УДК 517.958:550.837

Л. Журавчак
Карпатське відділення Інституту геофізики
ім. С. І. Субботіна НАН України

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РОЗПОДІЛУ ГАРМОНІЧНОГО ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ У ПІВПРОСТОРІ З ЛОКАЛЬНОЮ НЕОДНОРІДНІСТЮ

З метою адекватнішого опису реальних процесів, що характеризують поширення у тривимірних об'єктах гармонічного електромагнітного поля (ЕМП), збудженого штучними джерелами, розглянуто півпростір із залежними від координат лише в межах локальної області електрофізичними характеристиками. Побудовано математичні моделі та розроблено числово-аналітичний підхід, який ґрунтується на поєднанні методу приграничних елементів (враховуючи його переваги щодо однорідних безмежних середовищ) з виділенням оператора, що характеризує вплив локальної області неоднорідності, подальшою дискретизацією цієї області, знаходженням невідомих компонент ЕМП у вузлах сітки після їх інтерполяції у межах елементів дискретизації.

Ключові слова: електромагнітне поле, усталені коливання, залежні від координат електрофізичні характеристики середовища, непрямий метод приграничних елементів.

In order to adequately describe real processes that characterize the spread in the crust harmonic electromagnetic field (EMF), excited by artificial sources, a inhomogeneous half-space (its electrical characteristics depend on coordinate only within the local area) is considered. The mathematical models and the numerically-analytical approach based on the combination of near-boundary element method (NBEM) with extraction of the operator that describes the influence of the local area of heterogeneity are constructed. Taking into account the advantages of the NBEM in a homogeneous infinite medium, we make discretization only in the local area and find the unknown EMF components in the grid nodes after their interpolation in the element of discretization.

Key words: electromagnetic field, unsteady oscillations, dependent on coordinates electrical characteristics of medium, indirect near-boundary element method.

Вступ

Електромагнітні (ЕМ) методи досліджень у різних прикладних галузях математичної фізики, зокрема в пошуковій геофізиці, ґрунтуються на використанні змінного електромагнітного поля (ЕМП), яке проникає в середину об'єкта, і вивченні розподілу фізичних характеристик у тілі за виміряними на його граничній поверхні компонентами ЕМП. Сьогодні гармонічно змінні в часі електромагнітні поля в однорідних та горизонтально-шаруватих моделях земної кори під дією природних та штучних зовнішніх джерел досліджені за допомогою добре розвиненої теорії спектрального аналізу. Це особливо стосується широкого класу двовимірних магнітотелуричних задач, коли зовнішнє поле задавалось у вигляді однорідного магнітного поля або плоскої однорідної хвилі. Відомі також аналітичні розв'язки задач розподілу ЕМП у порівняно простих електричних умовах для чужорідних локальних включень канонічної чи близької до неї форми у дво- та тривимірних горизонтально-шаруватих моделях. Щодо об'єктів із областями неоднорідності складної форми, які краще відображають реальну геоелектричну ситуацію, то для математичного моделювання ЕМП, збудженого штучними джерелами, останніми роками на базі сучасних швидкодіючих комп'ютерів все ширше використовують числові та числово-аналітичні методи розв’язування прямих задач геоелектрики. Застосування найпоширеніших різницевих методів [1] чи методів скінченних елементів [2] вимагає покриття сіткою всієї області, яку займає різнорідне тіло, що потребує великих об’ємів пам’яті й програм точного обернення матриць великої розмірності. Методи інтегральних рівнянь та приграничних елементів [3–9], які використовують для знаходження фізичних полів у кусково-однорідних напівбезмежних середовищах, економлять об’єм оперативної пам’яті під час роботи алгоритму внаслідок дискретизації лише граничної поверхні об’єкта, поверхонь поділу середовищ та зовнішньої приграничної до межі області.

Водночас практично важливі задачі геоелектрики (вплив зони проникнення фільтрату бурового розчину на становлення поля опущеного в свердловину диполя, вплив горизонтальних неоднорідностей у структурній електророзвідці, рудна геофізика), пов’язані з виділенням аномалій, зумовлених локальними провідниками і магнетиками, на фоні впливу вміщувальних порід, досліджені ще недостатньо. Ця робота є частковою спробою математично вирішити поставлену проблему.

Математична модель для знаходження компонент ЕМП у випадку залежності електропровідності, магнітної та діелектричної проникностей від координат

Розглянемо локально-неоднорідний півпростір, що займає область $\Omega = R^{3-} = \{(x_1, x_2, x_3): -\infty < x_1 < \infty, -\infty < x_2 < \infty, -\infty < x_3 < 0\}$ у декартовій системі координат x_1, x_2, x_3. Його електропровідність, магнітна та діелектрична проникності неперервно залежать від координат у деякій локальній області Ω_g:

$$\sigma(x) = \sigma_0 + \sigma_g(x)\chi_g(x),\ \ \mu(x) = \mu_0 + \mu_g(x)\chi_g(x),\ \ \varepsilon(x) = \varepsilon_0 + \varepsilon_g(x)\chi_g(x), \tag{1}$$

причому $x = (x_1, x_2, x_3)$, $\partial\Omega_g \cap \partial\Omega = \varnothing$, $\partial\Omega_g$, $\partial\Omega$ – межа областей Ω_g та Ω, $\sigma_g(x), \mu_g(x), \varepsilon_g(x)$ дорівнюють нулю на $\partial\Omega_g$, $\chi_g(x)$ – характеристична функція області Ω_g, тобто $\chi_g(x) = 1$, якщо $x \in \Omega_g$, $\chi_g(x) = 0$ при $x \notin \Omega_g$. На межі тіла задана крайова умова першого роду на компоненти вектора напруженості магнітного поля (МП).

Оскільки компоненти електричного та магнітного полів гармонічно змінюються у часі з кутовою частотою ω, тобто $\tilde{\mathbf{E}}(x,\tau) = \mathbf{E}(x)e^{-i\omega\tau}$, $\tilde{\mathbf{H}}(x,\tau) = \mathbf{H}(x)e^{-i\omega\tau}$, для неоднорідного півпростору рівняння Максвелла мають вигляд:

$$rot\mathbf{H}(x) = \sigma(x)\mathbf{E}(x) - i\omega\varepsilon(x)\mathbf{E}(x),\ \ rot\mathbf{E}(x) = i\omega\mu(x)\mathbf{H}(x), \tag{2}$$

$$div(\mu(x)\mathbf{H}(x)) = 0, \qquad div(\varepsilon(x)\mathbf{E}(x)) = 0, \tag{3}$$

де $\mathbf{E}(x), \mathbf{H}(x)$ – комплексні амплітуди компонент векторів напруженості електричного й магнітного полів, в яких з метою спрощення записів залежність від частоти ω опущена.

