Висновки. Запропонований алгоритм та технологія пошуку кластерів в базах даних є корисним для моделювання бізнес-процесів, пов'язаних з прогнозуванням витрат або прибутку. Економічний ефект полягає в автоматизації рутинних робіт з перебору великої кількості варіантів задач, високій швидкості та точності пошуку цінових кластерів.

1. Федорчук Є. Н., Федорчук А. І., Шайда О. Є. Моделювання дискретних задач оптимізації для пошукових критеріїв у базах даних // Матеріали І міжнародної наук.-практ. конференції " Наукова індустрія європейського континенту. – 2006. 1–13 грудня 2006 р. Економічні науки. Т.2. – Дніпропетровськ: Наука і освіта, 2006. – С.18–20. 2. Ye. Fedorchuk, Dm. Smetana. Modelling of discrete problems of optimization for search criteria in databases. Proceedings of the international conference on computer science and information technologies. September 27th-29th, Lviv, Ukraine/CSIT'2007. – P.165–166.

УДК 681.14

Ф. Гече, В. Коцовський, С. Ковальов
Ужгородський національний університет

ПРО ЗБІЖНІСТЬ СПЕКТРАЛЬНОГО АЛГОРИТМУ НАВЧАННЯ НЕЙРОННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Розглядаються узагальнені нейронні елементи відносно системи характерів, наводиться алгоритм навчання цих елементів та доводиться його збіжність.

Generalized neural devices over the character set have been studied in the paper. Learning algorithm has been given and its convergence has been proved in the paper.

Вступ. Нейронні елементи (НЕ) використовуються при побудові нейромереж, які є ефективним механізмом для розв'язування широкого кола задач класифікації об'єктів, розпізнавання образів, стиску інформації, прогнозування поведінки динамічних систем, наближення й екстраполяції функцій [1]. У зв'язку з цим великого значення набуває вивчення узагальнених нейронних елементів, за допомогою яких можна реалізувати дискретні функції більш загального вигляду, ніж звичайні нейрофункції, та розроблення алгоритмів навчання таких нейронних елементів.

Робота є продовженням досліджень класу нейрофункцій відносно системи характерів, розпочатих у роботі [2]. Нами розглянуто задачу розроблення методу навчання узагальнених НЕ відносно системи характерів. В роботі наводиться алгоритм обчислення вагових коефіцієнтів НЕ з використанням спектральних коефіцієнтів бульових функцій, який є одним з можливих розв'язків поставленої задачі, та строго доводиться його збіжність при навчанні *X*-нейрофункцій.

Основні означення. Нехай $H_2 = \{-1,1\}$, $G_n = H_2 \times \ldots \times H_2$ – *n*-а декартова степінь множини H_2. Дискретні функції вигляду $f : G_n \to H_2$ називатимемо бульовими функціями в алфавіті $\{-1,1\}$. Визначимо відображення $\chi_j : G_n \to H_2$ так $\chi_j(a) = a_1^{j_1} \cdot a_2^{j_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{j_n}$, де $a = (a_1, \ldots, a_n) \in G_n$, $j = j_1 2^{n-1} + j_2 2^{n-2} + \ldots + j_n$ $\left(j_i \in \{0,1\},\ i = \overline{1,n}\right)$. Тобто $\chi_j(a) = a_{l_1} \cdot \ldots \cdot a_{l_r}$, за умови, що $j = 2^{n-l_1} + 2^{n-l_2} + \ldots + 2^{n-l_r}$, $1 \le l_1 < l_2 < \ldots < l_r \le n,\ r \le n$. Відповідно до [3] відображення χ_j, $j = 0,1,\ldots,2^n - 1$ називатимемо характерами групи G_n над полем *R*. На множині $R \setminus \{0\}$ визначимо знакову функцію Rsign так:

$$\mathrm{Rsign}\, x = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x > 0, \\ -1, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

