УДК 621.3

Р. Фільц
Технічно-Рільнича Академія в Бидгощі, Польща

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ У НЕЛІНІЙНИХ БАГАТОПОЛЮСНИКАХ, СКЛАДЕНИХ З ДВОПОЛЮСНИКІВ

Запропонована математична модель для розрахунку перехідних процесів у багатополюсниках, складених з лінійних і нелінійних резисторів, котушок і конденсаторів. Особливостями моделі є можливість безпосереднього її застосування в моделях систем, орієнтованих на використання методу вузлових потенціалів і не-явних методів числового інтегрування і відсутність обмежень на параметри еле-ментів.

Mathematical model for transients calculation in multipoles consisting of li-near and nonlinear resistors, coils and capacitors is proposed. The model is free of ele-ments parameters restrictions and it may be used as a part of system model, which is based on nodal method and implicit integration algorithms.

Сучасні системи автоматичного керування технологічними процесами здебільшого є статичними нелінійними електричними пристроями, що складаються з багатополюсників (БП). Останні можуть бути неподільними елементами електричного кола (наприклад, багатополюсні статичні електромагнітні перетворювачі – трансформатори, дроселі, статичні електромагнітні помножувачі частоти тощо) або ж складеними з резистивно-індуктивно-ємнісних двополюсників. Математичне моделювання перехідних процесів таких систем автоматичного керування є невід’ємною частиною оптимізації технологічних процесів. Здебільшого воно ґрунтується на записі диференційних та алгебраїчних рівнянь окремих елементів системи в методі вузлових потенціалів, об’єднанні цих рівнянь за допомогою рівнянь, що відображають перший закон Кірхгофа для вузлів системи, і наступному інтегруванні отриманої системи рівнянь числовим методом. Застосування до розв’язування цієї задачі явних методів числового інтегрування, як стверджують[*], є можливим тільки за умови, що кожна з зовнішніх гілок кожного з БП системи (тобто, гілка, що з’єднує внутрішній вузол БП з вузлом системи) містить індуктивний елемент. Аналіз проблеми показав, що застосування до опису перехідних процесів інтегральних рівнянь (а не, як це загальноприйнято, рівнянь диференційних) дозволяє усунути згадане обмеження.

Основною метою статті є обгрунтування для резистивно-індуктивно-ємнісного БП (тобто, БП складеного з двополюсників, кожен з яких є сукупністю послідовно з’єднаних лінійних і нелінійних резисторів, котушок і конденсаторів) математичної моделі перехідних процесів як елемента моделі перехідних процесів системи. Для загальності такий БП розглядається як k-й елемент цієї системи, і алгоритм доведено до рівня розрахунку цілої системи. В основу аналізу покладено опис процесів у вигляді системи алгебраїчних та інтегральних рівнянь і метод вузлових потенціалів.

---

[*] *Плахтына Е.Г. Математическое моделирование электромашинно-вентильных систем. – Львов, 1986.*

Розглянемо пасивний БП, що має $\mathrm{G_k}$ гілок, кожна з яких містить хоча б один з двополюсників – резистор, котушку чи конденсатор. Сукупності струмів гілок, напруг на резисторах гілок, напруг на котушках гілок, напруг на конденсаторах гілок, потокозчеплень котушок гілок і зарядів конденсаторів гілок описуватимемо відповідно векторами

$$i_{\mathrm{kg}} = \begin{bmatrix} i_{\mathrm{kg}1} \\ \vdots \\ i_{\mathrm{kgG_k}} \end{bmatrix};\ u_{\mathrm{kg}R} = \begin{bmatrix} u_{\mathrm{kg}R1} \\ \vdots \\ u_{\mathrm{kg}R\mathrm{G_k}} \end{bmatrix};\ u_{\mathrm{kg}L} = \begin{bmatrix} u_{\mathrm{kg}L1} \\ \vdots \\ u_{\mathrm{kg}L\mathrm{G_k}} \end{bmatrix};\ u_{\mathrm{kg}C} = \begin{bmatrix} u_{\mathrm{kg}C1} \\ \vdots \\ u_{\mathrm{kg}C\mathrm{G_k}} \end{bmatrix};\ \psi_{\mathrm{kg}} = \begin{bmatrix} \psi_{\mathrm{kg}1} \\ \vdots \\ \psi_{\mathrm{kgG_k}} \end{bmatrix},\ q_{\mathrm{kg}} = \begin{bmatrix} q_{\mathrm{kg}1} \\ \vdots \\ q_{\mathrm{kgG_k}} \end{bmatrix}$$

