

УДК 621.311

О.А. Носко, В.Ф. Резцов, А.Ш. Еркенов
 Інститут електродинаміки НАН України

ЕЛЕКТРИЧНІ АНАЛОГИ ЗОСЕРЕДЖЕНИХ І РОЗПОДІЛЕНИХ МЕХАНІЧНИХ ПРОЦЕСІВ У СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩАХ З НЕЛІНІЙНИМИ ПАРАМЕТРАМИ ВНУТРІШНЬОГО ТЕРТЯ

© Носко О.А., Резцов В.Ф., Еркенов А.Ш., 2001

Розглянуто особливості електромеханічних аналогій моделювання нестационарних механічних процесів у середовищах з внутрішнім тертям електричними колами з дискретними та розподіленими параметрами.

It is considered the peculiarities of electromechanical analogies of the modeling of nonstationary mechanical processes in media with internal friction by electric circuits with discrete and distributed parameters.

Відомо, що дослідження внутрішнього тертя в механічних системах та середовищах, зокрема з неоднорідними якостями, потребує створення спеціалізованих установок і використання досить складного метрологічного забезпечення [1, 2]. З цієї та інших причин велику увагу приділено розробці методів математичного моделювання внутрішнього тертя, яке, як правило, базується на феноменологічних уявленнях про нелінійність інтегральних чи локальних коефіцієнтів внутрішнього тертя та (або) пружності, тобто їх залежності від зміщень та швидкостей зміщень [3, 4]. З іншого боку, у практиці дослідження механічних коливань як зосереджених, так і розподілених механічних систем з лінійними параметрами досить ефективно використовують аналогові методи моделювання механічних коливань електричними [5, 6]. Ця обставина зумовлює доцільність розглядання можливостей використання електромеханічних аналогій для моделювання коливань механічних систем з внутрішнім тертям, враховуючи ті обставини, що не завжди нелінійним механічним системам, навіть в зосередженому варіанті, можна поставити в відповідність нелінійні електричні кола, які фізично реалізуються. Крім того, відомо, що розподілені механічні системи і електричні системи можна описати різними за структурою рівняннями.

Розглянемо далі, для простоти викладення, випадок, коли внутрішнє тертя моделюється квадратично-нелінійною залежністю коефіцієнта тертя від зміщення

$$k(y) = k_0(1 + \varepsilon y^2), \quad k_0, \varepsilon - \text{const.} \quad (1)$$

Для зосередженої одновимірної системи в позначеннях роботи [3] рівняння поздовжніх коливань стрижня можна представити у вигляді

$$\ddot{y} + n_0(1 + \varepsilon y^2)\dot{y} + p^2 y = F_0 t, \quad n_0 = k_0/m, \quad p^2 = c/m. \quad (2)$$

Де y – зміщення, k_0 – коефіцієнт тертя лінійної системи, c – коефіцієнт пружності, m – маса, $F_0(t)$ – зовнішня сила. Точкою над змінною y позначається похідна за часом t ($\dot{y} = \frac{dy}{dt}$), а параметр ε характеризує ступінь квадратично нелінійної залежності коефіцієнта тертя від зміщення, тобто інтенсивність внутрішнього тертя.

Оскільки рівняння (2) є рівнянням другого порядку, то йому можна поставити в відповідність електричне коло другого порядку, тобто коло, яке складається з нелінійного опору R , лінійної індуктивності L та лінійної ємності C , причому їх можна з'єднати послідовно (рис. 1, а) і паралельно (рис. 1, б). В першому випадку з'єднання справедлива система рівнянь Кірхгофа [7]

$$\begin{aligned} u_R + u_L + u_C = u_0(t), \quad u_R = Ri_R, \quad u_L = L \frac{di_L}{dt}, \\ i_R = i_L = i_C = i(t), \quad i_C = C \frac{du_C}{dt}, \quad L, C - \text{const}, \quad R = R(i), \end{aligned} \quad (3)$$

