УДК 004.932.72’1

С. В. Хламов[1], В. Є. Саваневич[1,2], А. Б. Брюховецький[3], С. С. Оришич[2]
[1]Харківський національний університет радіоелектроніки,
[2]Ужгородський національний університет,
[3] Представник Державного космічного агентства України

ПІДСТАНОВОЧНИЙ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИЙ МЕТОД МАКСИМАЛЬНО ПРАВДОПОДІБНОГО ВИЯВЛЕННЯ НЕНУЛЬОВОГО ВИДИМОГО РУХУ ОБ’ЄКТІВ НА СЕРІЇ ПЗЗ-КАДРІВ

Розроблено підстановочний обчислювальний метод максимально правдоподібного виявлення ненульового видимого руху об’єктів на серії ПЗЗ-кадрів. Розглянуто випадки з відомою та невідомою дисперсією вимірювань положень об’єктів на кадрах, а також з використанням зовнішньої її оцінки. Для використання синтезованих вирішальних правил попередньо оцінюють параметри видимого руху об’єктів, що спостерігаються, і відповідні їм інтерпольовані координати на досліджуваних кадрах.

Ключові слова: серія ПЗЗ-кадрів, виявлення ненульового видимого руху об’єкта, МНК-оцінка параметрів видимого руху об’єкта, вимірювання положення об’єкта, астероїди.

This article is about the designed substitutional computation method for maximum-likelihood detection of the object’s nonzero apparent motion on the series of CCD frames. The article describes the cases with known, unknown variance of object's position measurements on the CCD frames and using its external evaluation. Parameters of observed object's apparent motion should be previously estimated for using the synthesized decision rules. Also the corresponding interpolated coordinates on the investigated frames should be determined.

Key words: series of CCD frames, detection of object’s nonzero apparent motion, *OLS*-evaluation of parameters of object’s apparent motion, position measurements of the object, asteroids.

Вступ

У зв’язку з проблематикою астероїдно-кометної безпеки [1, 2] астероїдні спостереження з автоматичною обробкою їх результатів у наш час є значущим напрямом астрометрії. Астероїди спостерігаються на фоні великої кількості зірок і виявляються на підставі того, що вони, на відміну від зірок, переміщуються, мають ненульовий видимий рух.

Актуальним є розроблення обчислювального методу виявлення об’єктів з ненульовим видимим рухом, який дасть змогу виявляти зазначені об’єкти з ненульовим видимим рухом.

Мета роботи

Метою статті є розроблення підстановочного обчислювального методу максимально правдоподібного виявлення ненульового видимого руху об’єктів на серії ПЗЗ-кадрів у випадках з відомою та невідомою дисперсією вимірювань положень об’єктів на кадрах, а також з використанням зовнішньої її оцінки. Розроблюваний метод повинен враховувати основні особливості формування вимірювань об’єктів з ненульовим видимим рухом.

Постановка задачі

Спостереження об’єктів Сонячної системи (ССО) здійснюється за допомогою телескопа, обладнаного ПЗЗ-матрицею [3]. Поряд із зображеннями ССО на кадрах спостерігаються зображення зірок. Небесні об’єкти, які не належать Сонячній системі, мають нульову швидкість видимого руху. ССО, як правило, мають ненульову швидкість видимого руху.

Необхідно розробити вирішальне правило виявлення ненульового видимого руху об'єктів, що досліджуються, ґрунтуючись на аналізі сукупності вимірювань Ω_{set}, сформованої на серії кадрів, не більше ніж по одному вимірюванню на одному кадрі.

Тобто пропонується гіпотеза H_0 про те, що серія вимірювань досліджуваного об'єкта відповідає об'єкту з нульовою швидкістю видимого руху:

$$H_0 : \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 0, \tag{1}$$

де V_x, V_y – швидкості видимого руху об'єкта, що досліджується, за відповідними координатами.

