УДК 530.18; 621.873.01

В.С. Ловейкін, Ю.В. Човнюк
Київський національний університет будівництва і архітектури

НЕТРИВІАЛЬНІ ЕФЕКТИ ДИСКРЕТИЗАЦІЇ ЗАДАЧ ЧИСЕЛЬНОГО АНАЛІЗУ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІКИ ВАНТАЖОПІДЙОМНИХ КРАНІВ

Розглянуті нетривіальні ефекти дискретизації задач чисельного аналізу нелінійної динаміки вантажопідйомних кранів, що пов'язані з явищем динамічного хаосу.

The nontrivial discretization's effects of the numerical analysis of nonlinear dynamics of hoisting cranes connected with a phenomenon of dynamical chaos are discussed.

Постановка проблеми. Необхідно зазначити [1, 2], що всякий реальний чисельний аналіз завжди пов'язаний із розв'язанням скінченно-різницевої задачі, яку можна подати у цьому (конкретному) випадку системою рівнянь з достатньо великою кількістю членів (N) або складових. Тому ми завжди опиняємось перед необхідністю відповіді хоча б на два дуже важкі питання: що ми втрачаємо, переходячи від певного рівняння у частинних похідних (або від звичайного диференціального рівняння) по просторових та часовій координатах до системи осциляторів (окремих часточок), і що ми можемо здобути нового при цьому переході. Порівняно довго було важко навіть уявити собі, на якому шляху потрібно шукати відповіді. Тепер ситуація змінилась, і ми під час аналізу дискретних ланцюгів зробимо надалі декілька важливих зауважень. Автори [1, 2] розглядають рівняння нелінійного маятника для кута відхилення φ від вертикалі. Відомо, що це нелінійне рівняння розв'язується у квадратурах за допомогою функцій Якобі і не має ніяких негараздів. Проте, у разі заміни похідних φ по часу t на скінченно-різницеві рівняння виникає система рівнянь, яка має стохастичні траєкторії. При тому уникнути таких розв'язків неможливо ні за яких умов.

Неадекватність переходу до скінченно-різницевого опису стає ще відчутнішою при збільшенні числа ступенів свободи. У загальному випадку дискретизація рівнянь навіть при малих значеннях τ (інтервалу розбиття часової осі) завжди призводить до появи малих областей стохастичності $\sim \exp\left(-\frac{const}{\tau}\right)$, які принципово змінюють характер рішень. На цю обставину завжди потрібно зважати. Вона визначає мінімальний ступінь якісних відмін, що виникають у разі заміни неперервної задачі на дискретну.

Аналіз останніх досліджень. Приклади утворення стохастичного прошарку у фазовій траєкторії конкретної нелінійної системи поблизу сепаратриси [1, 2] дуже зручні, щоб обговорити одне з дуже важливих принципових питань, яке виникло у період ескалації комп'ютерних методів для розв'язування різноманітних задач природознавства. У основі чисельного аналізу завжди лежать різницеві схеми, і це примушує нас переходити від диференціальних рівнянь до рівнянь у скінченних різницях.

Якою мірою ми можемо контролювати помилки за таких переходів? Це питання має давню історію. Вже при перших чисельних моделюваннях нелінійних фізичних задач почалось обговорення того, які властивості втрачаються й що нове можна здобути від введення дискретизації у неперервну задачу [3]. Значною мірою відповідь на такі питання стала можливою лише після того, як з'явилось розуміння, що у динамічних системах можливий хаос. Приклад дискретизації рівняння коливань (нелінійних) маятника дозволяє з'ясувати один універсальний та нетривіальний ефект дискретизації.

Формулювання мети роботи. Мета роботи полягає у встановленні параметрів стохастичного прошарку, який виникає внаслідок наявності потенціалу збурення, що й призводить до утворення вказаного прошарку. Для прикладу розглянуто рівняння руху нелінійного маятника, що виникає у моделі маятникових коливань вантажу, який підіймає кран, і описують його нелінійну динаміку під час пуску/гальмування системи "вантажний візок – канат – вантаж" (мостового) крана.

Виклад основного матеріалу. ***1. Дискретизація нелінійного рівняння руху маятника.*** У [4] наведено нелінійне диференціальне рівняння для фізичного маятника, яке має для відхилення $x \equiv \varphi$ від вертикалі такий вигляд (дисипація, тертя не враховані):

$$\ddot{x} + K \cdot \sin x = 0, \tag{1}$$

де $K = \dfrac{mgl}{I}$, m – маса, l – довжина виска маятника, I – його момент інерції, g – прискорення вільного падіння. Значення параметра K довільні.

