

ФІЗИЧНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ДЛЯ ПЕРЕРІЗІВ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ СТРИЖНЕВИХ ЕЛЕМЕНТІВ У ЗАГАЛЬНОМУ ВИПАДКУ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ

© Яременко О.Ф., Школа Ю.О., 2007

Наведено співвідношення між вектором зусиль та вектором узагальнених деформацій для прямокутних поперечних перерізів залізобетонних стрижневих елементів у загальному випадку напруженого стану

In article presents the correlation between strain vector and generalize deformation vector for reinforced concrete rod elements with a rectangular shape section in general pressed state case

Постановка задачі. Розглядається залізобетонний стрижневий елемент з постійним прямокутним поперечним перерізом. Бетон важкий, природного тверднення. Армування передбачається довільним у вигляді системи ортогонально орієнтованих стрижнів з арматурної сталі.

Зовнішній силовий вплив приймається таким, що у поперечних перерізах виникає загальний випадок напруженого стану, або інакше – повний набір зусиль: поздовжня сила N , згинальні моменти M_{xz} та M_{yz} в площинах XOZ і YOZ відповідно, поперечні сили Q_x і Q_y по осях X та Y відповідно, крутний момент M_{xy} .

Як основні припущення були прийняті такі положення:

- зв'язки між напруженнями і відносними деформаціями в бетоні та арматурі наведені у вигляді повних діаграм деформування;
- розглядаються перерізи, нормальні до поздовжньої осі;
- розподіл загальних лінійних відносних деформацій від згину по висоті перерізу підпорядковується гіпотезі плоских перерізів;
- бетон та стрижні поздовжньої арматури сприймають нормальні σ_z та дотичні напруження τ_{xz} , τ_{yz} , τ_{xy} ;
- стрижні поперечної арматури сприймають тільки дотичні напруження, які виникають у поперечному перерізі τ_{xz} або τ_{yz} , залежно від орієнтації стрижня; прийнятий нерівномірний розподіл напружень за довжиною арматурного стрижня.

Завдання полягає в тому, щоб знайти зв'язок між зусиллями, які виникають в поперечному перерізі, та узагальненими деформаціями на всіх стадіях напружено-деформованого стану залізобетонного стрижневого елемента з урахуванням дискретного розташування стрижнів поздовжньої та поперечної арматури, нелінійності властивостей бетону і арматури, а також впливу стиснення крутінню в результаті закріплення кінців елемента.

Вихідними даними для поставленого завдання є геометричні параметри перерізу; фізико-механічні характеристики бетону та арматури; розташування, клас та діаметр стрижнів поздовжньої та поперечної арматури; віддаленість перерізу, який розглядається, від закріплених кінців.

Подання поперечного перерізу. Розв'язок поставленої задачі, який пропонується, передбачає поділ бетонного перерізу на малі ділянки прямокутної форми, в межах яких напруження усереднюються; площа стрижнів поздовжньої арматури умовно сконцентрована в точці перерізу,

яка відповідає розміщенню їх осей; розташування стрижнів поперечної арматури приймається дійсним, стрижень за довжиною розбивається на декілька складових елементів з метою урахування нерівномірного розподілу напружень. При переході від напружень до узагальнених зусиль вводиться процедура чисельного інтегрування по площі перерізу.

Для кожної з ділянок бетонного перерізу визначаються такі характеристики: порядковий номер i ; координати центра ваги щодо початку координат x_{bi}, y_{bi} , площа ділянки A_{bi} ; нормативний опір бетону стиску R_{bi} ; нормативний опір бетону розтягу R_{bti} ; початковий модуль пружності E_{bi} ; коефіцієнт Пуассона μ_b приймається сталим і таким, що дорівнює 0,2.