Якщо у j-й гілці який-небудь з названих елементів двополюсника відсутній, то відповідний елемент у векторі $u_{\mathrm{kg}R}$, ψ_{kg} чи $u_{\mathrm{kg}L}$ дорівнює нулю. Клеми БП, якими він під'єднується до системи, називатимемо полюсами БП, а всі інші точки сполучення не менше ніж трьох гілок називатимемо вузлами цього БП. Сукупності потенціалів полюсів і потенціалів вузлів k-го БП описуватимемо відповідно векторами

$$\varphi_{\mathrm{kw}} = \begin{bmatrix} \varphi_{\mathrm{kw}1} \\ \vdots \\ \varphi_{\mathrm{kwP_k}} \end{bmatrix};\ \ \varphi_{\mathrm{k}} = \begin{bmatrix} \varphi_{\mathrm{k}1} \\ \vdots \\ \varphi_{\mathrm{kW_k}} \end{bmatrix},$$

де $\mathrm{P_k}$ – кількість полюсів, $\mathrm{W_k}$ – кількість вузлів k-го БП.

Прийнявши, що полюсні струми k-го БП спрямовані від БП до зовнішньої по віношенню до нього схеми, запишемо за першим законом Кірхгофа для полюсів і для вузлів k-го БП векторні рівняння

$$i_{\mathrm{k}} = -\mathrm{A_{kzw}} i_{\mathrm{kg}}; \tag{1}$$

$$\mathrm{A_{kww}} i_{\mathrm{kg}} = 0, \tag{2}$$

де

$$\mathrm{A_{kzw}} = \begin{bmatrix} \mathrm{A_{kzw1,1}} & \cdots & \mathrm{A_{kzw1,G_k}} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathrm{A_{kzwP_k,1}} & \cdots & \mathrm{A_{kzwP_k,G_k}} \end{bmatrix};\quad \mathrm{A_{kww}} = \begin{bmatrix} \mathrm{A_{kww1,1}} & \cdots & \mathrm{A_{kww1,G_k}} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathrm{A_{kwwW_k,1}} & \cdots & \mathrm{A_{kwwW_k,G_k}} \end{bmatrix}$$

– матриці сполучень електричного кола k-го БП.

За другим законом Кірхгофа маємо для гілок k-го БП векторні рівняння

$$u_{\mathrm{kg}R} + u_{\mathrm{kg}L} + u_{\mathrm{gk}C} - \mathrm{A_{kzw}^T}\varphi_{\mathrm{k}} - \mathrm{A_{kww}^T}\varphi_{\mathrm{kw}} = 0. \tag{3}$$

Вольт-амперні характеристики резисторів, вебер-амперні характеристики котушок і вольт-кулонні характеристики конденсаторів описуються відповідно векторними функціями

$$u_{\mathrm{kg}R} = u_{\mathrm{kg}R}(i_{\mathrm{kg}}); \tag{4}$$

$$\psi_{\mathrm{kg}} = \psi_{\mathrm{kg}}(i_{\mathrm{kg}}); \tag{5}$$

$$u_{\mathrm{kg}C} = u_{\mathrm{kg}C}(q_{\mathrm{kg}}). \tag{6}$$

Крім цього, для котушок і конденсаторів маємо відповідно векторні рівняння

$$\psi_{\mathrm{kg}} = \int_{t_{-1}}^{t} u_{\mathrm{kg}L}\mathrm{d}t + \psi_{\mathrm{kg},-1}; \tag{7}$$

$$q_{\mathrm{kg}} = \int\limits_{t_{-1}}^{t} i_{\mathrm{kg}} \mathrm{d}t + q_{\mathrm{kg},-1}, \tag{8}$$

де $\psi_{\mathrm{kg},-1}$, $q_{\mathrm{kg},-1}$ – значення векторів ψ_{kg}, q_{kg} в момент часу $t = t_{-1}$.