Рівняння (1) розв'язується у квадратурах і немає тут ніяких неочікуваностей! Замінимо (1) кінцево-різницевим рівнянням:

$$I_{n+1} = I_n - \tau \cdot K \cdot \sin x_n, \quad x_{n+1} = x_n + \tau \cdot I_{n+1}, \tag{2}$$

де τ – інтервал розбиття осі часу й:

$$x_n \equiv x(t_n) = x(n\tau), \quad I_n \equiv I(t_n) = I(n\tau) = (x_n - x_{n-1}) / \tau.$$

Рівняння (2) має стохастичні траєкторії, які зустрічаються у стандартного відображення Чірікова – Тейлора, що виникає у багатьох задачах фізики, нелінійної механіки та математичної фізики [1–3, 5, 6]. Уникнути таких розв'язків у системі (2) неможливо, навіть якщо $\tau^2 \cdot K << 1.$ Це стає очевидним, якщо здійснити точний перехід від (2) до диференціального рівняння руху. Замість (1) маємо:

$$\ddot{x} + K \cdot \sin x \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos\left(2\pi \cdot n \cdot \frac{t}{\tau}\right) = 0. \tag{3}$$

Той член у сумі (3), що відповідає $n = 0,$ призводить до рівняння (1). Всі інші члени – "зайві"! Вони виникають завдяки використанню скінченно-різницевої схеми (2), а їхнє значення досить легко можна оцінити. Розглянемо, наприклад, перші гармоніки у (3) з $n = \pm 1.$ Відомо [1, 2], що обумовлене ними збурення руйнує сепаратрису системи (1) і утворює у її околі стохастичний прошарок. Його ширина пропорційна $\exp\left\{-1/(4\tau \cdot \sqrt{K}\right\}$ і визначає у фазовому просторі область, в якій відбувається рух з перемішуванням за будь-яких $\tau.$

Розглянемо далі рівняння (1) з погляду нетривіальних ефектів його дискретизації. Так, рівнянню (1) можна надати такої форми:

$$\ddot{x} + \omega_0{}^2 \cdot \sin x = 0, \quad K \equiv \omega_0{}^2. \tag{4}$$

У найпростішому випадку (4) замінюють рівнянням:

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} + \omega_0{}^2 \cdot (\Delta t)^2 \cdot \sin x_n = 0. \tag{5}$$

Тут Δt – тривалість часу, що є елементарним кроком різницевої схеми, а $x_n = x(n\Delta t).$

У якому ступені можемо контролювати помилки під час переходу від задачі (4) до задачі (5)? Це питання має "стародавню" історію. Вже при перших чисельних моделюваннях нелінійних фізичних задач розпочалось обговорення того, які властивості втрачаються й що нове можна придбати від введення дискретизації у неперервну задачу [3]. Значною мірою відповідь на подібні запитання стала можливою лише після того, як стало зрозуміло, що у динамічних системах можливий хаос.

Приклад дискретизації рівняння (1) або (4) дозволяє з'ясувати один універсальний й нетривіальний ефект дискретизації.

Позначимо:

$$p_n = \frac{1}{\Delta t} \cdot (x_n - x_{n-1}). \tag{6}$$

Перепишемо (5) й (6) у вигляді сумісної системи:

$$\begin{cases} p_{n+1} = p_n - \omega_0{}^2 \cdot \Delta t \cdot \sin x_n, \\ x_{n+1} = x_n + \Delta t \cdot p_{n+1}, \end{cases} \tag{7}$$

де використане позначення $\omega_0{}^2 \cdot (\Delta t)^2 << 1$.

Відображення (7) збігається з вказаним вище стандартним відображенням (Чірікова – Тейлора). Це дозволяє одразу сформулювати низку важливих результатів. Фазовий простір системи (4) має необмежене число стохастичних прошарків за довільно малих значень K.

Перехід до дискретних рівнянь еквівалентний додаванню зовнішньої періодичної сили. Необхідно зазначити, що відображення (7) породжується гамільтоніаном

$$H = \frac{1}{2} \cdot p^2 - \omega_0{}^2 \cdot \cos x \cdot \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \cos(m\nu t), \quad \nu = \frac{2\pi}{\Delta t}. \tag{8}$$

Враховуючи нерівність

$$K = \omega_0{}^2 \cdot (\Delta t)^2 << 1, \tag{9}$$

яка повинна виконуватись для підвищення точності обчислень (Δt має дуже малі значення), обмежимось у (8) тільки членами з $m = 0, \ \pm 1$. Це дає

$$\begin{cases} H = H_0 + V_{discr}, \quad H_0 = \dfrac{p^2}{2} - \omega_0{}^2 \cdot \cos x, \\ V_{discr} = -2\omega_0{}^2 \cdot \cos x \cdot \cos(\nu t). \end{cases} \tag{10}$$

