

przenikania ciepła. Metoda obliczania. 3. PN-B-03406:1994 Ogrzewnictwo – Obliczanie zapotrzebowania na ciepło pomieszczeń o kubaturze do 600 m³. 4. PN-82/B-02403 Ogrzewnictwo. Temperatuty obliczeniowe zewnętrzne. 5. PN-82/B-02402 Ogrzewnictwo. Temperatuty ogrzewanych pomieszczeń w budynkach. 6. PN-EN 12831: 2006 Instalacje ogrzewcze w budynkach. Metoda obliczania projektowego obciążenia cieplnego. 7. PN-83/B-03430 Wentylacja w budynkach mieszkalnych, zamieszkania zbiorowego i użyteczności publicznej – Wymagania – wraz ze zmianą PN-83/B-03430/Az3:2000. 8. PN-B-02025:1999, AP1:2000 Obliczanie sezonowego zapotrzebowania na ciepło do ogrzewania budynków mieszkalnych i użyteczności publicznej.

Baran W., Jedraszak Br., Żmuda J.

Opole University of Technology
Faculty of Civil Engineering
Poland, 45-061 Opole, 48 Katowicka St.
E-mail: wbar12@wp.pl

STATYKA STANU BEZMOMENTOWEGO POWŁOKI HIPERBOLOIDALNEJ

© Baran W., Jedraszak Br., Żmuda J., 2007

Interdependences between descriptions of state of stress, based on various parametrizations introduced for middle surface of shell are discussed in the paper. Complete analitic solutions for symmetric and antisymmetric load, obtained using various parametrizations are presented. Practical simplifications for obtained results of system of balance equations that result from utilization of particular parametrizations are discussed.

Wprowadzenie. Dźwigary powierzchniowe są to cienkościenne ustroje nośne ukształtowane według określonej powierzchni. Jeżeli powierzchnia środkowa dźwigara powierzchniowego jest zakrzywiona pojedynczo lub podwójnie, to nazywana jest powłoką [2]. Podstawy teorii oraz analizę pracy statycznej w ujęciu analitycznym i numerycznym cienkościennych konstrukcji powłokowych zostały przedstawione w ogromnej liczbie publikacji, których obszernie zestawienie, w liczbie ponad sześciuset pozycji, podano w pracy [4]. Podjęto tam również próbę całościowego przedstawienia teorii i analizy numerycznej zadań statyki, stateczności i dynamiki wielopłatowych konstrukcji powłokowych.

Z grupy powłok obrotowych do analizy statycznej w niniejszym referacie przyjęto hiperboloide jednopowłokową. Założono w analizie statyki tej powłoki obciążenie jej dwoma podstawowymi zbiorami obciążeń: symetrycznym i antysymetrycznym po obwodzie. Zastosowany sposób obliczania sił wewnętrznych takiej powłoki polega na sformułowaniu i rozwiązaniu równania różniczkowego w ramach różnych przybliżonych teorii powłok [2, 5]. Zasadniczą trudnością na jaką natrafia się w klasycznym rozwiązaniu, jest skomplikowana postać równania rozwiązującego układ równań równowagi. Dla większości powierzchni środkowych i sposobów obciążenia, jest to równanie różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu o współczynnikach funkcyjnych. Rozwiązanie tego typu równania jest poszukiwane także metodami numerycznymi [3].

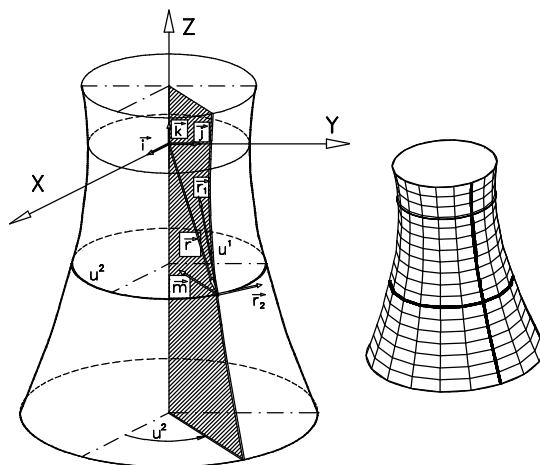
W pracy pokazano korzyści wynikające z uwzględnienia różnych parametryzacji przy rozwiązywaniu równań powłok. Podano funkcje przejścia i wzajemne relacje pomiędzy parametrami krzywoliniowymi występującymi w różnych parametryzacjach wprowadzonych na powierzchni środkowej hiperboloidy jednopowłokowej. Dla przyjętych opisów powierzchni środkowej oraz dla obciążenia symetrycznego i antysymetrycznego przedstawiono rozwiązanie w postaci analitycznej, opisujące siły przekrojowe. Przybliżony charakter rozwiązania wynika z uproszczeń stosowanych w teorii powłok [2], opartych na założeniach Kirhchoffa – Love'a, a także ze względu na wykorzystanie pojęcia uśrednienia.