За першим законом Кірхгофа для вузлів системи з невідомими потенціалами і для незалежних вузлів системи з заданими потенціалами маємо відповідно рівняння

$$\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{K}} \mathrm{A}_{\mathrm{kn}} i_{\mathrm{k}} = 0; \qquad \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{K}} \mathrm{A}_{\mathrm{kd}} i_{\mathrm{k}} = 0, \tag{9}$$

де

$$\mathrm{A}_{\mathrm{kn}} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{\mathrm{kn}1,1} & \cdots & \mathrm{A}_{\mathrm{kn}1,\mathrm{P_k}} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathrm{A}_{\mathrm{knN},1} & \cdots & \mathrm{A}_{\mathrm{knN},\mathrm{P_k}} \end{bmatrix}; \qquad \mathrm{A}_{\mathrm{kd}} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{\mathrm{kd}1,1} & \cdots & \mathrm{A}_{\mathrm{kd}1,\mathrm{P_k}} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathrm{A}_{\mathrm{kdD},1} & \cdots & \mathrm{A}_{\mathrm{kdD},\mathrm{P_k}} \end{bmatrix}.$$

– матриці ввімкнення k-го БП до системи.

Вектор потенціалів полюсів k-го БП визначаються за вектором невідомих потенціалів вузлів системи і вектором незалежних заданих потенціалів вузлів системи

$$\varphi_{\mathrm{n}} = \begin{bmatrix} \varphi_{\mathrm{n}1} \\ \vdots \\ \varphi_{\mathrm{nN}} \end{bmatrix}; \qquad \varphi_{\mathrm{d}} = \begin{bmatrix} \varphi_{\mathrm{d}1} \\ \vdots \\ \varphi_{\mathrm{dD}} \end{bmatrix}$$

згідно з формулою

$$\varphi_{\mathrm{k}} = \mathrm{A}_{\mathrm{kn}}^{\mathrm{T}} \varphi_{\mathrm{n}} + \mathrm{A}_{\mathrm{kd}}^{\mathrm{T}} \varphi_{\mathrm{d}}. \tag{10}$$

Система рівнянь (1)–(10) описує перехідні процеси в електричній системі, що складається з K БП розгляненого типу. Зауважимо, що тут початкові умови (в протилежність до формулювання задачі у вигляді системи алгебраїчних і диференційних рівнянь) враховані безпосередньо в інтегральних рівняннях.

Алгебраїзувавши в (7), (8) інтеграли за формулою трапецій, отримуємо вирази

$$\psi_{\mathrm{kg}} = \frac{h}{2} u_{\mathrm{kg}L} + \frac{h}{2} u_{\mathrm{kg}L,-1} + \psi_{\mathrm{kg},-1}; \tag{11}$$

$$q_{\mathrm{kg}} = \frac{h}{2} i_{\mathrm{kg}} + \frac{h}{2} i_{\mathrm{kg},-1} + q_{\mathrm{kg},-1}, \tag{12}$$

З (11) отримуємо вираз

$$u_{\mathrm{kg}L} = \frac{2}{h} \psi_{\mathrm{kg}} - \frac{2}{h} \psi_{\mathrm{kg},-1} - u_{\mathrm{kg}L,-1}. \tag{13}$$

Підставивши (13) до (3), отримуємо рівняння

$$u_{\mathrm{kg}R} + \frac{2}{h} \psi_{\mathrm{kg}} - \frac{2}{h} \psi_{\mathrm{kg},-1} - u_{\mathrm{kg}L,-1} + u_{\mathrm{gk}C} - \mathrm{A}_{\mathrm{kzw}}^{\mathrm{T}} \varphi_{\mathrm{k}} - \mathrm{A}_{\mathrm{kww}}^{\mathrm{T}} \varphi_{\mathrm{kw}} = 0. \tag{14}$$