Застосувавши операцію *rot* до правої та лівої частин першого з рівнянь (2):

$$rotrot\mathbf{H}(x) = rot((\sigma(x) - i\omega\varepsilon(x))\mathbf{E}(x)),$$

використавши тотожності $rotrot\mathbf{H}(x) = -\Delta\mathbf{H}(x) + grad\ div\mathbf{H}(x)$,

$$rot(f(x)\mathbf{E}(x)) = f(x)rot\mathbf{E}(x) - \mathbf{E}(x) \times gradf(x),\ \ div(\mu(x)\mathbf{H}(x)) = \mu(x)div\mathbf{H}(x) + (\mathbf{H}(x), grad\mu(x)),$$

рівняння (2), (3) та подання (1), одержимо

$$-\Delta\mathbf{H}(x) + graddiv\mathbf{H}(x) = i\omega\mu(x)f(x)\mathbf{H}(x) - \mathbf{E}(x) \times gradf(x),\ x \in \Omega,$$

$$\Delta\mathbf{H}(x) + k_e^2\mathbf{H}(x) = -i\omega f_g(x)\mathbf{H}(x) - grad(\mathbf{H}(x), grad\ln\mu(x)) + rot\mathbf{H}(x) \times grad\ln f(x), \tag{4}$$

де $k_e^2 = \mu_0\omega(\varepsilon_0\omega + i\sigma_0)$, Δ – оператор Лапласа, $f_g(x) = \mu_g(x)(\sigma_0 - i\omega\varepsilon_0) + \mu(x)(\sigma_g(x) - i\omega\varepsilon_g(x))$, $f(x) = \sigma(x) - i\omega\varepsilon(x)$.

Розглянемо детальніше внесок кожного доданка, що входить в праву частину рівняння (4). Електричне поле (ЕП) в середовищі створюється не тільки вільними і сторонніми зарядами, але й зарядами, які виникають внаслідок поляризації речовини (поляризаційними або зв'язаними зарядами). Зв'язані заряди у речовині бувають двох типів. Заряди першого типу виникають навколо сторонніх (або вільних) зарядів, мають протилежний знак і саме тому створене ними ЕП зменшує початкове поле. Заряди другого типу виникають під дією ЕП у місцях неоднорідності середовища за $\varepsilon(x)$ [10]. Їхній вплив описують у правій частині рівняння (4) третій та перший доданки. Зрозуміло, що в однорідному ізотропному середовищі надлишкова густина зв'язаних електричних зарядів другого типу не виникає, середовище залишається нейтральним, а зв'язані заряди проявляють себе у формі неперервно розподілених диполів.

Зв'язані струми, які визначаються неоднорідною намагніченістю, подібно до зв'язаних зарядів, з одного боку, концентруються поблизу вільних і сторонніх струмів та змінюють відповідну їм величину магнітної індукції, а з іншого боку, вони виникають у місцях неоднорідності за $\mu(x)$ [10]. Їхній вплив у правій частині рівняння (4) описують всі доданки. На відміну від магнітної індукції $\mathbf{B}(x)$, напруженість магнітного поля $\mathbf{H}(x)$ визначається лише вільними і сторонніми струмами, так само як вектор електричної індукції $\mathbf{D}(x)$ – лише вільними і сторонніми зарядами (на відміну від $\mathbf{E}(x)$).

Аналогічно тому, як під час поляризації електричним полем неоднорідного по $\varepsilon(x)$ середовища в ньому виникають зв'язані поляризаційні заряди, у разі протікання струму провідності в неоднорідному за $\sigma(x)$ середовищі також виникають зв'язані заряди, але іншого походження, які називають кондуктивними [10]. Їхній вплив у правій частині рівняння (4) описують перший та третій доданки. Отже, якщо опір середовища збільшується в напрямі ЕП, то в цих місцях відбувається нагромадження зарядів, які зменшують це поле, а разом з тим і електричний струм. Як бачимо, перший та третій доданки у правій частині рівняння (4) описують взаємний вплив всіх трьох розглянутих вище явищ.

Записавши векторне рівняння (4) через скалярні компоненти і доповнивши отриману систему крайовими умовами на денній поверхні, маємо таку задачу для знаходження компонент вектора напруженості МП:

$$\Delta H_j(x) + k_e^2 H_j(x) = -i\omega f_g(x) H_j(x) - \left(\mathbf{H}(x), grad\ln\mu(x)\right)_{,j} +$$

$$+ rot_s\mathbf{H}(x)\ln f(x)_{,m} - rot_m\mathbf{H}(x)\ln f(x)_{,s},\ x\in\Omega,\ j=1,2,3, \tag{5}$$

$$H_j(x) = H_{j0}(x),\ x\in\partial\Omega, \tag{6}$$

де $g(x)_{,j} = \dfrac{\partial g(x)}{\partial x_j}$, $rot_s\mathbf{H}(x) = H_{m,j}(x) - H_{j,m}(x)$, $rot_m\mathbf{H}(x) = H_{j,s}(x) - H_{s,j}(x)$, співвідношення між індексами *j, s, m* таке: j=1, s=2, m=3; j=2, s=3, m=1; j=3, s=1, m=2.

Побудова інтегральних зображень розв'язків крайової задачі

Для знаходження розв'язків поставленої задачі використаємо непрямий метод приграничних елементів [9]. Увівши зовнішню приграничну до Ω область G з невідомими фіктивними джерелами струму $\varphi_j(x)$, замість диференційного рівняння в часткових похідних запишемо інтегральне зображення (ІЗ) розв'язку задачі (5), (6) для компонент вектора напруженості МП $H_j(x)$ та похідних від них за координатами $H_{j,k}(x)$ (k = 1, 2, 3) аналогічно [7, 8]:

$$H_j(x) = I_G(x,\Phi,\varphi_j) + i\omega I_g(x,\Phi,f_g,H_j) + \int\limits_{\Omega_g}\Phi(x,\xi)\left(\mathbf{H}(\xi),grad\ln\mu(\xi)\right)_{,j}d\Omega_g(\xi) +$$

$$+ I_g(x,\Phi,\ln f_{,m},H_{m,j}) - I_g(x,\Phi,\ln f_{,m},H_{j,m}) - I_g(x,\Phi,\ln f_{,s},H_{j,s}) + I_g(x,\Phi,\ln f_{,s},H_{s,j}), \tag{7}$$

$$H_{j,k}(x) = I_G(x,\Phi_{,k},\varphi_j) + i\omega I_g(x,\Phi_{,k}, f_g, H_j) + \int_{\Omega_g} \Phi_{,k}(x,\xi)\left(\mathbf{H}(\xi), grad \ln\mu(\xi)\right)_{,j} d\Omega_g(\xi) +$$

$$+ I_g(x,\Phi_{,k},\ln f_{,m}, H_{m,j}) - I_g(x,\Phi_{,k},\ln f_{,m}, H_{j,m}) - I_g(x,\Phi_{,k},\ln f_{,s}, H_{j,s}) + I_g(x,\Phi_{,k},\ln f_{,s}, H_{s,j}), \quad (8)$$

