УДК 624.21.004.69

**М.Р. Більський**
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра будівельного виробництва
79013, м. Львів, вул. С. Бандери, 12

# ВИЗНАЧЕННЯ ЧАСТОТ І ФОРМ ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ СТАЛЕВИХ КОНСТРУКЦІЙ, ПОСИЛЕНИХ ПІД НАВАНТАЖЕННЯМ



**Наведено результати дослідження методу визначення динамічних характеристик стрижневих металевих конструкцій та їхнього розрахунку при посиленні.**

**In the article there are the resulted results of research of method of determination of dynamic descriptions of bar metallic constructions and method of their calculation at strengthening.**

**Актуальність проблеми.** В процесі ремонту, реконструкції та посилення конструкцій можуть істотно змінюватись їхні динамічні характеристики. Внаслідок збільшення мас елементів посилюваних конструкцій, зміни статичних схем та регулювання зусиль, попереднього напруження в результаті посилення змінюються частоти і форми їхніх власних коливань. Виявлення законо-мірності таких змін внаслідок регулювання зусиль вимагає проведення додаткових досліджень, що необхідно для отримання даних для практичних розрахунків з метою уникнення при динамічних навантаженнях явищ резонансу.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Посилення металевих конструкцій розглядається в багатьох науково-технічних публікаціях. Найефективнішими методами посилення є зміна конструктивної схеми [1] та регулювання зусиль [2,7]. Методи розрахунку динамічних характеристик сталевих конструкцій, посилених з регулюванням зусиль, в існуючій технічній літературі відсутні. Загальну оцінку існуючих методів дослідження частот і форм власних коливань стрижневих систем наведено в роботі [3], де порівняно їхні переваги та недоліки і запропоновано методику визначення частот власних коливань рам з нерухомими вузлами, за якою можна отримати точніші результати.

**Не вирішена раніше частина проблеми.** Для стрижневих систем посилених з регулюванням в них зусиль, складання розрахункових схем і визначення динамічних параметрів вимагає детальнішого вивчення їх роботи з метою встановлення частот і форм власних коливань сталевих конструкцій з вузлами, що переміщуються, ускладнених в результаті їх посилення. Регулювання зусиль в сталевих конструкціях зменшує їхню деформативність при статичних навантаженнях [7]. Кількісний вплив на динаміку сталевих конструкцій регулюванням зусиль детально не встановлений.

**Мета роботи.** Метою роботи є дослідження закономірності виникнення форм і визначення частот власних коливань стрижневих систем, які посилюються збільшенням перерізів та зміною конструктивної схеми з регулюванням зусиль (попереднім напруженням).

**Виклад основного матеріалу.** Регулюванням зусиль можна впливати на деформативність системи, що дає можливість регулювати частоти і форми її власних коливань. Стержнева система розглядається як набір невагомих пружних елементів, з’єднаних між собою у вузлах, які переміщуються в результаті її коливань. Переміщення *i*-го вузла ($i$ = 1,2,3, ... , $i$) визначається $n_i$ незалежними узагальненими координатами $\vec{x}_i = \left[\vec{x}_i^{\,1}, ..., \vec{x}_i^{\,n_i}\right]^T$. Загальна кількість переміщень (ступенів свободи) N визначається співвідношенням: $N=\sum_{i=1}^{I} n_i$, де $n_i$ – кількість незалежних узагальнених координат, що визначають переміщення $i$-го вузла системи ($i$=1,2,3,…$I$). Вектор узагальнених координат системи $\vec{Z}$ складається з векторів узагальнених переміщень вузлів системи $\vec{Z}=\left[\vec{X}_1^T, \vec{X}_2^T, ..., \vec{X}_I^T\right]^T$, до яких прикладені узагальнені $f_j\left(j=1,2,...,N\right)$ сили, зокрема реактивні сили від регулювання зусиль (попереднього напруження). Переміщення вузлів $Z_j=\sum_{k=1}^{N}\delta_{jk} f_k$,

