специфічній галузі. Така підготовка та перепідготовка мали б здійснюватись в рамках спеціальності "Інформаційні технології проектування" спеціалізації "Автоматизоване проектування та менеджмент комп'ютеризованих систем". Відомо, що основні техніко-економічні показники систем визначаються і закладаються ще на етапі проектування. Використання нових підходів із залученням керівників та спеціалістів з відповідною підготовкою сприяло б успішній розробці та реалізації стратегічних планів та перспективних проектів.

УДК 681

Е. Марецка
Вища школа інформатики та управління
Бєльско-Бяла, Польща

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОНСОЛІДАЦІЇ КОРОТКОТЕРМІНОВИХ КРЕДИТІВ, ЯКІ СПЛАЧУЮТЬСЯ ПОВНИМИ ВНЕСКАМИ

Вступ

Проблематика математичного моделювання фінансових процесів має важливе значення у сучасному управлінні [2,3], адже воно є сферою діяльності фінансової інженерії [4,16]. Математичне моделювання фінансових процесів базується на принципі еквівалентності капіталу [1,7,14]. Згаданий принцип використано для моделювання різноманітних фінансових проблем [6,8,9,10,11,12]. В [13] розглянуто моделювання складних інформаційно-фінансових процесів.

Математичні моделі фінансових процесів покладено в основу комп’ютерних програм конверсії та консолідації кредитів, які наведено в роботах [5,15,17].

В цій роботі подано моделі консолідації короткочасних кредитів, які повертаються повними частинами і повинні бути сконсолідованими. Розглянуто однорідну модель типу R.

У статті прийнято, що короткочасні кредити можна повертати (сплачувати) у різноманітних ринкових умовах, котрі характеризуються:

– простим опроцентуванням з постійною (незмінною) ставкою;

– простим опроцентуванням зі змінною ставкою.

Приймемо, що ринкові умови є однаковими для кредитів як перед, так і після консолідації, та що терміни сплати кредитних внесків є однаковими.

Представимо консолідацію кредитів трьома фазами:

– визначення внесків кредитів перед консолідацією;

– визначення технічних кредитів;

– визначення внесків сконсолідованого кредиту.

Такий поділ дає змогу порівняти вартості кредитів перед і після консолідації.

Для випадку короткотермінових кредитів (якщо період сплати внесків до 1 року) застосовують просте опроцентування з постійною або змінною ставкою – залежно від зміни інфляції.

1. Формулювання проблеми

Завдання консолідації кредитів, сплачуваних повними внесками, сформулюємо так:

– видано два кредити на терміни n = 0 та n = m, які мають бути сплачені повними внесками;

– сума першого кредиту Đ_0^1 має бути сплачена N^1 повними внесками R_n^1 в термінах n =1, ..., $N^{1;}$

– сума другого внеску P_m^1 має бути сплачена N^2 повними внесками R_n^2 в термінах n = m + 1,..., m + $N^{2;}$

– в терміні n = t, де $m<t<\min(N^1, N^2)$, настає консолідація кредитів;

– технічний кредит P_t виданий в терміні n = t, має бути сплачений N повними внесками в терміни n = t + 1,...,t + N.

Необхідно визначити внески та суми кредитів перед і після консолідації.

У розглянутій моделі консолідації кредитів прийнято такі позначення:

n – показник терміну;

P_0^1 – сума першого кредиту, виданого в терміні n = 0;

P_m^0 – сума другого кредиту, виданого в терміні n = m;

P_t – сума технічного кредиту, виданого в терміні n = t;

N^1 – кількість внесків першого кредиту;

N^2 – кількість внесків другого кредиту;

N – кількість внесків технічного кредиту;

R_n^1 – внесок першого кредиту, сплачений в n-му терміні (n = 1,..., N^1);

R_n^2 – внесок другого кредиту, сплачений в n-му терміні (n = m + 1,..., m + N^2);

R_n – внесок технічного кредиту, сплачений в n-му терміні (n = t + 1,..., t + N);

s_n^1 – процентна ставка першого кредиту в n-му періоді;

s_n^2 – процентна ставка другого кредиту в n-му періоді;

s_n – процентна ставка технічного кредиту в n-му періоді;

j^1 – ставка індексації внесків першого кредиту;

j^2 – ставка індексації внесків другого кредиту;

j- ставка індексації внесків технічного кредиту;

O_n – множник опроцентування в n-му терміні;

D_n – множник дисконтування в n-му терміні;

Q – вартість (фактор) дисконтування в n-му терміні;

Q – вартість кредиту.