де $I_G(x,\Phi,\varphi) = \int_G \Phi(x,\xi)\varphi(\xi) dG(\xi)$, $I_g(x,\Phi, f, F) = \int_{\Omega_g} \Phi(x,\xi) f(\xi) F(\xi) d\Omega_g(\xi)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in R^3$, $\Phi(x,\xi)$ – фундаментальний розв'язок (ФР) рівняння Гельмольца для простору,

$$\Phi_{,j}(x,\xi) = \frac{\partial \Phi(x,\xi)}{\partial x_j}, \; \Phi(r) = \frac{\exp(irk_e)}{4\pi r}, \; r^2 = \sum_{j=1}^{3} (x_j - \xi_j)^2 .$$

Спростимо інтеграли по Ω_g, що містять похідні $H_{j,m}(\xi)$, здійснивши інтегрування частинами за формулами: $\int_{\Omega_g} \Phi(x,\xi) F_{,m}(\xi) d\Omega_g(\xi) = \int_{\partial\Omega_g} \Phi(x,\xi) F(\xi) n_m(\xi) d\partial\Omega_g(\xi) - \int_{\Omega_g} \Phi_{,m}(x,\xi) F(\xi) d\Omega_g(\xi)$, де $n_1(x), n_2(x), n_3(x)$ – компоненти зовнішньої однозначно визначеної одиничної нормалі до $\partial\Omega_g$.

Тоді замість виразів (7), (8) одержимо:

$$H_j(x) = I_G(x,\Phi,\varphi_j) + i\omega I_g(x,\Phi, f_g, H_j) + \sum_{t=1}^{3} [I_\Gamma(x,\Phi, \ln\mu_{,t} n_j, H_t) - I_g(x,\Phi_{,j}, \ln\mu_{,t}, H_t)] +$$

$$+ I_\Gamma(x,\Phi,\ln f_{,m} n_j, H_m) - I_g(x,\Phi,\ln f_{,mj}, H_m) - I_g(x,\Phi_{,j},\ln f_{,m}, H_m) -$$

$$- I_\Gamma(x,\Phi,\ln f_{,m} n_m + \ln f_{,s} n_s, H_j) + I_g(x,\Phi,\ln f_{,mm} + \ln f_{,ss}, H_j) + I_g(x,\Phi_{,m},\ln f_{,m}, H_j) +$$

$$+ I_g(x,\Phi_{,s},\ln f_{,s}, H_j) + I_\Gamma(x,\Phi,\ln f_{,s} n_j, H_s) - I_g(x,\Phi,\ln f_{,sj}, H_s) - I_g(x,\Phi_{,j},\ln f_{,s}, H_s), \quad (9)$$

$$H_{j,k}(x) = I_G(x,\Phi_{,k},\varphi_j) + i\omega I_g(x,\Phi_{,k}, f_g, H_j) + \sum_{t=1}^{3} [I_\Gamma(x,\Phi_{,k}, \ln\mu_{,t} n_j, H_t) - I_g(x,\Phi_{,jk}, \ln\mu_{,t}, H_t)] +$$

$$+ I_\Gamma(x,\Phi_{,k},\ln f_{,m} n_j, H_m) - I_g(x,\Phi_{,k},\ln f_{,mj}, H_m) - I_g(x,\Phi_{,jk},\ln f_{,m}, H_m) -$$

$$- I_\Gamma(x,\Phi_{,k},\ln f_{,m} n_m + \ln f_{,s} n_s, H_j) + I_g(x,\Phi_{,k},\ln f_{,mm} + \ln f_{,ss}, H_j) + I_g(x,\Phi_{,mk},\ln f_{,m}, H_j) +$$

$$+ I_g(x,\Phi_{,sk},\ln f_{,s}, H_j) + I_\Gamma(x,\Phi_{,k},\ln f_{,s} n_j, H_s) - I_g(x,\Phi_{,k},\ln f_{,sj}, H_s) - I_g(x,\Phi_{,jk},\ln f_{,s}, H_s), \quad (10)$$

де $f(x)_{,tj} = \partial^2 f(x) / \partial x_t \partial x_j$.

Зауважимо, що для отримання (9), (10) використано подання скалярного добутку у вигляді: $\left(\mathbf{H}(x), grad \ln\mu(x)\right) = \sum_{t=1}^{3} H_t(x) \ln\mu(x)_{,t}$ та уведено позначення: $I_\Gamma(x,\Phi, f, F) = \int_{\partial\Omega_g} \Phi(x,\xi) f(\xi) F(\xi) d\partial\Omega_g(\xi)$.

Узгоджена дискретизація області локальної неоднорідності та її межі. Інтерполяція невідомих функцій

Оскільки в праву частину рівняння (5) та інтегральні зображення (9), (10) входять невідомі $H_j(x)$, топологічно відобразимо область Ω_g та її межу $\partial\Omega_g$ на одиничний куб, а потім здійснимо узгоджену дискретизацію його внутрішньої області на елементи Ω_{gq} (q=1,…,Q) та межі на елементи Γ_v (v= 1,…,V) [7, 8]. Для інтерполяції в елементах дискретизації Ω_{gq}, Γ_v використаємо лагранжеві 27-вузлові просторові та 9-вузлові поверхневі елементи відповідно [11]:

$$I_{gq}(x,\Phi,f,F)=\int\limits_{\Omega_{gq}}\Phi(x,\xi)f(\xi)F(\xi)d\Omega_{gq}(\xi)=\int\limits_{-1}^{+1}\int\limits_{-1}^{+1}\int\limits_{-1}^{+1}\Phi(x,\xi)f(\xi)\left|J(\xi,\eta)\right|F(\xi)d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3, \quad (11)$$

$$I_{\Gamma v}(x,\Phi,f,F)=\int\limits_{\Gamma_v}\Phi(x,\xi)f(\xi)F(\xi)d\Gamma_v(\xi)=\int\limits_{-1}^{+1}\int\limits_{-1}^{+1}\Phi(x,\xi)f(\xi)\left|J_2(\xi,\zeta)\right|F(\xi)d\zeta_1 d\zeta_2, \quad (12)$$