яка призводить до рівняння другого порядку відносно струму в колі

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{L} \left[R(i) + \frac{\partial R}{\partial i} i \right] \frac{di}{dt} + \frac{1}{L} i = \frac{1}{L} \frac{du_0}{dt}. \quad (4)$$

У другому випадку справедлива система рівнянь Кірхгофа

$$\begin{aligned} i_R + i_L + i_C = i_0(t), \quad i_R = gu_R, \quad g = 1/R, \quad i_C = C \frac{du_C}{dt}, \\ u_R = u_L = u_C = u(t), \quad u_L = L \frac{di_L}{dt}, \quad L, C - \text{const}, \quad g = g(u), \end{aligned} \quad (5)$$

яка також призводить до рівняння другого порядку відносно напруги

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{1}{C} \left[g(u) + \frac{\partial g}{\partial u} u \right] \frac{du}{dt} + \frac{1}{C} u = \frac{1}{C} \frac{di_0}{dt}. \quad (6)$$

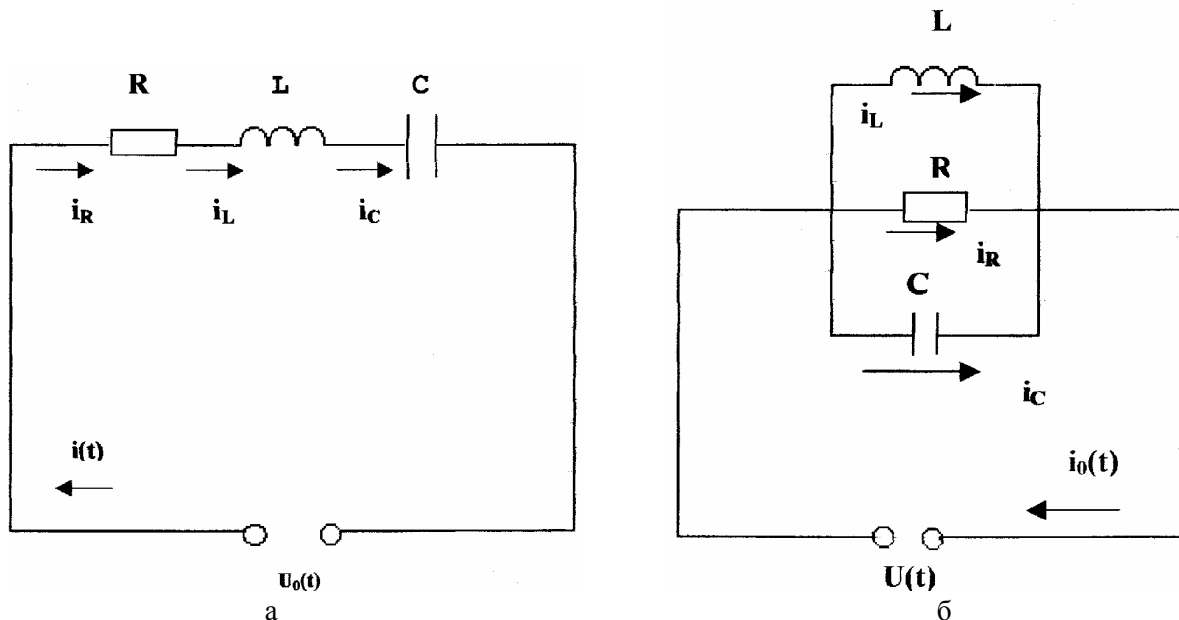


Рис. 1. Електричне коло другого порядку

З виразів (4), (6) видно, що для забезпечення моделювання квадратичної залежності (1) необхідно забезпечити квадратичний характер залежності опору від струму в (4) чи провідності від напруги в (6) того ж вигляду, що і в (1), що можна реалізувати на практиці. Проте, для більш складних залежностей $k(u)$ ця задача стає проблематичною. З цієї причини, враховуючи малість параметра ε в рівнянні (2), приведеному до безрозмірного

вигляду, відповідного малості втрат енергії на внутрішнє тертя, згідно з роботою [8]

