УДК 624.075: 539.3

О.Р. Давидчак
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра мостів та будівельної механіки
79013, м. Львів, вул. С. Бандери, 12

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ІЗ АПРОКСИМАЦІЄЮ КОЕФІЦІЄНТІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДО РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ НА ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ПЕРЕХРЕСНО- РЕБРИСТИХ СИСТЕМ

Пропонується методика дослідження динаміки перехресно-ребристих систем із довільним розподілом мас та жорсткості, розроблена на основі алгоритму методу граничних елементів і теорії квазідиференціальних рівнянь.

To find frequencies and forms of characteristic oscillations of framed structures with discrete-continuous distribution of parameters, the presented article suggests using the boundary elements method with evolutionary operators that correspond to quasi-differential equations obtained during certain approximation of coefficients of corresponding equations.

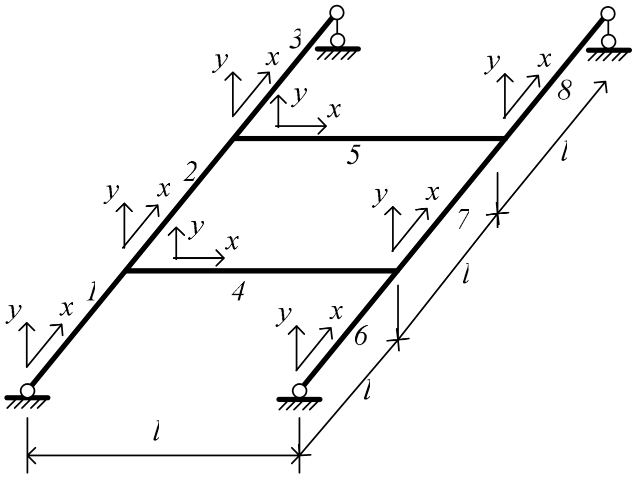
Мета роботи. Мета роботи полягала у розробленні методики розрахунку та числового дослідження вільних коливань перехресно-ребристої системи як системи із дискретно-неперервними розподілами параметрів (змінна жорсткість, довільний розподіл та розташування мас вздовж стрижнів). У запропонованій методиці використано для знаходження частот власних коливань перехресно-ребристих стрижневих систем алгоритм методу граничних елементів (МГЕ) та розв’язання рівнянь коливань стрижнів на основі теорії квазідиференціальних рівнянь.

Стан проблеми. Важливим етапом проектування згаданих споруд є визначення їх динамічних характеристик (частот вільних коливань, амплітуд вимушених коливань, динамічного коефіцієнта). У практичних методах розрахунку споруд для визначення цих параметрів системи із безмежним ступенем вільності заміняють системами із скінченним числом ступеня вільності шляхом зведення розподілених мас до зосереджених точкових мас у вузлах розрахункової схеми. Цей підхід використовується, зокрема, і в універсальному методі скінченних елементів, який покладено в основу сучасних програмних комплексів автоматизованого проектування. Для покращання точності отриманих результатів згаданим методом зменшують розміри скінченних елементів та відстані між вузлами, що збільшує порядок системи рівнянь, до яких зводиться розрахунок. Цього недоліку позбавлений метод граничних елементів (МГЕ) [1]. При виборі розрахункової схеми для розрахунку цим методом стрижневих систем із зосередженими масами або змінною жорсткістю необхідно використовувати певні спрощення, зокрема, зведення точкових мас до розподіленої маси та ін. Тому розвиток методу МГЕ залишається актуальною задачею і сьогодні.

У цій статті пропонується до розрахунку перехресно-ребристих конструкцій використати алгоритм методу граничних елементів поєднано із розв’язком квазідиференціальних рівнянь з узагальненими коефіцієнтами.

Методика розрахунку. Перехресно-ребристі системи утворені із окремих стрижнів, з’єднаних між собою у вузлах. Задачі динаміки таких стрижнів зводяться до розв’язання лінійних диференціальних рівнянь, які задовольняють початкові параметри стрижнів. Така задача називається задачою Коші. Для опису динаміки стрижневих систем можна записати систему лінійних диференціальних рівнянь із взаємозв’язаними початковими параметрами і граничними умовами. У загальному випадку у прямолінійному стрижні можуть відбуватись поперечні (у двох напрямках), поздовжні і крутні коливання. Якщо переміщення малі і матеріал стрижня приймається пружним (дійсний закон пружності Гука), то виконується принцип суперпозиції у межах кожного стрижня. Відповідно можна об'єднати в одне матричне рівняння розв'язок задачі Коші для перелічених чотирьох видів коливань.