де $J(\xi,\eta)$, $J_2(\xi,\zeta)$ – якобіани переходу від змінних ξ до η,ζ відповідно:

$$J(\xi,\eta)=\frac{\partial\xi_1}{\partial\eta_1}\left(\frac{\partial\xi_2}{\partial\eta_2}\frac{\partial\xi_3}{\partial\eta_3}-\frac{\partial\xi_3}{\partial\eta_2}\frac{\partial\xi_2}{\partial\eta_3}\right)-\frac{\partial\xi_2}{\partial\eta_1}\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial\eta_2}\frac{\partial\xi_3}{\partial\eta_3}-\frac{\partial\xi_3}{\partial\eta_2}\frac{\partial\xi_1}{\partial\eta_3}\right)+\frac{\partial\xi_3}{\partial\eta_1}\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial\eta_2}\frac{\partial\xi_2}{\partial\eta_3}-\frac{\partial\xi_2}{\partial\eta_2}\frac{\partial\xi_1}{\partial\eta_3}\right),$$

$$J_2(\xi,\zeta)=\sqrt{g_1^2(\xi,\zeta)+g_2^2(\xi,\zeta)+g_3^2(\xi,\zeta)},\ g_1(\xi,\zeta)=\frac{\partial\xi_2}{\partial\zeta_1}\frac{\partial\xi_3}{\partial\zeta_2}-\frac{\partial\xi_3}{\partial\zeta_1}\frac{\partial\xi_2}{\partial\zeta_2},$$

$$g_2(\xi,\zeta)=\frac{\partial\xi_3}{\partial\zeta_1}\frac{\partial\xi_1}{\partial\zeta_2}-\frac{\partial\xi_3}{\partial\zeta_2}\frac{\partial\xi_1}{\partial\zeta_1},\ g_3(\xi,\zeta)=\frac{\partial\xi_1}{\partial\zeta_1}\frac{\partial\xi_2}{\partial\zeta_2}-\frac{\partial\xi_2}{\partial\zeta_1}\frac{\partial\xi_1}{\partial\zeta_2}.$$

Змінні інтегрування та невідомі компоненти МП у просторовому Ω_{gq} та поверхневому Γ_v елементах дискретизації інтерполюємо за їхніми вузловими значеннями аналогічними формулами:

$$\tau_j^q=\tau_j^q(\eta)=\sum_{l_3=1}^{3}\sum_{l_2=1}^{3}\sum_{l_1=1}^{3}\beta_{l_1}(\eta_1)\beta_{l_2}(\eta_2)\beta_{l_3}(\eta_3)\tau_j^{ql_1l_2l_3}=\sum_{l=1}^{27}\phi_l(\eta)\tau_j^{ql},\ \tau\in\{\xi,H\},\ \eta=(\eta_1,\eta_2,\eta_3),$$

$$\tau_j^v=\tau_j^v(\zeta)=\sum_{l_2=1}^{3}\sum_{l_1=1}^{3}\beta_{l_1}(\zeta_1)\beta_{l_2}(\zeta_2)\tau_j^{vl_1l_2}=\sum_{n=1}^{9}\alpha_n(\zeta)\tau_j^{vn};\ \zeta=(\zeta_1,\zeta_2),\ \beta_1(\eta_j)=0.5\eta_j(\eta_j-1),$$

$$\beta_2(\eta_j)=1-\eta_j^2,\ \beta_3(\eta_j)=0.5\eta_j(\eta_j+1),\ \phi_l(\eta)=\beta_{l_1}(\eta_1)\beta_{l_2}(\eta_2)\beta_{l_3}(\eta_3)\ \text{при}$$

$$l=l_1+l_1(l_2-1)+(l_1+l_1(l_2-1))(l_3-1);\ \alpha_n(\zeta)=\beta_{l_1}(\zeta_1)\beta_{l_2}(\zeta_2)\ \text{при}\ n=l_1+l_1(l_2-1).$$

Побудова СЛАР для знаходження невідомих у вузлах сітки

Згідно з непрямим методом приграничних елементів [9] дискретизуємо приграничну область G на приграничні елементи G_n (n=1,…,N) та апроксимуємо невідомі фіктивні джерела струму в межах кожного елемента сталими d_{jn}. При цьому кожному приграничному елементу G_n відповідатиме граничний елемент $\partial\Omega_n$. Використовуючи ІЗ (9) з урахуванням (11), (12) для задоволення граничних умов у точках колокації («центрах мас» граничних елементів) та умов збігу значень $H_j(x^{ql})$, обчислених за допомогою ІЗ (9), з невідомими H_j^{ql} у вузлах елемента дискретизації, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР):

$$\sum_{n=1}^{N}d_{jn}I_{Gn}(x^h,\Phi)+i\omega\sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27}H_j^{ql}I_{gq}^l(x^h,\Phi,f_g)+\sum_{t=1}^{3}[\sum_{v=1}^{V}\sum_{n=1}^{9}H_t^{vn}I_{\Gamma v}^n(x^h,\Phi,\ln\mu_{,t}n_j)-\sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27}H_t^{ql}I_{gq}^l(x^h,\Phi_{,j},\ln\mu_{,t})]+$$

$$+\sum_{v=1}^{V}\sum_{n=1}^{9}[H_m^{vn}I_{\Gamma v}^n(x^h,\Phi,\ln f_{,m}n_j)-H_j^{vn}I_{\Gamma v}^n(x^h,\Phi,\ln f_{,m}n_m+\ln f_{,s}n_s)+H_s^{vn}I_{\Gamma v}^n(x^h,\Phi,\ln f_{,s}n_j)]+$$

$$+\sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27}[H_j^{ql}I_{gq}^{lms}(x^h,\Phi,f)-H_m^{ql}I_{gq}^{lmj}(x^h,\Phi,f)-H_s^{ql}I_{gq}^{lsj}(x^h,\Phi,f)]=H_{j0}(x^h), \quad (13)$$

$$\sum_{n=1}^{N} d_{jn} I_{Gn}(x^{pw},\Phi)+\sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27} H_j^{ql}[i\omega I_{gq}^{l}(x^{pw},\Phi, f_g)-\delta_{pq}\delta_{wl}]+$$

$$+\sum_{t=1}^{3}[\sum_{v=1}^{V}\sum_{n=1}^{9} H_t^{vn} I_{\Gamma v}^{n}(x^{pw},\Phi,\ln\mu_{,t} n_j)-\sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27} H_t^{ql} I_{gq}^{l}(x^{pw},\Phi_{,j},\ln\mu_{,t})]+$$

$$+\sum_{v=1}^{V}\sum_{n=1}^{9}[H_m^{vn} I_{\Gamma v}^{n}(x^{pw},\Phi,\ln f_{,m} n_j)-H_j^{vn} I_{\Gamma v}^{n}(x^{pw},\Phi,\ln f_{,m} n_m+\ln f_{,s} n_s)+H_s^{vn} I_{\Gamma v}^{n}(x^{pw},\Phi,\ln f_{,s} n_j)]+$$

$$+\sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27}[H_j^{ql} I_{gq}^{lms}(x^{pw},\Phi, f)- H_m^{ql} I_{gq}^{lmj}(x^{pw},\Phi, f)- H_s^{ql} I_{gq}^{lsj}(x^{pw},\Phi, f)]=0, \qquad (14)$$