Нехай $X = \{\chi_{i_1}, \ldots, \chi_{i_m}\}$ – деяка система характерів, $w = (w_1, \ldots, w_m) \in R^m$. Якщо для бульової функції $f : G_n \to H_2$ виконується умова

$$\text{для всіх } a = (a_1, \ldots, a_n) \in G_n \quad f(a) = \mathrm{Rsign} \sum_{j=1}^{n} w_j \chi_{i_j}(a), \tag{1}$$

то вважатимемо, що відносно системи характерів *X* бульова функція *f* реалізується на НЕ з ваговим вектором *w*. Якщо для бульової функції *f* можна вказати принаймні один такий ваговий вектор *w*, для якого виконується умова (1), то функцію *f* називатимемо *X*-нейрофункцією. При цьому для вагового вектора *w* має виконуватися умова для всіх $a \in G_n$ $(w, \chi(a)) \ne 0$, де $(w, \chi(a)) = w_1 \chi_{i_1}(a) + \ldots + w_m \chi_{i_m}(a)$ – скалярний добуток векторів *w* і $\chi(a) = (\chi_1(a), \ldots, \chi_m(a))$. Такі вагові вектори називатимемо *X*-допустимими. Зауважимо, що поняття *X*-нейрофункції є узагальненням поняття порогової бульової функції. Справді, якщо покласти $X = \{\chi_0, \chi_1, \chi_2, \chi_4, \ldots, \chi_{2^{n-1}}\}$, то отримуємо клас “звичайних” порогових функцій. Позначимо через $W_X(f)$ множину вагових векторів всіх НЕ, на яких реалізується *X*-нейрофункція *f*.

Під процесом навчання НЕ для бульової *X*-нейрофункції *f* розумітимемо процес побудови скінченної послідовності векторів

$$w^0, w^1, \ldots, w^t, \tag{2}$$

такої, що функція *f* реалізується на НЕ з ваговим вектором w^t. У роботі розглядається та обґрунтовується метод побудови послідовності (2), в якому використовуються спектральні коефіцієнти функції *f*.

Основні результати. Для бульової функції $f : G_n \to H_2$ відносно системи характерів *X* визначимо характеристичний вектор $s_X(f) = (s_1, \ldots s_m)$ так: $s_j = \sum_{a \in G_n} \chi_{i_j}(a) f(a)$, $j = \overline{1,m}$.

Компоненти вектора s_f відрізняються від відповідних спектральних коефіцієнтів функції *f* [4] лише на сталий множник 2^n. Припустімо, що функція *f* є *X*-нейрофункцією. Нехай $w \in W_X(f) \subset R^m$ – довільний ваговий вектор НЕ, який реалізує функцію *f*. Вважаємо, що перші *k*+1 членів $w^0, w^1, \ldots, w^k$ послідовності (2) вже відомі і нехай w^k – *m*-вимірний *X*-допустимий дійсний вектор. Якщо функція *f* реалізується на НЕ з ваговим вектором w^k, то процес навчання вважаємо завершеним. Припустімо, що *f* не реалізується на НЕ з ваговим вектором w^k. Опишемо алгоритм, за яким можна побудувати такий вектор w^{k+1}, для якого справджується нерівність

$$\left\| w^{k+1} - w \right\| < \left\| w^k - w \right\|, \tag{3}$$

(де $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ – звичайна евклідова норма в просторі R^m). Нехай $z^k = w^{k+1} - w^k$ – вектор приросту. Оскільки умова (3) рівносильна умові $\left\| w^{k+1} - w \right\|^2 - \left\| w^k - w \right\|^2 < 0$, то для виконання умови (3) достатньо вимагати виконання умови

$$2\left(z^k, w-w^k\right)-\left\|z^k\right\|^2 > 0. \tag{4}$$

Переходимо до визначення вектора z^k. Нехай $f^k\left(x_1,\dots x_n\right)$ – функція, яка відносно системи характерів X реалізується на НЕ з ваговим вектором w^k. Із зроблених припущень випливає, що $f^k \neq f$ і $s_X\left(f^k\right) \neq s_X\left(f\right)$. Вектор приросту z^k шукатимемо у вигляді

$$z^k = \alpha_k\left(s_X\left(f\right)-s_X\left(f^k\right)\right), \tag{5}$$

де α_k – деяка додатна скалярна величина. Підставимо у (4) значення z^k з (5). Отримаємо

$$2\alpha_k\left(w-w^k, s_X\left(f\right)-s_X\left(f^k\right)\right)-\alpha_k^2\left\|s_X\left(f\right)-s_X\left(f^k\right)\right\|^2 > 0. \tag{6}$$