Крім того, прийнято, що n-й термін настає в кінці n-го періоду. Внески кредитів можна індексувати – звідси закладено ставки індексації внесків. Індексація внесків дає змогу впливати на вартість кредиту.

Множник опроцентування і множник дисконтування залежать від стану ринку і від терміну, в якому відбувається опроцентування чи дисконтування. Якщо змінюється процентна ставка, ці множники описуються рекурентними формулами, що спрощує їх програмування.

2. Модель 1 – просте опроцентування з постійною ставкою

Консолідація кредитів за умови простого опроцентування з постійною процентною ставкою буде проведена трьома раніше згаданими фазами.

2.1. Визначення внесків кредитів перед консолідацією

Приймемо, що для першого кредиту задані:

P_0^1 – сума кредиту;

N^1 – кількість внесків;

s^1 – постійна процентна ставка;

j^1 – ставка індексації внесків.

Необхідно визначити внески: R_n^1, які сплачуються в термінах: $n = 1, ..., N^1$.

Внески першого кредиту задовольняють принцип еквівалентності капіталу у вигляді:

$$P_0^1 \cdot [1 + s^1 \cdot N^1] = R_1^1[1 + s^1 \cdot (N^1 - 1)] + \ldots + R_1^n [1 + s^1 \cdot (N^1 - n)] + \ldots + R_{N^1}^1 . \quad (1)$$

У рівнянні (1) присутні N^1 невідомих внесків R_n^1, тому неможливо визначити їх без додаткових припущень.

Приймемо, що внески R_n^1 індексуються з ставкою j^1, тоді отримаємо:

$$R_n^1 = R_1^1(1 + j^1)^{n-1},\ n = 2, \ldots N^1. \quad (2)$$

З рівнянь(1) і (2) можна визначити усі внески R_n^1. Систему рівнянь (1) і (2) можна розв’язати аналітично або за допомогою стандартної комп’ютерної програми, призначеної для розв’язання системи лінійних рівнянь. Проте це вимагає додаткових математичних перетворень (математичного моделювання). Водночас інформаційне моделювання на калькуляційному аркуші дає змогу запрограмувати рівняння (1) і (2) без додаткових перетворень. Згадані рівняння були записані у вигляді, який вказував спосіб програмування на калькуляційному аркуші.

Внески другого кредиту перед консолідацією будуть визначені аналогічно, як і внески першого кредиту. Проте необхідно звернути увагу на інший термін виділення другого кредиту та інші терміни сплати внесків. Випливає це внаслідок прийняття спільного календаря для всіх розглянутих кредитів. Крім того, приймемо, що процентна ставка для другого кредиту є іншою, ніж для першого кредиту.

Приймемо для другого кредиту такі дані:

P_m^2 – сума кредиту;

N^2 – кількість внесків;

s^2 – постійна процентна ставка;

j^2 – ставка індексації внесків.

Необхідно визначити внески R_n^2, які сплачуються в терміни $n = m + 1, ..., m + N^2$.

Внески другого кредиту задовольняють принцип еквівалентності капіталу у вигляді:

$$P_m^2 \cdot [1 + s^2 N^2] = R_{m+1}^2[1 + s^2(N^2 - 1)] + \ldots + R_n^2 [1 + s^2(m + N^2 - n)] + \ldots R_{N^2}^2 . \quad (3)$$

У даному рівнянні є N^2 невідомих внесків R_n^2, які не можна визначити без додаткових припущень.

Приймемо, що внески R_n^2 індексуються зі ставкою j^2, тоді отримаємо:

$$R_n^2 = R_{m+1}^2 (1+j^2)^{n-m-1}, \quad \text{де } n = m + 2,...,m + N^2. \tag{4}$$

Із системи рівнянь (3) і (4) можна визначити усі внески R_n^2.