визначимо зміщення y в рівнянні (2) в вигляді ступеневого ряду за параметром ε

$$y = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots \quad (7)$$

Підставляючи (7) в (2), приходимо до таких рівнянь для нульового, першого та другого наближень:

$$\ddot{y}_0 + n_0 \dot{y}_0 + p^2 y_0 = F_0(t), \quad (8)$$

$$\ddot{y}_1 + n_0 \dot{y}_1 + p^2 y_1 = F_1(t), \quad F_1(t) = -n_0 y_0^2 \dot{y}_0, \quad (9)$$

$$\ddot{y}_2 + n_0 \dot{y}_2 + p^2 y_2 = F_2(t), \quad F_2(t) = -n_0 (y_0^2 \dot{y}_1 + 2y_0 \dot{y}_0 y_1) \quad (10)$$

З (8)–(10) видно, що при використанні розкладення за малим параметром рівняння (2) лінеаризується, причому базова структура лівої частини кожного з рівнянь (8)–(10) залишається незмінною. Це означає, що для аналогового моделювання достатньо використати незмінний базовий аналог електричного кола, задаючи для кожного з наближень джерело живлення (напруги чи струму), зміна параметрів якого за напругою або струмом визначаються для кожного з наближень попереднім наближенням.

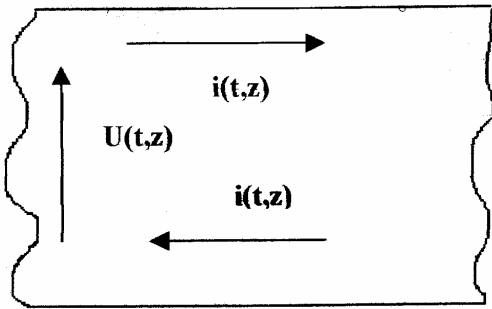


Рис. 2. Електричні кола з розподіленими параметрами

Аналогічну схему можна використати під час аналогового моделювання розподілених механічних систем, які описуються рівняннями в часткових похідних. При цьому електричним аналогом природно використати електричні кола з розподіленими параметрами (довгі лінії) [7] (рис. 2), рівняння для струму i та напруги u в яких мають вигляд

$$-\frac{\partial u}{\partial z} = ri + \frac{\partial}{\partial t}(Li), \quad -\frac{\partial i}{\partial z} = gu + \frac{\partial}{\partial t}(Cu). \quad (11)$$

Тут z – поточна довжина довгої лінії, t – час, r – погонний опір довгої лінії, g – погонна провідність довгої лінії, L – погонна індуктивність, C – погонна ємність. При $r, g, L, C = \text{const}$ з (11) витікають такі рівняння однакової структури u та i :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - LC \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (gL + rC) \frac{\partial u}{\partial t} - gru = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} - LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - (gL + rC) \frac{\partial i}{\partial t} - gri = 0. \quad (13)$$

З (12), (13) видно, що при зануленні g і r рівняння (12), (13) набувають гіперболічного вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - LC \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 i}{\partial z^2} - LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0. \quad (14)$$

При цьому не виникає ніяких проблем з моделюванням поздовжніх коливань стрижня без урахування внутрішнього тертя, яке описується системою рівнянь

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad N = EF \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (15)$$

де u – зміщення, N – напруга, x, t – просторова координата і час, ρ – щільність матеріалу, F – площа поперечного зрізу, E – модуль пружності. При $\rho, F, E = \text{const}$ система рівнянь (15) зводиться до рівнянь типу (14)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (16)$$

Як буде показано нижче, ситуація суттєво ускладнюється тоді, коли в залежності N від u враховується внутрішнє тертя [3]

$$N = EF \frac{\partial u}{\partial x} + kF \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \quad (17)$$

де k – коефіцієнт внутрішнього тертя. Навіть у найпростішому випадку при $k = \text{const}$, до якого призводить використана вище схема розкладання за малим параметром при нелінійній залежності k від зміщення чи швидкості зміщення, рівняння для u набуває вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{k}{E} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = 0. \quad (18)$$