Відомо [2], що якщо $f^k \neq f$, то

$$\left(w, s_X\left(f\right)\right)-\left(w, s_X\left(f^k\right)\right) > 0 \text{ і } \left(w^k, s_X\left(f\right)\right)-\left(w^k, s_X\left(f^k\right)\right) < 0. \tag{7}$$

Тому перший доданок у рівності (6) є строго додатним. Ліва частина (6) є квадратним тричленом відносно α_k, який набуває найбільшого значення при $\alpha_k = \dfrac{\left(w-w^k, s_X\left(f\right)-s_X\left(f^k\right)\right)}{\left\|s_X\left(f\right)-s_X\left(f^k\right)\right\|^2}$ і це значення є додатним. Але останнє співвідношення не може бути застосоване для знаходження α_k, оскільки воно містить невідому величину *w*. Покажемо, що нерівність (6) виконується, якщо як α_k вибрати довільне число вигляду $t_k\alpha_k^0$, де

$$\alpha_k^0 = \frac{\left(w^k, s_X\left(f^k\right)-s_X\left(f\right)\right)}{\left\|s_X\left(f\right)-s_X\left(f^k\right)\right\|^2},$$

а величина t_k задовольняє умову

$$0 < t_k < 2\left(1+\frac{\left(w, s_X\left(f\right)-s_X\left(f^k\right)\right)}{\left(w^k, s_X\left(f^k\right)-s_X\left(f\right)\right)}\right). \tag{8}$$

Число t_k надалі називатимемо нормуючим множником приросту.

З (7) випливає, що $t_k\alpha_k^0 > 0$. Після підстановки у нерівність (6) замість α_k величини $t_k\alpha_k^0$ і елементарних перетворень отримуємо таку нерівність

$$\frac{\left(2t_k-t_k^2\right)\left(w^k, s_X\left(f^k\right)-s_X\left(f\right)\right)^2+2t_k\left(w, s_X\left(f\right)-s_X\left(f^k\right)\right)\cdot\left(w^k, s_X\left(f^k\right)-s_X\left(f\right)\right)}{\left\|s_X\left(f\right)-s_X\left(f^k\right)\right\|^2} > 0,$$

яку можна розглядати як квадратну нерівність відносно невідомої t_k. Остання нерівність виконується за умови, що $0 < t_k < 2\left(1+\left(w, s_X\left(f\right)-s_X\left(f^k\right)\right)\cdot\left(w^k, s_X\left(f^k\right)-s_X\left(f\right)\right)^{-1}\right)$. Тому нерівність (6) також виконується. Твердження доведене.

Надалі обмежимося розглядом векторів приросту вигляду

$$z^k = t_k\alpha_k^o\left(s_X\left(f\right)-s_X\left(f^k\right)\right), \tag{9}$$

де нормуючий множник t_k задовольняє умову (8).

Зауваження 1. Для приростів виду (9) нерівність (3) виконується для всіх вагових векторів $w \in W_X\left(f\right)$ НЕ, на яких реалізується функція *f*, за умови, що нормуючий множник приросту t_k задовольняє умову $0 < t_k \leq 2$.

Умова (8) задає межі для допустимих значень нормуючого множника приросту t_k. Треба зазначити, що у (8) величина t_k обмежена зверху сумою $2+\frac{2\left(w, s_X(f)-s_X\left(f^k\right)\right)}{\left(w^k, s_X\left(f^k\right)-s_X(f)\right)}$, в якій до другого доданка входить невідомий наперед скалярний добуток $\left(w, s_X(f)-s_X\left(f^k\right)\right)$, про який у загальному випадку відомо лише те, що згідно з (7) він набуває строго додатного значення.

