**УДК 534.111**

**П.М. Гащук, І.І. Назар**
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра експлуатації та ремонту автомобільної техніки

# НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ ГНУЧКОГО РОБОЧОГО ЕЛЕМЕНТА ПРИВОДУ ПІД ДІЄЮ ІМПУЛЬСНИХ СИЛ



**Досліджено вплив імпульсного збурення на нелінійні коливання гнучких робочих елементів приводу. Останні моделюються як однорідне одновимірне середовище, що рухається з постійною швидкістю. Отримано диференціальне рівняння коливань гнучкого робочого елемента приводу та математичні співвідношення, які визначають закони зміни амплітуди і частоти поперечних (поздовжніх) коливань гнучкого елемента приводу залежно від природи імпульсних сил і нелінійно-пружних його характеристик.**

**Influence of impulsive indignation is explored on the nonlinear vibrations of flexible working element of engine. The last are designed as a homogeneous oncemeasurable environment which moves with permanent speed. It is got differential equalization of vibrations of flexible working element of engine, mathematical correlations which determine the laws of change of amplitude and frequency of transversal (longitudinal) vibrations of flexible element of engine depending on nature of impulsive forces and his nonlinear-resilient descriptions.**

**Постановка проблеми.** В умовах експлуатації систем із гнучкими елементами приводу внаслідок дії на систему (а подекуди на сам гнучкий робочий елемент приводу) різної природи сил (періодичних, імпульсних, зокрема і випадкових), в останній виникають коливання, які здебільшого порушують нормальне функціонування системи. У зв’язку із вказаним, дослідження динамічних процесів у системах приводу із гнучкими робочими елементами є актуальним завданням.

**Аналіз відомих досліджень і публікацій** показує, що такі завдання розглядали за найпростіших математичних моделей [1, 2], в яких такі важливі питання, як вплив кінематичних параметрів руху, фізико-механічних характеристик рухомого елемента, нелінійно-пружних та імпульсних сил не вивчали.

**Постановка задачі.** У роботі гнучкий елемент приводу моделюється як середовище зі сталим поперечним перерізом і рівномірно розподіленою вздовж довжини масою. Гнучкий елемент рухається зі сталою швидкістю. З врахуванням вказаного вище, його можна моделювати пружною ниткою, а диференціальне рівняння коливань набуває вигляду

$$u_{tt}+2vu_{xt}-\left(\alpha^2-v^2\right)u_{xx}=\mu\left(F\left(u,u_x,u_t\right)+\sum_{j=1}^{n}F_j\left(u,u_x,u_t\right)\sum_{i=1}^{m}\delta\left(t-\left(t_i+j\tau\right)\right)\right), \tag{1}$$

де $u(x,t)$ – поздовжнє (поперечне) переміщення перерізу гнучкого елемента приводу з координатою $x$ в довільний момент часу $t$; $v$ – швидкість його руху; $\alpha^2=\dfrac{T}{m}$ – фізико-механічний параметр ($T$ – натяг, $m$ – погонна маса); $F(u,u_x,u_t)$ – функція, яка характеризує відхилення пружних властивостей гнучкого елемента від лінійного закону, дисипативні сили і іншої природи сили; $\mu$ – малий параметр, який вказує на малу величину вказаних сил; $\delta$ – дельта-функція Дірака; $t_i+j\tau$ – момент часу дії імпульсних сил ($\tau=\dfrac{2\pi}{\upsilon}$); $F_j(u,u_x,u_t)$ – функція, яка характеризує інтенсивність імпульсних сил.

Дослідження диференціальних рівнянь вказаного типу пов’язані із значними математичними труднощами, оскільки навіть у разі лінійних аналогів таких систем не можна застосувати для побудови розв’язків відомі класичні методи (Фур’є чи Д’Аламбера).

**Методика досліджень** побудована на використанні методу Бубнова-Гальоркіна [3], Ван-дер-Поля і властивостей $\delta$-функції Дірака. Вважатимемо, що крайові умови для рівняння (1) мають вигляд

$$u(x,t)\big|_{x=0} = u(x,t)\big|_{x=l} = 0 . \tag{2}$$

Розв’язок незбуреного $(\mu = 0)$ рівняння (1), відповідно до методу Бубнова-Гальоркіна, подамо у вигляді

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{s} X_k(x) T_k(t) , \tag{3}$$