Opis parametryzacji powierzchni środkowej. W celu rozwiązania układu równań równowagi dla parametryzacji krzywiznowej, w naszym postępowaniu wprowadzono na powierzchni środkowej jeszcze dwie parametryzacje: prostokreślną i symetryczną. Równania wektorowe opisujące powierzchnię środkową dla poszczególnych parametryzacji (rys. 1) mają postać:

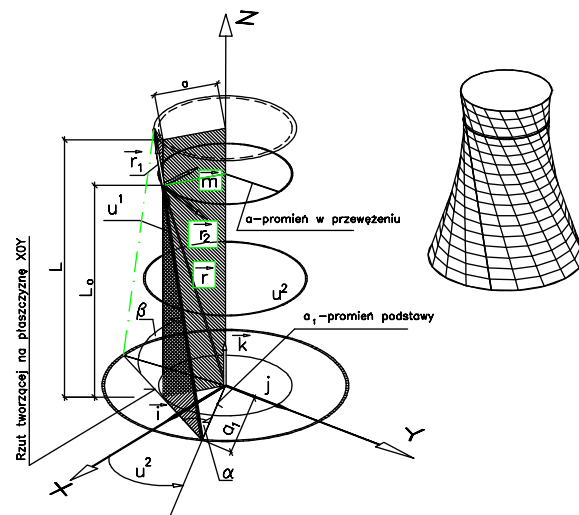
$$\mathbf{r} = a \cosh(u^1) [\cos(u^2) \mathbf{i} + \sin(u^2) \mathbf{j}] + b_0 \sinh(u^1) \mathbf{k}, \quad (1a)$$

$$\mathbf{r} = a_1 [\cos(u^2) \mathbf{i} + \sin(u^2) \mathbf{j}] + u^1 [\cos(u^2 + \alpha) \mathbf{i} + \sin(u^2 + \alpha) \mathbf{j}] \cos \beta + u^1 \sin \beta \mathbf{k}, \quad (1b)$$

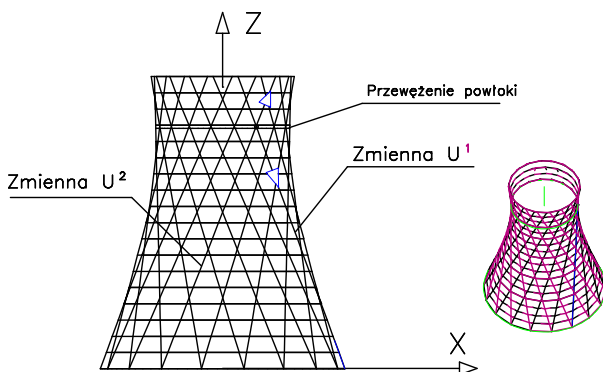
$$\mathbf{r} = \frac{a \cos \beta^{(s)}}{\sin \alpha^{(s)}} \mathbf{i} + \frac{a \sin \beta^{(s)}}{\sin \alpha^{(s)}} \mathbf{j} - b_0 \operatorname{ctg} \alpha^{(s)} \mathbf{k}. \quad (1c)$$



a) Parametryzacja krzywiznowa (1a)



b) Parametryzacja prostokreślna (1b)



c) Parametryzacja symetryczna (1c)

Opis oznaczeń występujących w równaniach wektorowych (1a) do (1c) i na rys.1:

u^1, u^2 - współrzędne krzywoliniowe,

$u^1 \in \mathbb{R}; u^2 \in \langle 0, 2\pi \rangle$;

a - promień w przewężeniu,

a_1 - promień podstawy,

b_0 - parametr,

α, β - parametry kątowe,

$\alpha^{(s)}, \beta^{(s)}$ - współczynniki dla parametryzacji symetrycznej wyrażone zależnościami:

$$\alpha^{(s)} = \frac{u^1 + u^2}{2}, \quad \beta^{(s)} = \frac{u^1 - u^2}{2}. \quad (2)$$

Rys. 1. Opis powierzchni środkowej w różnych parametryzacjach

Dla tak przyjętych parametryzacji określono wzajemne związki pomiędzy parametrami i współzrędnymi krzywoliniowymi [1] i wyrażono je poprzez parametr przejścia:

$$\mu = \frac{1}{\cosh(u^{1(k)})} = \sin(\alpha^{(s)}) = \frac{\cos(\varphi^{(p)})}{\cos(\beta^{(p)})}, \quad (3)$$

gdzie: indeksy górne określają wielkości w odpowiednich parametryzacjach.

W dalszych rozważaniach przyjęto oznaczenia:

- u^1, u^2 - współrzędne krzywoliniowe występujące w parametryzacji krzywiznowej;

- α - kąt występujący w parametryzacji symetrycznej,

- $\beta, \varphi^{(p)}, \bar{\alpha} = 90 - \varphi^{(p)}$ - kąty występujące w parametryzacji prostokreślniej.