Система векторних алгебраїчних рівнянь (1), (2)–(6), (8), (9), (12)–(14), є нелінійною. Вона містить $9\,\mathrm{K}$ векторних невідомих i_{k}, i_{kg}, $u_{\mathrm{kg}R}$, $u_{\mathrm{kg}L}$, $u_{\mathrm{gk}C}$, φ_{k}, φ_{kw}, ψ_{kg}, q_{kg} і невідому φ. Розв'язуватимемо її методом Ньютона.

Лінеаризована система алгебраїчних рівнянь на i-й ітерації має вигляд

$$\Delta i_{\mathrm{k}}^{<\mathrm{i}>} = -\mathrm{A}_{\mathrm{kzw}} \Delta i_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}>}; \tag{15}$$

$$\mathrm{A}_{\mathrm{kww}}\Delta i_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}>}=-f_{\mathrm{k1}}^{<\mathrm{i}-1>};\tag{16}$$

$$\Delta u_{\mathrm{kg}R}^{<\mathrm{i}>}=R_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}-1>}\Delta i_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}>};\tag{17}$$

$$\Delta\psi_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}>}=L_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}-1>}\Delta i_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}>};\tag{18}$$

$$\Delta u_{\mathrm{kg}C}^{<\mathrm{i}>}=D_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}-1>}\Delta q_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}>};\tag{19}$$

$$\Delta q_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}>}=\frac{h}{2}\Delta i_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}>};\tag{20}$$

$$\Delta u_{\mathrm{kg}L}^{<\mathrm{i}>}=\frac{2}{h}\Delta\psi_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}>};\tag{21}$$

$$\Delta u_{\mathrm{kg}R}^{<\mathrm{i}>}+\frac{2}{h}\Delta\psi_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}>}+\Delta u_{\mathrm{kg}C}^{<\mathrm{i}>}-\mathrm{A}_{\mathrm{kzw}}^{\mathrm{T}}\Delta\varphi_{\mathrm{k}}^{<\mathrm{i}>}-\mathrm{A}_{\mathrm{kww}}^{\mathrm{T}}\Delta\varphi_{\mathrm{kw}}^{<\mathrm{i}>}=-f_{\mathrm{k2}}^{<\mathrm{i}-1>};\tag{22}$$

$$\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{K}}\mathrm{A}_{\mathrm{kn}}\Delta i_{\mathrm{k}}^{<\mathrm{i}>}=-f_{\mathrm{n}}^{<\mathrm{i}-1>};\tag{23}$$

$$\Delta\varphi_{\mathrm{k}}^{<\mathrm{i}>}=\mathrm{A}_{\mathrm{kn}}^{\mathrm{T}}\Delta\varphi_{\mathrm{n}}^{<\mathrm{i}>},\tag{24}$$

де $\Delta i_{\mathrm{k}}^{<\mathrm{i}>}$, $\Delta i_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}>}$, $\Delta u_{\mathrm{kg}R}^{<\mathrm{i}>}$, $\Delta u_{\mathrm{kg}L}^{<\mathrm{i}>}$, $\Delta u_{\mathrm{kg}C}^{<\mathrm{i}>}$, $\Delta\varphi_{\mathrm{k}}^{<\mathrm{i}>}$, $\Delta\varphi_{\mathrm{kw}}^{<\mathrm{i}>}$, $\Delta\psi_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}>}$, $\Delta q_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}>}$, $\Delta\varphi_{\mathrm{n}}^{<\mathrm{i}>}$ – поправки невідомих i_{k}, i_{kg}, $u_{\mathrm{kg}R}$, $u_{\mathrm{kg}L}$, $u_{\mathrm{gk}C}$, φ_{k}, φ_{kw}, ψ_{kg}, q_{kg}, φ_{n} на i-й ітерації;