Також висувається складна альтернатива H_1 про те, що досліджуваний об'єкт на серії вимірювань має ненульовий видимий рух:

$$H_1 : \sqrt{V_x^2 + V_y^2} > 0. \tag{2}$$

Об'єкти зі значним видимим рухом легко виявити будь-якими методами виявлення траєкторій (методами міжкадрової обробки) [4–6]. Проблема полягає у виявленні рухомих об'єктів з близькою до нульової швидкості видимого руху. Крім того, з урахуванням практичних особливостей розв'язання зазначеної задачі, підвибірка вимірювань, не більше ніж по одному з кожного кадру, віднесених до одного і того ж об'єкта, попередньо вже сформована. Ця підвибірка відповідає гіпотетичному об'єкту.

На момент кожного з вимірювань серії, що досліджується, невідомі: значення істинного положення об'єкта; вимірювання положення об'єкта на кадрі; також можуть бути отримані інтерпольовані (згідно з МНК-оцінками параметрів видимого руху) координати об'єкта, що досліджується.

Аналіз літератури

Традиційно гіпотези, подібні до гіпотез H_0 (1) і H_1 (2) [7], перевіряють за критерієм максимальної правдоподібності [8, 9] або яким-небудь іншим критерієм байєсівської групи [8] (максимумом апостеріорної ймовірності [8], мінімаксу [10], мінімального середнього ризику [10]) або критерію Неймана–Пірсона [10].

Для всіх перерахованих критеріїв [8, 10] достатньою статистикою мінімального об'єму є відношення правдоподібності, яке порівнюють із критичними значеннями, вибраними відповідно до заданого критерію [8, 10]. Якщо неможливо обґрунтувати апріорні ймовірності гіпотез і втрати, пов'язані з помилковим прийняттям рішення про справедливість тієї чи іншої гіпотези, розробник може використовувати тільки критерії максимальної правдоподібності [9] або Неймана–Пірсона.

У разі наявності апріорно невідомих параметрів функції правдоподібності у межах розглянутих гіпотез їх оцінюють за тією самою вибіркою, за якою перевіряють гіпотези. У фаховій літературі з математичної статистики подібні правила називаються підстановочними правилами перевірки гіпотез [10, 11]. У технічній літературі такі правила найчастіше називаються правилами «виявлення–вимірювання» [12].

У підстановочному вирішальному правилі або вирішальному правилі «виявлення–вимірювання» процедурі «виявлення» передує процедура «вимірювання». Це загальний принцип розв'язання задачі змішаної оптимізації з дискретними та неперервними параметрами [13, 14].

Якщо виконується оптимізація за дискретними та неперервними параметрами, то для кожного дискретного параметра (об'єкт має нульовий або ненульовий видимий рух) знаходять найкращі значення неперервного параметра (положення або початкове положення і швидкість видимого руху об'єкта). Вирішальні статистики гіпотез, що відповідають різним значенням дискретних параметрів, порівнюють між собою після оптимізації умовних функцій правдоподібності за значенням їхніх неперервних параметрів.

Модель видимого руху

Моделлю видимого руху (проекції траєкторії видимого руху об'єкта на фокальну площину телескопа) будь-якого ССО за час формування серії вимірювань, що досліджується, достовірно вважати модель прямолінійного та рівномірного руху об'єкта уздовж кожної координати незалежно:

$$x_n(\theta_x) = x_0 + V_x(\tau_n - \tau_0); \tag{3}$$

$$y_n(\theta_y) = y_0 + V_y(\tau_n - \tau_0), \tag{4}$$

де x_0, y_0 – координати положення об'єкта, що досліджується, на момент часу τ_0 прив'язки базового кадру серії вимірювань; $x_n(\theta_x)$, $y_n(\theta_y)$ – координати положення об'єкта, що досліджується, на момент часу τ_n; θ_x, θ_y – вектори параметрів видимого руху об'єкта, що досліджується, по кожній координаті.

Вектори θ_x, θ_y містять в собі координати x_0, y_0 положення об'єкта, що досліджується, на момент часу τ_0 і швидкості V_x, V_y його видимого руху вздовж кожної координати:

$$\theta_x = \left(x_0, V_x\right)^T; \tag{5}$$

$$\theta_y = \left(y_0, V_y\right)^T. \tag{6}$$

Основні особливості формування вимірювань об'єктів з ненульовим видимим рухом

Зображення небесних об'єктів формується у фокальній площині телескопа, результатом чого є ПЗЗ-кадр. За результатами спостережень однієї ділянки небесної сфери формується серія з N_{fr} вимірювань з часом прив'язки n_{fr}-го кадру серії τ_n. Один з кадрів серії називається базовим, а час його прив'язки вважається τ_0.