Зауваження 2. При виборі вектора приросту z^k у вигляді (9) необхідно вимагати, щоб для всіх $a \in G_n$ $\left(w^{k+1}, \chi(a)\right) \neq 0$, бо інакше вектор w^{k+1} не є *X*-допустимим і на НЕ з таким ваговим вектором не можна реалізувати жодну цілком визначену булеву функцію. Цього можна завжди досягти за рахунок незначних змін вектора приросту, змінивши відповідним чином нормуючий множник приросту t_k так, щоб він не вийшов за межі допустимих значень (8).

Розглянемо деякі властивості, які має послідовність вагових векторів $\left\{w^k\right\}$, побудована за правилом (5).

Покажемо, що якщо $t_k \geq 1$, то виконується нерівність $s_X\left(f^{k+1}\right) \neq s_X\left(f^k\right)$. Припустимо протилежне. Тоді з урахуванням (7) маємо $\left(w^{k+1}, s_X\left(f^k\right)-s_X(f)\right)>0$. Замінивши w^{k+1} на $w^k+t_k \frac{\left(w^k, s_X\left(f^k\right)-s_X(f)\right)}{\left\|s_X\left(f^k\right)-s_X(f)\right\|^2} \cdot\left(s_X(f)-s_X\left(f^k\right)\right)$, отримаємо $\left(w^k, s_X\left(f^k\right)-s_X(f)\right)\left(1-t_k\right)>0$. З останньої нерівності випливає, що $t_k<1$. Тоді отримуємо протиріччя з умовою $t_k \geq 1$.

Зауваження 3. Доведена властивість не виключає того, що знайдуться такі натуральні числа *k* і l $(k<l)$, для яких має місце рівність $s_X\left(f^k\right)=s_X\left(f^l\right)$. У такому випадку за аналогією до [5] вважатимемо, що в області характеристичних векторів утворився граничний цикл, який не має власних граничних підциклів. Нехай

$$S \cdot y=0$$

система *m* рівнянь з $l-k$ невідомими $y_1, \ldots, y_{l-k}$ за умови, що стовпцями матриці *S* є вектори $s_X(f)-s_X\left(f^{k+i-1}\right)$, $i=\overline{1, l-k}$. Якщо попередня система має додатний розв'язок $\left(y_i \geq 0,\ i=\overline{1, l-k},\ \sum_{i=1}^{l-r} y_i>0\right)$, то функція *f* не є *X*-нейрофункцією. Дійсно, якщо припустити, що функція *f* реалізується на НЕ з ваговим вектором *w*, то домноживши обидві частини рівності $\sum_{i=1}^{l-k} y_i\left(s_X(f)-s_X\left(f^{k+i-1}\right)\right)=0$ скалярно на *w*, отримаємо $\sum_{i=1}^{l-k} y_i\left(s_X(f)-s_X\left(f^{k+i-1}\right), w\right)=0$. Остання рівність суперечить нерівностям (7). Якщо система не має додатних розв'язків, то процес навчання продовжуємо.

Прослідкуємо тепер, як змінюється $\left\|w^{k+1}\right\|$ порівняно з $\left\|w^k\right\|$, якщо вектор приросту z^k шукається за правилом (9) і нормуючий множник t_k задовольняє (8). Легко побачити, що для норм справедлива рівність $\left\|w^{k+1}\right\|^2=\left\|w^k\right\|^2-2 t_k \frac{\left(w^k, s_X\left(f^k\right)-s_X(f)\right)^2}{\left\|s_X\left(f^k\right)-s_X(f)\right\|^2}+t_k^2 \frac{\left(w^k, s_X\left(f^k\right)-s_X(f)\right)^2}{\left\|s_X\left(f^k\right)-s_X(f)\right\|^2}$, з якої випливає, що $\left\|w^{k+1}\right\|<\left\|w^k\right\|$, якщо $t_k<2$, $\left\|w^{k+1}\right\|=\left\|w^k\right\|$, якщо $t_k=2$ і $\left\|w^{k+1}\right\|>\left\|w^k\right\|$, якщо $t_k \geq 2$.

