**Kormaníková E., Ďuraj J.**

Technická univerzita Košice,
Stavebná fakulta, Ústav inžinierskeho staviteľstva,
katedra stavebnej mechaniky
Vysokoškolská 4, 04001 Košice
E-mail: eva.kormanikova@tuke.sk

# PRÍSTUPY MODELOVANIA SENDVIČOVEJ DOSKY S POVRCHOVÝMI LAMINÁTOVÝMI VRSTVAMI



**One special group of laminated composites used extensively in engineering applications are sandwich composites. The paper deals with the solution of 3-layered rectangular sandwich plate with laminated composite faces. There are described analytical and numerical approach of the modelling of sandwich plate with laminated composite faces. The assumptions involved in modelling the behaviour of the outer layers and the core result into a set of five differential equations. For application of the finite element method there were derived appropriate stiffness, stress and load matrices. The correctness of their implementation into the computer program is compared with program COSMOS/M.**

**Úvod.** Sendvičové dosky patria v rámci klasifikácie kompozitných materiálov do skupiny konštrukčných kompozitov. Pozostávajú z troch vrstiev s rozdielnymi fyzikálnymi charakteristikami. Medzi ohybovo tuhými povrchovými vrstvami sa nachádza ohybovo mäkké jadro, ktoré je z materiálu s výrazne menšou hustotou. Kompozitnou skladbou sendvičovej dosky sa dosiahne jej relatívne veľká ohybová tuhosť pri súčasne nízkej špecifickej hmotnosti. Materiál jadra zároveň zlepšuje tepelné a zvukové izolačné vlastnosti konštrukčného prvku.

**Predpoklady riešenia.** Sendvič môže byť definovaný ako špeciálny laminát s troma vrstvami. Povrchové vrstvy hrúbky $h_1$, $h_3$ môžu byť ortotropné lamináty. Stredná vrstva – jadro hrúbky $h_2$ prenáša len šmyk v rovinách kolmých na strednicovú rovinu povrchových vrstiev. Predpoklady pre makromechanické modelovanie sendvičov sú:

- Hrúbka jadra je oveľa väčšia ako hrúbka povrchových vrstiev, $h_2 >> h_1, h_3$
- Deformácie $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ sú lineárne pozdĺž hrúbky sendvičového jadra:

$$\varepsilon(x,y,z) = \bar{\varepsilon}(x,y) + z\kappa(x,y) \qquad -\frac{h_2}{2} \le z \le +\frac{h_2}{2} \tag{1}$$

- Povrchové vrstvy prenášajú len napätia $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$. Priečne šmykové napätia $\tau_{xz}, \tau_{yz}$ vo vonkajších vrstvách sú zanedbateľné.
- Napätia $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ v jadre sú rovné nule, deformácie $\varepsilon_z$ sú vo všetkých vrstvách nulové.

**Analytický prístup modelovania.** Teraz pristúpime k definovaniu vnútorných síl:

$$N = \int_{-\left(\frac{1}{2}h_2+h_1\right)}^{-\frac{1}{2}h_2} \sigma dz + \int_{\frac{1}{2}h_2}^{\frac{1}{2}h_2+h_3} \sigma dz, \tag{2}$$

$$M = \int_{-\left(\frac{1}{2}h_2+h_1\right)}^{-\frac{1}{2}h_2} \sigma z dz + \int_{\frac{1}{2}h_2}^{\frac{1}{2}h_2+h_3} \sigma z dz, \tag{3}$$

$$V = \int_{-\frac{1}{2}h_2}^{\frac{1}{2}h_2} \tau dz\,. \tag{4}$$

Konštitučné rovnice pre sendvič sú v tvare:

$$\begin{pmatrix} N \\ M \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & 0 \\ C & D & 0 \\ 0 & 0 & \overline{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon} \\ \kappa \\ \gamma \end{pmatrix}, \tag{5}$$

s tuhostnými koeficientami:

$$A_{ij} = A_{ij}^{(1)} + A_{ij}^{(3)}, \qquad B_{ij} = \frac{1}{2} h_2 \left( A_{ij}^{(3)} - A_{ij}^{(1)} \right),$$

$$C_{ij} = C_{ij}^{(1)} + C_{ij}^{(3)}, \qquad D_{ij} = \frac{1}{2} h_2 \left( C_{ij}^{(3)} - C_{ij}^{(1)} \right), \tag{6}$$

pričom:

$$A_{ij}^{(1)} = \int_{-\left(\frac{1}{2}h_2 + h_1\right)}^{-\frac{1}{2}h_2} {}^k E_{ij}\, dz = \sum_{k=1}^{n_1} {}^k E_{ij}\, {}^k h\,, \qquad A_{ij}^{(3)} = \int_{\frac{1}{2}h_2}^{\frac{1}{2}h_2 + h_3} {}^k E_{ij}\, dz = \sum_{k=1}^{n_2} {}^k E_{ij}\, {}^k h\,, \tag{7}$$

$$C_{ij}^{(1)} = \int_{-\left(\frac{1}{2}h_2 + h_1\right)}^{-\frac{1}{2}h_2} {}^k E_{ij}\, z dz = \sum_{k=1}^{n_1} {}^k E_{ij}\, {}^k h\, {}^k \bar{z}\,, \qquad C_{ij}^{(3)} = \int_{\frac{1}{2}h_2}^{\frac{1}{2}h_2 + h_3} {}^k E_{ij}\, z dz = \sum_{k=1}^{n_2} {}^k E_{ij}\, {}^k h\, {}^k \bar{z}\,, \tag{8}$$

$$\overline{A}_{ij} = E_{ij}^t h_2 \qquad \text{i, j=4,5,} \tag{9}$$

$${}^k \bar{z} = \left( {}^k z + {}^{k-1} z \right) / \, 2\,, \tag{10}$$

$n_1$ a $n_2$ sú počty vrstiev laminátov, ktoré tvoria spodnú a hornú vrstvu sendviča; $E_{ij}^t$ sú šmykové moduly pružnosti jadra ${}^k E_{ij}$ je prvok matice elastických konštánt k-tej vrstvy; ${}^k h$ je hrúbka k-tej vrstvy laminátu.

Šmykovú deformáciu jadra vyjadríme podľa zavedených predpokladov vzťahmi:

$$\gamma_{xz2} = \left( \frac{u_1 - u_3}{d} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \left( \psi + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \tag{11}$$

$$\gamma_{yz2} = \left( \frac{v_1 - v_3}{d} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \left( \varphi + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \tag{12}$$

kde d je vzdialenosť strednicových rovín povrchových vrstiev:

$$d = h_2 + \frac{h_1 + h_3}{2} \tag{13}$$

Konštitučné vzťahy (5) pre sendvičový kompozit sú podobné konštitučným vzťahom laminátov, v ktorých je zahrnutý vplyv priečneho šmyku. Líšia sa len vzťahom pre výpočet prvkov $C_{ij}$ namiesto $B_{ij}$ ktoré spôsobujú nesymetriu v matici tuhosti pri použití teórie laminátov.

V prípade symetrického sendviča, kde $h_1 = h_3 = h^f$, $A_{ij}^{(1)} = A_{ij}^{(3)} = A_{ij}^f$, $C_{ij}^{(1)} = -C_{ij}^{(3)} = C_{ij}^f$, môžeme prvky vo vzťahu (6) zapísať:

$$A_{ij} = 2A_{ij}^f\,, \qquad D_{ij} = h_2 C_{ij}^f\,, \qquad B_{ij} = C_{ij} = 0\,, \tag{14}$$

teda nevzniká väzbový efekt medzi ťahom (tlakom) a ohybom a konštitučné vzťahy pre sendviče sú identické konštitučným vzťahom pre symetrické lamináty s vplyvom priečneho šmyku – šmyková teória laminátov.

**Numerický prístup modelovania.** Riešenie sústavy lineárnych diferenciálnych rovníc, popisujúcich stav napätosti v sendvičovej doske s rôzne vystuženými vonkajšími vrstvami, v uzavretom tvare vo všeobecnosti nevieme realizovať, preto pri riešení týchto problémov s výhodou používame metódy, ktoré dostatočne presne aproximujú hľadané funkcie. V tomto riešení sme použili metódu konečných prvkov.