Для опису алгоритму дослідження динаміки перехресно-ребристої системи розглянемо виведення частотних рівнянь стрижнів перехресно-ребристої системи (рисунок).



Розрахункова схема перехресно-ребристої системи

У стрижнях такої системи домінуючими є поперечні коливання із площини системи і крутні коливання. Тому можна обмежитися цими двома видами коливань. Диференціальні рівняння для вільних поперечних та крутних коливань стрижня мають вигляд [2,3]

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)+m^*\frac{\partial^2}{\partial t^2}(y)=0;$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(GC\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)-I_0\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\theta)=0, \qquad (1)$$

де $m^*(x)=m(x)+\sum M_i\delta(x-x_i)$ – погонна маса стрижня, причому $m(x)$ звичайна функція, а M_i – маса вантажів, зосереджених у перерізах $x=x_i$; C – величина, яка залежить від форми поперечного перерізу (для стрижнів круглого поперечного перерізу $C=I_0^/$; $I_0^/$ – полярний момент інерції; I^0 – полярний момент інерції маси стрижня, віднесений до одиниці довжини ($I_0=\rho I_0^/$, де ρ – питома вага метеріалу).

Використавши метод розділення змінних Фур'є, переходимо до рівняння

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI(x)\cdot\frac{d^2 y(x)}{dx^2}\right)-m^*(x)\cdot\omega^2\cdot y(x)=0 \quad .$$

$$\frac{d}{dx}\left(GI_\rho(x)\cdot\frac{d\ \theta(x)}{dx}\right)+\rho\cdot I_\rho\cdot\omega^2\cdot\theta(x)=0, \qquad (2)$$

де ω – циклічна частота вільних коливань.

Рівняння (2) повинно задовольняти початкові параметри :

$$y(0)=y_0\ ;\ \ y^/(0)=\varphi(0)\ ;\ \ EI(0)y^{//}(0)=-M(0);\ \left(EI(0)y^{//}\right)'=-Q(0);$$

$$\theta(0)=\theta_0;\ \ GI_\rho\theta^/=M_k. \qquad (3)$$

Розв’язок задачі Коші (2, 3) для окремого стрижня можна записати у матричному вигляді.

$$\begin{vmatrix} y(x) \\ \varphi(x) \\ M(x) \\ Q(x) \\ \theta(x) \\ M_k(x) \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11}(x) & B_{12}(x) & B_{13}(x) & B_{14}(x) & 0 & 0 \\ B_{21}(x) & B_{22}(x) & B_{23}(x) & B_{24}(x) & 0 & 0 \\ B_{31}(x) & B_{32}(x) & B_{33}(x) & B_{34}(x) & 0 & 0 \\ B_{41}(x) & B_{42}(x) & B_{43}(x) & B_{44}(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{55}(x) & D_{56}(x) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{65}(x) & D_{66}(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y(x) \\ \varphi(x) \\ M(x) \\ Q(x) \\ \theta(x) \\ M_k(x) \end{vmatrix}, \qquad (4)$$

або у скороченому запису

$$V(x) = B^*(x) \cdot V(0), \qquad (5)$$

де $V(x)$ – вектор параметрів напружено-деформованого стану стрижня у точці *x*; $V(0)$ – вектор початкових параметров стрижня; B*(x) – матриця, утворена із фундаментальних матриць диференціальних рівняннь (2).

Алгоритм побудови фундаментальних матриць рівнянь (2) розглянемо на прикладі першого рівняння. Для рівняння четвертого порядку ця матриця матиме вигляд [4]

$$B^*(x) = \prod_{k=1}^{m} \left(E + \Delta C(x_k)\right) \times B_0(x_k - 0; x_{k-1}), \qquad (6)$$

де E – одинична матриця 4х4 ; $B_0(x_k - 0, x_{k-1})$ – еволюційний оператор диференціального рівняння $(EIy'')'' = 0$; для стрижня із сталою жорсткістю $B_0(\alpha + h, \alpha) = \begin{pmatrix} 1 & h & \frac{h^2}{2EI} & \frac{h^3}{6EI} \\ 0 & 1 & h & \frac{h^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$h = \frac{l}{n}$; n – кількість ділянок, на які розбивається стрижень при апроксимації коефіцієнтів диференціальних рівнянь;

$$\Delta C(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta a_2(x) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Delta a_2(x_k) \sim -\omega^2 \left(hm_0 + \sum_{i=1}^{m} M_i \delta(x - x_i) \right). \qquad (7)$$