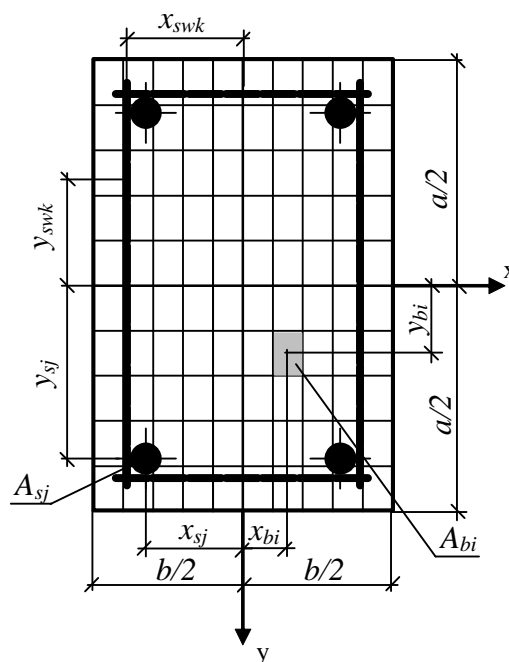
Для кожного із стрижнів поздовжньої арматури фіксується: порядковий номер j ; діаметр d_{sj} , положення центра ваги щодо початку координат x_{sj}, y_{sj} ; нормативний опір сталі плинності R_{sj} ; нормативний опір сталі розриву R_{suj} , модуль пружності E_{sj} , відносне подовження при розриві; рівень межі пружності; клас арматури; коефіцієнт Пуассона μ_s приймається сталим для усіх стрижнів, та таким, що дорівнює 0,25.

Для кожного з елементів поперечної арматури визначається номер k , діаметр d_{swk} , площа поперечного перерізу A_{swk} , площа поверхні зіткнення з бетоном F_{swk} ; координати центра ваги в площині поперечного перерізу щодо початку координат x_{swk}, y_{swk} ; нормативний опір сталі плинності R_{swk} , нормативний опір сталі розриву R_{swuk} , модуль пружності E_{swk} , коефіцієнт Пуассона $\mu_{sw} = 0,25$, відносне подовження за розриву, рівень межі пружності та клас арматури.

У поздовжньому напрямку поперечна арматура враховується у вигляді розподіленого по усій довжині залізобетонного елемента шару погонної площі:

$$f_{zk} = \pi d_{swk}^2 / 4s_k, \quad (1)$$

де s_k – крок поперечних стрижнів у поздовжньому напрямку, який відповідає k -му стрижню поблизу поперечного перерізу, який розглядається (рисунок).



Поперечний переріз залізобетонного стрижневого елемента

Рівняння рівноваги. Беручи до уваги припущення, які наведені вище, рівняння рівноваги у поперечному перерізі можна записати у такому вигляді:

$$\begin{aligned}
 N_z &= \sum_i A_{bi} \sigma_{bi} + \sum_j A_{sj} \sigma_{sj}, \quad M_x = \sum_i A_{bi} \sigma_{bi} x_{bi} + \sum_j A_{sj} \sigma_{sj} x_{sj}, \quad M_y = \sum_i A_{bi} \sigma_{bi} y_{bi} + \sum_j A_{sj} \sigma_{sj} y_{sj}, \\
 Q_x &= \sum_i A_{bi} \tau_{xz_{bi}} + \sum_j A_{sj} \tau_{xz_{sj}} + \sum_k A_{swk} \sigma_{x_{swk}}, \quad Q_y = \sum_i A_{bi} \tau_{yz_{bi}} + \sum_j A_{sj} \tau_{yz_{sj}} + \sum_k A_{swk} \sigma_{y_{swk}}; \\
 M_{xy} &= \sum_i A_{bi} (\tau_{yz_{bi}} x_{bi} - \tau_{xz_{bi}} y_{bi}) + \sum_j A_{sj} (\tau_{yz_{sj}} x_{sj} - \tau_{xz_{sj}} y_{sj}) + \sum_k A_{swk} (\sigma_{y_{swk}} x_{swk} - \sigma_{x_{swk}} y_{swk}), \quad (2)
 \end{aligned}$$

де σ_{bi} – нормальні напруження на i -й ділянці бетонного перерізу; σ_{sj} – нормальні напруження в j -му поздовжньому стрижні; $\tau_{xz_{bi}}, \tau_{yz_{bi}}$ – дотичні напруження на i -й ділянці бетонного перерізу; $\tau_{xz_{sj}}, \tau_{yz_{sj}}$ – дотичні напруження в j -му поздовжньому стрижні; $\sigma_{x_{swk}}, \sigma_{y_{swk}}$ – нормальні напруження, які виникають в k -му елементі стрижня поперечної арматури.

