

Wniosek końcowy. Badania presjometryczne pozwalają na ustalenie z wyjątkową dokładnością różnic geotechnicznych parametrów międzywarstwowych, a także ich zmiany w obrębie jednej warstwy.

1. Jaremski J.: *The influence of physical and chemical processes occurring in the weathered Opole marls on the geotechnical parameters.* Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów 2005. 2. Jaremski J.: *Wandering attenuation zone of marl weathering on the basis of investigation on Opole marl eluvium.* *Geotechnical Engineering of Hard Soils – Soft Rocks*, A.A. Balkema, Rotterdam, 1997, s.1883-1835. 3. Baguelin F. i in.: *Badania presjometryczne a fundamentowanie*, Wydawnictwo Geologiczne, Warszawa 1984.

Jędraszak B., Baran W., Jankowiak R.

Opole University of Technology
Faculty of Civil Engineering
Poland, 45-267 Opole, 48 Katowicka St.
E-mail: katkbi@po.opole.pl

PRZEMIESZCZENIA POWŁOK OBROTOWYCH OD WPŁYWU TEMPERATURY

© Jędraszak B., Baran W., Jankowiak R., 2007

Problem of influence of stationary, non-symmetric field of temperature on deformations of thin-walled elastic shell of revolution is discussed in the paper. Analytical solution describing state of displacement for shell subjected to field of temperature is presented. The solution allowed to evaluate extremal values of components of vector of displacement for hyperboloidal cooling tower shell that can appear in a span of one day (i.e. on the 21-st of June).

Wstęp. Problemy statyki powłok w ujęciu analitycznym i numerycznym zostały przedstawione w znaczącej liczbie publikacji, których obszernie zestawienie zawiera praca [3]. Większość rozwiązań tego typu konstrukcji dotyczy oddziaływań mechanicznych: ciężar własny, parcie wiatru. W niniejszej pracy przeanalizowano wpływ temperatury na przemieszczenia powierzchni środkowej powłok obrotowych opisanych w parametryzacji krzywiznowej. Zmiany temperatury płaszcza powłoki zależą od czynników środowiskowych i eksploatacyjnych. Dominujący wpływ na rozkład temperatury na powierzchni płaszcza powłoki ma temperatura powietrza atmosferycznego oraz natężenie promieniowania słonecznego [4, 5]. Dlatego odpowiedź na to działanie, wyrażona między innymi przez odkształcenia, jest zmienna w czasie tak jak zmienne jest obciążenie. Odpowiedź konstrukcji na działanie temperatury wyraża się poprzez naprężenia oraz w postaci przemieszczeń, wywołanych głównie zmianami temperatury na powierzchni środkowej. Różnica temperatur po wysokości przekroju płaszcza powłoki ma niewielki wpływ na wartości przemieszczeń i to tylko w strefach brzegowych. Wpływ ten, występuje na ograniczonym obszarze do kilku metrów dla konstrukcji żelbetowych i kilkudziesięciu centymetrów dla konstrukcji stalowych. Pomiar rzeczywistego kształtu powłok, który może być podstawą do oceny stanu obiektu, powinien uwzględniać przemieszczenia, które są odpowiedzią na działające w chwili pomiaru obciążenie termiczne. Podejście analityczne wykorzystujące liniową teorię powłok [1, 2, 6] pozwoliło uzyskać rozwiązanie opisujące stan przemieszczenia powłok obrotowych wywołany dowolnym stacjonarnym polem temperatury. Wyniki rozwiązania analitycznego porównano z wynikami obliczeń numerycznych wykorzystując program Robot bazujący na metodzie elementów skończonych.

Analityczny model opisu przemieszczeń powłok obrotowych. Deformacje opisano przyjmując wektor przemieszczenia w powierzchni środkowej powłoki w postaci składowych w^1 , w^2 , w^3 odniesionych do kowariantnej bazy \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 , \mathbf{m} (rys. 1):

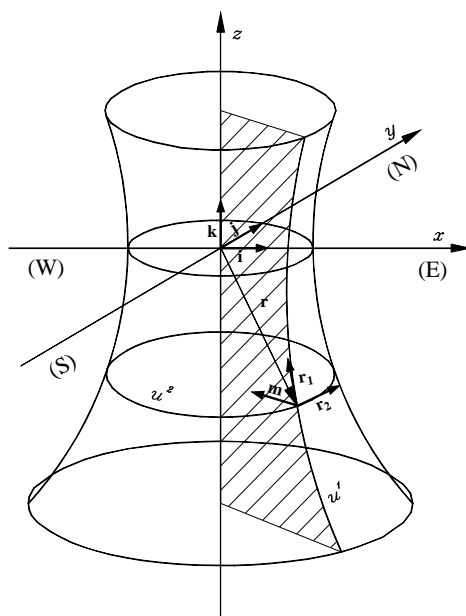
$$\mathbf{w} = w^1 \mathbf{r}_1 + w^2 \mathbf{r}_2 + w^3 \mathbf{m}. \quad (1)$$

Równanie wektorowe rozpatrywanych powierzchni w parametryzacji krzywiznowej ma postać:

$$\mathbf{r} = f(u^1) [\cos(u^2) \mathbf{i} + \sin(u^2) \mathbf{j}] + u^1 \mathbf{k}, \quad (2)$$

gdzie $f(u^1)$ – funkcja opisująca południk; u^1 , u^2 – współrzędne krzywoliniowe.