Funkcje trygonometryczne kąta $\varphi^{(p)}$ określono po wykorzystaniu powiązań kątowych iloczynu skalarnego:

$$g_{12} = \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 = \sqrt{g_{11}} \sqrt{g_{22}} \cos \varphi^{(p)},$$

w następujący sposób:

$$\cos \varphi^{(p)} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{22}}}, \quad \sin \varphi^{(p)} = \sqrt{\frac{g}{g_{22}}}, \quad \operatorname{ctg} \varphi^{(p)} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g}},$$

gdzie g_{ij} to składowe tensora pierwszej formy różniczkowej [1, 2].

Wtedy zależność trygonometryczną wiążącą wielkości kątowe w parametryzacji symetrycznej i prostokątnej, po przekształceniu zależności (3) zapisano w postaci:

$$\sin(\bar{\alpha}) = \sin(\alpha) \cos(\beta). \quad (4)$$

Rozwiązanie ogólne układu równań równowagi. W ramach teorii uproszczonej uogólnione siły przekrojowe \bar{N}^{ij} są rozwiązaniem umownego stanu błonowego i wyznacza się je z układu równań [1, 2]:

$$\bar{N}^{ij} \Big|_i + \bar{P}^j = 0, \quad (5)$$

$$\bar{N}^{ij} b_{ij} + \bar{P}^3 = 0,$$

gdzie b_{ij} to składowe tensora drugiej formy różniczkowej, a \bar{P}^j, \bar{P}^3 to składowe wektora obciążenia (18).

Dla parametryzacji krzywiznowej, po podstawieniu symboli Christoffela, oraz stosownych przekształceniach dokonanych przy przejściu wzorami transformacyjnymi do wielkości fizycznych [1], układ równań (5) zapisano w postaci:

$$\begin{cases} \left(\sqrt{g_{22}} \bar{N}_{11} \right)_{,1} + \left(\sqrt{g_{11}} \bar{N}_{12} \right)_{,2} - \left(\sqrt{g_{22}} \right)_{,1} \bar{N}_{22} + \sqrt{g} \sqrt{g_{11}} P^1 = 0 \\ \left(g_{22} \bar{N}_{12} \right)_{,1} + \sqrt{g} \left[\left(\bar{N}_{22} \right)_{,2} + g_{22} P^2 \right] = 0 \\ \bar{\varepsilon} \bar{N}_{11} + \varepsilon \bar{N}_{22} + P^3 = 0 \end{cases}, \quad (5a)$$

gdzie $\varepsilon, \bar{\varepsilon}$ to krzywizny główne.

Otrzymano układ równań różniczkowych cząstkowych. Następnie wprowadzono do trzeciego równania układu równań (5a) związek między krzywiznami głównymi:

$$\bar{\varepsilon} = -\varepsilon \operatorname{tg}^2(\bar{\alpha}) \quad (6)$$

i uzyskano opis sił przekrojowych \bar{N}_{22} w postaci:

$$\bar{N}_{22} = -\frac{1}{\varepsilon} \left[\bar{\varepsilon} \bar{N}_{11} + P^3 \right] = \operatorname{tg}^2(\bar{\alpha}) \bar{N}_{11} - \frac{P^3}{\varepsilon}. \quad (7)$$

Dalej podstawiono (7) do pierwszego równania układu (5a), co dało po przekształceniach zapis kanoniczny najprostszy z możliwych:

$$\left(\frac{g_{22}}{\sqrt{g_{11}}} \bar{N}_{11} \right)_{,1} + \left(\sqrt{g_{22}} \bar{N}_{12} \right)_{,2} + \frac{g_{22}}{\sqrt{g_{11}}} F1 = 0, \quad (8)$$

gdzie

$$F1 = g_{11} P^1 + \frac{\left(\sqrt{g_{22}} \right)_{,1}}{\varepsilon \sqrt{g_{22}}} P^3. \quad (9)$$

Następnie wyrugowano z dwóch ostatnich równań układu (5a) wielkości \bar{N}_{22} , a po wykorzystaniu wzoru (7) otrzymano równanie:

$$\left(g_{22}\bar{N}_{12}\right)_{,1} - \frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon}\sqrt{g}\left(\bar{N}_{11}\right)_{,2} - \sqrt{g}F2 = 0. \quad (10)$$

gdzie funkcję F2 określono w następujący sposób:

$$F2 = \frac{P_{,2}^3}{\varepsilon} - g_{22}P^2. \quad (11)$$

Po przemnożeniu przez $\sqrt{g_{22}}$ równania (8) wykonano obustronne różniczkowanie równania (8) po u^1 i równania (10) po u^2 . Następnie z przekształconych równań (8) i (10) wyrugowano drugą pochodną z wyrażenia $\left(g_{22}\bar{N}_{12}\right)_{,12}$ i uzyskano poszukiwane równanie rozwiązujące układ równań równowagi w następującej postaci:

$$\left\{ \sqrt{g_{22}} \left[\left(\frac{g_{22}}{\sqrt{g_{11}}} \bar{N}_{11} \right)_{,1} + \frac{g_{22}}{\sqrt{g_{11}}} F1 \right] \right\}_{,1} + \left\{ \frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon} \sqrt{g} \left(\bar{N}_{11} \right)_{,2} + \sqrt{g} F2 \right\}_{,2} = 0. \quad (12)$$

Otrzymano równanie różniczkowe cząstkowym drugiego rzędu.