де $\delta_{jk}$ – матриця податливості посиленої (відрегульованої) системи, елементи якої являють собою зміщення системи вздовж $j$-го ступеня свободи, викликані одиничним навантаженням, що діє вздовж k–го ступеня свободи. Аналогічно розглядаємо непосилену систему. Нехай $\mu_j$ (j =1,2, … , N) – міра інерції системи відносно j-го ступеня свободи ($\mu_j$ >0). Згідно з принципом Д'Аламбера складено рівняння руху

$$Z_j(t)=-\sum_{k=1}^{N}\mu_k\delta_{j_k}\ddot{Z}_k(t). \tag{1}$$

Розглянемо випадок, коли частина узагальнених мас $\mu_j$ дорівнює нулю. Тоді можна понизити порядок системи диференціальних рівнянь (1). Нехай $\mu_{k_q}\neq 0$ і $\mu_{j_p}\neq 0$, а $\mu_{j_l}=0$ і $\mu_{k_r}=0$ (p,q=1,2, … , M ; r,$l$ = 1,2, … , N-M), тоді система (1) розпадається на дві системи диференціальних рівнянь порядку 2M для визначення узагальнених координат $Z_{j_p}$ $(\ p=1,2,...,M\ )$

$$Z_{j_p}(t)=-\sum_{q=1}^{M}\mu_{k_q}\delta_{j_p,k_q}\ddot{Z}_{k_q}(t), \tag{2}$$

та $Z_{j_l}$ ($i$=1,2,…,N-M), відносно яких система інерцією не володіє

$$Z_{j_l}(t)=-\sum_{r=1}^{M}\mu_{k_q}\delta_{j_l,k_r}\ddot{Z}_{k_r}(t). \tag{3}$$

Після введення нових позначень $y_p=Z_{j_p};\delta_{pq}=\delta_{j_p,k_q};m_q=\mu_{k_q}$ (2) набуде вигляду

$$y_p(t)=-\sum_{q=1}^{M}m_q\delta_{pq}\ddot{Y}_q(t), \quad \left(p=1,2,3,...,M\right) \tag{4}$$

Розв'язок системи (4) шукаємо у вигляді суперпозиції гармонічних коливань

$$y_i(t)=\sum_{j=1}^{J}Y_{i,j}\,sin\left(\omega_j t+\varphi_j\right), \tag{5}$$

де $\omega_j$ – кругова частота коливань, $\varphi_j$ – фаза, J – певне ціле позитивне число.

Підставляючи величину $y_i(t)$, згідно з (5), у співвідношення (4), отримаємо J систем лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь $M$ – го порядку відносно амплітуд коливань

$$Y_{ij}=+\sum_{k=1}^{M}m_k\varDelta_{ik}Y_{kj}\omega_j^2 \quad ; \qquad Y_{ij}\left(i=1,2,...,M;\,j=1,2,...,J\right). \tag{6}$$

Якщо визначники цих систем дорівнюють нулю, з (6) випливає рівняння для визначення величин параметра $\lambda_j=\frac{1}{\omega_j^2}$, при яких система (6) має нетривіальний розв'язок

$$\left|A-\lambda_j E\right|=0, \tag{7}$$

де (7) є характеристичним рівнянням матриці $A = D\cdot M$; тут $D$ і $M$ відповідно матриці одиничних переміщень і одиничних мас, $E$ – одинична матриця. У розгорнутому вигляді:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (m_1\delta_{11} - \lambda_j) m_{21}\delta_{12} & \ldots & m_M\delta_{1M} \\ (m_1\delta_{21} - \lambda_j) m_{22}\delta_{22} & \ldots & m_M\delta_{2M} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ m_1\delta_{M1} m_2\delta_{M2} & \ldots & (m_M\delta_{MM} - \lambda_j) \end{vmatrix} = 0 \qquad (7')$$

Після розкриття визначника отримаємо рівняння $M$-го степеня відносно $\lambda j$, а розв’язавши його, отримаємо $M$ значень $\lambda_j$. Кожному значенню $\lambda_j$ відповідатиме свій вектор $Y_j$. Оскільки $\lambda = \frac{1}{\omega^2}$, то розв’язок рівняння (7’) дає можливість отримати спектр з $M$ частот власних коливань. Отже, ми отримали рівняння частот (вікове рівняння). Перша нижча частота спектра є основною.

Значення параметра $\lambda = \frac{1}{\omega^2}$, що задовольняють рівняння (7), є власними числами матриці $A$, максимальним значенням яких відповідають нижчі частоти власних коливань. Оскільки (7) є алгебраїчним рівнянням порядку $M$ відносно параметра $\lambda$, воно має $M$ коренів $\lambda_j$. Розв’язанням $Y_{ij}$ систем (6) отримуємо власні вектори матриці A, що відповідають власним числам $\lambda_j$. Стосовно ступеня визначеності власних векторів, відповідних власному значенню кратності $r$ системи лінійно незалежних власних векторів $\vec{X}_j\,(j = 1,2,\ldots,r)$, що відповідають кратному власному значенню, можна вважати, що вектор $\vec{Z}$, який є лінійною комбінацією векторів $\vec{X}_j$: $\vec{Z} = \sum_{j=1}^{r} c_j \vec{x}_j$, де $c_j$ – довільні постійні, також є власним вектором, що відповідає тому самому власному значенню. Тому власні вектори, що відповідають кратним власним значенням, отримані за допомогою різних методик, взагалі не обов’язково відповідають одне одному, навіть за умови, що вони однаковим чином нормовані. Несиметрична матриця A подібна в розумінні власних значень до симетричної матриці, що гарантує сутність її власних значень. Помножимо матрицю A зліва на діагональну матрицю F, справа на матрицю $F^{-1}$, де