Для системи стрижнів (рисунок), об’єднуючи розв’язки рівняння коливань кожного стрижня в одне матричне рівняння за алгоритмом, описаним у роботі [1], отримуємо систему рівнянь такої самої будови, як і (5). Матриця B* перетвориться у квазідіагональну, а вектори $V(x)$ і $V(0)$ міститимуть параметри деформівного стану всіх стрижнів у довільній і початковій точках

$$B = \begin{vmatrix} B^*_1(x) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B^*_i(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B^*_8(x) \end{vmatrix}; \quad V(x) = \begin{vmatrix} V_1(x) \\ \vdots \\ V_i(x) \\ \vdots \\ V_8(x) \end{vmatrix}; \quad V_0 = \begin{vmatrix} V_{01} \\ \vdots \\ V_{0i} \\ \vdots \\ V_{08} \end{vmatrix}, \qquad (8)$$

де 8 – кількість стрижнів у системі.

Граничні і початкові параметри різних стрижнів системи пов’язані рівняннями рівноваги й сумісності переміщень вузлів. Це дає змогу при граничному значенні змінної $x = l$ перенести граничні параметри стрижнів із вектора V на місце нульових параметрів вектора V_0. При цьому вектор V стає нульовим і виключається із розгляду. У матриці B* відповідні стовпці замінюються нульовими і вводяться елементи, які компенсують перенесення параметрів. Тоді вектор V_0^* міститиме вже невідомі граничні і початкові параметри всіх стрижнів системи, відповідно до методу граничних елементів. Перетворення виконуємо за такою схемою:

$$V(l) = B^*(l) * V_0 \rightarrow B^*(l) * V_0 - V(l) = 0 \rightarrow B_0^*(l) * V_0^* = 0 . \qquad (9)$$

Отже, розв'язування задачі зводиться до розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих початкових і кінцевих параметрів стрижнів (кінематичних і статичних параметрів вузлів).

За умовою існування нетривіального розв'язку однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь отримуємо частотне рівняння:

$$\left| B_0^*(l) \right| = 0 . \qquad (10)$$

Після визначення коренів рівняння (10) можна знайти форми і відносні амплітуди вільних коливань.

Для прикладу за цією методикою визначено частоти вільних коливань для системи, зображеної на рисунку, за умови шарнірного з'єднання поперечних балок до поздовжніх (крутні коливання не враховувалися). Визначник (10) буде утворений із 24 рівнянь. Розв'язок рівняння (10) для наведеної на рисунку системи: перші три частоти

$$\omega_1 = 0.894\sqrt{\frac{EI}{ml^4}}\,; \qquad \omega_2 = 1.599\sqrt{\frac{EI}{ml^4}}\,; \qquad \omega_3 = 3.497\sqrt{\frac{EI}{ml^4}}\,.$$

Перша частота практично збігається із значенням, яке отримують методом скінченних елементів, а старші частоти близькі до цих значень.

Висновок. Отримано нову методику розрахунку на вільні коливання пружних стрижневих систем із дискретно неперервним розподілом параметрів, яка має певні переваги над класичними відомими методами. Ця методика дає змогу при виборі розрахункової схеми враховувати фактичний розподіл мас вздовж стрижнів, зосереджені маси, змінну жорсткість та отримувати нові результати під час дослідження динаміки стрижневих систем.

1. Баженов В.А., Дащенко А.Ф., Коломиец Л.В., Оробей В.Ф. Строительная механика: Специальный курс. Применение метода граничных елементов. – Одесса: Астропринт, 2001. – 240с. 2. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений / Под ред. А.Ф. Смирнова. – М.: Стройиздат, 1984. – 415 с. 3. Новацкий В. Динамика сооружений. – М.: Госстройиздат, 1963. – 376с. 4. Давидчак О.Р., Тацій Р.М., Ушак Т.І. Розв'язок задач динаміки дискретно-неперервних стрижневих систем методом граничних елементів з апроксимацією коєфіцієнтів диференціальних рівнянь // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка", Теорія і практика будівництва. – 2004. – № 495. – С.62–64.