З (18) слідує, що останній доданок в (18) представляє собою змішану похідну третього порядку і не еквівалентний останнім двом доданкам в (12), (13), що в принципі не дає можливості використати принцип електромеханічної аналогії в цьому випадку. Проте, цю трудність можна оминати, використовуючи метод комплексних амплітуд для гармонічних за часом процесів (з частотою ω_e для електричних процесів і частотою ω_m для механічних процесів). Дійсно, при використанні такого підходу, наприклад, струму $i(z,t)$ ставиться у відповідність його комплексний аналог

$$i(z,t) \Rightarrow \dot{I}_a(z) e^{j\omega_e t}, \quad j^2 = -1. \quad (19)$$

Тоді після підстановки (19) в (13) отримуємо

$$\frac{d^2 \dot{I}_a(z)}{dz^2} = \gamma_e^2 \dot{I}_a(z), \quad \gamma_e^2 = (gr - \omega_e^2 LC) + j\omega_e (gL + rC). \quad (20)$$

Аналогічно, за допомогою введення комплексної амплітуди зміщення $u(x,t)$, згідно з співвідношенням

$$u(x,t) \Rightarrow \dot{U}_a(x) e^{j\omega_m t}, \quad (21)$$

отримуємо з (18) рівняння для комплексної амплітуди $\dot{U}_a(x)$

$$\frac{d^2 \dot{U}_a}{dx^2} = \gamma_m^2 \dot{U}_a(x), \quad \gamma_m^2 = \frac{\omega_m^2 \rho / E}{1 + \omega_m^2 (k/E)^2} + \frac{\omega_m^3 \rho k / E^2}{1 + \omega_m^2 (k/E)^2}. \quad (22)$$

Видно, що структура рівняння (22) повністю збігається зі структурою рівняння (20), що і дає можливість моделювати синусоїдальні за часом процеси поздовжніх коливань

стрижнів з внутрішнім тертям електричними коливаннями в електричних колах з розподіленими параметрами.

Цікаво розглянути можливість моделювання перехідних процесів на основі використання перетворення Лапласа [9], коли функціям $f(t)$, $\frac{df}{dt}$, $\frac{d^2f}{dt^2}$ відповідають зображення

$$f(t) \Rightarrow F(s), \quad F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

$$\frac{df}{dt} \Rightarrow sF(s) - f(t=+0),$$

$$\frac{d^2f}{dt^2} \Rightarrow s^2F(s) - f(t=+0)s - \frac{df}{dt}(t=+0),$$
(23)

де s – комплексний параметр перетворення Лапласа, а $f(t=+0)$, $\frac{df}{dt}(t=+0)$ початкові значення функції f та її похідної.

Якщо застосувати перетворення (23) до рівняння (13) з нульовими початковими значеннями $i(t)$ і $\frac{di}{dt}$, то для зображення струму $I(z,s)$ отримаємо таке диференціальне рівняння:

$$\frac{d^2 I(z,s)}{dz^2} = \gamma_e^2(s) I(z,s), \quad \gamma_e^2(s) = LCs^2 + (gL + rC)s + gr. \quad (24)$$

Застосовуючи аналогічно перетворення Лапласа по комплексній змінній p для рівняння (18), приходимо до рівняння для зображення $U(x,p)$ зміщення $u(x,t)$

$$\frac{d^2 U(x,p)}{dx^2} = \gamma_m^2(p) U(x,p), \quad \gamma_m^2(p) = \frac{(\rho/E)p^2}{[1 + (k/E)p]}. \quad (25)$$

Із порівняння (25) з (24) видно, що умову електромеханічної аналогії для перехідних процесів можна виконувати тільки в тому випадку, коли $\gamma_m(p)$ буде мати структуру залежності γ_m від p , аналогічну структурі залежності γ_e від s . Аналіз показує, що це можна реалізувати лише в двох граничних випадках. Перший з них відповідає випадку сильного внутрішнього тертя $(k/E)p \gg 1$, коли $\gamma_m^2(p) = (\rho/k)p$ і це вимагає, згідно з (24), виконання умов $g = 0$, $L = 0$ або $r = 0$, $C = 0$, коли $\gamma_e^2(s)$ набуває відповідно значення rCs і gLs . Другий, більш переважний з практичного погляду випадок малого внутрішнього тертя $(k/E)p \ll 1$, коли $\gamma_m^2(p) = (\rho/E)p^2$, вимагає виконання умов $g = 0$, $r = 0$ (при цьому $\gamma_e^2(s) = LCs^2$).