де $I_{Gn}(x,\Phi)=\int\limits_{G_n}\Phi(x,\xi)dG_n(\xi)$, $x^h\in\partial\Omega_h\subset\partial\Omega$, h=1,…,N, $x^{pw}\in\Omega_g\cup\partial\Omega_g$, p=1,…,Q, w=1,…,27,

$$I_{gq}^{lms}(x,\Phi, f)=I_{gq}^{l}(x,\Phi,\ln f_{,mm}+\ln f_{,ss})+I_{gq}^{l}(x,\Phi_{,m},\ln f_{,m})+I_{gq}^{l}(x,\Phi_{,s},\ln f_{,s}),$$

$$I_{gq}^{lmj}(x,\Phi, f)=I_{gq}^{l}(x,\Phi,\ln f_{,mj})+I_{gq}^{l}(x,\Phi_{,j},\ln f_{,m}),$$

$$I_{\Gamma v}^{n}(x,\Phi, g)=\sum_{m_1=1}^{N}\sum_{m_2=1}^{N} w_{m_1} w_{m_2}\Phi(x,\xi^{ql})g(\xi^{ql})\left|J_2(\xi^{v},\zeta)\right|\alpha_n(\zeta_{1m_1},\zeta_{2m_2}), \qquad (15)$$

$$I_{gq}^{l}(x,\Phi, g)=\sum_{m_1=1}^{N}\sum_{m_2=1}^{N}\sum_{m_3=1}^{N} w_{m_1} w_{m_2} w_{m_3}\Phi(x,\xi^{ql})\ g(\xi^{ql})\left|J(\xi^{ql},\eta)\right|\phi_l(\eta_{1m_1},\eta_{2m_2},\eta_{3m_3}), \qquad (16)$$

тобто для інтегрування (11), (12) використано квадратурні формули Гаусса; N – загальна кількість точок інтегрування; $(\zeta_{1m_1},\zeta_{2m_2})$, $(\eta_{1m_1},\eta_{2m_2},\eta_{3m_3})$ – координати точки інтегрування; $w_{m_1}, w_{m_2}, w_{m_3}$ – відповідні вагові множники; якщо N=4, вони мають вигляд: $\zeta_{j1}=\eta_{j1}=-0.86114$; $\zeta_{j2}=\eta_{j2}=-0.33998$; $\zeta_{j3}=\eta_{j3}=0.33998$; $\zeta_{j4}=\eta_{j4}=0.86114$ (j=1,2,3); $w_1=w_4=0.34785$; $w_2=w_3=0.65215$.

Підставивши отримані як розв’язки системи (13), (14) H_j^{ql} у аналог (9) з урахуванням (15), (16), знайдемо значення компонент вектора напруженості МП у будь-якій точці півпростору:

$$H_j(x)=\sum_{n=1}^{N} d_{jn} I_{Gn}(x^{h},\Phi)+i\omega\sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27} H_j^{ql} I_{gq}^{l}(x,\Phi, f_g)+$$

$$+\sum_{t=1}^{3}[\sum_{v=1}^{V}\sum_{l=1}^{9} H_t^{vl} I_{\Gamma v}^{l}(x,\Phi,\ln\mu_{,t} n_j)-\sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27} H_t^{ql} I_{gq}^{l}(x,\Phi_{,j},\ln\mu_{,t})]+$$

$$+\sum_{v=1}^{V}\sum_{l=1}^{9}[H_m^{vl} I_{\Gamma v}^{l}(x,\Phi,\ln f_{,m} n_j)-H_j^{vl} I_{\Gamma v}^{l}(x,\Phi,\ln f_{,m} n_m+\ln f_{,s} n_s)+H_s^{vl} I_{\Gamma v}^{l}(x,\Phi,\ln f_{,s} n_j)]+$$

$$+\sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27}[H_j^{ql} I_{gq}^{lms}(x,\Phi, f)- H_m^{ql} I_{gq}^{lmj}(x,\Phi, f)- H_s^{ql} I_{gq}^{lsj}(x,\Phi, f)]. \qquad (17)$$

Для компонент вектора напруженості ЕП маємо такі інтегральні зображення, отримані на основі першого з рівнянь (2) та аналогу (10) :

$$\mathbf{E}(x)=\frac{1}{f(x)} rot\mathbf{H}(x), \quad E_j(x)=\frac{1}{f(x)} rot_j\mathbf{H}(x)=\frac{1}{f(x)}\left(H_{s,m}(x)-H_{m,s}(x)\right),$$

$$E_j(x)=\frac{1}{f(x)}\{\sum_{n=1}^{N}\left(d_{sn}I_{Gn}(x,\Phi_{,m})-d_{mn}I_{Gn}(x,\Phi_{,s})\right)+i\omega\sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27}(H_s^{ql}I_{gq}^{l}(x,\Phi_{,m},f_g)-H_m^{ql}I_{gq}^{l}(x,\Phi_{,s},f_g))+$$

$$+\sum_{v=1}^{V}\sum_{l=1}^{9}\sum_{t=1}^{3}H_t^{vl}I_{\Gamma vsm}^{lt}(x,\Phi,\mu)+\sum_{v=1}^{V}\sum_{l=1}^{9}[H_j^{vl}I_{\Gamma vsm}^{lj}(x,\Phi,f)-H_s^{vl}I_{\Gamma v}^{lsmj}(x,\Phi,f)+H_m^{vl}I_{\Gamma v}^{lmsj}(x,\Phi,f)]+$$

$$+\sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27}[H_s^{ql}\left(I_{gq}^{ljm}(x,\Phi_{,m},f)+I_{gq}^{lsm}(x,\Phi_{,s},f)\right)-H_j^{ql}\left(I_{gq}^{l}(x,\Phi_{,m},\ln f_{,js})-I_{gq}^{l}(x,\Phi_{,s},\ln f_{,jm})\right)-$$

$$-H_m^{ql}\left(I_{gq}^{lms}(x,\Phi_{,m},f)+I_{gq}^{lsj}(x,\Phi_{,s},f)\right)\}\,. \qquad (18)$$

де $I_{\Gamma vsm}^{lt}(x,\Phi,\mu)=I_{\Gamma v}^{l}(x,\Phi_{,m},\ln\mu_{,t}n_s)-I_{\Gamma v}^{l}(x,\Phi_{,s},\ln\mu_{,t}n_m)$,

$I_{\Gamma v}^{lsmj}(x,\Phi,f)=I_{\Gamma v}^{l}(x,\Phi_{,m},\ln f_{,j}n_j+\ln f_{,m}n_m)+I_{\Gamma v}^{l}(x,\Phi_{,s},\ln f_{,s}n_m)$.

