чисельника залежності (12), не важко показати, що межа пружності деревини поперек волокон у разі стиску є прямо пропорційною відносній зміні об'єму матеріалу $J_C^* - 1$ з коефіцієнтом пропорційності E_{11}^C, тобто у разі стиску

$$\tilde{\sigma}_{11} \approx -\left(1 - J_C^*\right)E_{11}^C, \tag{21}$$

а у разі розтягу

$$\tilde{\sigma}_{11} \approx -\eta\left(1 - J_P^*\right)E_{11}^P. \tag{22}$$

Висновки. Розроблено критерій короткочасної міцності деревини, який на відміну від відомих дає змогу обґрунтувати асиметрію міцності матеріалу вздовж та поперек волокон. Теоретично показано та підтверджено, що міцність деревини на розтяг вздовж волокон є більшою, ніж у разі стиску.

1. Яценко В.Ф. Прочность композиционных материалов. – К.: Вища шк., 1988. – 191 с. 2. Гольденблат И.И., Бажанов В.Л., Копнов В.А. Длительная прочность в машиностроении. – М.: Машиностроение, 1977. – 248 с. 3.Писаренко Г.С. и др.Сопротивление материалов. – К.: Вища шк., 1986. – 775 с. 4. Хухрянский П.Н. Прочность древесины. – М.: Гослесбумиздат, 1955. – 152 с. 5. Белянкин Ф.П., Яценко В.Ф. Деформативность и сопротивляемость древесины как упруго-вязко-пластического тела. – К.: Изд-во АН УССР, 1957. – 86 с.

УДК 534.111

Б.І. Сокіл, Х.І. Ліщинська*
Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра теоретичної механіки,
* кафедра опору матеріалів

ВПЛИВ ІМПУЛЬСНИХ СИЛ НА КОЛИВАННЯ ОДНОВИМІРНИХ СЕРЕДОВИЩ, ЯКІ ХАРАКТЕРИЗУЮТЬСЯ ПОЗДОВЖНІМ РУХОМ

Розв'язані задачі аналітичного дослідження коливних процесів сильно нелінійних систем з розподіленими параметрами, які характеризуються поздовжнім рухом, під дією імпульсних сил. В основу досліджень покладено: а) принцип одночастотності коливань; б) ідею використання періодичних Ateb-функцій для описання коливних процесів систем із степеневою нелінійністю; в) узагальнення, на основі вказаних вище функцій, методу усереднення на нові класи нелінійних систем.

Problems of analytical research of oscillatory processes of strongly nonlinear systems with the distributed parameters, which are characterized by longitudinal motion, under act of impulse forces are untied. In a basis of researches it is necessary: a) a principle of one-rate of oscillations; b) an idea of use of periodic Ateb-functions for description of oscillatory processes of systems with degree nonlinearity; c) generalization, on a basis of the mentioned above functions, a method on new classes of nonlinear systems.

Актуальність. Імпульсні сили, які існують у фізиці, техніці, біології, у своїй еволюції характеризуються короткою тривалістю дії (удар, миттєвий поштовх). Вони можуть бути як поодинокими, так і повторюватись під час проходження систем фіксованих положень чи у конкретні моменти часу. Розглядаючи багато практичних задач, тривалістю дії імпульсних сил можна знехтувати і, описуючи сам процес математичними співвідношеннями, вважати дію імпульсних сил миттєвою. Незважаючи на короткотривалість дії імпульсних сил, вони здебільшого призводять не тільки до зміни кількісних характеристик процесу, але й подекуди і якісних (зміни руху, резонансних явищ, втрати стійкості тощо), тому дослідження динамічних процесів, зокрема коливних, систем під дією вказаних сил є актуальною задачею. Відзначимо, що лінійні та квазілінійні математичні моделі процесів дискретних чи дискретно-неперервних систем під дією імпульсних сил розглядали, наприклад, в [1–4]. Предметом досліджень цієї роботи є складніші одновимірні системи: по-перше, вони характеризуються поздовжнім рухом; по-друге, диференціальні рівняння, які описують їх рух, є загальніші і вони здебільшого точніше відображають динамічні процеси широкого спектра прикладних задач; по-третє, імпульсні сили незначної величини діють у конкретні моменти часу, а їх кількість є зліченною.