Напруження в рівняннях (2) визначаються за допомогою повних діаграм деформування бетону та арматури [1, 2]:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{z_{ml}} &= E_{ml} \nu_{z_{ml}} \varepsilon_{z_{ml}}; & \tau_{xz_{ml}} &= G_{ml} \vartheta_{xz_{ml}} \gamma_{xz_{ml}}; \\
 \tau_{yz_{ml}} &= G_{ml} \vartheta_{yz_{ml}} \gamma_{yz_{ml}}; & \tau_{xy_{ml}} &= G_{ml} \vartheta_{xy_{ml}} \gamma_{xy_{ml}}; \\
 \sigma_{x_{swk}} &= E_{sw} \nu_{x_{swk}} \varepsilon_{x_{swk}}^*; & \sigma_{y_{swk}} &= E_{sw} \nu_{y_{swk}} \varepsilon_{y_{swk}}^*, \quad (3)
 \end{aligned}$$

де ν – коефіцієнт зміни січного модуля пружності E_{ml} ; ϑ – коефіцієнт зміни січного модуля пружності за зсуву G_{ml} .

Узагальнені лінійні та кутові деформації. Узагальнені лінійні та кутові деформації визначаються, враховуючи гіпотезу плоских перерізів, розв'язків теорії пружності по поперечному згину [3], а також функцій розподілу напружень за стисненого крутіння [4].

Прирости узагальнених лінійних та кутових деформацій можуть бути подані в такому вигляді:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{z_{ml}} &= \varepsilon_0 + k_x x_{ml} + k_y y_{ml} + \beta \theta \varphi(x, y); \\
 \gamma_{xz_{ml}} &= \kappa_x \cdot g_{x_{ml}} + \kappa_y \cdot h_{y_{ml}} + \theta f_{xz_{ml}}; \\
 \gamma_{yz_{ml}} &= \kappa_y \cdot g_{y_{ml}} + \kappa_x \cdot h_{x_{ml}} - \theta f_{yz_{ml}}; \\
 \gamma_{xy_{ml}} &= -\theta f_{xy_{ml}}, \quad (4)
 \end{aligned}$$

де $m=b$ – для ділянок бетонного перерізу; $m=s$ – для стрижнів поздовжньої арматури; $m=sw$ для стрижнів поперечної арматури; l – номер ділянки або стрижня; ε_0 – осьова відносна деформація по лінії поздовжньої осі; k_x, k_y – кривини згину в площинах дії згинальних моментів M_x, M_y відповідно; κ_x, κ_y – кривини зсуву в площинах дії поперечних сил Q_x, Q_y відповідно; θ – кут закручування; $\varphi(x, y)$ – функція Сен-Венана; β – коефіцієнт депланації, який визначається за формулою $\beta = ne^{-nz}$; n – коефіцієнт стиснення [4]; z – відстань впродовж осі елемента до найближчого закріплення; $f_{xz} = \tau_{xz} / \theta G$, $f_{yz} = -\tau_{yz} / \theta G$, $f_{xz} = \tau_{xz} / \theta G$ – функції розподілу

