kr^{(n+1)(\rho+1)}}{\sin^n\varphi}. \tag{46}$$

Нерівність (13) випливає з (40), (41), (44), (46), ($\rho>\rho_2>\rho_1$). ■

Доведення теореми 1. Виберемо α, $-\infty<\alpha<+\infty$, і розглянемо вітку $w(z)$, $z\in g_{\alpha,\alpha+\pi}=\left\{z=re^{i\theta}:r_0\le r<+\infty,\alpha\le\theta\le\alpha+\pi\right\}$ функції $w(z)$, $z\in G$. Функція $z=\zeta\,e^{i\alpha}$ є взаємно однозначним відображенням області $D_1=\{\zeta=re^{i\varphi}:r_0\le r<+\infty,$ $0\le\varphi\le\pi\}$ на $g_{\alpha,\alpha+\pi}$. Нехай $f(\zeta)\overset{def}{=}w\left(\zeta\,e^{i\alpha}\right)$,

$\zeta \in D_1$. Неванліннівська характеристика $S_{0,\pi}(r,f) = S_{\alpha,\alpha+\pi}(r,w)$ [1, с.41]. Тому, якщо ρ_0 – порядок росту функції $f(\zeta) = w(\zeta e^{i\alpha})$, $\zeta \in D_1$, (див.(5)), то $\rho_0 \le \rho = \sup\limits_{-\infty<\alpha<\beta<+\infty} \rho_{\alpha,\beta}$, ($\rho_{\alpha,\beta}$ – порядок росту характеристики $S_{\alpha,\beta}(r,w)$, ρ – порядок функції $w(z)$, $z \in G$). Оскільки $\rho < +\infty$, то $\rho_0 < +\infty$. Нехай $\{c_k\}$ – множина нулів і полюсів вітки $w(z)$, $z \in g_{\alpha,\alpha+\pi}$, $c_q = |c_q| e^{i\theta_k}$. При взаємно однозначному відображенні $z = \zeta\ e^{i\alpha}$ області D_1 на $g_{\alpha,\alpha+\pi}$ кожному нулю (полюсу) $c_q \in \{\ c_q\}$ вітки $w(z)$, $z \in g_{\alpha,\alpha+\pi}$ відповідає нуль (полюс) $\zeta_q = c_q e^{-i\alpha} = |c_q| e^{i(\theta q-\alpha)}$ функції $f(\zeta)$, $\zeta \in D_1$. Розглянемо круги радіусів $\delta_q = |\zeta_q|^{-\rho-1-\frac{\varepsilon}{3}} \sin\varphi_q$, $\varepsilon > 0$, $\varphi_q = \theta_q - \alpha$, з центрами, відповідно, в точках $\zeta_q = |\zeta_q| e^{i\varphi_q}$. Через E_0 позначимо множину точок області D_1, які лежать всередині всіх цих кругів. Круг радіуса δ_q з центром в точці ζ_q при відображенні $z = \zeta\ e^{i\alpha}$ області D_1 на $g_{\alpha,\alpha+\pi}$ переходить в круг радіуса δ_q з центром в точці c_q; множина кругів E_0 переходить в деяку множину кругів E_* області $g_{\alpha,\alpha+\pi}$.

Згідно з (13) для мероморфної функції $f(\zeta)$, $\zeta \in D_1$ порядку $\rho_0 < +\infty$ існує $d = d(\varepsilon) \ge r_0$:

$$\left|\frac{d^n \ln f(\zeta)}{d\zeta^n}\right| < \frac{|\zeta|^{(n+1)(\rho_0+1)+n\varepsilon}}{\sin^{2n}\varphi},$$

$$\zeta = re^{i\varphi} \in D_1 \backslash E_0, \quad |\zeta| > d, \quad n \in N;$$

$$\sum_{r_0<|\zeta_q|<+\infty} |\zeta_q|^{-\rho_0-1-\varepsilon} \sin\varphi_q < c, \quad c = const. \qquad (47)$$