На завершення відзначимо, що внаслідок еквівалентності рівнянь динаміки кручення стрижнів рівнянням динаміки їх поздовжніх коливань [3], розглянуті вище принципи електромеханічної аналогії розподілених механічних і електричних систем справедливі і для задач динаміки кручення.

1. Постников В.С. *Внутреннее трение в металлах*. – М., 1969. – 332 с. 2. Яковлев А.П. *Диссипативные свойства неоднородных материалов и систем*. – К., 1985. – 247 с. 3. Пановко Я.Г. *Внутреннее трение при колебаниях упругих систем*. – М., 1960. – 193 с. 4. Писаренко Г.С., Богинич О.Е. *Колебания кинематически возбуждаемых механических систем с учетом диссипации энергии*. – К., 1981. – 218 с. 5. Яблонский А.А., Норейко С.С. *Курс теории колебаний*. – М., 1975. – 248 с. 6. Владиславлев А.П., Мессерман А.С. *Электрическое*

моделирование систем с распределенными параметрами. – М., 1978. – 222 с. 7. Нейман Л.Р., Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники. Т. 1. – М.; Л., 1966. – 522 с. 8. Найфэ А. Введение в методы возмущений. – М., 1984. – 535 с. 9. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z преобразования. – М., 1971. – 288 с.

УДК 621.365.2

Р. Паранчук, Л. Синицький

Львівський національний університет ім І.Франка

ПРО УМОВИ КОНВЕРГЕНТНОСТІ ДЛЯ СИСТЕМ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

© Паранчук Р., Синицький Л., 2001

У роботі розглядаються критерії конвергентності розв'язків для нелінійної системи другого порядку. Проблему конвергентності зведено до дослідження стійкості рівняння другого порядку з параметричним збудженням. Розраховано критичне значення загасання для гармонічного збудження, вище якого параметричне збудження неможливе. Зроблено числовий розрахунок форми кривої, яка дає найсильніше параметричне збудження.

Criteria of convergence for non-linear second order system are discussed in this paper. Convergence problem was transformed to the investigation of stability of the second-order equation with parametric excitation. Critical value of damping for harmonic excitation have been calculated. The shape of the curve which gives the strongest parametric excitation have been calculated numerically.

Проблема конвергентності розв'язків для нелінійних систем, що знаходяться під дією періодичних зовнішніх збурень, має велике практичне і теоретичне значення. Виконання цієї умови забезпечує єдиність періодичного розв'язку незалежно від початкових умов. Зрозуміло, що виконання цієї властивості забезпечує відтворення того режиму, на який розрахований проєктований пристрій незалежно від умов вмикання. Для електроенергетичних систем, так само як і для багатьох пристроїв радіоелектроніки, ця вимога є першочерговою для забезпечення надійної роботи.

Проблему конвергентності досліджували у багатьох роботах з теорії диференціальних рівнянь, так і в теорії нелінійних електричних кіл. Відмітимо найважливіші з них [1–3].

Нижче запропоновано критерій конвергентності для систем другого порядку, який на думку авторів можна поширювати на складніші випадки.

Розглянемо систему

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + f(x) = F(t), \quad F(t+T) = F(t). \quad (1)$$

Нехай відомо, що (1) має періодичний розв'язок $\tilde{x}(t)$, для якого $\tilde{x}(t+T) = \tilde{x}(t)$.

Припустимо, що існує другий T-періодичний розв'язок $\bar{x}(t)$. Позначимо

$$y(t) = \bar{x}(t) - \tilde{x}(t),$$