З цих формул видно, що H_0 є гамільтоніаном вихідного рівняння (4), а V_{discr} – потенціал збурення, зумовлений самою процедурою дискретизації. Він призводить до утворення стохастичного прошарку з відносною шириною

$$\frac{\delta E}{E_s} = \frac{\delta E}{\omega_0{}^2} = \frac{(4\pi)^2}{2\omega_0 \cdot \Delta t} \cdot \exp\left(-\frac{\pi}{\omega_0 \cdot \Delta t} \right). \tag{11}$$

Цей простий вираз відображає новий якісний аспект дискретизації. Потенціал дискретизації V_{discr} є високої частоти $(\nu >> \omega_0)$, однак амплітуда його того самого порядку, що й амплітуда незбуреного потенціалу. Усі поправки завдяки V_{discr} малі, так само як малі поправки збурень високої частоти. Однак це твердження залишається справедливим лише для збурень інваріантних кривих, розміщених далеко від сепаратрис. У околі сепаратрис вплив V_{discr} призводить до якісно нової динаміки – до стохастичної нестійкості. За високої розмірності задачі, що розв'язується, весь фазовий простір покривається сіткою стохастичних прошарків на місці зруйнованих сепаратрис. Наявність такої сітки може надалі призводити до істотних відмінностей дискретної задачі від неперервної.

2. Приклади стохастичного прошарку як явища мінімального хаосу (аналітичний розгляд проблеми). *2.1.* Плоский маятник здійснює коливання за умови, коли його точка підвісу своєю чергою рухається горизонтально за законом $a \cdot \sin \gamma t$ [7]. У цьому разі для нормованого гамільтоніана $\dfrac{H}{m \cdot l^2}$ легко отримати вираз

$$\frac{H}{m \cdot l^2} = \frac{\dot{x}^2}{2} + \left(\frac{a}{l} \right) \cdot \omega_0{}^2 \cdot \left(\frac{\gamma}{\omega_0} \right)^2 \cdot \sin \gamma t \cdot x - \omega_0{}^2 \cdot \cos x, \quad \omega_0{}^2 \equiv K, \quad \sin x \approx x. \tag{12}$$

Тоді безрозмірна (у відносній енергетичній шкалі [1,2]) ширина стохастичного прошарку становитиме

$$\frac{\delta E}{E_s} = 2\pi \cdot \left(\frac{a}{l} \right) \cdot \left(\frac{\gamma}{\omega_0} \right)^3 \cdot ch^{-1} \left(\frac{\pi \cdot \gamma}{2\omega_0} \right). \tag{13}$$

2.2. Плоский маятник здійснює коливання за умови, коли його точка підвісу своєю чергою рухається вертикально за законом $a \cdot \cos \gamma t$ [7]. У цьому разі для нормованого гамільтоніана $\dfrac{H}{m \cdot l^2}$ легко отримати вираз

$$\frac{H}{m \cdot l^2} = \frac{\dot{x}^2}{2} - \left(\frac{a}{l}\right) \cdot \omega_0{}^2 \cdot \left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2 \cdot \cos \gamma t \cdot \cos x - \omega_0{}^2 \cdot \cos x, \quad \omega_0{}^2 \equiv K. \tag{14}$$

Тоді безрозмірна (у позначеннях [1,2] та відносній енергетичній шкалі) ширина стохастичного прошарку становитиме

$$\frac{\delta E}{E_s} = 4\pi \cdot \left(\frac{a}{l}\right) \cdot \left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^5 \cdot \frac{\exp\left(\dfrac{\pi \cdot \gamma}{2\omega_0}\right)}{sh\left(\dfrac{\pi \cdot \gamma}{\omega_0}\right)}. \tag{15}$$

Наведені результати (13) та (15) щодо параметрів стохастичного прошарку наочно демонструють нам явище мінімального хаосу. Воно полягає у тому, що у системі загального положення завжди існує область стохастичності за будь-якого завгодно малого параметра ε:

$$\varepsilon \equiv \left(\frac{a}{l}\right) \cdot \left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2. \tag{16}$$

Ця область хаосу точно локалізована. Її носієм є окіл сепаратриси. Таке твердження має значний ступінь універсальності. При цьому, звичайно, отримати ці результати можна лише аналітичним шляхом (!), як, до речі, і оцінку розмірів самої області стохастичності. У цьому випадку чисельний підхід до подібних задач і спроби "чисельно" з'ясувати області динамічного хаосу можуть внести лише зайвий безлад у дослідження явища, але ніяк не дають змогу з'ясувати істину, реальну фізичну картину явища.