Тому, що $f(\zeta) = w(\zeta e^{i\alpha})$, $\zeta \in D_1$, то $\left|\frac{w^{(n)}(z)}{w(z)}\right| = \left|\frac{f^{(n)}(\zeta)}{f(\zeta)}\right|$, $\left|\frac{d^n \ln w(z)}{dz^n}\right| = \left|\frac{d^n \ln f(\zeta)}{d\zeta^n}\right|$, $re^{i\theta} = z = \zeta\ e^{i\alpha} = re^{i(\varphi+\alpha)}$, $\varphi = \theta - \alpha$, $\varphi_q = \theta_q - \alpha$, і з (47) випливає

$$\left|\frac{d^n \ln w(z)}{dz^n}\right| < \frac{|z|^{(n+1)(\rho_0+1)+n\varepsilon}}{\sin^{2n}(\theta-\alpha)},$$

$$z = re^{i\theta} \in g_{\alpha,\alpha+\pi} \backslash E_*, \quad |z| > d, \quad n \in N;$$

$$\sum_{\substack{r_0 < |c_q| < +\infty \\ \alpha \le \theta_q \le \alpha+\pi}} |c_q|^{-\rho_0-1-\varepsilon} \sin(\theta_q - \alpha) < c, \qquad (48)$$

$c = const$, $\rho_0 \le \rho$, де E_* – множина кругів з центрами в точках $c_q \in \{c_q\}$, $c_q \in g_{\alpha,\alpha+\pi}$ і радіусами $\delta_q = |c_q|^{-\rho_0-1-\varepsilon} \sin(\theta_q - \alpha)$, сума яких скінченна.

Розглянемо довільну вітку $w(z)$, $z \in g_{\alpha\beta}$, $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$, функції $w(z)$, $z \in G$. Для деяких m, $l \in Z$ виконується $\pi(m+1)/2 < \alpha < \beta < \pi(m+l-1)/2$. Нехай $\alpha_j = \pi j/2$, $j = m$, $m+1$, ..., $m+l$. Розглянемо кутову область $g_{\alpha_j,\alpha_j+\pi} = \left\{\ z = re^{i\theta} : r_0 \le r < +\infty, \alpha_j \le \theta \le \alpha_j + \pi\right\}$ і відповідну їй однозначну вітку $w(z)$, $z \in g_{\alpha_j,\alpha_j+\pi}$, $j = m,\ m+1,\ ..., m+l$ функції $w(z)$, $z \in G$. Для цієї вітки виконується співвідношення (48), де $\alpha = \alpha_j$, ρ_0 приймає деякі значення $\rho_0 = \rho_j$; значення ρ_j можуть бути різними для різних $j = m,\ m+1,\ ..., m+l$; $\rho_j \le \rho$. Замість множини кругів E_* необхідно писати множину E_j, яку визначимо так: через $\{\ c_{qj}\}$ позначимо множину нулів і полюсів $w(z)$, $z \in g_{\alpha_j,\alpha_j+\pi}$ і з кожної точки $c_{qj} = |c_{qj}| \exp(i\theta_{qj}) \in \{\ c_{qj}\}$, як із центра, проведемо коло радіуса $\delta_{qj} = |c_{qj}|^{-\rho_j-1-\varepsilon} \sin(\theta_{qj} - \alpha)$. Через E_j позначимо множину точок частини $g_{\alpha_j,\alpha_j+\pi}$ ріманової поверхні функції $w(z)$, $z \in G$, які лежать всередині всіх цих кіл. Крім того, замість c_q, θ_q в (48) в цьому випадку необхідно писати c_{qj}, θ_{qj}.

Виберемо деяке δ, $0 < \delta < \pi/4$. Якщо $\alpha_j + \delta \le \theta \le \alpha_j + \pi - \delta$, $\alpha_j + \delta \le \theta_{qj} \le \alpha_j + \pi - \delta$, то $\sin(\theta - \alpha_j)$, $\sin(\theta_{qj} - \alpha_j) \ge \sin\delta > 0$. Тому, з врахуванням (48), отримаємо