Знаходження компонент ЕМП для дослідження впливу кондуктивних зарядів

Якщо лише електропровідність півпростору неперервно залежить від координат у деякій локальній області Ω_g, а магнітна та діелектрична проникності середовища є постійними, рівняння (5) істотно спрощується:

$$\Delta H_j(x)+k_e^2H_j(x)=-i\omega\mu_0\sigma_g(x)H_j(x)+rot_s\mathbf{H}(x)\ln f_\sigma(x)_{,m}-rot_m\mathbf{H}(x)\ln f_\sigma(x)_{,s}, \qquad (19)$$

де $f_\sigma(x)=\sigma(x)-i\omega\varepsilon_0$.

Відповідно будуть простішими СЛАР для знаходження невідомих d_{jn} та H_j^{ql} (13), (14):

$$\sum_{n=1}^{N}d_{jn}I_{Gn}(x^h,\Phi)+i\omega\mu_0\sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27}H_j^{ql}I_{gq}^{l}(x^h,\Phi,\sigma_g)+$$

$$+\sum_{v=1}^{V}\sum_{n=1}^{9}[H_m^{vn}I_{\Gamma v}^{n}(x^h,\Phi,\ln f_{\sigma,m}n_j)-H_j^{vn}I_{\Gamma v}^{n}(x^h,\Phi,\ln f_{\sigma,m}n_m+\ln f_{\sigma,s}n_s)+H_s^{vn}I_{\Gamma v}^{n}(x^h,\Phi,\ln f_{\sigma,s}n_j)]+$$

$$+\sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27}[H_j^{ql}I_{gq}^{lms}(x^h,\Phi,f_\sigma)-H_m^{ql}I_{gq}^{lmj}(x^h,\Phi,f_\sigma)-H_s^{ql}I_{gq}^{lsj}(x^h,\Phi,f_\sigma)]=H_{j0}(x^h)\,, \qquad (20)$$

$$\sum_{n=1}^{N}d_{jn}I_{Gn}(x^{pw},\Phi)+\sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27}H_j^{ql}[i\omega I_{gq}^{l}(x^{pw},\Phi,\sigma_g)-\delta_{pq}\delta_{wl}]+$$

$$+\sum_{v=1}^{V}\sum_{n=1}^{9}[H_m^{vn}I_{\Gamma v}^{n}(x^{pw},\Phi,\ln f_{\sigma,m}n_j)-H_j^{vn}I_{\Gamma v}^{n}(x^{pw},\Phi,\ln f_{\sigma,m}n_m+\ln f_{\sigma,s}n_s)+H_s^{vn}I_{\Gamma v}^{n}(x^{pw},\Phi,\ln f_{\sigma,s}n_j)]+$$

$$+\sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27}[H_j^{ql}I_{gq}^{lms}(x^{pw},\Phi,f_\sigma)-H_m^{ql}I_{gq}^{lmj}(x^{pw},\Phi,f_\sigma)-H_s^{ql}I_{gq}^{lsj}(x^{pw},\Phi,f_\sigma)]=0\,, \qquad (21)$$

і вирази для інтегральних зображень компонент МП (17) та ЕП (18):

$$H_j(x)=\sum_{n=1}^{N}d_{jn}I_{Gn}(x^h,\Phi)+i\omega\sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27}H_j^{ql}I_{gq}^{l}(x,\Phi,\sigma_g)+$$

$$+\sum_{v=1}^{V}\sum_{l=1}^{9}[H_m^{vl}I_{\Gamma v}^{l}(x,\Phi,\ln f_{\sigma,m}n_j)-H_j^{vl}I_{\Gamma v}^{l}(x,\Phi,\ln f_{\sigma,m}n_m+\ln f_{\sigma,s}n_s)+H_s^{vl}I_{\Gamma v}^{l}(x,\Phi,\ln f_{\sigma,s}n_j)]+$$

$$+\sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27}[H_j^{ql}I_{gq}^{lms}(x,\Phi,f_\sigma)-H_m^{ql}I_{gq}^{lmj}(x,\Phi,f_\sigma)-H_s^{ql}I_{gq}^{lsj}(x,\Phi,f_\sigma)]. \qquad (22)$$

$$E_j(x)=\frac{1}{f_\sigma(x)}\{\sum_{n=1}^{N}\left(d_{sn}I_{Gn}(x,\Phi_{,m})-d_{mn}I_{Gn}(x,\Phi_{,s})\right)+i\omega\sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27}(H_s^{ql}I_{gq}^{l}(x,\Phi_{,m},\sigma_g)-H_m^{ql}I_{gq}^{l}(x,\Phi_{,s},\sigma_g))+$$

$$+\sum_{v=1}^{V}\sum_{l=1}^{9}[H_j^{vl}I_{\Gamma vsm}^{lj}(x,\Phi,f_\sigma)-H_s^{vl}I_{\Gamma v}^{lsmj}(x,\Phi,f_\sigma)+H_m^{vl}I_{\Gamma v}^{lmsj}(x,\Phi,f_\sigma)]+$$

$$+\sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27}[H_s^{ql}\left(I_{gq}^{ljm}(x,\Phi_{,m},f_\sigma)+I_{gq}^{lsm}(x,\Phi_{,s},f_\sigma)\right)-H_j^{ql}\left(I_{gq}^{l}(x,\Phi_{,m},\ln f_{\sigma,js})-I_{gq}^{l}(x,\Phi_{,s},\ln f_{\sigma,jm})\right)-$$

$$-H_m^{ql}\left(I_{gq}^{lms}(x,\Phi_{,m},f_\sigma)+I_{gq}^{lsj}(x,\Phi_{,s},f_\sigma)\right)\}. \qquad (23)$$

Знаходження компонент ЕМП для дослідження впливу магнітної поляризованості

Якщо лише магнітна проникність півпростору неперервно залежить від координат у деякій локальній області Ω_g, а електропровідності та діелектрична проникність середовища є постійними, то рівняння (5) запишемо так:

$$\Delta H_j(x)+k_e^2H_j(x)=-\frac{k_e^2}{\mu_0}\mu_g(x)H_j(x)-\left(\mathbf{H}(x),grad\ln\mu(x)\right)_{,j},\ x\in\Omega,j=1,2,3, \qquad (24)$$