дотичних напружень за стисненого крутіння [4]; $g_{x_{ml}}, g_{y_{ml}}, h_{x_{ml}}, h_{y_{ml}}$ – функції розподілу кутових деформацій за поперечного згину [3]. Якщо ввести в розрахунок один член ряду, то можна отримати:

$$\begin{aligned}
 g_x &= (1 + \mu) \left[\frac{b^2}{4} - x^2 \right] - \mu \left[\frac{a^2}{12} - y^2 \right] + \frac{\mu a^2}{\pi^2} \frac{ch \frac{2\pi x}{a}}{ch \frac{\pi b}{a}} \cos \frac{2\pi y}{a}; \\
 h_x &= -\frac{\mu a^2}{\pi^2} \frac{sh \frac{2\pi x}{a}}{ch \frac{\pi b}{a}} \sin \frac{2\pi y}{a}; \\
 g_y &= (1 + \mu) \left[\frac{a^2}{4} - y^2 \right] - \mu \left[\frac{b^2}{12} - x^2 \right] + \frac{\mu b^2}{\pi^2} \frac{ch \frac{2\pi y}{b}}{ch \frac{\pi a}{b}} \cos \frac{2\pi x}{b}; \\
 h_y &= -\frac{\mu b^2}{\pi^2} \frac{sh \frac{2\pi y}{b}}{ch \frac{\pi a}{b}} \sin \frac{2\pi x}{b}.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Загальні фізичні співвідношення. На основі рівнянь рівноваги (2), виразів для узагальнених деформацій (3) та діаграм деформування матеріалів загальні фізичні співвідношення для поперечного перерізу стрижневого елемента набувають такого вигляду:

$$\begin{Bmatrix} N_z \\ M_x \\ M_y \\ Q_x \\ Q_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & D_{26} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & 0 & 0 & D_{36} \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & D_{54} & D_{46} \\ 0 & 0 & 0 & D_{45} & D_{55} & D_{56} \\ D_{61} & D_{62} & D_{63} & D_{64} & D_{65} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ k_x \\ k_y \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \theta \end{Bmatrix} \tag{6}$$

або $\{N\} = [D] \{\varepsilon\}$, (7)

де D_{11} – осьова жорсткість елемента:

$$D_{11} = \sum_i A_{bi} E_b \nu_{bi} + \sum_j A_{sj} E_s \nu_{sj} / \Psi_{sj}; \tag{8}$$

D_{22}, D_{33} – згинальні жорсткості в площинах XOZ и YOZ:

$$D_{22} = \sum_i A_{bi} E_b \nu_{bi} X_{bi}^2 + \sum_j A_{sj} E_s \nu_{sj} X_{sj}^2 / \Psi_{sj}; \tag{9}$$

$$D_{33} = \sum_i A_{bi} E_b \nu_{bi} Y_{bi}^2 + \sum_j A_{sj} E_s \nu_{sj} Y_{sj}^2 / \Psi_{sj}; \tag{10}$$

D_{23} – жорсткість взаємного впливу згину в двох площинах:

$$D_{23} = D_{32} = \sum_i A_{bi} E_b \nu_{bi} X_{bi} Y_{bi} + \sum_j A_{sj} E_s \nu_{sj} X_{sj} Y_{sj} / \Psi_{sj}; \tag{11}$$

D_{12}, D_{13} – жорсткості впливу поздовжньої сили на згин та згинальних моментів на подовження:

$$D_{12} = D_{21} = \sum_i A_{bi} E_b \nu_{bi} X_{bi} + \sum_j A_{sj} E_s \nu_{sj} X_{sj} / \Psi_{sj}; \quad (12)$$

$$D_{13} = D_{31} = \sum_i A_{bi} E_b \nu_{bi} Y_{bi} + \sum_j A_{sj} E_s \nu_{sj} Y_{sj} / \Psi_{sj}; \quad (13)$$

D_{44}, D_{55} – жорсткості зсуву в площинах XOZ и YOZ:

$$D_{44} = \sum_i \frac{A_{bi} E_b \vartheta_{bi}}{2(1 + \mu_b)} g_{x_{bi}} + \sum_j \frac{A_{sj} E_s \vartheta_{sj}}{2(1 + \mu_s)} g_{x_{sj}} + \sum_k A_{swk} E_{sw} \nu_{swk} g_{x_{swk}}; \quad (14)$$

$$D_{55} = \sum_i \frac{A_{bi} E_b \vartheta_{bi}}{2(1 + \mu_b)} g_{y_{bi}} + \sum_j \frac{A_{sj} E_s \vartheta_{sj}}{2(1 + \mu_s)} g_{y_{sj}} + \sum_k A_{swk} E_{sw} \nu_{swk} g_{y_{swk}}; \quad (15)$$