В основу досліджень у роботі покладено: а) принцип одночастотності коливань у нелінійних системах з багатьма ступенями вільності і розподіленими параметрами [5, 6]; б) ідею використання періодичних Ateb-функцій [7, 8] для побудови розв'язків деяких класів рівнянь з частинними похідними [9, 10]; в) узагальнення, на основі використання Ateb-функцій, методу усереднення [11] на нові класи динамічних систем.

Постановка задачі і методика розв'язування. Математичною моделлю коливних процесів одновимірних однорідних середовищ, які характеризується поздовжнім (обертальним) рухом за умови, що пружні властивості матеріалу середовища істотно відрізняються від лінійного закону, є диференціальне рівняння [11]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2V\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left[\alpha^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{\nu}-V^2\right]=\varepsilon f_1\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+ \\ +\varepsilon\sum_{i=1}^{k}\delta\left(t-t_i\right)f_2\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right), \tag{1}$$

в якому $u(x, t)$ – переміщення перерізу середовища з координатою x в довільний момент часу t; α, ε, V, ν – сталі (V – швидкість його руху, $\nu+1=\frac{2m+1}{2n+1}$, m,n=0,1,2,…), $f_1\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$, $f_2\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$ – відомі аналітичні функції, причому $f_1\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$ – враховує дисипативні сили середовища, сили опору, а також відхилення пружних властивостей середовища від степеневого закону, $\delta(t)$ – дельта-функція Дірака, t_i – моменти часу, в які на середовище діють імпульсні сили, ε – малий параметр, який вказує на обмеженість (малу величину) максимального значення правої частини рівняння (1).

Диференціальне рівняння (1) з достатнім степенем точності відображає динамічні процеси рухомого середовища, матеріал якого задовольняє квазілінійний закон пружності (ν=0) у разі немалих його коливань: поздовжні коливання у пасових передачах; сипких речовин під час їх вібротранспортування чи сепарації тощо.

Для диференціального рівняння (1) розглядатимемо найпростішого вигляду крайові умови

$$u\left(x,t\right)_{|x=0}=u\left(x,t\right)_{|x=l}=0, \tag{2}$$

Легко переконатись, що для побудови розв'язку крайової задачі (1), (2) навіть для незбуреного (ε=0) випадку не можна застосувати такі класичні методи інтегрування диференціальних рівнянь з частинними похідними, як Фур'є чи Д'Аламбера. Тому нижче, як і в [12, 13], дещо обмежимо клас прикладних задач, для яких будуть отримані основні результати, а саме: швидкість руху середовища є невеликою. Останнє дає змогу для побудови одночастотних розв'язків однорідних крайових задач для рівняння (1) використати загальну ідею методів збурень [14], відповідно до якої необхідно побудувати розв'язки незбуреної крайової задачі, тобто розв'язки рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\alpha^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{\nu}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \tag{3}$$

при крайових умовах (2).

Одночастоні розв’язки крайової задачі (3), (2), як показано у [9], мають вигляд

$$u(x,t) = aca(\nu+1,1,\omega(a)t+\theta)sa\left(1,\frac{1}{\nu+1},\frac{m\Pi_x}{l}x\right),\ m=1,2,..., \tag{4}$$

де $\omega(a) == \alpha\sqrt{a^{\nu}\left(ml^{-1}\Pi_x\right)^{\nu+2}}$, a,θ – сталі, $\Pi_x = \Pi\left(1,(\nu+1)^{-1}\right)$ – півперіод Ateb-функцій, які описують форму коливань.