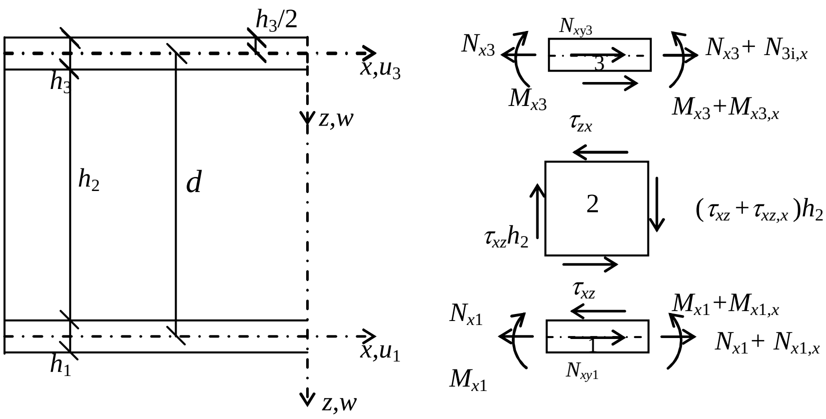
Podmienky rovnováhy vnútorných síl, ktoré pôsobia na diferenciálny sendvičový element (Obr. 1) majú tvar:

$$\frac{\partial N_{xi}}{\partial x}+\frac{\partial N_{yxi}}{\partial y}+\frac{\partial V_{zxi}^{j}}{\partial z}=0\,,\qquad \frac{\partial N_{xyi}}{\partial x}+\frac{\partial N_{yi}}{\partial y}+\frac{\partial V_{zyi}^{j}}{\partial z}=0\,,\qquad \frac{\partial V_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial V_{yz}}{\partial y}+p=0\,, \tag{15}$$

pričom:

$$\frac{\partial V_{zx1}^{j}}{\partial z}=-\tau_{zx}\,,\qquad \frac{\partial V_{zx3}^{j}}{\partial z}=\tau_{zx}\,,$$

$$\frac{\partial \mathrm{V}_{xz}}{\partial \mathrm{z}}=\tau_{xz}\mathrm{h}_2\,,\qquad \frac{\partial \mathrm{V}_{yz}}{\partial \mathrm{z}}=\tau_{yz}\mathrm{h}_2\,. \tag{16}$$




*Obr. 1: Merné vnútorné sily na sendvičovom elemente v rovine (x,z)*

Systém piatich diferenciálnych rovníc korešponduje s piatimi nezávislými premiestneniami a vyplynie z podmienok rovnováhy vnútorných síl, ktoré pôsobia na jednotlivé vrstvy diferenciálneho elementu, v tvare:

$$A_{11}^{(1)}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+2A_{14}^{(1)}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial y}+A_{44}^{(1)}\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}+A_{14}^{(1)}\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}+\left(A_{12}^{(1)}+A_{44}^{(1)}\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial y}+A_{24}^{(1)}\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}-B_{11}^{(1)}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}-$$

$$-3B_{14}^{(1)}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}-\left(B_{14}^{(1)}+2B_{44}^{(1)}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}-B_{24}^{(1)}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}-{}^{t}E_{55}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\psi\right)-{}^{t}E_{56}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\varphi\right)=0\,, \tag{17}$$

$$A_{22}^{(1)}\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}+\left(A_{12}^{(1)}+A_{44}^{(1)}\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial y}+A_{24}^{(1)}\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}+A_{44}^{(1)}\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}+2A_{24}^{(1)}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial y}+A_{22}^{(1)}\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}-B_{14}^{(1)}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}-$$

$$-\left(B_{14}^{(1)}+2B_{44}^{(1)}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}-3B_{14}^{(1)}\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}-B_{22}^{(1)}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}-{}^{t}E_{56}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\psi\right)-{}^{t}E_{66}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\varphi\right)=0\,, \tag{18}$$

$$A_{11}^{(3)}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}+2A_{14}^{(3)}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x\partial y}+A_{44}^{(3)}\frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2}+A_{14}^{(3)}\frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2}+\left(A_{12}^{(3)}+A_{44}^{(3)}\right)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x\partial y}+A_{24}^{(3)}\frac{\partial^2 v_3}{\partial y^2}-B_{11}^{(3)}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}-$$

$$-3B_{14}^{(3)}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}-\left(B_{14}^{(3)}+2B_{44}^{(3)}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}-B_{24}^{(3)}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+{}^{t}E_{55}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\psi\right)+{}^{t}E_{56}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\varphi\right)=0\,, \tag{19}$$

$$A_{22}^{(3)}\frac{\partial^2 v_3}{\partial y^2}+\left(A_{12}^{(3)}+A_{44}^{(3)}\right)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x\partial y}+A_{24}^{(3)}\frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2}+A_{44}^{(3)}\frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2}+2A_{24}^{(3)}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x\partial y}+A_{22}^{(3)}\frac{\partial^2 v_3}{\partial y^2}-B_{14}^{(3)}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}-$$