Систему рівнянь (3) і (4) можна розв'язати аналітично або за допомогою стандартної комп'ютерної програми знаходження розв'язків системи лінійних рівнянь. Проте це вимагає додаткових математичних перетворень (математичного моделювання). Інформаційне моделювання на калькуляційному аркуші дає змогу запрошувати рівняння (3) і (4) без додаткових перетворень. Згадані рівняння були записані у вигляді, який вказував спосіб програмування. Суттєве значення має прийняття спільного календаря для сплати внесків першого і другого кредиту. Програма на калькуляційному аркуші для визначення внесків першого і другого кредиту має бути розміщена у відповідних комірках. Аналогічно для технічного кредиту приймається спільний календар.

2.2. Визначення технічного кредиту

Приймемо, що в термін t потрібно провести консолідацію кредитів. Термін t повинен задовольняти умову:

$$m<t<\min(N^1, N^2). \tag{5}$$

Отже, в термін t перший та другий кредит не були сплачені.

Для консолідації кредитів спершу виконують конверсію першого і другого кредиту. Конверсія полягає у визначенні суми одноразової сплати внесків, які на термін t не були сплачені. Така сума одноразової сплати називається технічним кредитом. В результаті технічної операції залишається до сплати новий кредит, який може бути наданий за інших умов, наприклад, при іншій кількості сплат чи іншій процентній ставці.

Позначимо: P_t^1 – перший технічний кредит,

P_t^2 – другий технічний кредит.

Вартість технічних кредитів визначаємо, дисконтуючи на термін t не сплачені внески відповідно першого і другого кредиту. Отже, отримаємо:

$$P_t^1 = R_t^1 + R_{t+1}^1 / (1+s^1)+\ldots+R_n^1 / [1+s^1(n-t)+\ldots+R_{N^1}^1 / [1+s^1(N^1-t)], \tag{6}$$

а також

$$P_t^2 = R_t^2 + R_{t+1}^2 / (1+s^1)+\ldots+R_n^2 / [1+s^2(n-t)+\ldots+R_{N^2}^2 / [1+s^2(N^2-t)]. \tag{7}$$

Після конверсії першого та другого кредиту залишаються до сплати в терміні t два технічні кредити або один технічний кредит, який є їх сумою:

$$P_t = P_t^1 + P_t^2. \tag{8}$$

Рівняння (6) і (7) записані у формі запрограмування на калькуляційному аркуші. Програма визначення технічних кредитів є продовженням програми визначення внесків першого і другого кредиту. Зокрема, безпосередньо використовуються комірки з визначеними раніше внесками першого і другого кредиту, процентними ставками, а також з термінами спільного календаря. В такий спосіб зміни даних першого і другого кредиту дають безпосередньо змінені значення технічних кредитів.

2.3. Визначення внесків технічного кредиту

Внески технічного кредиту P_t визначаємо, як і внески першого та другого кредиту перед конверсією.

Приймемо, що відомі:

P_t – сума кредиту;

N – кількість внесків,

s – процентна ставка,

j – ставка індексації внесків.

Необхідно визначити внески R_n, які треба сплатити в термінах $n = t + 1,...,t + N$.

Внески технічного кредиту задовольняють умову еквівалентності капіталу у вигляді:

$$P_t[1+sN] = R_{t+1}[1 + s(N-1)] +...R_n[1+s(t+N-n) +...+ R_{t+N}. \tag{9}$$

У рівнянні (9) присутні N невідомих внесків R_n, для визначення яких потрібні додаткові припущення.

Приймаючи, що внески R_n є індексованими, отримуємо додаткові рівняння:

$$R_n = R_{t+1}(1+j)^{n-t-1}, \quad n = t + 2,...t + N. \tag{10}$$

Систему рівнянь (9) і (10) можна розв’язати аналітично або за допомогою стандартної комп’ютерної програми знаходження розв’язків системи лінійних рівнянь. Проте для цього потрібні додаткові математичні перетворення (математичне моделювання). Моделювання інформаційне на калькуляційному аркуші дає змогу запрограмувати рівняння (9) і (10) без додаткових перетворень. Згадані рівняння записані у формі, яка вказує спосіб програмування.