У першому наближенні розв’язком збуреного рівняння (1) можна також вважати співвідношення (3), тільки параметри a і θ будуть функціями часу, які визначаються із системи диференціальних рівнянь

$$\dot{a} = \varepsilon A(a) + \varepsilon\sum_{i=1}^{k} A_i(a),$$

$$\dot{\theta} = -\frac{b}{\omega(a)}V^2 + \varepsilon B(a) + \varepsilon\sum_{i=1}^{k} B_i(a), \tag{5}$$

де

$$A(a) = \frac{-1}{2\Pi_T P\omega}\int_0^{2\Pi_t}\int_0^{l}\bar{f}_1(a,\psi)sa\left(1,\frac{1}{\nu+1},\frac{m\Pi_x}{l}x\right)sa(1,\nu+1,\psi)\,dx\,d\psi,$$

$$B(a) = -\frac{\nu+2}{4\Pi_T Pa\omega}\int_0^{2\Pi_t}\int_0^{l}\bar{f}_1(a,\psi)sa\left(1,\frac{1}{\nu+1},\frac{m\Pi_x}{l}x\right)ca(\nu+1,1,\psi)\,dx\,d\psi,\quad \psi=\omega(a)t+\theta,$$

$$b = \frac{\pi}{2l}\frac{\nu+4}{\nu+2}\Gamma^2\left(\frac{\nu+1}{\nu+2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{\nu+2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{3}{2}+\frac{\nu+1}{\nu+2}\right),$$

$$A_i(a) = \frac{sa(1,\nu+1,l\psi_i)}{2P\omega^2(a)}\int_0^{l}sa\left(1,\frac{1}{\nu+1},\frac{m\Pi_x}{l}x\right)\bar{f}_2(a,x,\psi_i)\,dx\begin{cases}0 & при\quad t<t_i,\\ 0{,}5 & при\quad t=t_i,\\ 1 & при\quad t>t_i,\end{cases}$$

$$B_i(a) = \frac{(\nu+2)ca(\nu+1,1,l\psi_i)}{4Pa\omega^2(a)}\int_0^{l}sa\left(1,\frac{1}{\nu+1},\frac{m\Pi_x}{l}x\right)\bar{f}_2(a,x,\psi_i)\,dx\begin{cases}0 & при\quad t<t_i,\\ 0{,}5 & при\quad t=t_i,\\ 1 & при\quad t>t_i,\end{cases}$$

$$\bar{f}_1(a,\psi) = f_1\left(u_x,u_t,u_{xy},u_{xx}\right)\Bigg|_{\substack{u_x(x,t)=aX'(x)ca(\nu+1,1,\psi),\\ u_t(x,t)=-\frac{2\omega(a)}{\nu+2}aX(x)sa(1,\nu+1,\psi),\\ \cdots\cdots\cdots,\\ u_{xx}(x,t)=aX''(x)ca(\nu+1,1,\psi)}},$$

$$\bar{f}_2(a,x,\psi_i) = f_2\left(u_x,u_t,u_{xy},u_{xx}\right)\Bigg|_{\substack{u_x(x,t)=aX'(x)ca(\nu+1,1,\psi_i),\\ u_t(x,t)=-\frac{2\omega(a)}{\nu+2}aX(x)sa(1,\nu+1,\psi_i),\\ \cdots\cdots\cdots,\\ u_{xx}(x,t)=aX''(x)ca(\nu+1,1,\psi_i)}}$$

$$\Pi_T = \sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{\nu+2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\nu+2}\right),\ P = \int_0^{l}sa^2\left(1,\frac{1}{\nu+1},\frac{m\Pi_x}{l}x\right)dx = \frac{\nu+2}{3\nu+4}l,\ \psi_i = \omega(a)t_i+\theta.$$

Як приклад розглянемо коливання рухомого середовища у випадку $f_1(u_x,u_t,u_{xt},u_{xx}) =$ $= \mathrm{u_t}\left(\alpha_1-\alpha_2u^2\right)$, $f_2(u_x,u_t,u_{xt},u_{xx}) = \alpha_3u$, де $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ – сталі під дією однієї імпульсної сили. Рівняння, які визначають закони зміни амплітуди і частоти процесу у вказаному випадку приймають вигляд

$$\dot{a} = \varepsilon a \Gamma\left(\frac{\nu+1}{\nu+2}\right)\left(\frac{\alpha_1 \Gamma\left(\frac{1}{\nu+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{\nu+2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{\nu+1}{\nu+2}\right)} - \frac{\alpha_2 \Gamma\left(\frac{3}{\nu+2}\right)a^2}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{\nu+2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}+\frac{\nu+1}{\nu+2}\right)}\right) +$$

$$+\sum_{i=1}^{k} \frac{\varepsilon \alpha_3 asa\left(1,\nu+1,\psi_1\right) ca\left(\nu+1,1,\psi_1\right)}{2\omega^2\left(a\right)} \begin{cases} 0 \quad npu \quad t < t_i, \\ 0,5 \quad npu \quad t = t_i, \\ 1 \quad npu \quad t > t_i, \end{cases}$$