$$-\left(B_{14}^{(3)}+2B_{44}^{(3)}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}-3B_{14}^{(3)}\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}-B_{22}^{(3)}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+{}^{t}E_{56}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\psi\right)+{}^{t}E_{66}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\varphi\right)=0\,, \tag{20}$$

$$\bar{A}_{55}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)+\bar{A}_{56}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}+\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)+\bar{A}_{65}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}+\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)+\bar{A}_{66}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)+q=0 \qquad (21)$$

kde vzťahy pre prvky matice **A**, **B**, **D** a $\overline{\mathbf{A}}$ sú popísané v (6) - (9).

**Porovnávací príklad.** Kĺbovo podopretá sendvičová doska s rozmermi L =1m, H=0,8m (Obr. 2), hrúbky h=0,03m je zaťažená rovnomerným spojitým zaťažením s intenzitou 15kPa v ohybovej rovine. Materiálové vlastnosti strednej vrstvy sú uvedené v Tab. 1. Horná a spodná vrstva je vytvorená z laminátu $[0/45/-45/90]_S$ , ktorého materiálové vlastnosti sú uvedené v Tab. 2.

*Tab.1*

**Materiálové konštanty strednej vrstvy**

| $G_2$ [MPa] | $\nu_2$ |
|---|---|
| 16,154 | 0,3 |

*Tab. 2*

**Materiálové konštanty vrstvy laminátu**

| $E_1$ [GPa] | $E_2$ [GPa] | $G_{12}$ [GPa] | $\nu_{12}$ |
|---|---|---|---|
| 140,766 | 12,335 | 6,457 | 0,38 |

Riešime symetrický sendvič so symetricky usporiadanými vrstvami v okrajových laminátových vrstvách, teda neprejavuje sa tu väzbový efekt. Nami získané výsledky porovnávame programovým systémom COSMOS/M (COS) pri použití náhradného ekvivalentu namiesto vrstiev laminátu. Pozorujeme tu skoky v priebehu napätí okrajových vrstiev vplyvom rôzneho vystuženia vrstiev laminátu (Obr. 3).

*Tab. 3*

**Materiálové konštanty hornej a spodnej vrstvy náhradného ekvivalentu laminátu**

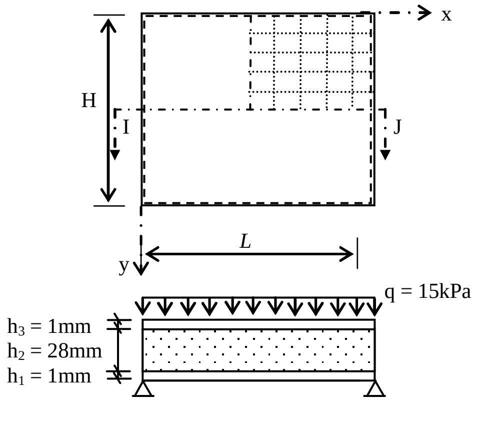
| $E_x$ [GPa] | $E_y$ [GPa] | $G_{xy}$ [GPa] | $\nu$ |
|---|---|---|---|
| 56,35 | 56,35 | 21,426 | 0,315 |