Висновки. 1. Системи, які призначені для підіймання вантажу, сучасних кранів можна зарахувати до гамільтонівських. Їх чисельний аналіз заснований на різницевих схемах, що вимагає від дослідників переходити від диференціальних рівнянь до рівнянь у скінченних різницях.

2. У разі введення у неперервну задачу нелінійної динаміки вантажопідйомних кранів процедури дискретизації деякі властивості розглядуваних систем втрачаються, і, навпаки, з'являються нові, несподівані властивості. Зокрема, фазовий простір системи, яка описується точними нелінійними диференціальними рівняннями (нелінійні маятникові коливання вантажу на канаті у режимах пуску/гальмування крана) складається тільки з інваріантних кривих. Навпаки, фазовий простір системи, яка описується дискретними залежностями, що домінують у чисельному аналізі (підході), має нескінченне число стохастичних прошарків за довільно малих значень параметра дискретизації.

3. За своєю сутністю перехід до дискретних рівнянь є еквівалентним додаванню (появі) зовнішньої періодичної сили, що, своєю чергою, призводить до появи стохастичного прошарку певної відносної ширини (чисельний артефакт).

4. Поява у чисельному аналізі вказаних динамічних систем потенціалу дискретизації, який є високої частоти (порівняно з власною частотою розглядуваної системи ω_0), однак з амплітудою того самого порядку, що й амплітуда незбуреного потенціалу, призводить до незначних (малих) поправок, оскільки, зазвичай, малими є поправки збурень високої частоти. Однак подібне твердження залишається справедливим тільки для збурень інваріантних кривих, розміщених далеко від сепаратрис.

5. У околі сепаратрис вплив потенціалу дискретизації (чисельний артефакт) призводить до якісно нової динаміки розглядуваної системи – до її стохастичної нестійкості. За високої розмірності задачі, яка розв'язується чисельно, увесь фазовий простір покривається сіткою стохастичних прошарків на місці зруйнованих сепаратрис. Наявність подібної сітки може призводити до

істотних відмінностей дискретних задач від неперервних. Зокрема, стохастичні прошарки можуть перетворюватись у стохастичні моря.

6. Співіснування областей стійкості та областей хаосу у фазовому просторі системи створює значні труднощі у дослідженні саме динамічного хаосу (як чисельним, так і аналітичними методами). Ця складність проявляє себе, зокрема, вже у структурі стохастичного моря, кожний острівець стійкості в якому та його малий окіл насправді мають таку саму складну побудову цієї частини фазового простору, що й вся область (весь фазовий портрет динамічної системи), яка досліджується. Внутрішні частини вказаних острівців стійкості системи досить складні і мають дуже вузькі області типу "сандвічів" й т. д. Такого типу структури прийнято називати фрактальними. (Вони є предметом окремого досить глибокого й складного дослідження). Ієрархічна складність фазового портрета також і на спосіб його аналізу. Наприклад, стохастичний прошарок є елементом структури типу "сандвіча" (у якому області хаосу чергуються з областями стійкості), якщо розглядати не дуже велику частину фазового простору. Однак сам прошарок всередині має структуру типу "стохастичного моря". Тому опис структурних властивостей фазового простору подібних систем завжди пов'язаний або з деяким ступенем локалізації області, що описується, й з неминучою втратою інформації про області "у цілому" (ефект локалізації опису динамічної системи), або ж з деякими властивостями глобальної області (яка належить до великих за масштабом) й з неминучою втратою деякої інформації про дрібні масштаби (ефект глобалізації). Подібні міркування, на наш погляд, потрібно враховувати під час застосування різноманітних процедур дискретизації, створенні, зокрема, диференціальних спектрів і моделей нелінійних динамічних систем [8].

1. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса. – М.: Наука, 1988. – 368 с. 2. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З., Усиков Д.А., Черников А.А. Слабый хаос и квазирегулярные структуры. – М.: Наука, 1991. – 240 с. 3. Улам С.М. Нерешённые математические задачи. – М.: Наука, 1964. – 350 с. 4. Вибрации в технике: Справочник: В 6 т. / Ред. совет: В.Н. Челомей (пред.). – М.: Машиностроение, 1979. – Т. 2: Колебания нелинейных механических систем / Под ред. И.И. Блехмана. – 1979. – 351 с. 5. Заславский Г.М. Стохастичность динамических систем. – М.: Наука, 1974. – 271 с. 6. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. – М.: Мир, 1984. – 528 с. 7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.И. Теоретическая физика. Т. 1: Механика. – М.: Наука, 1965. – 204 с. 8. Пухов Г.Е. Дифференциальные спектры и модели. – К.: Наук. думка, 1990. – 184 с.