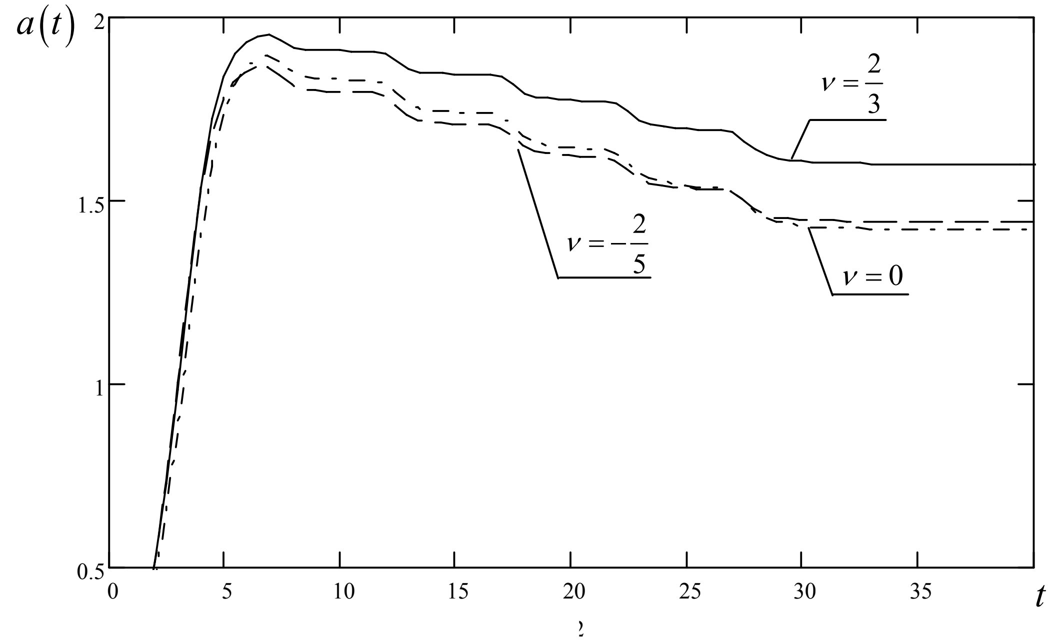

Рис. 1. Закони зміни амплітуди коливань a(t)