$$f_{\mathrm{k1}}^{<\mathrm{i}-1>}=\mathrm{A}_{\mathrm{kww}}i_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}-1>};$$

$$f_{\mathrm{k2}}^{<\mathrm{i}-1>}=u_{\mathrm{kg}R}^{<\mathrm{i}-1>}+\frac{2}{h}\psi_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}-1>}-\frac{2}{h}\psi_{\mathrm{k},-1}-u_{\mathrm{k}L,-1}+u_{\mathrm{kg}C}^{<\mathrm{i}-1>}-\mathrm{A}_{\mathrm{kzw}}^{\mathrm{T}}\varphi_{\mathrm{k}}^{<\mathrm{i}-1>}-\mathrm{A}_{\mathrm{kww}}^{\mathrm{T}}\varphi_{\mathrm{kw}}^{<\mathrm{i}-1>};\tag{25}$$

$$f_{\mathrm{n}}^{<\mathrm{i}-1>}=\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{K}}\mathrm{A}_{\mathrm{kn}}i_{\mathrm{k}}^{<\mathrm{i}-1>}$$

- нев’язки рівнянь (1), (14), (9), обчислені за $(\mathrm{i}-1)-$м наближенням $i_{\mathrm{k}}^{<\mathrm{i}-1>}$, $i_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}-1>}$, $u_{\mathrm{kg}R}^{<\mathrm{i}-1>}$, $u_{\mathrm{kg}L}^{<\mathrm{i}-1>}$, $u_{\mathrm{kg}C}^{<\mathrm{i}-1>}$, $\varphi_{\mathrm{k}}^{<\mathrm{i}-1>}$, $\varphi_{\mathrm{kw}}^{<\mathrm{i}-1>}$, $\psi_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}-1>}$, $q_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}-1>}$, $\varphi_{\mathrm{n}}^{<\mathrm{i}-1>}$ невідомих;

$$R_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}-1>}=\left.\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{kg}R}(i_{\mathrm{kg}})}{\mathrm{d}i_{\mathrm{kg}}}\right|_{i_{\mathrm{kg}}=i_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}-1>}};\quad L_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}-1>}=\left.\frac{\mathrm{d}\psi_{\mathrm{kg}R}(i_{\mathrm{kg}})}{\mathrm{d}i_{\mathrm{kg}}}\right|_{i_{\mathrm{kg}}=i_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}-1>}};\quad D_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}-1>}=\left.\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{kg}C}(q_{\mathrm{kg}})}{\mathrm{d}q_{\mathrm{kg}}}\right|_{q_{\mathrm{kg}}=q_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}-1>}}\tag{26}$$

– діагональні (в окремих випадках – особливі) матриці диференційних параметрів резисторів, котушок і конденсаторів, обчислені за $(\mathrm{i}-1)-$м наближенням невідомих, іншими словами, вони є $(\mathrm{i}-1)-$м наближенням матриць диференційних параметрів резисторів, котушок і конденсаторів.

Рівняння (22) набуває з урахуванням (17)–(21) вигляду

$$Z_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}-1>}\Delta i_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}>}=\mathrm{A}_{\mathrm{kzw}}^{\mathrm{T}}\Delta\varphi_{\mathrm{k}}^{<\mathrm{i}>}+\mathrm{A}_{\mathrm{kww}}^{\mathrm{T}}\Delta\varphi_{\mathrm{kw}}^{<\mathrm{i}>}-f_{\mathrm{k2}}^{<\mathrm{i}-1>},\tag{27}$$

де неособлива діагональна матриця

$$Z_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}-1>}=R_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}-1>}+\frac{2}{h}L_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}-1>}+\frac{h}{2}D_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}-1>}\tag{28}$$

