*моделирование систем с распределенными параметрами. – М., 1978. – 222 с. 7. Нейман Л.Р., Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники. Т. 1. – М.; Л., 1966. – 522 с. 8. Найфэ А. Введение в методы возмущений. – М., 1984. – 535 с. 9. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z преобразования. – М., 1971. – 288 с.*

**УДК 621.365.2**

**Р. Паранчук, Л. Синицький**
Львівський національний університет ім І.Франка

# ПРО УМОВИ КОНВЕРГЕНТНОСТІ ДЛЯ СИСТЕМ ДРУГОГО ПОРЯДКУ



**У роботі розглядаються критерії конвергентності розв’язків для нелінійної системи другого порядку. Проблему конвергентності зведено до дослідження стійкості рівняння другого порядку з параметричним збудженням. Розраховано критичне значення загасання для гармонічного збудження, вище якого параметричне збудження неможливе. Зроблено числовий розрахунок форми кривої, яка дає найсильніше параметричне збудження.**

**Criterions of convergention for non-linear second order system are discussed in this paper. Convergention problem was transformed to the investigation of stability of the second-order equation with parametric excitation. Critical value of damping for harmonic excitation have been calculated. The shape of the curve which gives the strongest parametric excitation have been calculated numerically.**

Проблема конвергентності роз’язків для нелінійних систем, що знаходяться під дією періодичних зовнішніх збурень, має велике практичне і теоретичне значення. Виконання цієї умови забезпечує єдиність періодичного розв’язку незалежно від початкових умов. Зрозуміло, що виконання цієї властивості забезпечує відтворення того режиму, на який розрахований проектований пристрій незалежно від умов вмикання. Для електроенерґетичних систем, так само як і для багатьох пристроїв радіоелектроніки, ця вимога є першочерговою для забезпечення надійної роботи.

Проблему конвергентності досліджували у багатьох роботах з теорії диференціяльних рівнянь, так і в теорії нелінійних електричних кіл. Відмітимо найважливіші з них [1–3].

Нижче запропоновано критерій конвергентності для систем другого порядку, який на думку авторів можна поширювати на складніші випадки.

Розглянемо систему

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\delta\frac{dx}{dt}+f(x)=F(t),\quad F(t+T)=F(t). \tag{1}$$

Нехай відомо, що (1) має періодичний розв’язок $\tilde{x}(t)$, для якого $\tilde{x}(t+T)=\tilde{x}(t)$.

Припустимо, що існує другий T-періодичний розв’язок $\bar{x}(t)$. Позначимо

$$y(t)=\bar{x}(t)-\tilde{x}(t),$$

яка теж є T-періодичною функцією. Тоді диференційне рівняння відносно y(t) має вигляд

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\delta\frac{dy}{dt} + \left[f(\tilde{x}+y) - f(\tilde{x})\right] = 0. \tag{2}$$

Якщо f(x) диференційована функція, то згідно з теоремою Лагранжа

$$f(\tilde{x}+y) - f(\tilde{x}) = f'(\tilde{x} + \theta(\tilde{x}(t))\cdot y)\cdot y,$$

де $0 \le \theta(x(t)) \le 1$ є також періодичною функцією.

Позначимо

$$\varphi(t) = f'(\tilde{x}(t) + \theta(\tilde{x}(t))\cdot y(t)).$$

Тоді, формально представимо (2) у вигляді лінійного рівняння з періодично змінними коефіцієнтами

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \varphi(t)y = 0. \tag{3}$$

Якщо (3) має асимптотично стійкий стан рівноваги, то періодичні розв'язки $\tilde{x}$ та $\bar{x}$ збігаються, тобто (1) має єдиний періодичний розв'язок. Зрозуміло, що для довільної функції $\varphi(t)$ це неможливо навіть для дуже великих значень загасання $\delta$. Тому спробуємо накласти певні обмеження на f(x), для яких можна довести асимптотичну стійкість (3). Передусім, приймаємо звичайне за таких обставин припущення, що $f'(x) > 0$ для всіх x. Це означає, що $\varphi(t)$ незалежно від закону зміни $\tilde{x}(t)$, є строго додатною.

Якщо відомо, що (1) є дисипативною системою, то на періодичні розв'язки $\tilde{x}(t)$ і $\bar{x}(t)$ можна накласти обмеження, зважаючи на розміри області дисипативності

$$|\tilde{x}(t)| < c, \quad |\bar{x}(t)| < c.$$

Тоді для $\varphi(t)$ буде справедливим обмеження

$$\varphi(t) \le M^2, \text{ де } M^2 = \max(f'(x)), (|x| < 2c). \tag{4}$$

Тоді достатня умова асимптотичної стійкості (3) зводиться до нерівності: $\delta > M$ [1].

У тому випадку, коли ця умова не виконується, можна скористатись умовою асимптотичної стійкості [4]

$$\frac{1}{T}\int_0^T \varphi(t)dt \le \frac{4\delta}{T\cdot \mathrm{th}\delta T}. \tag{5}$$

Щоб надати цьому виразу більш зрозумілий фізичний зміст, введемо поняття про середнє значення власної частоти $\omega_a^2 = \frac{1}{T}\int_0^T \varphi(t)dt$.