Wykorzystując wzajemne powiązania z różnych parametryzacji, pokażemy teraz możliwość dalszego uproszczenia tego równania. Przyjmując więc zależności (3) i (4) oraz podstawowe wzory geometrii różniczkowej [1, 2], określono dla parametryzacji krzywiznowej wielkości pomocnicze opisujące pierwiastki ze współczynników pierwszej formy różniczkowej:

$$\sqrt{g_{11}} = a \operatorname{ctg}(\bar{\alpha}), \quad \sqrt{g_{22}} = a \cosh(u^1) = \frac{a}{\sin(\alpha)}. \quad (13)$$

Tak przygotowane związki oraz ich zależności zapisane w różnych konfiguracjach, umożliwiły w dalszym rozwiązywaniu zmianę zmiennej z u^1 na α . Po wykonaniu stosownych podstawień i przekształceń, otrzymano równanie:

$$f_{,\alpha\alpha} - f_{,22} = \left[\frac{\sqrt{g_{22}}}{a} g_{22} \operatorname{tg}(\bar{\alpha}) F1 \right]_{,\alpha} - [g_{22} \operatorname{ctg}(\bar{\alpha}) F2]_{,2}, \quad (14)$$

gdzie funkcję f określono w następujący sposób:

$$f = g_{22} \operatorname{tg}(\bar{\alpha}) \bar{N}_{11}. \quad (15)$$

Założono rozwiązanie o rozdzielonych zmiennych i otrzymano równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu, o stałych współczynnikach:

$$f_{,\alpha\alpha} + f = \left[\frac{\sqrt{g_{22}}}{a} g_{22} \operatorname{tg}(\bar{\alpha}) F1 \right]_{,\alpha} - [g_{22} \operatorname{ctg}(\bar{\alpha}) F2]_{,2}. \quad (16)$$

Uzyskane równanie umożliwi w dalszej części przedstawić rozwiązanie analityczne zamknięte dla dowolnych obciążeń. Porównanie go z równaniem (12), daje wyobrażenie o korzyściach uzyskanych po wprowadzeniu powiązań pomiędzy różnymi parametryzacjami.

Przypadek dowolnego obciążenia. Jeżeli wektor \mathbf{P} w układzie odniesienia ma składowe X, Y, Z i są to odpowiednie funkcje obciążenia, to z równości:

$$\mathbf{P} = X \mathbf{i} + Y \mathbf{j} + Z \mathbf{k} = P^1 \mathbf{r}_1 + P^2 \mathbf{r}_2 + P^3 \mathbf{m}, \quad (17)$$

wyznacza się składowe P^1, P^2, P^3 w bazach lokalnych. Po rozwiązaniu odpowiednich układów równań, otrzymano:

$$\begin{aligned} P^1 &= \frac{1}{g_{11}} \left[X a \sinh(u^1) \cos(u^2) + Y a \sinh(u^1) \sin(u^2) + Z b_0 \cosh(u^1) \right], \\ P^2 &= \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \left[-X \sin(u^2) + Y \cos(u^2) \right], \\ P^3 &= \frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \left[-X \frac{b_0}{a} \cos(u^2) - Y \frac{b_0}{a} \sin(u^2) + Z \tanh(u^1) \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Rozwiązanie dla obciążenia symetrycznego. Symetryczny sposób obciążenia płaszcza powłoki przy uwzględnieniu np. oddziaływaniem ciężarem własnym, będzie występował przy ustawieniu powłoki równoległe do kierunku grawitacji. Wtedy dla $X = 0, Y = 0, Z \neq 0$ składowe wektora obciążenia:

P^1, P^2, P^3 określone są wyrażeniami:

$$P^1 = Zb_0 \frac{\cosh(u^1)}{g_{11}}, \quad P^2 = 0, \quad P^3 = Z \frac{\operatorname{ctg}(\beta)}{\cos(\bar{\alpha})} \tanh(u^1). \quad (19)$$

Po podstawieniu opisów (19) do (9) i do (11), dla symetrycznego sposobu obciążenia otrzymano równanie rozwiązujące (14) w postaci:

$$\left(\frac{g_{22} \bar{N}_{11}^-}{\sqrt{g_{11}}} \right)_{,1} = -Z\sqrt{g} \operatorname{ctg}(\beta). \quad (20)$$