є $(\mathrm{i}-1)-$м наближенням *матриці крокових опорів гілок* k-го БП. З рівняння (27) знаходимо

$$\Delta i_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}>}=Y_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}-1>}\mathrm{A}_{\mathrm{kzw}}^{\mathrm{T}}\Delta\varphi_{\mathrm{k}}^{<\mathrm{i}>}+Y_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}-1>}\mathrm{A}_{\mathrm{kww}}^{\mathrm{T}}\Delta\varphi_{\mathrm{kw}}^{<\mathrm{i}>}-Y_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}-1>}f_{\mathrm{k2}}^{<\mathrm{i}-1>},\tag{29}$$

де неособлива діагональна матриця

$$Y_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}-1>} = (Z_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}-1>})^{-1} \tag{30}$$

є $(\mathrm{i}-1)$ – м наближенням *матриці крокових провідностей гілок* k-го БП. Підставивши (29) у (16), отримуємо рівняння

$$Y_{\mathrm{kzw}}^{<\mathrm{i}-1>} \Delta\varphi_{\mathrm{kw}}^{<\mathrm{i}>} = -\mathrm{A}_{\mathrm{kww}} Y_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}-1>} \mathrm{A}_{\mathrm{kzw}}^{\mathrm{T}} \Delta\varphi_{\mathrm{k}}^{<\mathrm{i}>} + f_{\mathrm{kw}}^{<\mathrm{i}-1>}, \tag{31}$$

де неособлива симетрична матриця

$$Y_{\mathrm{kzw}}^{<\mathrm{i}-1>} = \mathrm{A}_{\mathrm{kww}} Y_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}-1>} \mathrm{A}_{\mathrm{kww}}^{\mathrm{T}} \tag{32}$$

є $(\mathrm{i}-1)$ – м наближенням *матриці крокових вузлово-полюсних провідностей* k-го БП;

$$f_{\mathrm{kw}}^{<\mathrm{i}-1>} = \mathrm{A}_{\mathrm{kww}} Y_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}-1>} f_{\mathrm{k2}}^{<\mathrm{i}-1>} - f_{\mathrm{k1}}^{<\mathrm{i}-1>}. \tag{33}$$

З рівняння (31) знаходимо

$$\Delta\varphi_{\mathrm{kw}}^{<\mathrm{i}>} = -(Y_{\mathrm{kzw}}^{<\mathrm{i}-1>})^{-1} \mathrm{A}_{\mathrm{kww}} Y_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}-1>} \mathrm{A}_{\mathrm{kzw}}^{\mathrm{T}} \Delta\varphi_{\mathrm{k}}^{<\mathrm{i}>} + (Y_{\mathrm{kzw}}^{<\mathrm{i}-1>})^{-1} f_{\mathrm{kw}}^{<\mathrm{i}-1>}. \tag{34}$$

Підставивши (34) до (29), отримуємо вираз

$$\begin{gathered}\Delta i_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}>} = Y_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}-1>} \mathrm{A}_{\mathrm{kzw}}^{\mathrm{T}} \Delta\varphi_{\mathrm{k}}^{<\mathrm{i}>} - Y_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}-1>} \mathrm{A}_{\mathrm{kww}}^{\mathrm{T}} (Y_{\mathrm{kzw}}^{<\mathrm{i}-1>})^{-1} \mathrm{A}_{\mathrm{kww}} Y_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}-1>} \mathrm{A}_{\mathrm{kzw}}^{\mathrm{T}} \Delta\varphi_{\mathrm{k}}^{<\mathrm{i}>} + \\ + Y_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}-1>} \mathrm{A}_{\mathrm{kww}}^{\mathrm{T}} (Y_{\mathrm{kzw}}^{<\mathrm{i}-1>})^{-1} f_{\mathrm{kw}}^{<\mathrm{i}-1>} - Y_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}-1>} f_{\mathrm{k2}}^{<\mathrm{i}-1>}.\end{gathered} \tag{35}$$

Підставивши його до (15), отримуємо формулу

$$\Delta i_{\mathrm{k}}^{<\mathrm{i}>} = Y_{\mathrm{k}}^{<\mathrm{i}-1>} \Delta\varphi_{\mathrm{k}}^{<\mathrm{i}>} + f_{\mathrm{k}}^{<\mathrm{i}-1>}, \tag{36}$$