Переходимо тепер до детального опису алгоритму навчання та доведення скінченності процесу побудови вагових векторів за умови, що вектор приросту z^k шукається у вигляді (9). Для цього доведемо наступні леми.

Лема 1. *Якщо для елементів x, y, v, w евклідового простору існують нерівності* $\|v-x\|<\|w-x\|$ *і* $\|v-y\|<\|w-y\|$, *то нерівність* $\|v-z\|<\|w-z\|$ *виконується для всіх елементів відрізка* $[x,y]=\{z|z=\lambda x+(1-\lambda)y,\ 0\le\lambda\le 1\}$.

Доведення. Нехай $\delta=\min\left\{\|w-x\|^2-\|v-x\|^2,\|w-y\|^2-\|v-y\|^2\right\}$. Покажемо, що для довільного $z\in[x,y]$ існує нерівність

$$\|w-z\|^2-\|v-z\|^2\ge\delta\,, \tag{10}$$

з якої випливає твердження леми. Доведемо спочатку цю нерівність для $z=\frac{x+y}{2}$. В евклідовому просторі для довільних елементів a, b існує рівність паралелограма [6] $\|a+b\|^2+\|a-b\|^2=2\left(\|a\|^2+\|b\|^2\right)$, із якої отримуємо рівності

$$\|2v-x-y\|^2+\|y-x\|^2=2\left(\|v-x\|^2+\|v-y\|^2\right) \text{ і } \|2w-x-y\|^2+\|y-x\|^2=2\left(\|w-x\|^2+\|w-y\|^2\right).$$

З останніх рівностей випливає, що

$$\left\|w-\frac{x+y}{2}\right\|^2-\left\|v-\frac{x+y}{2}\right\|^2=\frac{1}{2}\left(\|w-x\|^2-\|v-x\|^2+\|w-y\|^2-\|v-y\|^2\right)\ge\delta\,.$$

У цьому випадку нерівність (10) доведена. Використовуючи доведену нерівність потрібну кількість разів, можна довести нерівність (10) для всіх z вигляду $z=\lambda x+(1-\lambda)y$, де λ – довільне раціональне число з відрізка [0,1], двійковий запис якого містить скінченну кількість цифр після коми. Оскільки за допомогою таких чисел можна як завгодно добре наблизити довільне дійсне число з [0,1], то нерівність (10) виконується для всіх $z\in[x,y]$. Лема доведена.

Наслідок. *Якщо для всіх* $x\in X$ $\|v-x\|<\|w-x\|$, $\mathrm{Conv}(X)$ *– опукла оболонка множини X, то і для всіх* $y\in\mathrm{Conv}(X)$ *виконується нерівність* $\|v-y\|<\|w-y\|$.

Лема 2. *Нехай* $\{x^n\}$ *– послідовність елементів компактного банахового простору B,* $Z\subset B$ *і множина Z містить принаймні одну внутрішню точку. Тоді якщо для всіх* $z\in Z$ *виконується умова* $\left\|x^{n+1}-z\right\|<\left\|x^n-z\right\|$, *то послідовність* $\{x^n\}$ *є збіжною.*