Вартість короткотермінових кредитів без консолідації визначаємо як різницю сум отриманих з банку, і сум відданих внесків. Приймемо, що для кредитів без консолідації відомі:

P_0^1 – сума першого кредиту;

R_n^1, $(n = 1, ..., N^1)$ – внески першого кредиту;

P_m^2 – сума другого кредиту;

R_n^2, $(n = m + 1,..., m + N^2)$ – внески другого кредиту.

Позначимо:

Q^1 – вартість першого кредиту;

Q^2 – вартість другого кредиту.

Вартість кредитів визначаємо так:

$$Q^1 = R_1^1 +\ldots, R_{N^1}^1 - P_0^1. \tag{11}$$

$$Q^2 = R_{m+1}^2,.., R_{m+N^2}^2 - P_m^2. \tag{12}$$

Сума вартостей Q^1 і Q^2 є повною вартістю кредитів без консолідації, якщо застосована капіталізація відсотків.

Вартість кредитів сконсолідованих визначаємо також як різницю сум, отриманих з банку і суми усіх внесків (перед консолідацією і після консолідації).

Приймемо, що відомі внески:

– перед консолідацією:

R_n^1, (n = 1, ..., t - 1) – внески першого кредиту,

R_n^2, (n = m + 1, ..., t - 1) – внески другого кредиту,

– після консолідації: R_n, (n = t + 1, ..., t + N)

Вартість Q кредитів з консолідацією визначаємо так:

$$Q = (R_1^1 + \ldots + R_{t-1}^1) + (R_{m+1}^2 + \ldots + R_{t-1}^2) + (R_{t+1} + \ldots + R_{t+N}) - P_0^1 - P_m^2. \tag{13}$$

Вартість Q сконсолідованих кредитів не враховує капіталізації відсотків.

3. Опроцентування просте – ставка змінна

Консолідацію кредитів в умовах простого опроцентування зі змінною процентною ставкою проведемо трьома фазами, згаданими раніше.

3.1. Визначення внесків кредитів перед консолідацією

Приймемо, що для першого кредиту задані:

P_0^1 – сума кредиту;

N^1 – кількість внесків;

s_n^1 – змінна процентна ставка, (n = 1, ..., N^1);

j^1 – ставка індексації внесків.

Необхідно визначити внески R_n^1, які потрібно сплатити в термінах: n=1, ..., N^1.

Внески першого кредиту задовольняють умову еквівалентності капіталу у вигляді:

$$P_0^1(1 + s^1 + \ldots + s_{N^1}^1) = R_1^1(1 + s_2^1 + \ldots + s_{N^1}^1) + \ldots + R_n^1(1 + s_n^1 + \ldots + s_{N^1}^1) + \ldots + R_{N^1}^1. \tag{14}$$

У даному рівнянні присутні N^1 невідомих внесків R_n^1, тому для їх визначення потрібні додаткові умови. Дляв изначення внесків R_n^1 можна увести їх індексацію згідно з формулою (2). Отримаємо систему N^1 рівнянь, з яких можна визначити усі внески R_n^1.

Визначаючи внески R_n^1 на калькуляційному аркуші, необхідно відповідно запрограмувати множники опроцентування. Якщо множник опроцентування описаний рекурентною формулою, то на калькуляційному аркуші можна отримати всі множники як результат копіювання відповідної формули.

З рівняння (14) бачимо, що множники опроцентування мають вигляд:

$$\begin{aligned}
O_0 &= 1 + s_1^1 + \ldots + s_{N^1}^1, \\
&.. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
O_n &= 1 + s_{n+1}^1 + \ldots + s_{N^1}^1, \\
&.. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
O_{N-1} &= 1 + s_N^1, \\
Q_N &= 1.
\end{aligned} \tag{15}$$

Аналізуючи (15), приходимо до рекурентної формули:

$$\begin{aligned}
&O_N = 1,\\
&O_{N-1} = 1 + s_N^1 = O_N + s_N^1,\\
&O_{N-2} = 1 + s_{N-1}^1 + s_N^1 = O_{N-1} + s_{N-1}^1,\\
&\ldots\ldots 1 \ldots\ldots\\
&O_{n-1} = O_n + s_n^1
\end{aligned} \tag{16}$$

Рекурентна формула (16) полегшує програмування рівняння (14) і визначення внесків R_n^1, індексованих згідно з (2).