де особлива симетрична матриця

$$Y_{\mathrm{k}}^{<\mathrm{i}-1>} = \mathrm{A}_{\mathrm{kzw}} (Y_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}-1>} \mathrm{A}_{\mathrm{kww}}^{\mathrm{T}} (Y_{\mathrm{kzw}}^{<\mathrm{i}-1>})^{-1} \mathrm{A}_{\mathrm{kww}} Y_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}-1>} - Y_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}-1>}) \mathrm{A}_{\mathrm{kzw}}^{\mathrm{T}} \tag{37}$$

є $(\mathrm{i}-1)$ – м наближенням *матриці крокових міжполюсних провідностей* k-го БП;

$$f_{\mathrm{k}}^{<\mathrm{i}-1>} = \mathrm{A}_{\mathrm{kzw}} Y_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}-1>} (f_{\mathrm{k2}}^{<\mathrm{i}-1>} - \mathrm{A}_{\mathrm{kww}}^{\mathrm{T}} (Y_{\mathrm{kzw}}^{<\mathrm{i}-1>})^{-1} f_{\mathrm{kw}}^{<\mathrm{i}-1>}). \tag{38}$$

Підставивши вираз (36) до (23), отримуємо рівняння

$$Y^{<\mathrm{i}-1>} \Delta\varphi^{<\mathrm{i}>} = f^{<\mathrm{i}-1>}, \tag{39}$$

де неособлива симетрична матриця

$$Y^{<\mathrm{i}-1>} = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{K}} \mathrm{A}_{\mathrm{kn}} Y_{\mathrm{k}}^{<\mathrm{i}-1>} \mathrm{A}_{\mathrm{kn}}^{\mathrm{T}} \tag{40}$$

є $(\mathrm{i}-1)$ – м наближенням *матриці міжвузлових крокових провідностей системи*;

$$f^{<\mathrm{i}-1>} = -f_{\mathrm{n}}^{<\mathrm{i}-1>} - \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{K}} \mathrm{A}_{\mathrm{kn}} f_{\mathrm{k}}^{<\mathrm{i}-1>}. \tag{41}$$

Алгоритм розв’язування задачі на i-й ітерації кроку інтегрування зводиться до виконання таких операцій:

- обчислення за $(\mathrm{i}-1)$ – м наближенням $i_{\mathrm{k}}^{<\mathrm{i}-1>}$, $i_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}-1>}$, $u_{\mathrm{kg}R}^{<\mathrm{i}-1>}$, $u_{\mathrm{kg}L}^{<\mathrm{i}-1>}$, $u_{\mathrm{kg}C}^{<\mathrm{i}-1>}$, $\varphi_{\mathrm{k}}^{<\mathrm{i}-1>}$, $\varphi_{\mathrm{kw}}^{<\mathrm{i}-1>}$, $\psi_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}-1>}$, $q_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}-1>}$, $\varphi_{\mathrm{n}}^{<\mathrm{i}-1>}$ невідомих i_{k}, i_{kg}, $u_{\mathrm{kg}R}$, $u_{\mathrm{kg}L}$, $u_{\mathrm{gk}C}$, φ_{k}, φ_{kw}, ψ_{kg}, q_{kg}, φ_{n} нев’язок $f_{\mathrm{k1}}^{<\mathrm{i}-1>}$, $f_{\mathrm{k2}}^{<\mathrm{i}-1>}$, $f_{\mathrm{s}}^{<\mathrm{i}-1>}$, $f_{\mathrm{kw}}^{<\mathrm{i}-1>}$, $f_{\mathrm{k}}^{<\mathrm{i}-1>}$, $f^{<\mathrm{i}-1>}$ відповідно за формулами (25), (33), (38), (41) і матриць $R_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}-1>}$, $L_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}-1>}$, $D_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}-1>}$, $Z_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}-1>}$, $Y_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}-1>}$, $Y_{\mathrm{kw}}^{<\mathrm{i}-1>}$, $Y_{\mathrm{k}}^{<\mathrm{i}-1>}$, $Y^{<\mathrm{i}-1>}$ відповідно за формулами (26), (28), (30), (32), (37), (40);