Rozwiązanie równania (20) jest rozwiązaniem na etapie całki szczególnej dla przypadku obciążenia symetrycznego. Wykonując proste całkowania i przekształcenia wyprowadzonych równań, uzyskano opis sił przekrojowe w następującej formie:

$$\bar{N}_{11}^- = -P, \quad \bar{N}_{12}^- = 0, \quad \bar{N}_{22}^- = \bar{N}_{11}^- \tan^2(\bar{\alpha}) - \frac{1}{\varepsilon} P^3, \quad (21)$$

gdzie P - jest funkcją określoną w następujący sposób:

$$P = \frac{Za}{2 \sin(\beta)} \frac{1}{\cosh^2(u^1)} \left\{ \left[\sinh(u^1) \cosh(u^1) + u^1 \sin^2(\beta) - \frac{\cos^4(\beta)}{4} \tanh(u^1) \right] - C \right\} \operatorname{ctg}(\bar{\alpha}) \quad (22)$$

natomiast C jest stałą wyznaczoną z warunku na brzegu swobodnym z zależności:

$$\bar{N}_{11}^-(u^1 = u^k) = \bar{N}_{11}^{-(k)}. \quad (23)$$

Rozwiązanie dla obciążenia antysymetrycznego. Rozwiązanie dla antysymetrycznego sposobu obciążenia płaszcza powłoki przy uwzględnieniu np. wpływu ciężaru własnego otrzymuje się obliczając powłokę jako wspornik. Wtedy dla $X = 0, Y \neq 0, Z = 0$ składowe wektora obciążenia: P^1, P^2, P^3 określone są wyrażeniami:

$$g_{11}P^1 = Ya \sinh(u^1) \sin(u^2), \quad g_{22}P^2 = Ya \cosh(u^1) \cos(u^2), \quad P^3 = -Y \frac{\sin(\beta)}{\cos(\bar{\alpha})} \sin(u^2). \quad (24)$$

Równanie rozwiązujące (16) zapisano teraz w następującej postaci:

$$f_{,\alpha\alpha} + f = -2Yg_{22}\sqrt{g_{22}} \operatorname{ctg}(\bar{\alpha}) \sin(u^2). \quad (25)$$

Funkcja f , jako rozwiązanie równania (25) określona została wzorem:

$$f = Y \frac{a^3}{\cos(\beta)} f^* \sin(u^2), \quad (26)$$

$$f^* = \sin(\alpha) \int \cos(\alpha) h(\alpha) d\alpha - \cos(\alpha) \int \sin(\alpha) h(\alpha) d\alpha + C_1 \cos(\alpha) + C_2 \sin(\alpha)$$

gdzie $*$ - oznacza rozwiązanie będące funkcją jednej zmiennej; C_1, C_2 to stałe całkowania spełniające warunki na brzegu, natomiast funkcję $h(\alpha)$ określa wzór:

$$h(\alpha) = \frac{1}{\sin^4(\alpha)} \sqrt{1 - (\sin(\alpha) \cos(\beta))^2}. \quad (27)$$

Poniżej podano zależności opisujące siły przekrojowe dla antysymetrycznego sposobu obciążenia:

$$\bar{N}_{11}^- = \frac{f}{g_{22}} \operatorname{ctg}(\bar{\alpha}), \quad \bar{N}_{12}^- = \frac{\int f_{,\alpha} du^2}{a^2} \sin^2(\alpha), \quad \bar{N}_{22}^- = \operatorname{tg}^2(\bar{\alpha}) \bar{N}_{11}^- - \frac{P^3}{\varepsilon}. \quad (28)$$

Momenty przekrojowe i siły tnące. Momenty zginające i skręcające towarzyszące stanowi błonowemu [1, 2] wyznacza się z zależności:

$$\bar{M}^{ij} = -\frac{\eta}{\varepsilon} \left\{ g^{ij} \frac{P^3}{\varepsilon} + \bar{N}^{ij} \right\}, \quad (29)$$

którą w wersji uproszczonej można zapisać w postaci:

$$\bar{M}^{ij} = -\frac{\eta}{\varepsilon} \bar{N}^{ij}, \quad (29a)$$

gdzie: $\eta = \frac{\xi^2}{1+\xi^2}$, $\xi^2 = \left(\frac{\varepsilon}{\omega^2}\right)^2, n=1,2,3$, $\omega^4 = \frac{3(1-\nu^2)}{h^2}$, $\varepsilon = H + \sqrt{H^2 - K}$.

W stanie podstawowym występują także siły tnące i wyznacza się je z równania:

$$\bar{M}^{ij}|_i + \bar{Q}^j = 0. \quad (30)$$

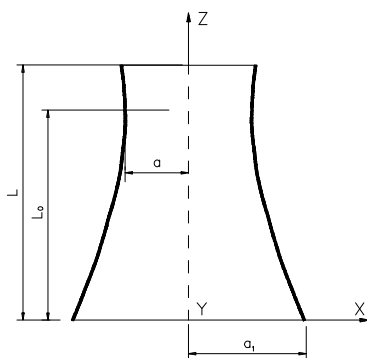
Po podstawieniu zależności (29) i wykorzystaniu pierwszego równania układu równań (5) przekształconego do postaci:

$$\bar{N}^{ij}|_i = -P^j,$$

otrzymano równanie (30) opisujące siły poprzeczne:

$$\bar{Q}^j = -\frac{\eta}{\varepsilon} \left\{ g^{ij} \left(\frac{P^3}{\varepsilon} \right) \right\}_i + P^j. \quad (31)$$

Przykład zastosowania. Dla otrzymanego rozwiązania, wykonano przykładowe obliczenia. Przyjęto żelbetową powłokę hiperboloidalną o wysokości: $z = 113$ m, kształtowaną z przeznaczeniem na płaszcz chłodni kominowej (rys. 2).