Внески другого кредиту перед консолідацією визначаються аналогічно, як і внески першого кредиту. Проте необхідно звернути увагу на інший термін виділення другого кредиту, а також на інші терміни сплати внесків. Випливає це із прийняття спільного календаря для всіх розглянутих кредитів. Крім того, вважатимемо, що процентна ставка для другого кредиту є іншою, ніж для першого.

Приймемо, що для другого кредиту задані:

P_m^2 – сума кредиту;

N^2 – кількість внесків;

s_n^2 – постійна процентна ставка, ($n = m + 1, ..., m + N^2$);

j^2 – ставка індексації внесків.

Необхідно визначити внески R_n^2, які потрібно сплатити в термінах $n = m + 1,...,m+N^2$.

Внески другого кредиту задовольняють умову еквівалентності капіталу у вигляді:

$$\begin{aligned}
&P_m^2(1 + s_{m+1}^2 + \ldots + s_{m+N^2}^2) = R_{m+1}^2(1 + s_{m+2}^2 + \ldots + s_{m+N^2}^2) +\\
&+ \ldots + R_n^2(1 + s_{n+1}^2 + \ldots + s_{m+N^2}^2) + \ldots + R_{N^2}^2 .
\end{aligned} \tag{17}$$

У рівнянні (17) є N^2 невідомих внесків R_n^2, які не можна визначити без додаткових припущень. Прийнявши, що внески R_n^2 індексуються з ставкою j^2, використаємо формулу (4) як додаткову умову для N^1-1 внесків. Із отриманої системи рівнянь можна визначити всі внески R_n^2.

Систему рівнянь (17) і (4) можна розв’язати на калькуляційному аркуші. Програмування на калькуляційному аркуші в даному випадку вимагає врахування спільного календаря (з календарем першого кредиту). Крім того, для полегшення програмування множини опроцентування внесків R_n^2 в рівнянні (17) треба подати у вигляді рекурентної формули, аналогічної до формули (16).

3.2. Визначення технічного кредиту

Приймемо, що в терміні t потрібно провести консолідацію кредитів. Термін t має задовольняти умову (5). Отже, в терміні t не сплачені перший і другий кредити.

Технічний кредит визначимо, як у попередньому пункті. Враховуючи змінну процентну ставку, отримаємо:

$$P_t^1 = R_t^1 / (1+s_{t+1}^1)+\ldots+R_n^1 / (1+s_{t+1}^1+\ldots+s_n^1)+\ldots+R_{N^1}^1 / (1+s_{t+1}^1+\ldots+s_{t+N^1}^1), \qquad (18)$$

а також

$$P_t^2 = R_t^2 + R_{t+1}^2 / (1+s_{t+1}^2)+\ldots+R_n^2 / (1+s_{t+1}^2+\ldots+s_n^2)+\ldots+R_{N^2}^2 / (1+s_{t+1}^2+\ldots+s_{N^2}^2). \qquad (19)$$

Після конверсії першого та другого кредиту залишається сплатити в терміні t два технічні кредити або один технічний кредит, який є їх сумою.

Рівняння (18) і (19) були записані у формі, придатній для програмування на калькуляційному аркуші. Множники дисконтування, присутні в рівняннях (18) і (19), можна записати в рекурентній формі, що полегшить програмування. Комірку на калькуляційному аркуші, яка містить множник дисконтування, можна скопіювати з метою визначення решти множників дисконтування.

Аналізуючи рівняння (18), зауважимо, що множники дисконтування мають вигляд:

$$\begin{aligned} &D_1 = 1, \\ &D_{t+1} = 1+s_{t+1}^1 = D_t + s_{t+1}^1, \\ &D_{t+2} = 1+s_{t+1}^1 = D_{t+1} + s_{t+2}^1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &D_n = D_{n-1} + s_n^1. \end{aligned} \qquad (20)$$

Отже, (20) є рекурентною формою, яка дає змогу визначити множники дисконтування внесків першого кредиту. Рекурентна формула, яка описує множники дисконтування внесків другого кредиту, є аналогічною. Її можна отримати, аналізуючи рівняння (19).