де $X_k(x)$ – функції, які задовольняють крайові умови, що випливають із (2), тобто $X_k(0) = X_k(l) = 0$. Легко переконатись, що такими функціями буде система функцій $X_k(x) = \sin\frac{k\pi}{l}x$. Тоді, враховуючи повноту і ортонормованість системи функцій $X_k(x)$, із (1) після нескладних перетворень, для знаходження невідомих функцій $T_k(t)$, отримуємо звичайні диференціальні рівняння

$$\ddot{T}_k(t) + \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \left(\alpha^2 - \nu^2\right) T_k(t) = \mu\left( \bar{F}_k\left(T_k, \dot{T}_k\right) + \sum_{j=1}^{n} \bar{F}_{jk}\left(T_k, \dot{T}_k\right) \cdot \sum_{i=1}^{m} \delta\left(t - \left(t_i + j\tau\right)\right)\right), \tag{4}$$

де

$$\bar{F}_k\left(T_k, \dot{T}_k\right) = \frac{1}{p}\int_0^l F\left(u, u_x, u_t\right) X_k(x)\,dx , \quad \bar{F}_{jk}\left(T_k, \dot{T}_k\right) = \frac{1}{p}\int_0^l F_j\left(u, u_x, u_t\right) X_k(x)\,dx$$

$$p = \int_0^l sin^2 \frac{k\pi}{l} x dx = \frac{l}{2} .$$

Нижче розглянемо тільки нерезонансний випадок: частота власних коливань незбуреного рівняння $(\omega)$ не збігається із частотою імпульсного збурення, тобто $\frac{k\pi}{l}\sqrt{\alpha^2 - \nu^2} \neq \frac{q}{r}\upsilon$ ($r, q$ – взаємно прості числа).

Відповідно до методу Ван-дер-Поля [4], заміною змінних

$$T_k(t) = a_k\, cos\,\psi_k , \dot{T}_k(t) = -a_k \omega_k\, sin\,\psi_k , \omega_k = \frac{k\pi}{l}\sqrt{\left(\alpha^2 - \nu^2\right)}, \psi_k = \omega_k t + \theta_k , \tag{5}$$

рівняння зводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь щодо нових змінних $a_k$ і $\psi_k$ вигляду

$$\dot{a}_k = -sin\,\psi_k \frac{\mu}{\omega_k}\left( \bar{F}_k\left(a_k\, cos\,\psi_k - a\omega_k\, sin\,\psi_k\right) + \sum_{j=1}^{n} \bar{F}_{jk}\left(a_k\, cos\,\psi_k - a\omega_k\, sin\,\psi_k\right) \sum \delta\left(t - \left(t_i + j\tau\right)\right)\right),$$

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_k &= \omega_k - cos\,\psi_k \frac{\mu}{a\omega_k} \times \\ &\times \left( \bar{F}_k\left(a_k\, cos\,\psi_k - a\omega_k\, sin\,\psi_k\right) + \sum_{j=1}^{n} \bar{F}_{jk}\left(a_k\, cos\,\psi_k - a\omega_k\, sin\,\psi_k\right) \sum \delta\left(t - \left(t_i + j\tau\right)\right)\right) . \end{aligned} \tag{6}$$

Надалі вважатимемо, що $F(u,u_x,u_t)$ і $F_j(u,u_x,u_t)$ – многочлени, тоді без особливих труднощів можна зобразити функції $\overline{F}_k(a_k \cos\psi_k - a\omega_k \sin\psi_k)$ і $\overline{F}_{jk}(a_k \cos\psi_k - a\omega_k \sin\psi_k)$ у вигляді рядів Фур'є

$$
\begin{aligned}
&sin\,\psi_k \overline{F}_k(u,u_x,u_t) = F_{k0}^{s}(a) + \sum_n \left( F_{kn}^{ss}(a) sin\, n\psi_k + F_{kn}^{sc}(a) cos\, n\psi_k \right), \\
&sin\,\psi_k \overline{F}_{jk}(u,u_x,u_t) = F_{jk0}^{s}(a) + \sum_n \left( F_{jkn}^{ss}(a) sin\, n\psi_k + F_{jkn}^{sc}(a) cos\, n\psi_k \right), \\
&cos\,\psi_k \overline{F}_k(u,u_x,u_t) = F_{k0}^{c}(a) + \sum_n \left( F_{kn}^{cs}(a) sin\, n\psi_k + F_{kn}^{cc}(a) cos\, n\psi_k \right), \\
&cos\,\psi_k \overline{F}_{jk}(u,u_x,u_t) = F_{jk0}^{c}(a) + \sum_n \left( F_{jkn}^{cs}(a) sin\, n\psi_k + F_{jkn}^{cc}(a) cos\, n\psi_k \right),
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Якщо використати властивості $\delta$ -функції Дірака

$$
f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t), \qquad \sum_j \delta(t - j\tau) = \frac{\upsilon}{\tau}\left[\frac{1}{2} + \sum_{j=1} cos\, j\upsilon t\right];
$$

$$
\int_{-\infty}^{t} \delta(t)\,dt = \begin{cases} 1, при \quad t > 0, \\ 0, при \quad t < 0, \end{cases}
$$