Далі використовуючи значення частоти зовнішнього сигналу $\omega = 2\pi/T$, представимо (5) у вигляді

$$\omega_a^2 \le \frac{2\omega\delta}{\pi\cdot \mathrm{th}2\pi\frac{\delta}{\omega}}, \text{ або } \frac{\omega_a}{\omega} \le \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{\omega}{2\pi\delta}\cdot \mathrm{th}2\pi\delta/\omega}}. \tag{6}$$

У тому випадку, коли $2\pi\frac{\delta}{\omega} << 1$, замінивши гіперболічний тангенс його арґументом приходимо до відомого критерію стійкості Ляпунова

$$\frac{\omega_a}{\omega} \le \frac{1}{\pi}.$$

Якщо скористатись наближеним значенням гіперболічного тангенса з врахуванням малих третього порядку малості

$$\mathrm{th}\alpha \approx \alpha - \frac{\alpha^3}{3},$$

умова (6) набуде вигляду

$$\frac{\omega_a}{\omega} \le \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - 13{,}16\left(\frac{\delta}{\omega}\right)^2}}. \tag{7}$$

Проте для менших значень ω, тобто для зон нестійкості, що розташовані правіше першої зони нестійкості, значення δ, що випливають з (7), стають неефективними.

З фізичних міркувань цей результат здається нерозумним, тому що при малих значеннях частоти зміни параметрів система наближається до такої, яка має постійні параметри, яка є стійкою.

Тому доцільно розглянути задачу про знаходження найгіршої форми кривої φ(t) при фіксованому максимальному значенні $0 < \varphi(t) \le M^2$ з погляду виникнення нестійкості і оцінити значення $\delta_{кр}$ вище якого нестійкість є неможливою.

З цією метою запишемо (3) у вигляді

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + M^2\overline{\varphi}(t)y = 0, \tag{3а}$$

причому

$$0 \le \overline{\varphi}(t) \le 1, \quad \overline{\varphi}(t + T) = \overline{\varphi}(t), \quad T = 2\pi/\omega,$$

де φ(t) задовольняє умову

$$\frac{1}{T}\int_0^T \overline{\varphi}(t)dt = 1.$$

У цьому випадку значення $M^2$ визначається з умови

$$M^2 = \frac{1}{T}\int_0^T \varphi(t)dt,$$

тобто попередня умова (4), без сумніву виконується.

Введемо безрозмірний час θ=Mt

Тоді (3а) набуває вигляду

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} + 2\beta\frac{dy}{d\theta} + \overline{\varphi}\left(\frac{\theta}{M}\right)y = 0, \quad \beta = \frac{\delta}{M}.$$

Тоді $\overline{\varphi}\left(\frac{\theta}{M}\right)$ є періодичною функцією, частота якої дорівнює $\nu = \omega/M$. Згідно з попереднім зауваженням треба визначити $\beta_{кр}$, вище якого параметричне збудження стає неможливим для як завгодно малих значень ω.

З цією метою був виконаний числовий розрахунок областей нестійкості для рівняння Матьє (з загасанням):

$$\ddot{y} + 2\beta\dot{y} + (1 + \cos\nu\theta)y = 0.$$

У результаті встановлено, що при ν<2

$$\beta_{кр} \approx 0{,}13\nu, \quad \text{або} \quad \delta_{кр} \approx 0{,}13\nu M.$$

Цей результат свідчить про те, що зі зменшенням $\nu$ критичне значення загасання $\delta$ спадає лінійно з $\nu$. Якщо врахувати, що $\nu = \omega/M$, маємо

$$\delta_{кр} \approx 0{,}13\omega, \tag{8}$$

тобто $\delta$кр визначається тільки частотою зовнішнього сигналу і не залежить від максимального значення M періодичного розв'язку, єдиність якого намагаємось встановити.

Зрозуміло, що необхідно встановити найбільш сприятливий закон зміни $\varphi(t)$ з погляду виникнення параметричного збудження.

З цією метою був зроблений пошук числовим методом "найгіршої" функції $\varphi(t)$, яка при згаданих обмеженнях дає найбільше значення мультиплікаторів для матриці монодромії рівняння Хілла

$$\ddot{y} + \varphi(t)y = 0.$$

Функція $\varphi(t)$ була дискретизована (100 точок на періоді $2\pi$) і за різних початкових умов методом найшвидшого спуску була знайдена функція, котра дає максимальні значення мультиплікаторів для матриці монодромії. У всіх випадках функція $\varphi(t)$ після закінчення роботи методу набирала форми прямокутника, причому максимальне і мінімальне значення встановлювалися на тому рівні, де було встановлено обмеження (0 і $M^2$ відповідно).