Cechy geometryczne:

- $L = 113.0$ [m],
- $L_0 = 93.0$ [m],
- $a_1 = 47.5$ [m],
- $a = 26.0$ [m],
- $2h = 0.20$ [m].

Cechy materiałowe:

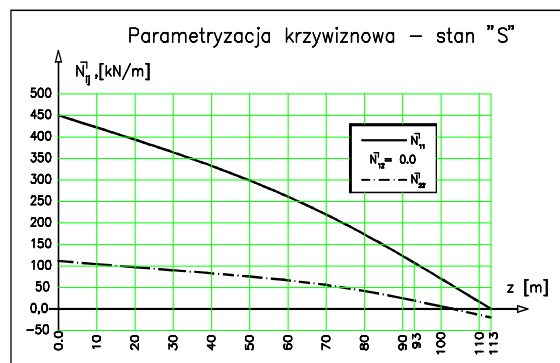
- $E = 27.0$ [GPa],
- $\gamma = 26.4$ [kN/m³],
- $\nu = 0.1667$ [-].

Południk powłoki opisany jest równaniem:

$$f(u^1) = a \sqrt{1 + \left(\frac{u^1}{b_0}\right)^2}, \quad \text{gdzie: } b_0 = 60.83 \text{ [m].}$$

Rys.2. Geometria powłoki i dane przyjęte do obliczeń

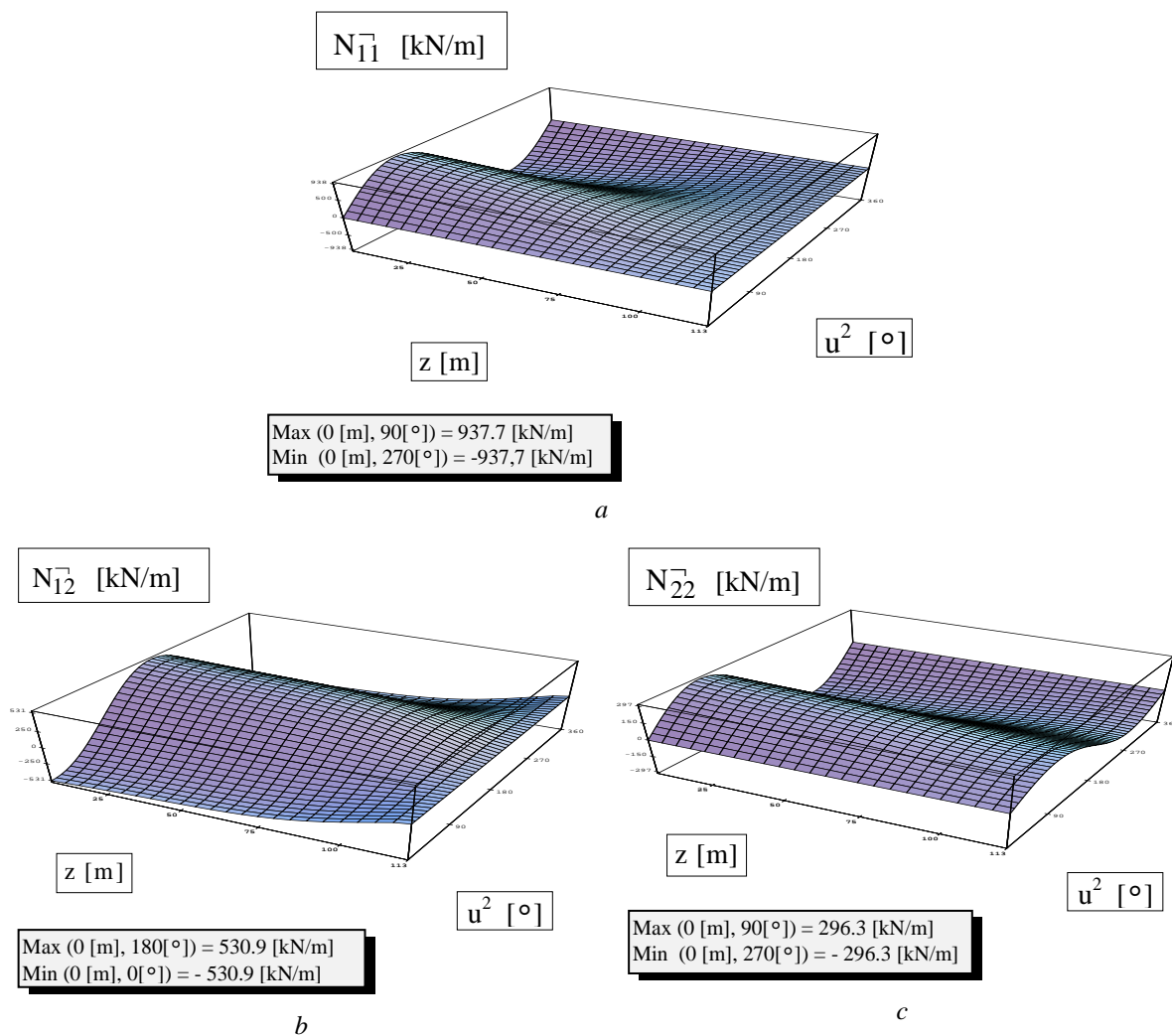
Przyjęto: beton klasy B35, grubość ścianki $2h = 0,20$ m. Obliczenia wykonano przy użyciu własnych programów napisanych w języku Fortran oraz wykorzystując system obliczeniowy Mathematica. W obliczeniach dokonano podziału po wysokości co 5 [m], natomiast po obwodzie co 7,5 [°]. Taki podział dał 1152 punkty obliczeniowe dla pojedynczej wielkości. Graficzną interpretację rozwiązania podano na podstawie otrzymanych wyników w zadanych punktach.