то система диференціальних рівнянь (6) після усереднення [5] набуває вигляду

$$
\begin{aligned}
&\frac{da_k}{dt} = -\frac{\mu}{\omega_k}\left\{ F_{k0}^{s}(a) + \frac{\upsilon}{2\pi}\sum_{j=1} F_{jk0}^{s}(0) \right\}, \\
&\frac{d\psi_k}{dt} = \omega_k - \frac{\mu}{a\omega_k}\left\{ F_{k0}^{c}(a) + \sum_{j=1} F_{jk0}^{c} \right\}.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Нехай розв'язком диференціальних рівнянь (8) є функції $a_k = a_k(t)$ і $\psi_k = \psi_k(t)$, тоді можна знайти і перше "покращене" наближення параметрів $a_k$ і $\psi_k$:

$$
\begin{aligned}
a_{k.покр.} = a_k - \frac{\mu}{\omega_k}\Bigg\{ &\frac{\upsilon}{\pi}\sum_{j=1} F_{jk0}^{s}(a)\sigma(t,t_i) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}\sum_{n=1}\frac{-F_{jkn}^{ss}(a) cos(n\psi_k) + F_{jkn}^{sc}(a) sin(n\psi_k)}{n\omega_k} + \\
&+\frac{\upsilon}{2\pi}\sum_j\sum_n\sum_i\Bigg( \frac{F_{jkn}^{ss}(a)}{(n\omega)^2 - (k\upsilon)^2}\left(-2\omega_{kn} cos(n\psi_k) cos\, k\upsilon(t-t_i) - 2k\upsilon\, sin(n\psi_k) sin\, k\upsilon(t-t_i)\right) + \\
&+\frac{F_{jkn}^{ss}(a)}{(n\omega)^2 - (k\upsilon)^2}\left(-2n\omega_k\, sin(n\psi_k) cos\, k\upsilon(t-t_i) - 2k\upsilon\, cos(n\psi_k) sin\, k\upsilon(t-t_i)\right)\Bigg)\Bigg\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\psi_{k.покр.} = \omega_k t - \frac{\mu}{a\omega_k}\Bigg\{ &\frac{\upsilon}{\pi}\sum_{j=1} F_{jk0}^{c}(a)\sigma(t,t_i) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}\sum_{n=1}\frac{-F_{jkn}^{cc}(a) sin(n\psi_k) + F_{jkn}^{cs}(a) cos(n\psi_k)}{n\omega_k} + \\
&+\frac{\upsilon}{2\pi}\sum_j\sum_n\sum_i\Bigg( \frac{F_{jkn}^{cs}(a)}{(n\omega)^2 - (k\upsilon)^2}\left(-2\omega_{kn} cos(n\psi_k) cos\, k\upsilon(t-t_i) - 2k\upsilon\, sin(n\psi_k) sin\, k\upsilon(t-t_i)\right) +
\end{aligned}
$$

$$+\frac{F_{jkn}^{cs}(a)}{(n\omega)^2-(k\upsilon)^2}\left(-2nk\omega_k\cos(n\psi_k)\cos k\upsilon(t-t_i)-2k\upsilon\sin(n\psi_k)\sin k\upsilon(t-t_i)\right)\Bigg\}\Bigg\}, \tag{9}$$

де $\sigma(t,t_i)$ – сума ряду $\sum_k \frac{\sin k\upsilon(t-t_i)}{k}$

Як приклад, розглянемо поперечні коливання гнучкого елемента приводу за умови, що малі сили тертя і опору пропорційні кубові швидкості, а імпульсні сили пропорційні відхиленню від рівноважного положення, тоді

$$\mu\left(F(u,u_x,u_t)+\sum_{j=1}^{n}F_j(u,u_x,u_t)\cdot\sum_{i=1}^{m}\delta\big(t-(t_i+j\tau)\big)\right)=\mu\left(\alpha_1 u_t^3+\alpha_2 u\sum_{i=1}^{2}\sum\delta(t_i-2\tau)\right), \tag{10}$$

де $\alpha_1$ і $\alpha_2$ – сталі.