Доведення. Нехай $z^0\in Z$. Досить довести теорему для випадку, коли $Z=B\left[z^0,r\right]$, де $B\left[z^0,r\right]$ – замкнена куля радіуса r з центром у точці z^0 З умов леми випливає, що $B\left[z^0,r\right]\cap\{x^n\}=\varnothing$ і послідовність $\{x^n\}$ обмежена. Тому за теоремою Больцано–Веєрштраса вона містить принаймні одну збіжну підпослідовність $\left\{x^{n_k}\right\}$. Нехай $x^*=\lim\limits_{k\to\infty}x^{n_k}$. Доведемо, що $x^*=\lim\limits_{n\to\infty}x^n$. Припустимо протилежне. Тоді послідовність $\{x^n\}$ містить ще одну збіжну послідовність $\left\{x^{n_m}\right\}$, яка збігається до елемента $\tilde{x}\ne x^*$. Нехай для довільного $z\in B\left[z^0,r\right]$ $\rho(z)=\lim\limits_{n\to\infty}\left\|x^n-z\right\|$. Тоді легко бачити, що $\rho(z)=\left\|x^*-z\right\|=\|\tilde{x}-z\|$. Нехай z^* і $\tilde{z}$ – відповідні проекції точок x^* і $\tilde{x}$ на випуклу замкнену кулю $B\left[z^0,r\right]$. Оскільки $z^*=B\left[z^0,r\right]\cap\left[z^0,x^*\right]$, $\tilde{z}=\overline{B\left[z^0,r\right]}\cap\left[z^0,\tilde{x}\right]$ (проекції належать відрізкам, які сполучають центр кулі з відповідними точками), то $z^*\ne\tilde{z}$. Тоді

$$\rho(z^*) = \|x^* - z^*\| < \|x^* - \tilde{z}\| = \rho(\tilde{z}) = \|\tilde{x} - \tilde{z}\| < \|\tilde{x} - z^*\| = \rho(z^*).$$

Отримане протиріччя доводить лему.

Розглянемо два підходи до вибору нормуючих множників t_k. Перший підхід запропонований у роботі [5] для звичайних порогових функцій (в обґрунтуванні скінченності алгоритму навчання в [5] відсутнє доведення деяких ключових тверджень і зустрічаються логічні помилки у міркуваннях). За цим підходом, нормуючий множник t_k потрібно вибирати з проміжку [1, 2] і з урахуванням зауваження 2. Якщо при цьому $t_k = 2$, то вектори w^k в послідовності (2) мають однакову норму, що є більш бажаним у більшості випадків. Для обґрунтування спектрального алгоритму навчання нам знадобиться

Теорема 1. *Нехай f – бульова функція, w^0 – X-допустимий ваговий вектор, прирости для послідовності $\{w^k\}$ визначаються згідно з* (5), *нормуючий множник* t_k *вибирається з проміжку* $[t_0, 2]$, *де* $0 < t_0 < 2$, $f^k \neq f$, $k = 0,1,\ldots$. *Тоді якщо знайдеться таке ε > 0, що для всіх $k \in N$ і для всіх $a \in G_n$ виконується умова*

$$\left|\left(w^k, \chi(a)\right)\right| \geq \varepsilon, \tag{11}$$

то функція f не є X-нейрофункцією.

Доведення. Припустимо протилежне. Тоді f – X-нейрофункція, для якої процес навчання триває як завгодно довго і для послідовності $\{w^k\}$ виконується умова (11). З вибору нормуючих множників t_k і зауваження 1 випливає, що для всіх $w \in W_X(f)$ виконуються нерівності $\|w^{k+1} - w\| < \|w^k - w\|$, $k = 0,1,\ldots$. Застосуємо до відкритої множини $W_X(f)$ і послідовності $\{w^k\}$ лему 2. Тоді послідовність $\{w^k\}$ збігається до деякого вектора w^*. Покажемо, що $w^* \in W_X(f)$. Із нерівності (11) і неперервності скалярного добутку випливає, що знайдеться такий номер *l*, що для всіх $k \geq l$ і для всіх $a \in G_n$ виконується умова $\mathrm{Rsign}(w^k, a) = \mathrm{Rsign}(w^*, a)$. Тоді вектор w^* є *X*-допустимим і НЕ з ваговим вектором w^* реалізує бульову функцію f^*, причому виконуються рівності $f^* = f^l = f^{l+1} = \ldots$ і $s_X(f^*) = s_X(f^l) = s_X(f^{l+1}) = \ldots$. Якщо всі $t_k \geq 1$, то отримуємо протиріччя з нерівністю $s_X(f^{k+1}) \neq s_X(f^k)$. Доведемо, що у випадку $0 < t_k < 1$ $f = f^* = f^l$. Зі збіжності послідовності $\{w^k\}$ випливає, що вектор приросту $z^k = t_k \dfrac{\left(w^k, s_X(f^k) - s_X(f)\right)}{\left\|s_X(f^k) - s_X(f)\right\|^2}\left(s_X(f) - s_X(f^k)\right) \to 0$. Тому $\left(w^k, s_X(f^k) - s_X(f)\right) \to 0$. Тому і $\left(w^*, s_X(f^*) - s_X(f)\right) = 0$. Тоді з нерівності (7) випливає, що $s_X(f) = s_X(f^*)$. Тому $f^l \in W_X(f)$. Отримуємо протиріччя з припущенням, що $f^k \neq f$, $k = 0,1,\ldots$. Теорему доведено.