Współrzędna u^1 wskazuje punkt na tworzącej, natomiast współrzędna u^2 wybiera południk i odmierzana jest przeciwnie do ruchu wskazówek zegara od kierunku północnego (N).



Rys.1. Geometria powłoki

Współczynniki pierwszej i drugiej formy różniczkowej dla opisywanej powierzchni środkowej wynoszą:

$$g_{11} = [f(u^1)_{,1}]^2 + 1, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = [f(u^1)]^2, \quad (3)$$

$$b_{11} = -\frac{\sqrt{g_{22} \cdot 11}}{\sqrt{g_{11}}}, \quad b_{12} = b_{21} = 0, \quad b_{22} = \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}}. \quad (4)$$

Związki geometryczne wiążą składowe wektora przemieszczenia w^k , w^3 z tensorem odkształcenia γ_{ij} zależnością:

$$2\gamma_{ij} = w^k \Big|_i g_{jk} + w^k \Big|_j g_{ik} - 2w^3 b_{ij}. \quad (5)$$

Wzór na tensor odkształcenia błonowego od wpływu temperatury ma postać:

$$\gamma_{ij} = \varepsilon_t g_{ij}, \quad (6)$$

w którym odkształcenia jednostkowe ε_t obliczono ze wzoru:

$$\varepsilon_t = \alpha_t t_s, \quad (7)$$

gdzie α_t – współczynnik liniowej rozszerzalności termicznej.

Temperaturę powierzchni środkowej powłoki t_s przyjęto z rozkładu liniowego dla temperatur na powierzchni wewnętrznej t_w i zewnętrznej t_z płaszcza powłoki opisanych wzorami:

$$t_w = \sum_{\psi=0}^n [C_w^\psi(u^1) \cos(\psi u^2) + S_w^\psi(u^1) \sin(\psi u^2)], \quad (8)$$

$$t_z = \sum_{\psi=0}^n \left[C_z^\psi(u^1) \cos(\psi u^2) + S_z^\psi(u^1) \sin(\psi u^2) \right]. \quad (9)$$

Ciągłe funkcje opisujące pola temperatur (8) i (9), uzyskano z interpolacji pól temperatur zdefiniowanych w sposób dyskretny. Po współrzędnej równoleżnikowej interpolację wykonano dla wybranych równoleżników za pomocą funkcji trygonometrycznych, a następnie po współrzędnej południkowej za pomocą wielomianu.

Rozpisanie zależności opisującej związki geometryczne (5) i wstawienie wzorów (6) i (7) prowadzi do układu równań:

$$\begin{cases} \sqrt{g_{11}}(\sqrt{g_{11}}w^1)_{,1} - b_{11}w^3 = \varepsilon_t g_{11}, \\ g_{11}w^1_{,2} + g_{22}w^2_{,1} = 2\varepsilon_t g_{12}, \\ \frac{1}{2}g_{22,1}w^1 + g_{22}w^2_{,2} - b_{22}w^3 = \varepsilon_t g_{22}. \end{cases} \quad (10)$$

Układ równań różniczkowych cząstkowych (10) opisuje poszukiwane składowe wektora przemieszczenia w funkcji odkształceń jednostkowych ε_t i składowych tensora metrycznego g_{ij} .

Przemieszczenia przy obciążeniu osiowo-symetrycznym. Temperaturę zewnętrzną i wewnętrzną na powierzchni powłoki opisano po obwodzie za pomocą szeregów trygonometrycznych. Biorąc pierwsze wyrazy szeregów (8), (9) dla $\psi = 0$ otrzymano opis obciążenia osiowo-symetrycznego. Jest on częścią składową opisywanego wpływu. Układ równań (10) dla tej części obciążenia uprościł się i przyjął postać:

$$\begin{cases} \sqrt{g_{11}}(\sqrt{g_{11}}w_o^1)_{,1} - b_{11}w_o^3 = g_{11}\varepsilon_t^o, \\ g_{22}w_o^2_{,1} = 0, \\ \frac{1}{2}g_{22,1}w_o^1 - b_{22}w_o^3 = g_{22}\varepsilon_t^o, \end{cases} \quad (11)$$

gdzie
$$\varepsilon_t^o = \alpha_t \frac{C_w^0(u^1) + C_z^0(u^1)}{2}. \quad (12)$$