Перші наближення одночастотних коливань гнучкого елемента за крайових умов (2) у режимі, близькому до $k$-ї форми "динамічної рівноваги" незбурених коливань, можна записати у вигляді

$$u_k(x,t)=a_k(t)\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)\cos\big(\omega_k t+\varphi_k(t)\big), \tag{11}$$

де $a_k(t)$ і $\varphi_k(t)$ визначаються системою звичайних диференціальних рівнянь

$$\dot a_k=-\frac{\mu}{p}\frac{9l}{32}\alpha_1 a_k^3, \qquad \dot\varphi_k(t)=0\,. \tag{12}$$

Зінтегрувавши рівняння (12), отримаємо

$$a_k=\sqrt{\frac{a_0^2}{1+\frac{9l}{32p_k}\alpha_1 a_0^2 t}}, \quad \varphi_k=\varphi_{k0}, \tag{13}$$

$a_0$ і $\varphi_{k0}$ – сталі інтегрування.

Перше покращене наближення, яке враховує дію імпульсних сил, описується залежністю

$$u_{knnoк}(x,t)=a_{knnoк}(t)\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)\cos\big(\omega_k t+\varphi_{knnoк}(t)\big), \tag{14}$$

де

$$\begin{aligned}
a_{knoкp}&=a_k-\frac{3\mu\alpha_1 l}{64p\omega_k}a^3\left(\frac{1}{4}\sin 4\psi_k-2\sin\psi_k\right)+\\
&+\frac{\mu\alpha_2 a}{16\pi\omega_k^2\upsilon}\left(\upsilon^2-8\omega_k^2\sum_{i=1}^{2}\sigma_4(t,t_i)\right)\cos 2\psi_k+\frac{\mu a}{4\omega_k\pi}\sum_{i=1}^{2}\sigma_2(t,t_i)\sin 2\psi_k,\\
\varphi_{knoкp}&=\varphi_{k0}+\frac{\mu\alpha_2}{\pi\omega_k}\sum_{i=1}^{2}\sigma_2(t,t_i)\cos 2\psi_k-\frac{\mu\alpha_2}{4\pi\omega_k}\sum_{i=1}^{2}\sigma_1(t,t_i)-\\
&-\frac{\mu\alpha_2}{16\pi\omega_k^2\upsilon}\left(\upsilon^2+8\omega_k^2\sum_{i=1}^{2}\sigma_4(t,t_i)\right)\sin 2\psi_k-\frac{\mu\alpha_1 a^2}{32\omega_k p_k}\cos 4\omega_k\frac{3}{8}l,
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\sigma_1(t,t_i)=\frac{\pi-\upsilon(t-t_i)}{2} \quad при \quad 0<t-t_i<T\,,$$

а для інших проміжків зміни $t$ – продовження за законом періодичності;

$$\sigma_2(t,t_i)=\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2\sin T\omega_k}\sin\left(2\omega_k(t-t_i)-\omega_k T\right), & при \quad -\dfrac{T}{2}\le t-t_i<0,\\ 0, & при \quad t-t_i=0,\\ \dfrac{\pi}{2\sin T\omega_k}\sin\left(2\omega_k(t-t_i)-\omega_k T\right), & при \quad 0<t-t_i\le\dfrac{T}{2}, \end{cases}$$

$$\sigma_4(t,t_i)=\begin{cases} -\dfrac{\pi\upsilon}{4\omega_k\sin T\omega_k}\cos\left(2\omega_k(t-t_i)-\omega_k T\right)+\dfrac{\upsilon^2}{8\omega_k^2}, & при \quad -\dfrac{T}{2}\le t-t_i<0,\\ \dfrac{\pi\upsilon}{4\omega_k\sin T\omega_k}\cos\left(2\omega_k(t-t_i)-\omega_k T\right)-\dfrac{\upsilon^2}{8\omega_k^2}, & при \quad 0<t-t_i\le\dfrac{T}{2}. \end{cases}$$

**Висновки.** Аналіз отриманих результатів показує:

1. Поздовжня швидкість гнучкого робочого елемента приводу призводить до спадання власної частоти його коливань. За швидкості руху гнучкого робочого елемента приводу $v=\sqrt{\dfrac{T}{m}}$ відбувається зрив коливань у лінійній розрахунковій моделі приводу.
2. Нелінійні сили гнучкого робочого елемента приводу спричиняють зміну в часі як амплітуди, так і частоти його коливань, зокрема, нелінійна відновлювальна сила впливає лише на зміну частоти коливань, а нелінійне тертя – на зміну амплітуди.
3. Імпульсні сили, взагалі кажучи, змінюють амплітуду і фазу коливань.

*1. Weidenhammer F. Der eingespannte, axial pulsierend belastete Stab als Stabilitatsproblem ZAMM. – 1950. – 30. – S. 235–236. 2. Кочин Н.Е. О крутильных колебаниях коленчатых валов // Прикл. мат. мех. – 1934. – 2,1. – С. 1–28. 3. Галеркин Б.Г. Стержни и пластинки // Вестн. инженеров техников. – 1915. – № 19. – С. 23–32. 4. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методи в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 501 с. 5. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, и И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.*