Rys. 3. Siły przekrojowe N_{ij} dla symetrycznego stanu obciążenia

Na załączonych wykresach przedstawiono wartości fizyczne sił przekrojowych \bar{N}_{ij}^{\neg} . Ze względu na charakter rozwiązania, dla stanu symetrycznego „S” przedstawiono wykresy dla pojedynczych południków (rys. 3), natomiast dla stanu antysymetrycznego przedstawiono wykresy przestrzenne (rys. 4a, 4b, 4c). Pozostałe siły uogólnione \bar{M}_{ij}^{\neg} i \bar{Q}_i^{\neg} , jako funkcje N^{ij} , P^i i P^3 można wyznaczyć z podanych zależności (29), (29a) i (31). Są to wielkości małe [1] i przyjmują maksymalne wartości:

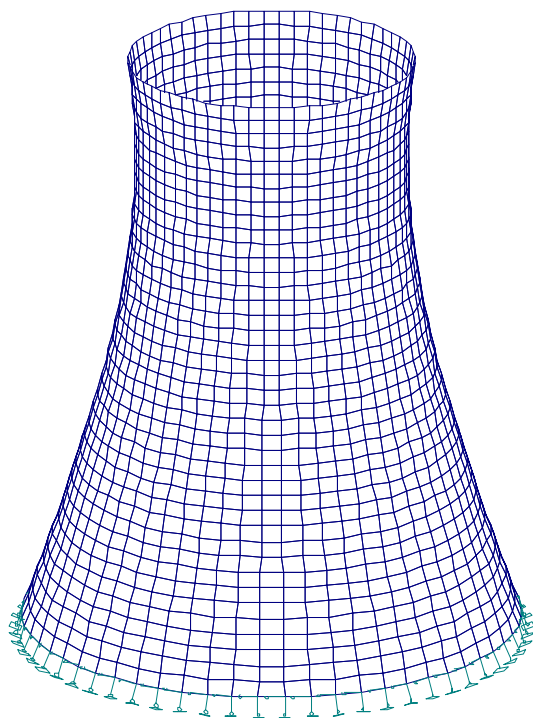
- dla obciążenia symetrycznego: $\max \bar{M}_{ij}^{\neg} = \bar{M}_{12}^{\neg} = 0,032$ [kNm/m], $\max \bar{Q}_j^{\neg} = \bar{Q}_1^{\neg} = 0,031$ [kN/m],
- dla obciążenia antysymetrycznego: $\max \bar{M}_{ij}^{\neg} = \bar{M}_{12}^{\neg} = 0,066$ [kNm/m], $\max \bar{Q}_j^{\neg} = \bar{Q}_2^{\neg} = 0,31$ [kN/m].



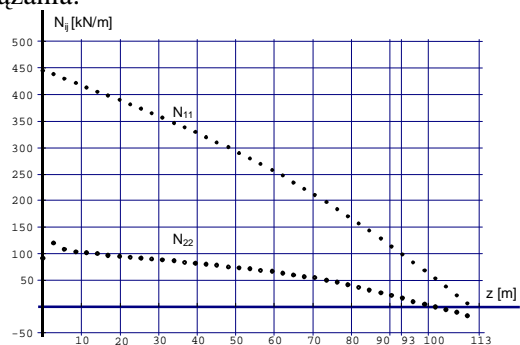
Rys.4. Siły przekrojowe N_{ij}^{\neg} dla antysymetrycznego stanu obciążenia: 4a. Siły N_{11}^{\neg} , 4b. Siły N_{12}^{\neg} , 4c. Siły N_{22}^{\neg}