Rozwiązując układ równań (11) otrzymano wzory na składowe w_0^1 , w_0^2 i w_0^3 wektora przemieszczenia od obciążenia osiowo-symetrycznego:

$$w_0^1 = \frac{1}{g_{11}} \left[\int \varepsilon_t^o \left(g_{11} - \frac{b_{11}}{b_{22}} g_{22} \right) du^1 + C \right], \quad (13)$$

$$w_0^2 = 0, \quad (14)$$

$$w_0^3 = \frac{1}{b_{22}} \left(\frac{1}{2} g_{22,1} w_0^1 - g_{22} \varepsilon_t^o \right). \quad (15)$$

Przemieszczenia przy obciążeniu osiowo-niesymetrycznym. Dokonując rozdzielania zmiennych dla części obciążenia niesymetrycznego opisanego szeregiem trygonometrycznym (8) i (9) przy $\psi \neq 0$, na składniki szeregu związane z funkcją $\cos(\psi u^2)$ oraz na składniki związane z funkcją $\sin(\psi u^2)$, układ równań (10) przyjmuje postać:

$$\begin{cases} \sqrt{g_{11}}(\sqrt{g_{11}}w^1)_{,1} - b_{11}w^3 = g_{11}\varepsilon_t^\psi, \\ \mp \psi g_{11}w^1_\psi + g_{22}w^2_{\psi,1} = 0, \\ \frac{1}{2}g_{22,1}w^1_\psi \pm g_{22}w^2_{\psi,2} - b_{22}w^3_\psi = g_{22}\varepsilon_t^\psi. \end{cases} \quad (16)$$

W równaniach (16) znaki górne odnoszą się do wyrazów szeregu związanych z funkcją $\cos(\psi u^2)$, natomiast dolne z funkcją $\sin(\psi u^2)$. Układ równań (16) sprowadzono do równania różniczkowego rzędu drugiego o współczynnikach funkcyjnych:

$$w_{\psi,11}^1 + p(u^1)w_{\psi,1}^1 + q_{\psi}(u^1)w_{\psi}^1 = v_{\psi}(u^1), \quad (17)$$

gdzie

$$p(u^1) = \frac{b_{11}}{b_{22}} \frac{g_{22}}{g_{11}} \left[\sqrt{g_{11}} \left(\frac{b_{22}}{b_{11}} \frac{\sqrt{g_{11}}}{g_{22}} \right)_{,1} + \frac{b_{22}}{b_{11}} \frac{g_{11,1}}{g_{22}} - \frac{g_{22,1}}{2g_{22}} \right], \quad (18)$$

$$q_{\psi}(u^1) = \frac{b_{11}}{b_{22}} \frac{g_{22}}{g_{11}} \left[\left(\frac{g_{11,1}}{2\sqrt{g_{11}}} \frac{b_{22}}{b_{11}} \frac{\sqrt{g_{11}}}{g_{22}} \right)_{,1} - \left(\frac{g_{22,1}}{2g_{22}} \right)_{,1} - (\psi)^2 \frac{g_{11}}{g_{22}} \right], \quad (19)$$

$$v_{\psi}(u^1) = \frac{b_{11}}{b_{22}} \frac{g_{22}}{g_{11}} \left(\frac{b_{11}}{b_{22}} \frac{g_{22}}{g_{11}} \varepsilon_t^{\psi} - \varepsilon_t^{\psi} \right)_{,1}. \quad (20)$$

Składową w_{ψ}^1 wektora przemieszczenia dla poszczególnych wyrazów rozwinięcia opisu obciążenia w szereg trygonometryczny wyznaczono numerycznie z równania (17). Pozostałe składowe wektora przemieszczenia otrzymano z przekształcenia układu równań (16) i można je wyznaczyć z zależności:

$$w_{\psi}^3 = \frac{1}{b_{11}} \left(\frac{1}{2} g_{11,1} w_{\psi}^1 + g_{11} w_{\psi,1}^1 - g_{11} \varepsilon_t^{\psi} \right), \quad (21)$$

$$w_{\psi}^2 = \frac{1}{\pm \psi g_{22}} \left(g_{22} \varepsilon_t^{\psi} - \frac{1}{2} g_{22,1} w_{\psi}^1 + b_{22} w_{\psi}^3 \right). \quad (22)$$