$$F = \begin{bmatrix} \sqrt{m_1} & & & & \\ & \sqrt{m_2} & & & \\ & & \sqrt{m_3} & & \\ & & & \ldots & \\ & & & & \sqrt{m_M} \end{bmatrix}. \qquad (8)$$

Замість матриці A отримуємо матрицю $B$: $B = FAF^{-1} = FDMF^{-1} = FDF$, котра симетрична в розумінні симетрії матриці $D$. Власні числа матриці B збігаються з власними числами матриці $A$, тому що

$$\left|F(A - \lambda E)F^{-1}\right| = |B - \lambda E| = |F| \cdot |A - \lambda E| \cdot \left|F^{-1}\right| = |A - \lambda E|. \qquad (9)$$

Власні вектори $\vec{U}_i$ матриці $B$ пов’язані з власними векторами $\vec{X}_i$ матриці $A$ співвідношенням

$$\vec{X}_i = F^{-1}\vec{U}_i \quad (i = 1,2,\ldots,M),$$

дійсно $F(A - \lambda E)F^{-1}\vec{U} = (B - \lambda E)\vec{U} = 0 = F(A - \lambda E)\vec{X} = (A - \lambda E)\vec{X}$. Враховуючи діагональність матриці $F$, перепишемо співвідношення (10) покомпонентно у вигляді $X_{ij} = \frac{1}{\sqrt{m_i}} U_{ij}\,(i, j = 1,2,\ldots,M)$. Визначення власних чисел і власних векторів симетричних матриць зручно проводити поетапно.

Спочатку за допомогою перетворення Хаусхольдера [5] матриця $B$ замінюється еквівалентною в розумінні власних значень симетричною тридіагональною матрицею, а потім за допомогою $QL$ алгоритму [6] матриця приводиться до діагонального вигляду. Для визначення власних векторів вихідної матриці, власні вектори тридіагональної матриці як стовпці матриці $QL$ перетворення перетворюються за допомогою перетворення Хаусхольдера [5], знайденого на першому етапі обрахунків. Якщо $A=A_1$ – симетрична матриця порядку n, то привести її до тридіагонального вигляду можна за допомогою послідовності ортогональних перетворень $A_{i+1} = P_i A_i P_i \left(i = n-2, n-1, \ldots, 1\right)$.

Приведення складається з n-2 кроків, на $i$-му із яких виходять нулі в $i$-му рядку і $j$-му стовпці, причому зберігаються нулі, отримані на попередніх кроках.

Матрицю $P_i$ $i$-го перетворення можна подати у вигляді

$P_i = \left[\begin{array}{c|c} Q_i & 0 \\ \hline 0 & E \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} E - 2\ \vec{V}_i\ \vec{V}_i^T & 0 \\ \hline 0 & E \end{array}\right]$, де $\vec{V}_i$ – вектор одиничної довжини, що має $i$ компонент.

Відповідно, маємо $A_i = P_i A_{i-1} P_i = \left[\begin{array}{cccc|c} Q_i & B_{i-1} & Q_i & C_i & 0 \\ \hline & C_i^T & & C_{i-1} & \\ & 0 & & & \end{array}\right]$, де $\vec{C}_i = Q_i \vec{b}_{i-1}$. Якщо вибрати $\vec{V}_i$ так, що $\vec{C}_i$ буде нульовим за винятком першої компоненти, то $A_i$ в перших $i+1$ рядках та стовпцях буде тридіагональною. Введемо для зручності вектор $\vec{U}_i$, що визначають так $\vec{U}_i^T = \left[a_{l,1}, a_{l,2}, \ldots, a_{l,l-2}, a_{l,l-1} \pm \delta_i^{\frac{1}{2}}, 0, \ldots, 0\right]$, де $l = n - i + 1 \quad \left(i = 1, 2, \ldots, n-2\right)$, тоді $A_{i+1} = \left(E - \vec{U}_i \vec{U}_i^T / H_i\right) A_i \left(E - \vec{U}_i \vec{U}_i^T / H_i\right)$, при цьому $H_i = \frac{1}{2} \vec{U}_i \vec{U}_i^T$. Введемо позначення $\vec{p}_i = A_i \vec{U}_i / H_i ; k_i = \vec{U}_i^T P_i / 2H_i ; \vec{q}_i = \vec{P}_i - K_i \vec{U}_i$, тоді $A_{i+1} = A_i - \vec{U}_i \vec{q}_i^T - \vec{q}_i \vec{U}_i^T$.