СЛАР для знаходження невідомих d_{jn} та H_j^{ql} (13), (14) і вирази для інтегральних зображень компонент ЕМП (17), (18) мають вигляд:

$$\sum_{n=1}^{N}d_{jn}I_{Gn}(x^h,\Phi)+\frac{k_e^2}{\mu_0}\sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27}H_j^{ql}I_{gq}^{l}(x^h,\Phi,\mu_g)+$$

$$+\sum_{t=1}^{3}[\sum_{v=1}^{V}\sum_{n=1}^{9}H_t^{vn}I_{\Gamma v}^{n}(x^h,\Phi,\ln\mu_{,t}n_j)-\sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27}H_t^{ql}I_{gq}^{l}(x^h,\Phi_{,j},\ln\mu_{,t})]=H_{j0}(x^h), \qquad (25)$$

$$\sum_{n=1}^{N}d_{jn}I_{Gn}(x^{pw},\Phi)+\sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27}H_j^{ql}[\frac{k_e^2}{\mu_0}I_{gq}^{l}(x^{pw},\Phi,\mu_g)-\delta_{pq}\delta_{wl}]+$$

$$+\sum_{t=1}^{3}[\sum_{v=1}^{V}\sum_{n=1}^{9}H_t^{vn}I_{\Gamma v}^{n}(x^{pw},\Phi,\ln\mu_{,t}n_j)-\sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27}H_t^{ql}I_{gq}^{l}(x^{pw},\Phi_{,j},\ln\mu_{,t})]=0, \qquad (26)$$

$$H_j(x)=\sum_{n=1}^{N}d_{jn}I_{Gn}(x^h,\Phi)+\frac{k_e^2}{\mu_0}\sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27}H_j^{ql}I_{gq}^{l}(x,\Phi,\mu_g)+$$

$$+\sum_{t=1}^{3}[\sum_{v=1}^{V}\sum_{l=1}^{9}H_t^{vl}I_{\Gamma v}^{l}(x,\Phi,\ln\mu_{,t}n_j)-\sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27}H_t^{ql}I_{gq}^{l}(x,\Phi_{,j},\ln\mu_{,t})]. \qquad (27)$$

$$E_j(x)=\frac{1}{\sigma_0-i\omega\varepsilon_0}\{\sum_{n=1}^{N}\left(d_{sn}I_{Gn}(x,\Phi_{,m})-d_{mn}I_{Gn}(x,\Phi_{,s})\right)+$$

$$+\frac{k_e^2}{\mu_0}\sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27}(H_s^{ql}I_{gq}^{l}(x,\Phi_{,m},\mu_g)-H_m^{ql}I_{gq}^{l}(x,\Phi_{,s},\mu_g))+\sum_{v=1}^{V}\sum_{l=1}^{9}\sum_{t=1}^{3}H_t^{vl}I_{\Gamma vsm}^{lt}(x,\Phi_{,m},\mu)\}. \qquad (28)$$

Знаходження компонент ЕМП для дослідження впливу викликаної поляризації

Якщо лише діелектрична проникність півпростору неперервно залежить від координат у деякій локальній області Ω_g, а електропровідність та магнітна проникність середовища є постійними, рівняння (5) мають вигляд:

$$\Delta H_j(x)+k_e^2H_j(x)=-\omega^2\mu_0\varepsilon_g(x)H_j(x)-i\omega\left[rot_s\mathbf{H}(x)\ln f_\varepsilon(x)_{,m}-rot_m\mathbf{H}(x)\ln f_\varepsilon(x)_{,s}\right], \qquad (29)$$

де $f_\varepsilon(x)=\sigma_0-i\omega\varepsilon(x)$.

СЛАР для знаходження невідомих d_{jn} та H_j^{ql} (13), (14) і вирази для інтегральних зображень компонент ЕМП (17), (18) запишемо так:

$$\sum_{n=1}^{N} d_{jn} I_{Gn}(x^h,\Phi) + \omega^2\mu_0 \sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27} H_j^{ql} I_{gq}^{l}(x^h,\Phi,\varepsilon_g) +$$

$$+\sum_{v=1}^{V}\sum_{n=1}^{9}[H_m^{vn} I_{\Gamma v}^{n}(x^h,\Phi,\ln f_{\varepsilon,m} n_j) - H_j^{vn} I_{\Gamma v}^{n}(x^h,\Phi,\ln f_{\varepsilon,m} n_m + \ln f_{\varepsilon,s} n_s) + H_s^{vn} I_{\Gamma v}^{n}(x^h,\Phi,\ln f_{\varepsilon,s} n_j)] +$$

$$+\sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27}[H_j^{ql} I_{gq}^{lms}(x^h,\Phi,f_\varepsilon) - H_m^{ql} I_{gq}^{lmj}(x^h,\Phi,f_\varepsilon) - H_s^{ql} I_{gq}^{lsj}(x^h,\Phi,f_\varepsilon)] = H_{j0}(x^h)\,, \quad (30)$$

$$\sum_{n=1}^{N} d_{jn} I_{Gn}(x^{pw},\Phi) + \sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27} H_j^{ql} [\omega^2\mu_0 I_{gq}^{l}(x^{pw},\Phi,\varepsilon_g) - \delta_{pq}\delta_{wl}] +$$

$$+\sum_{v=1}^{V}\sum_{n=1}^{9}[H_m^{vn} I_{\Gamma v}^{n}(x^{pw},\Phi,\ln f_{\varepsilon,m} n_j) - H_j^{vn} I_{\Gamma v}^{n}(x^{pw},\Phi,\ln f_{\varepsilon,m} n_m + \ln f_{\varepsilon,s} n_s) + H_s^{vn} I_{\Gamma v}^{n}(x^{pw},\Phi,\ln f_{\varepsilon,s} n_j)] +$$

$$+\sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27}[H_j^{ql} I_{gq}^{lms}(x^{pw},\Phi,f_\varepsilon) - H_m^{ql} I_{gq}^{lmj}(x^{pw},\Phi,f_\varepsilon) - H_s^{ql} I_{gq}^{lsj}(x^{pw},\Phi,f_\varepsilon)] = 0\,, \quad (31)$$

$$H_j(x) = \sum_{n=1}^{N} d_{jn} I_{Gn}(x^h,\Phi) + \omega^2\mu_0 \sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27} H_j^{ql} I_{gq}^{l}(x,\Phi,\varepsilon_g) +$$

$$+\sum_{v=1}^{V}\sum_{l=1}^{9}[H_m^{vl} I_{\Gamma v}^{l}(x,\Phi,\ln f_{\varepsilon,m} n_j) - H_j^{vl} I_{\Gamma v}^{l}(x,\Phi,\ln f_{\varepsilon,m} n_m + \ln f_{\varepsilon,s} n_s) + H_s^{vl} I_{\Gamma v}^{l}(x,\Phi,\ln f_{\varepsilon,s} n_j)] +$$