$$\left|\frac{d^n \ln w(z)}{dz^n}\right| < \frac{|z|^{(n+1)(\rho_j+1)+n\varepsilon}}{\sin^{2n}(\theta-\alpha_j)} < \frac{|z|^{(n+1)(\rho_j+1)+n\varepsilon}}{\sin^{2n}\delta} < $$
$$< |z|^{(n+1)(\rho_j+1)+(n+1)\varepsilon},$$

$$|z| \ge d_j, z \in g(j) = \left\{z = re^{i\theta} : \alpha_j + \delta \le \theta \le \alpha_j + \pi - \delta, r_0 \le r\right\},$$
$$z \notin E_j, \quad n \in N,$$

$$\sin\delta \sum_{\substack{\alpha_j+\delta \le \theta_{qj} \le \alpha_j+\pi-\delta \\ r_0 \le |c_{qj}| < +\infty}} |z|^{-\rho_j-1-\varepsilon} \le$$
$$\le \sum_{\substack{\alpha_j \le \theta_{qj} \le \alpha_j+\pi, \\ r_0 \le |c_{qj}| < +\infty}} |z|^{-\rho_j-1-\varepsilon} \sin(\theta_{qj} - \alpha_j) < c_j,$$
$$c_j = const,\ j = m,\ m+1,\ ...,\ m+l. \qquad (49)$$

З кожної точки $c_{qj} \in g(j)$ проведемо коло радіуса $\sigma_{qj} = |c_{qj}|^{-\rho_j-1-\varepsilon} > \delta_{qj}$. Через E_j позначимо множину точок частини $g(j)$ ріманової поверхні функцій $w(z)$, $z \in G$, які лежать всередині всіх цих кіл. Беручи до уваги (49), отримаємо

$$\sum_{j=m}^{m+l} \sum_{\substack{\alpha_j+\delta \le \theta_{qj} \le \alpha_j+\pi-\delta \\ r_0 \le |c_{qj}| < +\infty}} \sigma_{qj} < \qquad (50)$$
$$< c = const,\ \sigma_{qj} = |c_{qj}|^{-\rho_j-1-\varepsilon}.$$

З визначення чисел α_j, $j = m,\ m+1,\ ...,\ m+l$, випливає, що сегмент $[\alpha,\beta] \subset \bigcup_{j=m}^{m+l} [\alpha_j, \alpha_j+\pi]$, і частина ріманової поверхні $g_{\alpha,\beta} \subset \bigcup_{j=m}^{m+l} g(j)$ (останню суму ми розглядаємо як об'єднання частин ріманової поверхні функцій $w(z)$, $z \in G$). Нехай E – сума множин E_j, $j = m,\ ...,\ m+l$, які розглядаються на відповідній рімановій поверхні. Згідно з (50), сума радіусів кругів, які утворюють множину E, скінченна. Оскільки $g_{\alpha,\beta} \subset \bigcup_{j=m}^{m+l} g(j)$, $E = \bigcup_{j=m}^{m+l} g(j) E(j)$, $\rho_j \le \rho$, то з (49), (50) випливає нерівність (1).

Література

[1] Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 592 с.

[2] Валирон Ж. Аналитические функции. – М.: ГИТТЛ, 1957. – 235 с.

[3] Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. В 2-х т.: т. 2. – М.: Наука, 1968. – 624с.

[4] Mokhon'ko A.Z., Mokhon'ko V.D. On order of growth of analytic solutions for algebraic differential equations having logarithmic singularity. Matematychni Studii. – 2000. V. 13, №2. – P. 203 – 218.

ABOUT LOGARITHMIC DERIVATIVE OF MEROMORPHIC FUNCTION

A. Mokhon'ko, L. Kuzemko

National University "Lvivska Politechnika"
12 S. Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine

Let w be meromorphic function with logarithmic singularity in ∞ and the order of w is finite. Then for any univalent branch $w(z)$,
$z \in g_{\alpha,\beta} = \{z : z = re^{i\theta},\ r_0 \le r < +\infty,\ \alpha \le \theta \le \beta\}$ estimate for logarithmic derivative of meromorphic functions is proved.

Keywords: meromorphic function,logarithmic derivative, Nevanlinna characteristic.

2000 MSC: 30D15, 30D30

UDK: 517.535.4