Przemieszczenia od odkształceń jednostkowych. Sumując rozwiązania w ujęciu tensorowym od części obciążenia osiowo-symetrycznego i osiowo-niesymetrycznego wyznaczono ostateczne wartości poszukiwanych składowych wektora przemieszczenia:

$$\begin{aligned} w^1(u^1, u^2) &= w_0^1(u^1) + \sum_{\psi=1}^n \left[w_{c\psi}^1(u^1) \cos(\psi u^2) + w_{s\psi}^1(u^1) \sin(\psi u^2) \right], \\ w^2(u^1, u^2) &= w_0^2(u^1) + \sum_{\psi=1}^n \left[w_{c\psi}^2(u^1) \sin(\psi u^2) + w_{s\psi}^2(u^1) \cos(\psi u^2) \right], \\ w^3(u^1, u^2) &= w_0^3(u^1) + \sum_{\psi=1}^n \left[w_{c\psi}^3(u^1) \cos(\psi u^2) + w_{s\psi}^3(u^1) \sin(\psi u^2) \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

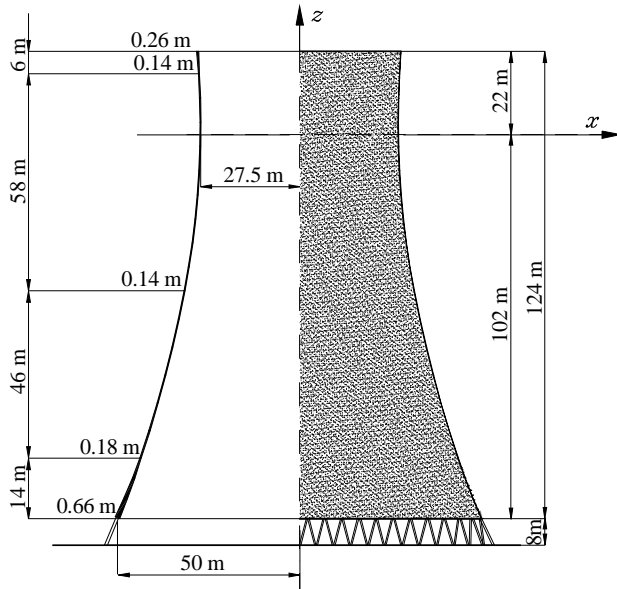
Wielkości fizyczne z ujęcia tensorowego uzyskano korzystając z wzorów transformacyjnych:

$$w_1 = \sqrt{g_{11}} w^1, \quad w_2 = \sqrt{g_{22}} w^2, \quad w_3 = w^3. \quad (24)$$

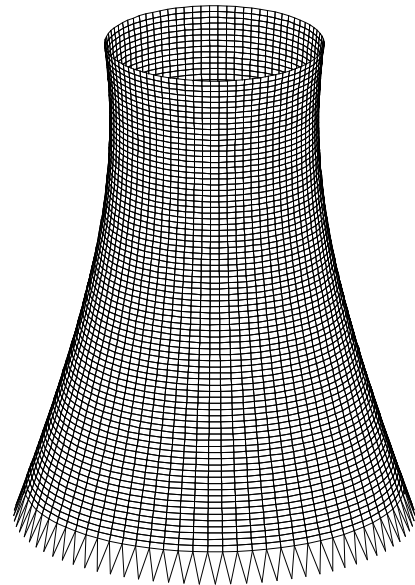
Przykład obliczeniowy. Na podstawie opisanego modelu matematycznego opracowano program komputerowy do wyznaczania przemieszczeń powłoki obrotowej poddanej wpływowi termicznemu. Do obliczeń przyjęto powłokę o wymiarach jak na rys. 2. Dla porównania wyników uzyskanych z metody analitycznej zbudowano model numeryczny wykorzystując program Robot, którego działanie oparte jest na metodzie elementów skończonych. Do obliczeń wykorzystano analizę liniową, która jest podstawowym typem analizy w tym programie. Geometrię konstrukcji oraz obciążenie w przypadku obciążenia typowego definiuje się w tym pakiecie w sposób graficzny. Obciążenie temperaturą w analizowanej konstrukcji dla każdego z kilku tysięcy elementów skończonych jest różne co do wartości i z tego powodu sposób graficznego definiowania obciążenia jest pracochłonny. Modelując powłokę (rys. 2) w programie Robot, podzielono ją na 6400 czterowęzłowych powierzchniowych elementów skończonych (rys. 3). Pojedynczy element miał wysokość 1.55 [m] i szerokości 2.16 [m] (w przewężeniu powłoki) do 3.925 [m] (u podstawy powłoki). Rozpatrywane obciążenie zdefiniowano jako osiowo-niesymetryczne i zmienne po wysokości. Każdy element skończony, na który została podzielona powłoka, obciążono stałą temperaturą. Wartość temperatury została określona jako średnia temperatura przypadająca na dany element skończony. Dolny

brzeg powłoki podparto na skośnych słupach sztywno zamocowanych w fundamencie, natomiast górny brzeg zdefiniowano jako swobodny.