Зауваження 4. Якщо бульова функція *f* є *X*-нейрофункцєю і для послідовності $\{w^k\}$ умова (11) не виконується, то не можна стверджувати, що $w^* \in W_X(f)$. У цьому випадку може виявитися, що вектор w^* уже не є *X*-допустимим і належить замиканню множини $W_X(f)$.

На основі теореми 1 можна запропонувати таку модифікацію алгоритму навчання за умови, що нормуючий множник t_k вибирається з проміжку $[t_0, 2]$. Вибираємо деяке достатньо мале число $\varepsilon > 0$ і здійснюємо процес навчання доти, поки не почне виконуватися одна з таких умов:

1. $s_X\left(f^k\right)=s_X(f)$. Тоді робимо висновок, що бульова функція f відносно системи характерів X реалізується на НЕ з ваговим вектором w^k і процес навчання завершено.

2. В області характеристичних векторів утворився граничний цикл. Тоді діємо згідно з зауваженням 3.

3. Порушилася нерівність (11). Тоді припиняємо процес навчання або вносимо в нього якісь зміни (змінюємо початкове наближення, нормуючі множники t_k на кількох останніх кроках алгоритму або зменшуємо ε).

Тестування спектрального алгоритму навчання показує, що випадок 3 при навчанні X-нейрофункцій на практиці зустрічається дуже рідко. Проте можна запропонувати правило вибору нормуючих множників, при застосуванні якого до навчання X-нейрофункцій спектральний алгоритм навчання через скінченну кількість кроків завжди приводить до вагового вектора w^t НЕ, який реалізує цю функцію. Для цього вибиратимемо множники t_k так:

$$t_k = 2+\frac{1}{\left(w^k, s_X\left(f^k\right)-s_X(f)\right)}. \tag{12}$$

Теорема 2. *Якщо бульова функція f є X-нейрофункцією, послідовність X-допустимих вагових векторів $\left\{w^k\right\}$ будується за допомогою приростів виду* (9), *нормуючі множники t_k вибираються згідно* з (12) *з урахуванням зауваження* 1, *то процес навчання завершується через скінченну кількість кроків на деякому векторі $w^t \in W_X(f)$.*

Доведення. Припустимо протилежне. Тоді послідовність $\left\{w^k\right\}$ є нескінченною. Легко бачити, що для довільної системи характерів X і для довільної бульової функції g координати характеристичного вектора $s_X(g)$ є парними числами. Тому для довільного цілочислового вектора $w \in W_X(f)$ (легко бачити, що такі вагові вектори завжди присутні у конусі $W_X(f)$) чисельник $\left(w, s_X(f)-s_X\left(f^k\right)\right)$ дробу в правій частині (8) є парним додатним числом. Тому для всіх цілочислових векторів $w \in W_X(f)$ вибір нормуючого множника приросту у вигляді (12) гарантує виконання нерівності $\left\|w^{k+1}-w\right\| < \left\|w^k-w\right\|$ для усіх членів послідовності $\left\{w^k\right\}$. Поряд з вектором w розглянемо такі вектори $u^j = 2w+e^j$, $v^j = 2w-e^j$, $i=\overline{1,m}$, де e^j – одиничні базисні вектори простору R^m $j=\overline{1,m}$. Легко бачити, що $u^j \in W_X(f)$ і $v^j \in W_X(f)$, $j=\overline{1,m}$. Застосувавши до многогранника $Z=\operatorname{conv}\left(u^1,\ldots u^m, v^1,\ldots v^m\right)$ наслідок до леми 1 отримаємо, що для всіх $z \in Z$ і для всіх членів послідовності $\left\{w^k\right\}$ виконується нерівність $\left\|w^{k+1}-z\right\| < \left\|w^k-z\right\|$. Множина внутрішніх точок многогранника Z непорожня (їй належить, наприклад, вектор $2w$). Тому за лемою 2 послідовність $\left\{w^k\right\}$ є збіжною. Але для цієї послідовності вектори приросту мають вигляд $z^k = \alpha_k\left(s_X(f)-s_X\left(f^k\right)\right)$, де