$$+\sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27}[H_j^{ql} I_{gq}^{lms}(x,\Phi,f_\varepsilon) - H_m^{ql} I_{gq}^{lmj}(x,\Phi,f_\varepsilon) - H_s^{ql} I_{gq}^{lsj}(x,\Phi,f_\varepsilon)]\,. \quad (32)$$

$$E_j(x) = \frac{1}{f(x)}\{\sum_{n=1}^{N}\left(d_{sn} I_{Gn}(x,\Phi_{,m}) - d_{mn} I_{Gn}(x,\Phi_{,s})\right) + \omega^2\mu_0 \sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27}(H_s^{ql} I_{gq}^{l}(x,\Phi_{,m},\varepsilon_g) - H_m^{ql} I_{gq}^{l}(x,\Phi_{,s},\varepsilon_g)) +$$

$$+\sum_{v=1}^{V}\sum_{l=1}^{9}[H_j^{vl} I_{\Gamma vsm}^{lj}(x,\Phi,f_\varepsilon) - H_s^{vl} I_{\Gamma v}^{lsmj}(x,\Phi,f_\varepsilon) + H_m^{vl} I_{\Gamma v}^{lmsj}(x,\Phi,f_\varepsilon)] +$$

$$+\sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27}[H_s^{ql}\left(I_{gq}^{ljm}(x,\Phi_{,m},f_\varepsilon) + I_{gq}^{lsm}(x,\Phi_{,s},f_\varepsilon)\right) - H_j^{ql}\left(I_{gq}^{l}(x,\Phi_{,m},\ln f_{\varepsilon,js}) - I_{gq}^{l}(x,\Phi_{,s},\ln f_{\varepsilon,jm})\right) -$$

$$- H_m^{ql}\left(I_{gq}^{lms}(x,\Phi_{,m},f_\varepsilon) + I_{gq}^{lsj}(x,\Phi_{,s},f_\varepsilon)\right)\}\,. \quad (33)$$

Висновки

У статті розглянуто теоретичні та методичні аспекти відшукання компонент напруженості гармонічного ЕМП у півпросторі з локальною неоднорідністю довільної форми. Без уведення потенціалів електричного чи магнітного типів обґрунтовано ефективність поєднання непрямого методу пригpаничних лементів з методом зважених нев'язок для побудови числово-аналітичного розв'язку задачі про усталені коливання ЕМП у локально-неоднорідному півпросторі з урахуванням залежності усіх його електрофізичних характеристик від трьох декартових координат. Побудовано дискретно-континуальні моделі, що враховують окремий вплив залежності від координат електропровідності, магнітної та діелектричної проникності на поширення ЕМП, які дадуть змогу вивчати процеси виникнення кондуктивних зарядів, викликаної поляризації та магнітної поляризованості (намагніченості).

Побудовані математичні моделі (5), (13), (14), (17), (18), (19)–(23), (24)–(28), (29)–(33) та розроблена числово-аналітична методика істотно зменшують похибки, пов'язані з апроксимацією крайової задачі, оскільки внаслідок застосування фундаментального розв'язку абсолютно точно задовольняється вихідне рівняння (5) в області $\mathbf{R}^{3-} \setminus \Omega_g$. Похибки, спричинені операціями дискретизації та числового інтегрування (як показує досвід застосування аналогічного підходу до задач теплопровідності та електромагнетизму у кусково-однорідних об'єктах [12, 13]) не впливатимуть суттєво і є достатньо контрольованими (наприклад, ітераційними методами) внаслідок довільності вибору кількості елементів дискретизації *N* та *Q*. Це дає підстави вважати, що комп'ютерна реалізація алгоритму дасть змогу моделювати ЕМП штучного походження з високим ступенем точності, що і ми плануємо зробити в подальших дослідженнях. Одержані розв'язки прямих тривимірних задач стануть основою для розроблення підходів до виявлення у земній корі локальних чужорідних включень, визначення їх фізичних характеристик і геометричних параметрів, тобто до розв'язування обернених задач.

1. Fomenko E. Y. and Mogi T. A new computation method for a staggered grid of 3D EM field conservative modeling: Earth, Planets and Space, 2002, 54, 499–509. 2. Badea E. A., Everett M. E., Newman G. A. and Biro O. Finite-element analysis of controlled-source electromagnetic induction using Coulomb-gauged potentials: Geophysics, 2001, 66, 786–799. 3. Табаровский Л. А. Применение метода интегральных уравнений в задачах геоэлектрики. – Новосибирск: Наука, 1975. – 140 с. 4. Dmitriev V. I. and Nesmeyanova N. I. Integral equation method in three-dimensional problems of low-frequency electrodynamics: Computat. Math. Modeling, New-York: Plenum Pub. Corp., 1992, 3, 313–317. 5 Avdeev D. B., Kuvshinov A. V., Pankratov O. V. and Newman G. A. Three-dimensional induction logging problems, Part I: An integral equation solution and model comparisons: Geophysics, 2002, 67, 413–426. 6. Paulsen K. D., Linch D. R. and Strohbehn J. W. Three-dimensional finite, boundary, and hybrid element solutions of the Maxwell equations for lossy dielectric media: IEEE Trans. Microwave Theory Tech., 1988, 36, 682–693. 7. Журавчак Л. М. Моделювання неусталеного електромагнітного поля у провідному півпросторі з локальною неоднорідністю // Геофіз. журнал, 2002. – Т. 24, № 5. – С. 120–126. 8. Журавчак Л. М. Квазістаціонарна модель для визначення напружености магнітного поля у локально-неоднорідному напівпросторі // Праці НТШ. Геофізика. – Львів, 2006. – Т. XVII. – С. 36–46. 9. Журавчак Л. М., Грицько Є. Г. Метод приграничних елементів у прикладних задачах математичної фізики. – Львів: Карпатське відділення Інституту геофізики НАН України, 1996. – 220 с. 10. Светов Б. С. Основы геоэлектрики. – М.: Изд-во ЛКИ, 2008. – 656 с. 11. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. – М.: Мир, 1987. – 524 с. 12. Журавчак Л., Грицько Б., Крук О. Чисельно-аналітичний підхід до розрахунку теплових полів з урахуванням термочутливості матеріалу середовища та мішаних крайових умов // Доповіді НАН України. – 2014. – №. 12. – С. 51–57. 13. Журавчак Л., Забродська Н. Математичне моделювання ефекту викликаної поляризації у тривимірних задачах геоелектророзвідки // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". Сер. "Комп'ютерні науки та інформаційні технології". – Львів, 2009. – № 650.– С. 158–167.