Duże ilości danych związanych z geometrią powłoki jak i obciążeniem, wymusiły niestandardowe definiowanie tych wielkości w postaci pliku znakowego. Zawarty w pliku opis geometryczny konstrukcji i obciążenia powłoki zrealizowano wykorzystując własne programy napisane w języku Fortran. Procedury te definiowały współrzędne węzłów, tworzyły podział konstrukcji na elementy skończone, numerowały węzły i elementy, określały wartości obciążenia temperaturą i grubość poszczególnych elementów skończonych powłoki. Otrzymane wyniki obliczeń statycznych, opisujące przemieszczenia węzłowe, zapisano w plikach tekstowych.

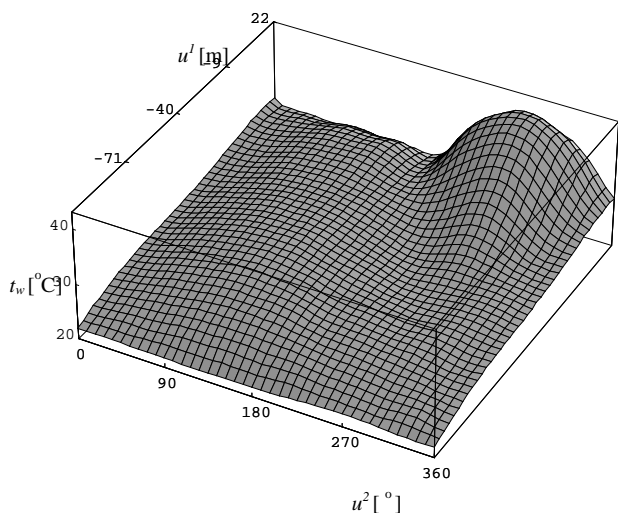


Rys. 2. Wymiary geometryczne powłoki



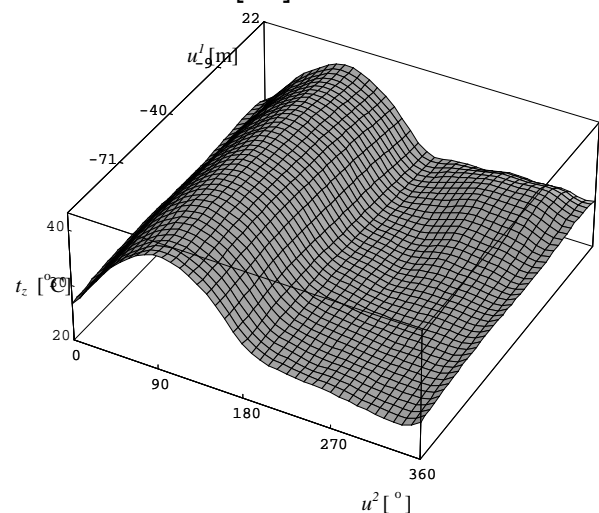
Rys. 3. Podział na elementy skończone

Przyjęte rozkłady temperatur. Definiując obciążenie dla powłoki obrotowej o wymiarach geometrycznych podanych na rys. 2, przyjęto przyrosty temperatury zewnętrznej i wewnętrznej powierzchni płaszcza powłoki od temperatury scalenia konstrukcji $t_0 = 10 [^{\circ}C]$.



a

Max (12.7[m], 279[$^{\circ}$]) = 41.6[$^{\circ}C$]
Min (-102.0[m], 144[$^{\circ}$]) = 21.6[$^{\circ}C$]