*Tab. 4*

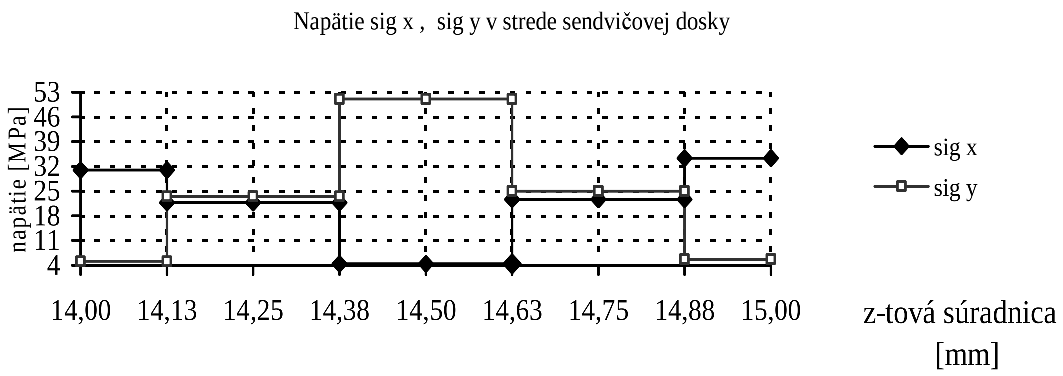
**Merné vnútorné sily v strede dosky**

| $N_{x1}$[kNm$^{-1}$] | $N_{y1}$[kNm$^{-1}$] | $N_{xy1}$[kNm$^{-1}$] | $N_{x3}$[kNm$^{-1}$] | $N_{y3}$[kNm$^{-1}$] | $N_{xy3}$[kNm$^{-1}$] |
|---|---|---|---|---|---|
| 20,43 | 26,11 | 0,0 | -20,43 | -26,11 | 0,0 |

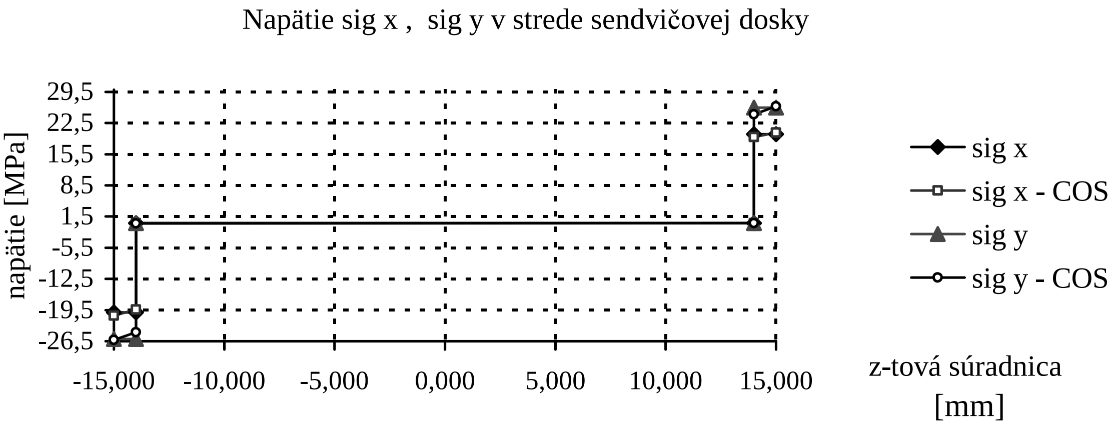
| $V_{xz2}$[kNm$^{-1}$] | $V_{yz2}$[kNm$^{-1}$] | $M_{x13}$[kNm.m$^{-1}$] | $M_{y13}$[kNm.m$^{-1}$] | $M_{xy13}$[kNm.m$^{-1}$] |
|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,0 | $2{,}763.10^{-4}$ | $1{,}417.10^{-4}$ | $3{,}528.10^{-5}$ |