D_{45}, D_{54} – жорсткості взаємного впливу згину в площинах XOZ и YOZ:

$$D_{45} = \sum_i \frac{A_{bi} E_b \vartheta_{bi}}{2(1 + \mu_b)} h_{y_{bi}} + \sum_j \frac{A_{sj} E_s \vartheta_{sj}}{2(1 + \mu_s)} h_{y_{sj}} + \sum_k A_{swk} E_{sw} \nu_{swk} h_{y_{swk}}; \quad (16)$$

$$D_{54} = \sum_i \frac{A_{bi} E_b \vartheta_{bi}}{2(1 + \mu_b)} h_{x_{bi}} + \sum_j \frac{A_{sj} E_s \vartheta_{sj}}{2(1 + \mu_s)} h_{x_{sj}} + \sum_k A_{swk} E_{sw} \nu_{swk} h_{x_{swk}}; \quad (17)$$

D_{16}, D_{26}, D_{36} – жорсткості впливу крутного моменту M_{xy} на подовження та кривини згину в площинах XOZ и YOZ, поздовжньої сили N та згинальних моментів M_x, M_y на зсув в площині XOY:

$$D_{16} = D_{61} = \sum_i A_{bi} E_b \nu_{bi} \beta \varphi(X_{bi}, Y_{bi}) + \sum_j A_{sj} E_s \nu_{sj} \beta \varphi(X_{sj}, Y_{sj}) / \Psi_{sj}; \quad (18)$$

$$D_{26} = D_{62} = \sum_i A_{bi} E_b \nu_{bi} X_{bi} \beta \varphi(X_{bi}, Y_{bi}) + \sum_j A_{sj} E_s \nu_{sj} X_{sj} \beta \varphi(X_{sj}, Y_{sj}) / \Psi_{sj}; \quad (19)$$

$$D_{36} = D_{63} = \sum_i A_{bi} E_b \nu_{bi} Y_{bi} \beta \varphi(X_{bi}, Y_{bi}) + \sum_j A_{sj} E_s \nu_{sj} Y_{sj} \beta \varphi(X_{sj}, Y_{sj}) / \Psi_{sj}; \quad (20)$$

D_{46}, D_{56} – жорсткості впливу крутного моменту M_{xy} на зсув в площинах XOZ и YOZ поперечних сил Q_x, Q_y на зсув в площині XOY:

$$D_{46} = D_{64} = \sum_i \frac{A_{bi} E_b \vartheta_{bi}}{2(1 + \mu_b)} f_{xz_{bi}} + \sum_j \frac{A_{sj} E_s \vartheta_{sj}}{2(1 + \mu_s)} f_{xz_{sj}} + \sum_k A_{swk} E_{sw} \nu_{swk} f_{xz_{swk}}; \quad (21)$$

$$D_{56} = D_{65} = \sum_i \frac{A_{bi} E_b \vartheta_{bi}}{2(1 + \mu_b)} f_{yz_{bi}} + \sum_j \frac{A_{sj} E_s \vartheta_{sj}}{2(1 + \mu_s)} f_{yz_{sj}} + \sum_k A_{swk} E_{sw} \nu_{swk} f_{yz_{swk}}; \quad (22)$$

D_{66} – жорсткість при крутінні в площині XOY:

$$D_{66} = \sum_i \frac{A_{bi} E_b \vartheta_{bi}}{2(1 + \mu_b)} (f_{yz_{bi}} X_{bi} - f_{xz_{bi}} Y_{bi}) + \sum_j \frac{A_{sj} E_s \vartheta_{sj}}{2(1 + \mu_s)} (f_{yz_{sj}} X_{sj} - f_{xz_{sj}} Y_{sj}) + \sum_k A_{swk} E_{sw} \nu_{swk} (f_{yz_{swk}} X_{swk} - f_{xz_{swk}} Y_{swk}); \quad (23)$$

Ψ_{sj} – коефіцієнт В.І. Мурашева, який визначається за такою формулою:

$$\Psi_{sj} = 1 - 0,7 \sigma_{sj, crc} / \sigma_{sj};$$

$\sigma_{sj, crc}$ – напруження в j -му стрижні в момент виникнення тріщин;

σ_{sj} – напруження в арматурі на рівні навантаження, що розглядається.