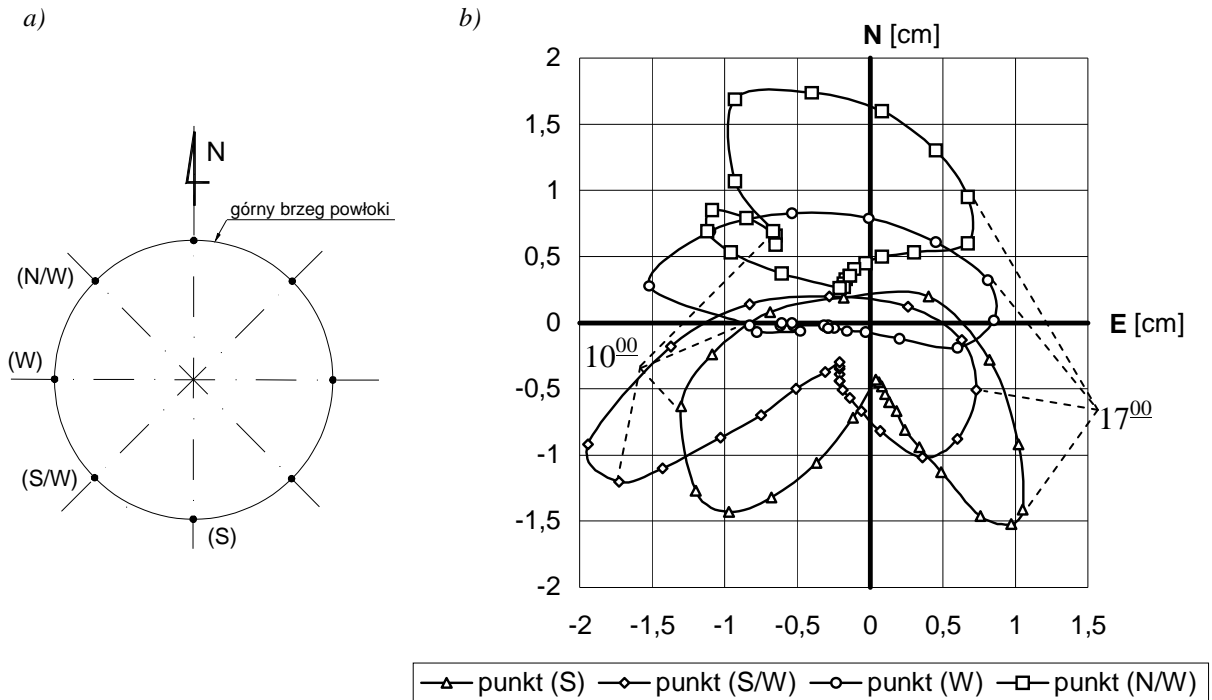


b

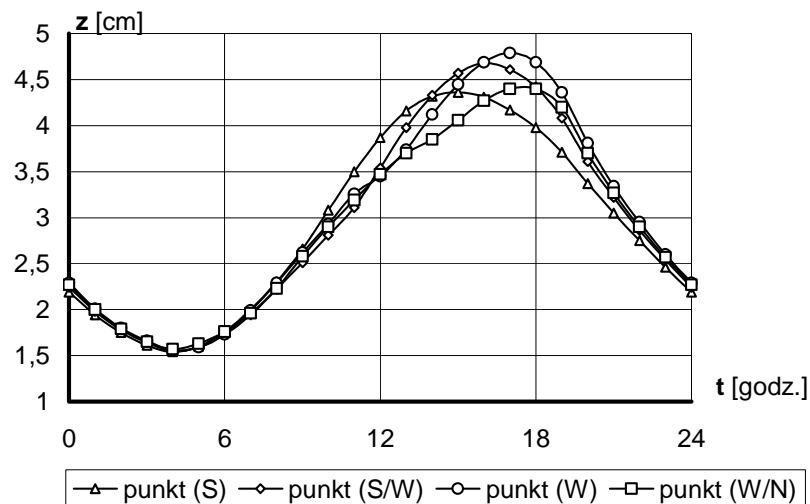
Max (-61.7[m], 99[$^{\circ}$]) = 41.3[$^{\circ}C$]
Min (-102.0[m], 333[$^{\circ}$]) = 25.1[$^{\circ}C$]

Rys. 4. Przyrosty temperatury na powierzchni wewnętrznej (a) i zewnętrznej (b) powłoki chłodni nieczynnej dla 21 czerwca, godz. 17⁰⁰

Korzystając z danych dotyczących rozkładu temperatury zawartych w pracach [4, 5] oraz otrzymanych od ich autora (które określały pola temperatury w sposób dyskretny), opisano obciążenie wzorami (8), (9). Mając tak zdefiniowane obciążenie, wyznaczono potrzebne wartości zarówno dla modelu analitycznego, jak i numerycznego. Taki opis dał możliwość rozwiązania układu równań (10) wynikających ze związków geometrycznych (5) dla dowolnego rozkładu pola temperatury na powierzchni powłoki. Jeden z rozkładów pól temperatur przyjętych do obliczeń pokazano na rys. 4a i 4b.