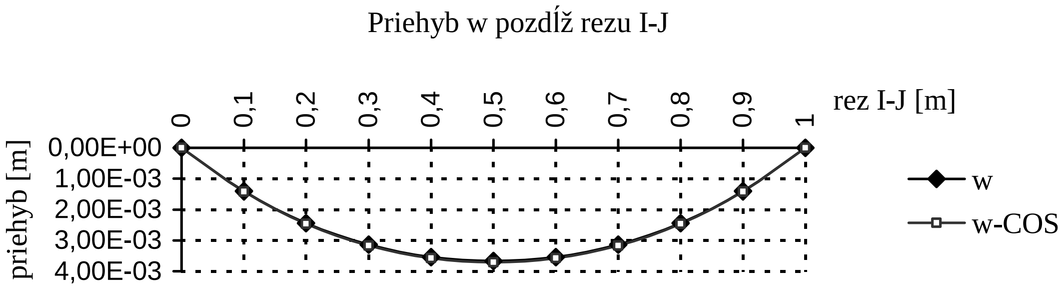

*Obr. 2: Geometria a vystuženie jednoducho podopretej sendvičovej dosky*



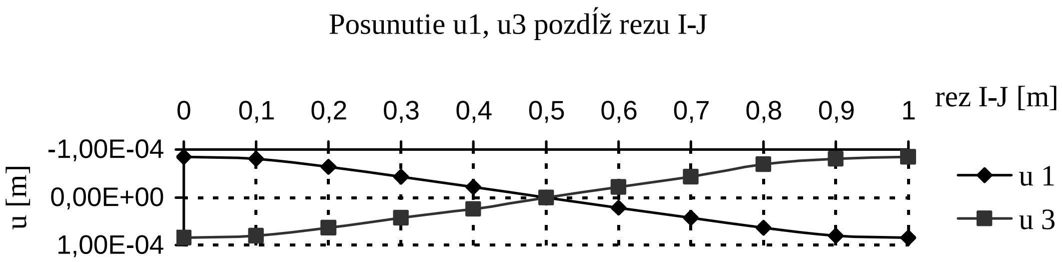

*Obr. 3: Priebeh napätí po hrúbke spodnej vrstvy sendviča (vrstiev laminátu)*



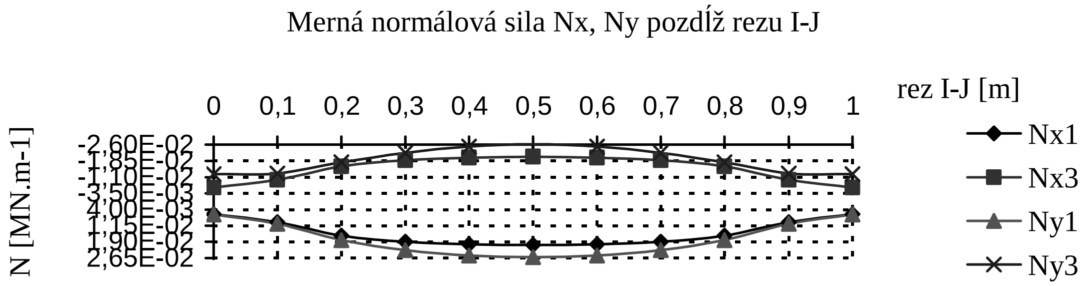

*Obr. 4: Priebeh napätí po hrúbke sendviča pri použití náhradného ekvivalentu laminátu*




*Obr. 5: Priebeh priehybov w v reze I-J*




*Obr. 6: Priebeh posunutí u v reze I-J*




*Obr. 7: Priebeh merných normálových síl v spodnej (1) a hornej (3) vrstve pozdĺž rezu I-J*

**Záver.** V článku je uvedený analytický a numerický prístup modelovania sendvičovej dosky s okrajovými vrstvami vytvorenými z laminátov. Sú zavedené predpoklady riešenia, ktoré sú vhodné pre veľmi tenké okrajové vrstvy. Výpočet bol kontrolovaný programovým systémom COSMOS/M. Boli dopočítané efektívne materiálové charakteristiky náhradného ekvivalentu, ktoré boli implementované do výpočtu.

Príspevok vznikol v rámci riešenia VEGA 1/4202/07.

*1. Agarwal, B. D. - Broutman, L. J.: Vláknové kompozity, Praha, 1987. 2. Altenbach, H. - Altenbach, J. - Kissing. W: Structural analysis of laminate and sandwich beams and plates, Lublin, 2001. 3. Lovíšek, J.: Optimal control of a variational inequality with controls in coefficients. Applications to structural analysis – Mindlin- Timoshenko plate, ZAMM-Z. angew. Math. Mech. 74(1994) 8, str. 307-324. 4. Ďuraj, J., Tóthová, D., Kormaníková, E: Numerická analýza pružne podopretej obdĺžnikovej sendvičovej dosky, Staticko-konštrukčné a stavebno-fyzikálne problémy stavebných konštrukcií, Tatranská Lomnica, ISBN 80-232-0221-9, str. 241-246, 2003.*

**Kotrasová K.**

Technická univerzita,
Ústav inžinierskeho staviteľstva,
Katedra stavebnej mechaniky,
Slovensko, 040 02 Košice, Vysokoškolská 4
E-mail: kamila.kotrasova@tuke.sk

# NÁDRŽ, KVAPALINA A PODLOŽIE



**This article contains description of some methods for solution of response of vertical rectangular containment with fluid on the soil, which is subject to horizontal seismic loads. First part of the present article consideres impulsive and convective components of the fluid with various dynamic behaviours. The special method of calculation of response of containment is described in further part of the paper. Computer-program Cosmos/M was used.**

**Úvod.** Zemetrasenie samo o sebe nepredstavuje priame nebezpečenstvo pre človeka a životné prostredie. Dôsledkom zemetrasenia je pôsobenie pohybu zemského povrchu na existujúce stavby, ktorých porušenie až zrútenie spôsobuje rozsiahle následky. Aj vo väčšej vzdialenosti od epicentra môžu ešte