Вектори $\vec{q}_i^T$ і $\vec{p}_i^T$ формуються так $\vec{P}_i^T = \left[P_{i,1}, P_{i,2}, \ldots, P_{i,l}, 0, \ldots, 0\right]$, $\vec{q}_i^T = \left[P_{i,1} - K_i U_{i,1}, \ldots, P_{i,l-1} - K_i U_{i,l-1}, P_{i,l}, 0, \ldots, 0\right]$. Якщо $\vec{Z}$ – власний вектор тридіагональної матриці $A_{n-1}$, то $P_1 P_2 \ldots P_{n-1} \vec{Z}$ – власний вектор матриці $A_1$. Для приведення тридіагогнальної матриці $A_1$ до трикутної форми, діагональні елементи котрої являють собою власні значення матриці $A_1$, використовується наступне перетворення $Q_s ( A_s K_s E ) = L_s ; A_{s+1} = L_s Q_s^T$. Якщо $A_s$ – тридіагональна матриця, то $Q_s$ визначається добутком $Q_s = P_1^{(s)} P_2^{(s)} \ldots P_{n-1}^{(s)}$, де матриці $P_i^{(s)}$ вираховуються в такому порядку : $P_{n-1}^{(s)}, \ldots, P_1^{(s)}$. Матриця $P_i^{(s)}$ відповідає оберненою в площині ($i$, $i$+1).

$$P_i^{(s)} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & \ldots & & & & & \\ & & & C_i & -S_i & & & \\ & & & S_i & C_i & & & \\ & & & & & \ldots & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix},$$

і опускаючи верхній індекс, отримаємо

$$P_1 P_2 \ldots P_{n-1} \left(A_s - K_s E\right) = L_s ; A_{s+1} = L_s P_{n-1}^T \ldots P_1^T . \tag{11}$$

При цьому матриця $L_s$ має вигляд

$$L_s = \begin{bmatrix} r_1 & & & & & & & & \\ w_2 & r_2 & & & & & & & \\ z_3 & w_3 & r_3 & & & & & & \\ & z_4 & w_4 & \dots & & & & & \\ & & z_5 & \dots & \dots & & & & \\ & & & \dots & \dots & \dots & & & \\ & & & & \dots & \dots & r_{n-2} & & \\ & & & & & \dots & w_{n-1} & r_{n-1} & \\ & & & & & & z_n & w_n & r_n \end{bmatrix}.$$

подальше перемноження на добуток $P_{n-1}^T ... P_1^T$ зліва визначить симетричну матрицю $A_{s+1}$ і оскільки елементи другої піддіагоналі матриці $L_s$ в цьому перетворень участі не беруть, то при формуванні матриці $L_s$ вираховувати їх не потрібно.

Визначення матриць $L_s$ і $A_{s+1}$ можна виконувати одночасно. Кожна ітерація містить такі операції. Позначимо діагональні елементи тридіагональної матриці через $d^{(s)}(i{=}1{,}2{\dots},n)$. Тоді, відкинувши верхній індекс у всіх змінних, крім $d$ і $e$, отримаємо $P_n = d_n^{(s)} - k_s, C_n = 1, S_n = 0;$ $r_{n+1} = \left( P_{i+1}^2 + \left(e_i^{(s)}\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}};$

$g_{i+1} = C_{i+1} \cdot e^{(s)};$ $h_{i+1} = C_{i+1} P_{i+1};$ $C_i = P_{i+1} / r_{i+1};$ $S_i = e_i^{(s)} / r_{i+1};$ $P_i = C_i \left(d_i^{(s)} - k_s\right) - S_i g_{i+1};$ $d_{i+1}^{(s+1)} = h_{i+1} + S_i \left(e_i g_{i+1} + S_i \left(d_i^{(s)} + k_s\right)\right);$ $e_1^{(s+1)} = S_1 P_1, d_1^{(s+1)} = C_1 P_1.$