- розв'язання числовим методом лінійного векторного рівняння (39);
- обчислення поправок $\Delta\varphi_{\mathrm{k}}^{<\mathrm{i}>}$, $\Delta\varphi_{\mathrm{kw}}^{<\mathrm{i}>}$, $\Delta i_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}>}$ відповідно за формулами (24), (34), (29);
- обчислення і-го наближення векторів φ_{n}, φ_{kw}, i_{kg} відповідно за формулами

$$\varphi_{\mathrm{n}}^{<\mathrm{i}>} = \varphi_{\mathrm{n}}^{<\mathrm{i}-1>} + \Delta\varphi_{\mathrm{n}}^{<\mathrm{i}>}; \quad \varphi_{\mathrm{kw}}^{<\mathrm{i}>} = \varphi_{\mathrm{kw}}^{<\mathrm{i}-1>} + \Delta\varphi_{\mathrm{kw}}^{<\mathrm{i}>}; \quad \Delta i_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}>} = i_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}-1>} + \Delta i_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}>};$$

- обчислення і-го наближення $\varphi_{\mathrm{k}}^{<\mathrm{i}>}$, $i_{\mathrm{k}}^{<\mathrm{i}>}$, $u_{\mathrm{kg}R}^{<\mathrm{i}>}$, $\psi_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}>}$, $u_{\mathrm{kg}L}^{<\mathrm{i}>}$, $q_{\mathrm{kg}}^{<\mathrm{i}>}$, $u_{\mathrm{kg}C}^{<\mathrm{i}>}$ векторів φ_{k}, i_{k}, $u_{\mathrm{kg}R}$, ψ_{kg}, $u_{\mathrm{kg}L}$, q_{kg}, $u_{\mathrm{gk}C}$ відповідно за формулами (10), (1), (4), (5), (13), (12), (6).

Описаний алгоритм використовується в навчальному процесі при викладанні розділу "Лінійні та нелінійні багатополюсники" предмета "Теоретична електротехніка".

УДК 621.3.048: 538.552.2

І.В. Хімюк, С.С. Кокошин, Н.Х. Еркенов
Інститут електродинаміки НАН України, м. Київ,
Карачаєво-Черкеський технологичний інститут, м. Черкеськ, РФ

ВИЗНАЧЕННЯ КОЄФІЦІЄНТІВ ЕКРАНУВАННЯ ШАРУВАТОЇ СТРУКТУРИ У ЗМІННОМУ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОМУ ПОЛІ

На основі розв'язку задачі з визначення електромагнітного поля в шаруватій структурі з довільною кількістю шарів, отримані її екрануючі характеристики (коефіцієнти екранування). Аналітичні вирази для коефіцієнтів екранування шаруватої структури є узагальненням відомих співвідношень.

Because of solutions of the task under the definition of an electromagnetic field in a stratified structure with any number of stratums, are obtained it shielding performances (factors of screening). The analytical expressions for factors of screening of a stratified structure are generalization of known relations.

При створенні електротехнічного та електроенергетичного обладнання виникає необхідність у зменшенні інтенсивності змінного електромагнітного поля з метою запобігання його шкідливого впливу на роботу високочутливих елементів автоматики, ліній зв'язку, обчислювальних комплексів.

Найбільш ефективним засобом зменшення інтенсивності електромагнітних полів є екранування [1–4, 8]. Для розрахунку екрануючих характеристик (коефіцієнтів екранування) використовуються різні методи [1–5, 8]. Не вдаючись до їх аналізу, треба відмітити, що в [2, 4] розглядаються спрощені математичні моделі екрана, а в [1, 3, 8] – математичні моделі стосовно екранування окремих елементів і вузлів електротехнічного і електроенергетичного устаткування.

Електромагнітні процеси в шаруватих структурах суттєво відрізняються від процесів у однорідних середовищах. У шаруватих структурах відмічені певні ефекти [6, 8].