W celu porównania wyników otrzymanych w rozwiązaniu analitycznym wg zaproponowanego rozwiązania z wynikami jakie można uzyskać z rozwiązania numerycznego, zamodelowano powłokę w systemie Robot, który wykorzystuje MES. Podział na elementy skończone pokazano na rys. 5. Podczas generowania siatki wybrano czworokątne, 4-węzłowe, powierzchniowe elementy skończone. Dokonano podziału na 40 elementów po wysokości i 120 elementów po obwodzie. Dało to 4800 elementów skończonych. Wykorzystując otrzymane wyniki obliczeń zapisane w plikach znakowych, wygenerowano po odpowiedniej konwersji graficzny obraz w systemie Mathematica. Podane na przykładowych wykresach wartości sił przekrojowych (rys. 6, 7) odnoszą się do poszczególnych elementów skończonych. Porównując otrzymane wyniki (rys. 6, 7) z wynikami z rozwiązania analitycznego (rys. 3, 4) można stwierdzić, że istnieje bardzo dobra zgodność zarówno co do jakościowego jak i ilościowego przebiegu wykresów sił przekrojowych. Dlatego dla antysymetrycznego sposobu obciążenia w niniejszej pracy podano jedynie wykres sił N_{11}^{\neg} . Różnice wyników otrzymane z rozwiązania analitycznego

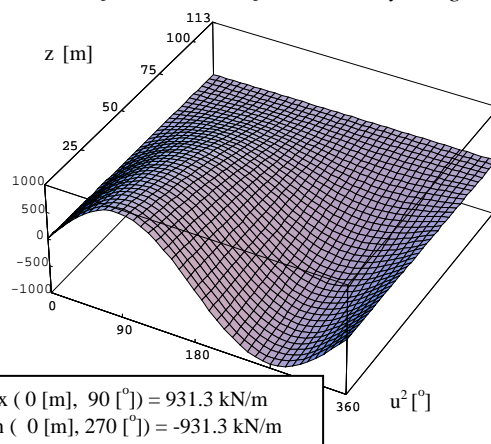
zapropionowanego w pracy i rozwiązania numerycznego uzyskanego w systemie Robot są mniejsze niż 1%, co może świadczyć o poprawności otrzymanego rozwiązania.



Rys.5. Model powłoki w systemie Robot



Rys.6. Siły przekrojowe N_{ij} dla symetrycznego stanu obciążenia z rozwiązania numerycznego



Rys.7. Siły przekrojowe N_{11} dla antysymetrycznego stanu obciążenia z rozwiązania numerycznego

Podsumowanie. Wybór na powierzchni środkowej odpowiedniej parametryzacji umożliwia uproszczenia rachunkowe na różnym etapie rozwiązywania powłoki. Wynikają one z opisu geometrii powierzchni środkowej. Znajomość funkcji przejścia (3) i wzajemnych relacji pomiędzy poszczególnymi współrzędnymi w wykorzystywanych parametryzacjach umożliwiła uproszczenie rozwiązania układu równań równowagi. Dla hiperboloidy jednopowłokowej uzyskano równanie rozwiązujące (12) jako równanie różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu. Dokonując rozdzielania zmiennych otrzymano równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu o stałych współczynnikach - równanie (16). Rozwiązanie zapisane w ogólnej postaci zostało przedstawione dla dowolnego sposobu obciążenia. Dla obciążenia symetrycznego i antysymetrycznego po obwodzie podano rozwiązanie w postaci zamkniętej opisujące siły przekrojowe N_{ij} - wzory (21) i (28). Prosta forma opisu sił przekrojowych przedstawiona w sposób analityczny i zawarta w zbiorze funkcji elementarnych ułatwia obliczenia inżynierskie. Otrzymane rozwiązania analityczne mogą służyć jako narzędzie do testowania rozwiązań numerycznych i budowania niezależnych programów na elektronicznych maszynach cyfrowych.

1. Baran W., *Analiza statyczna powłoki hiperboloidalnej – ujęcie nieliniowości geometrycznej*, Politechnika Opolska, Rozprawa doktorska, Opole 1998 (In Polish).
2. Bielik S., *Nieliniowa teoria powłok, cz. II*, Wyższa Szkoła Inżynierska w Opolu, Studia i Monografie, zeszyt 83, Opole 1995 (In Polish).
3. Konderla P., *Mechanika ciała odkształcalnego o narastającej masie*, Politechnika Wroclawska, seria: Monografie, zeszyt 11, Wrocław 1986 (In Polish).
4. Chróścielewski J., Makowski J., Pietraszkiewicz W., *Statyka i dynamika powłok wielopłatowych. Nieliniowa teoria i metoda elementów skończonych*, IPPT PAN, Warszawa 2004 (In Polish).
5. Woźniak Cz., *Nieliniowa teoria powłok*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1966 (In Polish).