Розглянемо вибір величини зсуву $k_s$ на кожному кроці алгоритму. Покладемо, що на певному кроці оброблювана підматриця починається з рядка з номером $r$. Тоді $k_s$ вибирають таким, що дорівнює тому власному значенню матриці $\begin{bmatrix} d_r^{(s)} & e_r^{(s)} \\ e_r^{(s)} & d_{r+1}^{(s)} \end{bmatrix}$, яке ближче до $d_r^{(s)}$. Перед початком ітераційного процесу для визначення $r$-го власного значення вираховується величина $h_r = \varepsilon\left(\left|d_r^{(s)}\right| + \left|e_r^{(s)}\right|\right)$, де $d_r^{(s)}$ і $e_r^{(s)}$ – поточні значення елементів матриці, а $\varepsilon$ – точність обчислення, а всі елементи $e_i^{(s)}$, модуль яких менший ніж величина $b_r = \max\limits_{i=1}^{r} h_i$, можна вважати досить малими.

Власні вектори тридіагональної матриці є стовпчиками результуючої матриці $QL$ перетворення $Q = \prod\limits_{i,s} P_i^{(s)}$. Ортогональність матриці Q за відсутності помилок заокруглення гарантує ортогональність власних векторів, що відповідають як різним, так і кратним власним значенням.

Нехай $\vec{z}$ – власний вектор тридіагональної матриці, тоді власний вектор висхідної матриці $\vec{x}$ можна вирахувати за формулою $\vec{X} = P_1, P_2 ... P_{n-1} \vec{Z}$. Оскільки матриці $P_1, P_2 ..., P_{n-1}$ ортогональні, власні вектори висхідної матриці теж ортогональні з точністю, що визначається помилками заокруглення.

Алгоритм розрахунку складається з шести пунктів. 1. Визначення елементів $\delta_{ij}$ матриці $D$. Для цього необхідно визначити переміщення вузлів системи, в яких розміщені зосереджені маси від одиничних статичних впливів, прикладених в напрямку коливань зосереджених мас. 2. Формування матриці *B*. 3. Визначення власних чисел і векторів матриці *B*. 4. Визначення частот і форм коливань дискретної системи за формулами: $\omega_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$; $X_{ij} = \frac{1}{\sqrt{m_i}} U_{ij}$; $(i, j = 1,2,...,M)$. 5. Оцінка точності вираховування власних чисел і векторів матриці *B* за допомогою нерівності: $\left\| B\vec{U}_i - \lambda_i \vec{U}_i \right\| < 10^{-3} \left\| B\vec{U}_i \right\|$, де $\left\| \vec{b} \right\| = \left( \sum^{M} b_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ $(i = 1,2,...,M)$. 6. Перевірка ортогональності форм коливань за допомогою нерівностей:

$$\left\| \vec{X}_i^T M \vec{X}_j \right\| < 10^{-3} \left\| \vec{X}_i^T M \vec{X}_j \right\| \quad (i - 1,2,...,M;\ j = i+1, i+2,...,M). \tag{12}$$

**Висновки**

1. Викладений метод визначення частот і форм власних коливань стрижневих систем можна застосовувати для розрахунку сталевих конструкцій з регулюванням їх напружено-деформованого стану. 2. Виходячи з того, що при розрахунку сталевих стрижневих конструкцій обмежуються, як правило, декількома мінімальними частотами коливань, викладена в роботі методика є прийнятною. Випадків невиконання нерівностей (12) не виявлено.

*1.Клименко Ф.Є., Барабаш В.М., Стороженко Л.І. Металеві конструкції. – Львів: Світ, 2002. – 213с. 2. Бельский М.Р. Усиление сжатых стержневих конструкцій под експлуатационной нагрузкой. –М.: Стройиздат, 1984. – 154с. 3. Давидчак О.Р. Розрахунок рам як дискретно-перервної стрижневої системи на вільні коливання // Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка”. – 2004. – №520. – С. 53–56. 4. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1981. – 476с. 5. Уилкинсон Дж.Х. Алгебраическая проблема собственных значений. – М.: Наука, 1980. – 296с. 6. Уилкинсон Дж.Х, Райнш Д. Справочник алгоритмов. Линейная алгебра. – М.: Машиностроение, 1976. – 386с. 7. Гоголь М.В., Пелешко І.Д., Більський М.Р. Регулювання зусиль у стрижневих металевих конструкціях / Матеріали V Міжнарод. наук.-техн. конф. “Будівельні металеві конструкції”. БМК 2006. 12-22.09-2006 р. – К.: УкрНДІпроектстальконструкція, 2006. – С. 93–95.*