3.3. Визначення внесків технічного кредиту

Внески технічного кредиту P_t визначаємо, як і для опроцентування простого з постійною ставкою.

Приймемо, що задані:

P_t – сума кредиту;

N – кількість внесків;

s_n – змінна процентна ставка сконсолідованого кредиту;

j – ставка індексації внесків.

Необхідно визначити внески R_n, які мають бути сплачені в термінах n = t + 1,...t + N.

Внески технічного кредиту задовольняють умову еквівалентності капіталу у вигляді:

$$P_t(1+s_{t+1}+\ldots+s_{t+N}) = R_{t+1}(1+s_{t+1}+\ldots+s_{t+N})+\ldots+R_n(1+s_n+\ldots+s_{t+N})+\ldots+R_{t+N}. \qquad (21)$$

У рівнянні (21) є N невідомих внесків R_n, тому для їх визначення потрібні додаткові припущення. Приймаючи, що внески R_n індексуються, отримаємо додатково N-1 рівнянь (10).

Систему рівнянь (20) і (10) можна розв’язати аналітично або за допомогою стандартної комп’ютерної програми знаходження розв’язків системи лінійних рівнянь. Інформаційне моделювання на калькуляційному аркуші дає змогу запрограмувати рівняння (21) і (10) з урахуванням рекурентних формул множників опроцентування внесків R_n. Аналізуючи рівняння (21), отримаємо, як і для внесків кредитів без консолідації:

$$
\begin{aligned}
&O_{t+N} = 1, \\
&O_{t+N-1} = 1 + s_{t+N} = O_{t+N} + s_{t+N}, \\
&. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
&O_{n-1} = O_n + s_n
\end{aligned}
\qquad (22)
$$

Формули для визначення множників опроцентування (16) і (22) є аналогічними. Різниця полягає лише у інших термінах внесків у спільному календарі.

Вартість короткотермінових кредитів зі змінною процентною ставкою можна визначити з рівнянь, поданих у пункті 3.4.

4. Висновки

Наведені в даній роботі математичні моделі консолідації кредитів базуються на принципі еквівалентності капіталу. Для простого опроцентування суттєве значення має термін еквівалентності. Для визначення внесків кредиту прийнято термін сплати останнього внеску, а для визначення технічних кредитів – термін консолідації.

Консолідація кредитів може збільшити або зменшити вартість кредитів залежно від зміни процентних ставок, термінів сплати кредитів та індексації внесків.

УДК 62-523.8:621.3

Д. Марунчак, А. Сидор
Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра автоматизованих систем управління

РОЗРАХУНОК ІНТЕНСИВНОСТІ ВІДМОВ СИМЕТРИЧНОЇ РОЗГАЛУЖЕНОЇ СИСТЕМИ ЗІ СТАРІЮЧИМИ ЗА ЗАКОНОМ РЕЛЕЯ ВИХІДНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

Визначено характеристики надійності симетричних розгалужених систем відповідно до вимог державних стандартів України. Проведено розрахунок інтенсивності відмов при заданій умові готовності системи залежно від часу.

В [1] розглядаються основні характеристики надійності симетричної розгалуженої системи зі старіючими за законом Релея вихідними елементами. Це традиційні характеристики розгалужених систем: математичне сподівання кількості вихідних працюючих елементів, розподіл імовірностей кількості вихідних працюючих елементів, коефіцієнт готовності невідновлюваної розгалуженої системи, а також такі часові характеристики, як тривалість перебування системи в кожному з можливих станів, тривалість перебування розгалуженої системи в заданому стані готовності.

Ієрархічні розгалужені системи є окремим класом складних технічних систем, принцип роботи яких принципово відрізняється від традиційних систем. У таких системах немає однозначного стану роботи чи відмови. Натомість є достатньо велика кількість (залежно від величини системи) можливих станів системи і впродовж своєї роботи система переходить з