Rys. 5. a) Lokalizacja wybranych punktów, b) obliczone dobowe poziome przemieszczenia wybranych punktów na górnym brzegu powłoki



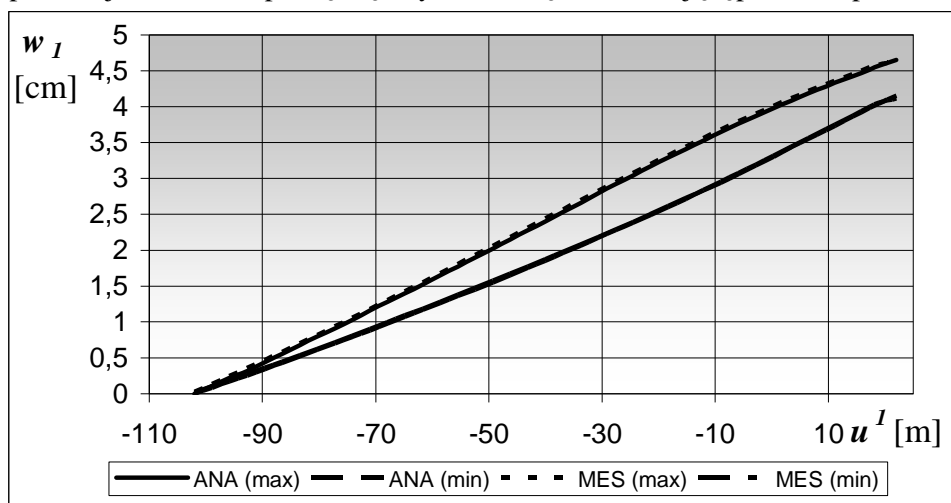
Rys. 6. Obliczone dobowe pionowe przemieszczenia dla wybranych punktów na górnym brzegu powłoki

Wyniki obliczeń przemieszczeń wybranych punktów powłoki. Na rysunku 5b pokazano poziome, a na rysunku 6 pionowe przemieszczenia wybranych punktów (rys. 5a) na górnym brzegu powłoki w okresie jednej doby (dla 21 czerwca), obliczone co godzinę. Przemieszczenia poziome przedstawiono w układzie topograficznym, gdzie oś (E) wskazuje przemieszczenia w centymetrach na kierunku wschodnim, natomiast oś (N) na kierunku północnym.

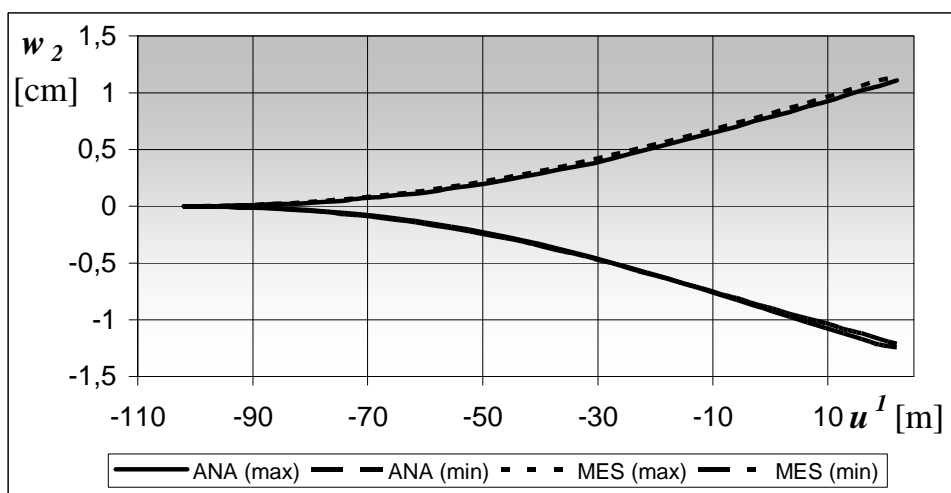
Dla porównania wartości składowych wektora przemieszczenia uzyskanych z obliczeń analitycznych i numerycznych przedstawiono na rysunkach 7.1÷7.3 wykresy wartości składowych wektora przemieszczenia:

- w_1 – stycznej do południka,
- w_2 – stycznej do równoleżnika,
- w_3 – prostopadłej do powierzchni.

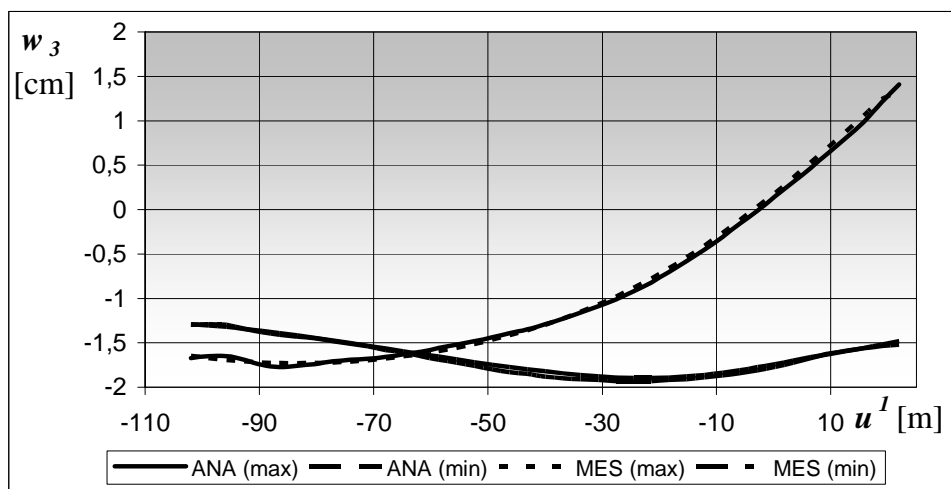
Na osi poziomej odłożono współrzędną krzywoliniową u^1 wskazującą położenie punktu na tworzącej.