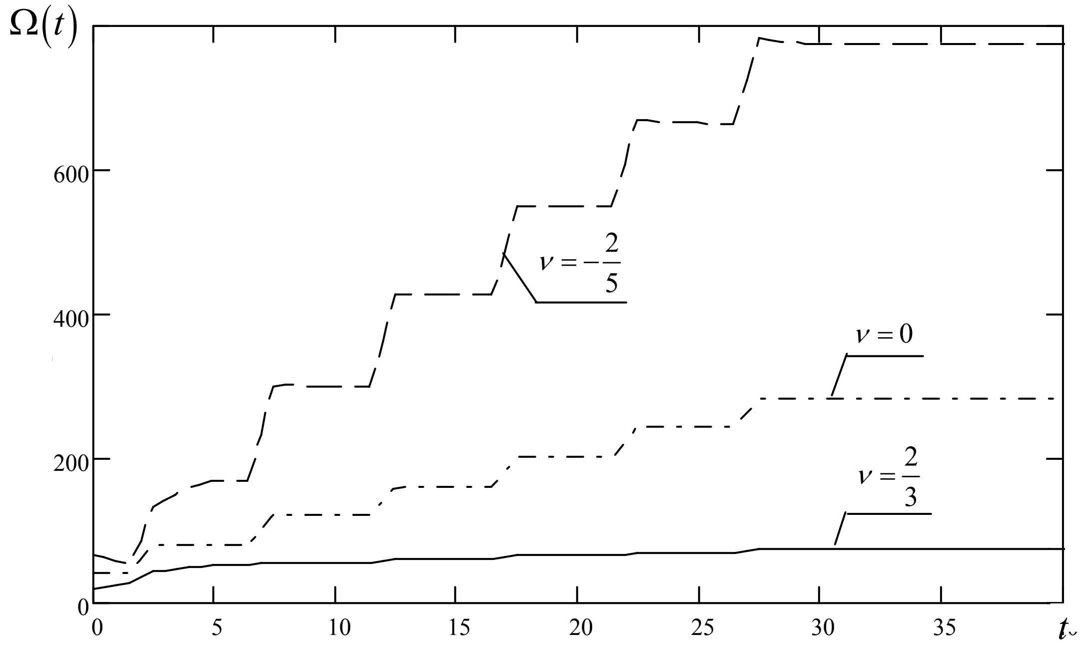

Рис. 2. Закони зміни частоти

$$\dot{\psi} = \omega(a) - \frac{b \cdot V^2}{\omega^2(a)} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\varepsilon(\nu+2)\alpha_3 c a^2(\nu+1,1,\psi_1)}{4\omega^2(a)} \begin{cases} 0 & при \quad t < t_i, \\ 0,5 & при \quad t = t_i, \\ 1 & при \quad t > t_i, \end{cases}$$

На рис. 1 і 2 зображено закони зміни (для вказаного вище випадку) амплітуди коливань a(t) і частоти $\Omega = \omega(a) + \dot{\theta}$.

Висновки. Із отриманих графіків випливає:

1. Для м'яких (-1<ν<0) систем імпульсне збурення істотно змінює частоту коливань; швидкість руху призводить до зменшення частоти коливань.

2. Для жорстких (ν>0) систем вплив імпульсного збурення на частоту коливань незначний.

3. Частота коливань для жорстких систем є меншою порівняно з квазілінійним випадком, для м'яких систем – більшою.

1. Гащук П., Зорій Л. Лінійні моделі дискретно-неперервних механічних систем. – Львів: Укр. технології, 1999. – 372 с. 2. Мышкыс А.Д., Самойленко А.М. Системы с толчками в заданные моменты времени // Мат. сб. – 1967. – № 2. – С. 202–208. 3. Дзыра Б.И. К вопросу обоснования метода усреднения для исследования одночастотных колебаний, возбуждаемых мгновенными силами // Аналитические и качественные методы исследования дифференциальных и дифференциальноразностных уравнений. – К. Изд.-во ин-та математики, 1977. – С. 34–38. 4. Самойленко А.М., Перестюк Н.П. Периодические решения слабо нелинейных систем с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. – 1978. – 14, №6. – С. 1034–1045. 5. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические решения уравнений в частных производных. – К.: Вища шк., 1976. – 592 с. 6. Митропольский Ю.А, Мосеенков Б.И. Асимптотические решения уравнений в частных производных. – К.: Вища шк., 1976. – 592 с. 7. Сеник П.М. Про Ateb-функції // Доп. АН УРСР. – 1968. – № 1. – С. 23–26. 8. Сеник П. М. Обернення неповної Beta-функції // Укр. мат. журн. – 1969. – 21, № 3. – С. 325–333. 9. Сокил Б. И. Об асимптотических разложениях краевой задачи для одного нелинейного уравнения с частными производными // Укр. мат. журн. – 1982. – 34, №6. – С. 803–805. 10. Сокіл Б.І. Про один спосіб побудови одночастотних розв'язків для нелінійного хвильового рівняння // Укр. мат. журн. – 1994. – 46, № 6. – С. 782–785. 11. Митропольский Ю.А. Лекции по методу усреднения в нелинейной механике. – К.: Наук. думка, 1966. – 467 с. 12. Ліщинська Х.І Застосування Ateb-функції для дослідження нелінійних коливань одновимірних систем // Вісн. Хмельницького нац. ун-ту. – 2006. – № 4. – С. 62–65. 13. Сокіл Б.І., Ліщинська Х.І. Асимптотичний метод і періодичні Ateb-функції у дослідженні коливних процесів рухомих нелінійно пружних одновимірних систем // Вісн. Нац. ун-ту "Львівська політехніка". – 2006. – № 556. – С. 57–64.