Розглядаючи вирази (6), очевидно, що матриця жорсткості $[D]$ не встановлює згинальних моментів та поздовжньої сили на кривини зсуву в площинах дії поперечних сил Q_x , Q_y , що є наслідком гіпотези плоских перерізів. Задаючись величиною навантаження, можна встановити зв'язок між кривинами згину та зсуву, однак це завдання у цій роботі не ставилось. Вплив крутного моменту на осьові деформації і кривини згину проявляється завдяки врахуванню стиснення на торцях стрижневого елемента і зводиться фактично до нуля в перерізах, розташованих далеко від закріплень, де крутіння є практично вільним.

З фізичних співвідношень (7) на будь-якій стадії навантаження за постійного співвідношення між зусиллями, можливо знайти вектор деформацій

$$\{\varepsilon\} = [D]^{-1}\{N\}, \quad (24)$$

компоненти якого дають змогу визначити узагальнені деформації $\varepsilon_z, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xy}$.

Висновки. Отримані фізичні співвідношення для випадку складного напруженого стану стрижневого залізобетонного елемента з прямокутним поперечним перерізом.

Запропонований підхід дає змогу врахувати в розрахунках дискретність розміщення поздовжньої і поперечної арматур, а також розглянути складені стрижневі елементи (поперечні перерізи з ділянками різноміцного бетону) [5], а також нелінійність властивостей бетону та арматури, а також нерівномірний розподіл напружень за довжиною стрижнів поперечної арматури.

Отримані співвідношення справедливі для усіх стадій напружено-деформованого стану. Нелінійні властивості матеріалів враховуються введенням в розрахунок січного модуля пружності при стиску, розтягу та зсуві для бетону і арматури.

Вирази (6)–(24) є частиною алгоритму визначення міцності та деформативності перерізів залізобетонних стрижнів [6] і за відомих функцій розподілу дотичних напружень можуть бути використані для залізобетонних стрижневих елементів з довільною формою поперечного перерізу.

1. Карпенко Н.И. *Общие модели механики железобетона*. – М.: Стройиздат, 1996. – 416 с.
2. Школа Ю.А. *Диаграмма сдвига для бетона* // *Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури: Збірник наукових праць Міжнародного симпозиуму «ДОМ-ЕКСПО – 2000»*. – Одеса, «Місто майстрів», 2000. – Вип. 2. – С. 154–156.
3. Хан Х. *Теория упругости. Основы линейной теории и ее применения* // *Пер. с нем.* – М.: Мир, 1988. – 344 с.
4. Школа Ю.А. *Напряженное состояние балок, подверженных стесненному кручению* // *Будівельні конструкції*. – К.: НДІБК, 2000. – Вип. 52. – С. 208–213.
5. Яременко А.Ф., Школа Ю.А. *Расчет сечений балок сборно-монолитных кессонных перекрытий* // *Будівництво України*. – 2000. – №6. – С.42–44.
6. Школа Ю.А. *Влияние стеснения на несущую способность и деформативность железобетонных стрижневых элементов при изгибе с кручением* // *Будівельні конструкції*. – Т. 1. – К.: НДІБК, 2005. – Вип. 62. – С. 386–392.
7. Яременко А.Ф., Школа Ю.А. *Расчет железобетонных балок прямоугольного поперечного сечения при действии продольной силы, изгиба и кручения* // *Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди*. – Рівне, 1999. – Вип. 3. – С. 301–305.