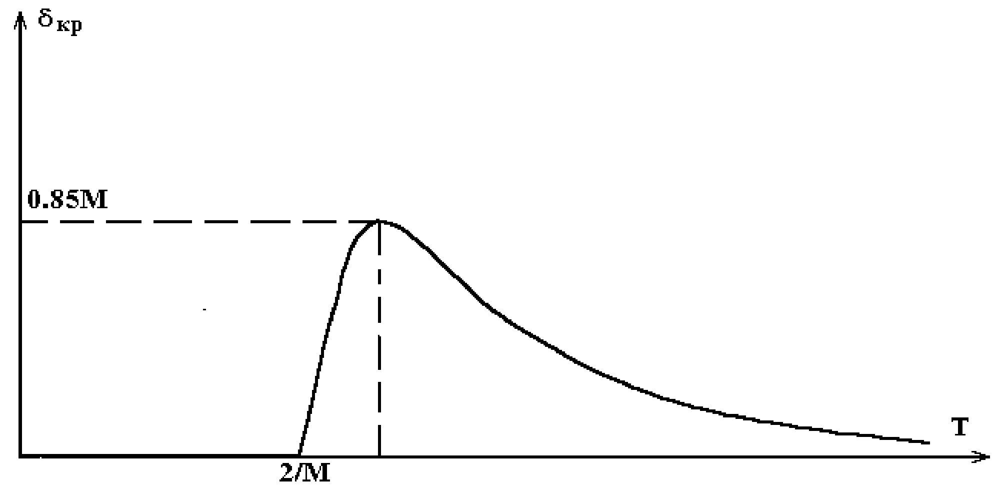
Для цієї функції критичне значення $\delta$ виявилось значно більшим за те, що дає формула (8)

$$\delta_{кр} \approx 0.05 + 0.5\omega.$$

З фізичного погляду це є зрозумілим, тому що прямокутна функція $\varphi(t)$ містить вищі гармоніки, які сприяють виникненню параметричного збудження.

На рисунку з врахуванням отриманих співвідношень побудована залежність $\delta_{кр} = f(T)$, де T – період зовнішнього збудження. До точки $T = 2/M$, згідно з критерієм Ляпунова, $\delta_{кр} = 0$, далі згідно з (7) $\delta_{кр}$ зростає до значення наближено рівного 0.85M, потім відбувається падіння $\delta_{кр}$ за гіперболічним законом, який згідно з (9) не залежить від M :

$$\delta_{кр}=0{,}05 + 3{,}14/T.$$




*Залежність $\delta_{кр} = f(T)$*

Отримані умови забезпечують єдиність періодичного режиму основної частоти. Субгармонічні коливання є неможливими тому, що вони існують в N різних модифікаціях, зміщених по фазі на кут $2\pi/N$, де N – порядок субгармонічних коливань.

Для розглянутої системи квазіперіодичні коливання також є неможливими. Це випливає з того, що рівняння кола, якщо записати його у вигляді системи третього порядку

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -f(x) - 2\delta y + F(z), \\ \dfrac{dz}{dt} = 1 \end{cases} \tag{9}$$

характерне тим, що div f(x, y, z) = -2δ не змінює знака. Тут f(x, y, z) – це вектор-функція правої частини (8). У цьому випадку, як відомо, субгармонічні коливання є неможливими.

Залишається тільки питання про можливість існування хаотичних рухів. На жаль, тут простих критеріїв не існує, тому ця проблема залишається не вирішеною.

*1. Зубов В.И. Математические методы исследования систем автоматического регулирования. – Л., 1959. 2. Данилов Л.В. Нелинейные конвергентные электрические цепи // Теоретическая электротехника: Республ. Межведомст. сб. – Львов, 1970. – № 9. – С. 23–37. 3. Плисс В.А. Нелокальные проблемы теории колебаний. – М., 1953. 4. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М., 1950. 5. Якубович В.А. Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем // Автоматика и телемеханика. – 1964. – Т. XXV. – №7.*

**УДК 621.311**

**Marian Pasko, Krzysztof Dębowski**
Silesian University of Technology, Gliwice – Poland

# SYMMETRIZATION OF ASYMMETRICAL THREE-PHASE SYSTEMS WITH PERIODIC NONSINUSOIDAL VOLTAGE SOURCE TAKING THEIR INNER IMPEDANCES INTO CONSIDERATION



**The purpose of this paper is to present the principles of symmetrization of a system supplied from three-phase periodic nonsinusoidal voltage source with asymmetrical phase impedance. Symmetrization of the system is achieved by means of connection of the symmetrization system composed of LC two-terminal networks. Their structure will be determined as a result of proper synthesis process [1, 2, 4]. In the paper, the system including three-phase asymmetrical star connected load (Fig. 2) has been taken into account. It is assumed that voltage source has the inner asymmetry impedance, i.e.:** $\bigwedge_{h} Z_{aah} \neq Z_{bbh} \neq Z_{cch}$ **and asymmetrical load is described by non-singular full matrix of admittance $\mathbf{Y_h}$ for the considered harmonics. If the system works without symmetrization its line currents** $i_a, i_b, i_c$ **are asymmetrical. With the proper symmetrization network currents become symmetrical and their RMS values and active power on source impedances become lower, but the source generates the active**