Rys. 7.1. Wykres wartości składowej w_1 wektora przemieszczenia



Rys. 7.2. Wykres wartości składowej w_2 wektora przemieszczenia



Rys. 7.3. Wykres wartości składowej w_3 wektora przemieszczenia

Na rysunkach 7.1÷7.3 przyjęto oznaczenia:

- (ANA) wartości dla rozwiązania analitycznego,
- (MES) wartości dla rozwiązania numerycznego.

Wyniki podano dla południków, dla których uzyskano ekstremalne wartości składowych wektora przemieszczenia, odpowiednio:

- w_1 (max) dla $u^2 = 99[^\circ]$, w_1 (min) dla $u^2 = 297[^\circ]$,
- w_2 (max) dla $u^2 = 162[^\circ]$, w_2 (min) dla $u^2 = 36[^\circ]$,
- w_3 (max) dla $u^2 = 99[^\circ]$, w_3 (min) dla $u^2 = 0[^\circ]$.

Podsumowanie. W pracy przedstawiono analityczne i numeryczne rozwiązanie powłoki od działania zmiennego po wysokości i nieosiowo - symetrycznego pola temperatury. W rozwiązaniu analitycznym, wykorzystano podstawowe zależności i związki stosowane w liniowej teorii cienkich powłok. Opracowano własne procedury obliczające, zapisane w języku Fortran. Rozwiązanie numeryczne otrzymano wykorzystując pakiet obliczeniowy Robot. W celu porównania rozwiązania numerycznego z wynikami z rozwiązania analitycznego, wybrano do analizy numerycznej statykę liniową. Wartości składowych wektora przemieszczenia otrzymane z metody analitycznej i numerycznej nie różnią się między sobą więcej niż kilka procent. Świadczy to o poprawności przyjętych modeli w ramach założonych uproszczeń.

Na podstawie przeprowadzonych obliczeń dla okresu jednej doby (21 czerwca) otrzymano dla analizowanej powłoki następujące maksymalne wartości składowych wektora przemieszczenia:

- poziome w kierunku:
 - północnym (N) - 1.61 cm,
 - zachodnim (W) - 1.73 cm,
 - południowym (S) - 1.09 cm,
 - wschodnim (E) - 1.32 cm,
- pionowe - 3.23 cm.

Podane wartości odnoszą się do kształtu wyjściowego powłoki określonego dla pola temperatury z godziny 4⁰⁰.

W wyniku przeprowadzonych obliczeń można stwierdzić, że w przypadku konieczności prowadzenia pomiarów kształtu powłoki w czasie dni o dużym nasłonecznieniu i znacznych amplitudach temperatury powietrza atmosferycznego, w pomiarach tych, należy uwzględnić przemieszczenia od wpływu temperatury. Trzeba jednak zaznaczyć, że dla powłok o dużym stopniu degradacji, dokładność obliczeń przeprowadzonych zgodnie z podanym modelem może być znacznie mniejsza niż dla powłoki nieuszkodzonej. Występują wtedy znacznie większe odstępstwa rzeczywistej pracy takiej powłoki od przyjętego w pracy modelu sprężystego.

1. Bielak S., *Nieliniowa teoria powłok, cz. I*, Wydawnictwo TiT Opole 1994 (In Polish). 2. Bielak S., *Nieliniowa teoria powłok, cz. II*, Wyższa Szkoła Inżynierska w Opolu, *Studia i Monografie*, zeszyt 83, Opole 1995 (In Polish). 3. Chróścielewski J., Makowski J., Pietraszkiewicz W., *Statyka i dynamika powłok wielopłatowych. Nieliniowa teoria i metoda elementów skończonych*. Warszawa, IPPT PAN, 2004 (In Polish). 4. Tarczyński L., *The temperature load of the cooling tower shell subjected to climatic actions*, 3rd International Symposium on Natural Draught Cooling Towers, IASS, Paris, 1989. pp 187-196 (In English). 5. Tarczyński L., *Rozkład temperatury w powłoce żelbetowej hiperboloidalnej chłodni kominowej*, *Archiwum Inżynierii Lądowej*, Tom XXX, z. 1, 1984, str. 146-169 (In Polish). 6. Woźniak Cz., *Nieliniowa teoria powłok*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1966 (In Polish).