$$\alpha_k = \left(2+\frac{1}{\left(w^k, s_X\left(f^k\right)-s_X(f)\right)}\right)\frac{\left(w^k, s_X\left(f^k\right)-s_X(f)\right)}{\left\|s_X\left(f^k\right)-s_X(f)\right\|^2} = \frac{2\left(w^k, s_X\left(f^k\right)-s_X(f)\right)+1}{\left\|s_X\left(f^k\right)-s_X(f)\right\|^2}.$$

Отже, знаменник останнього дробу обмежений, чисельник більший за 1, тобто порушується умова $z^k \to 0$ – необхідна умова збіжності послідовності $\left\{w^k\right\}$. Отже, на деякому кроці алгоритму навчання отримаємо X-допустимий ваговий вектор $w^t \in W_X(f)$. Теорему доведено.

Зауваження 5. Можливий варіант алгоритму, в якому поєднуються обидва підходи до вибору нормуючих множників: вибираємо деяке достатньо мале число $\varepsilon > 0$, здійснюємо алгоритм навчання, поклавши $t_k = 2$ (з урахуванням зауваження 2) доти, поки виконується умова (11), а в разі її порушення продовжуємо процес навчання, вибираючи t_k за формулою (12).

Зауваження 6. Можна запропонувати інші модифікації алгоритму навчання узагальнених нейронних елементів над системою характерів, які схожі на алгоритми навчання персептронів, наведених у роботах [4] і [7]. У цих алгоритмах не вимагається обчислення спектральних параметрів бульових функцій. Крім того, вони можуть бути застосовані для навчання неповністю заданих бульових функцій. Для цих алгоритмів можна провести оцінювання максимальної кількості ітерацій, потрібних для навчання. Тому вони можуть використовуватися для перевірки того, чи є задана функція *f X*-нейрофункцією.

Висновки. Отже, нами розроблено метод побудови такої послідовності (2) *X*-допустимих вагових векторів, що бульова *X*-нейрофункція *f* реалізується на НЕ з ваговим вектором $w^t \in W_X(f)$. Умови збіжності даного алгоритму наведені у теоремах 1-2. Цей алгоритм дозволяє також проводити перевірку того, чи є довільна бульова функція *f* нейрофункцією відносно системи характерів *X*. Отримані результати можуть бути використанні у процесі синтезу комбінаційних схем при представленні бульових функцій у нейробазисі і для розробки пристроїв по розпізнаванню об'єктів, закодованих двійковими векторами.

1. Уоссермен Ф. Нейрокомпьютерная техника: теория и практика. – М.: Мир, 1992. 2. Грицик В.В., Гече Ф.Е. Реалізація бульових та багатозначних бульових функцій на нейронних елементах // Доповіді НАН України. – 2004. – №5. – С. 65–68. 3. Ван дер Варден Б. Л. Алгебра. – М.: Наука, 1979. 4. Айзенберг Н.Н., Иваськив Ю.Л. Многозначная пороговая логика. – К.: Наукова думка, 1977. 5. Дертоузос М. Пороговая логика. – М.: Мир, 1967. 6. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Елементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989. 7. Розенблатт Ф. Принципы нейродинамики. – М.: Мир, 1965.