У процесі внутрішньокадрової обробки n_{fr}-го кадру, що досліджується, виявлено зображення об'єкта. Цим об'єктом може бути або астероїд, або зірка, нерухома на серії вимірювань (з нульовим видимим рухом).

Зображення астероїда на одному кадрі нічим не відрізняється від зображення зірки, яка міститься на цій частині небесної сфери.

Результати внутрішньокадрової обробки по одному об'єкту одного кадру подаються у вигляді вимірювання Y_{in} (i-те вимірювання n_{fr}-го кадру). У загальному випадку i-те вимірювання n_{fr}-го кадру містить оцінки координат $Y_{Kin} = \{x_{in}; y_{in}\}$ та блиску A_{in} об'єкта: $Y_{in} = \{Y_{Kin}; A_{in}\}$. Також Y_{Kin} називають позиційним вимірюванням, а A_{in} – фотометричним вимірюванням.

У роботі використана прямокутна система координат (СК) ПЗЗ-кадру з центром у лівому нижньому кутку ПЗЗ-кадру. Вважається, що всі вимірювання положення об'єкта, що досліджується, попередньо зведені в СК базового ПЗЗ-кадру.

Серія вимірювань (не більше ніж по одному з кадру), що гіпотетично належать одному об'єкту, матиме такий вигляд:

$$\begin{aligned}\Omega_{set} &= (Y_{K1(i,1)}, \ldots, Y_{Kk(i,n)}, \ldots, Y_{KNmea(i,Nfr)}) = \\ &= ((x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k), \ldots, (x_{Nmea}, y_{Nmea})),\end{aligned} \tag{7}$$

де $k(i,n) = k$ – номер вимірювання у серії вимірювань об'єкта, що досліджується, яке є i-м вимірюванням n_{fr}-го кадру серії, яке гіпотетично належить досліджуваному об'єкту; x_k, y_k – вимірювання (оцінка) положення об'єкта, що міститься в k-му вимірюванні серії; N_{mea} – кількість вимірювань положення об'єкта, що досліджується, на N_{fr} кадрах.

Вимірювання Y_k, що належать серії вимірювань Ω_{set} (7) об'єкта, що досліджується, відібрані не більше ніж по одному вимірюванню з кадру. Існує можливість того, що вимірювання положення об'єкта, що досліджується, будуть формуватися не на всіх N_{fr} кадрах. Тому кількість вимірювань, які стосуються досліджуваного об'єкта, у цій серії вимірювань в загальному випадку дорівнюватиме N_{mea}, де ($N_{mea} \le N_{fr}$).

Під час спостереження (виявлення) ССО (об'єктів з ненульовим видимим рухом) вважають, що за час спостереження досліджуваного об'єкта умови спостереження практично незмінні. Відповідно, відношення сигнал/шум зображення небесного об'єкта на цих кадрах практично не змінюється, а СКВ оцінок координат на різних кадрах практично однакові. Отже, оцінки координат небесного об'єкта на кадрах, що досліджуються, можна вважати рівноточними.

Вважається, що відхилення оцінок різних координат об'єкта, що містяться у вимірюваннях, незалежні між собою як усередині одного вимірювання, так і між вимірюваннями, які сформовані на різних кадрах. Відхилення оцінки координати x об'єкта розподілені за нормальним законом [4, 5] з невідомою дисперсією σ_x^2 та нульовим математичним очікуванням.

Очікувані положення об'єктів (відповідають математичним сподіванням) визначаються параметрами видимого руху об'єкта, що досліджується, і обчислюються відповідно до виразів (3) і (4). Тоді щільність розподілу оцінок координат x_k и y_k (значень координат x та y у k-му вимірюванні серії Ω_{set} (7)) для кожної координати, відповідно, матиме вигляд:

$$f_{xk}(\theta_x, \sigma_x) = N_{xk}(x_k(\theta_x), \sigma_x^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left[-\frac{(x_k - (x_0 + V_x(\tau_n - \tau_0)))^2}{2\sigma_x^2}\right]; \quad (8)$$

$$f_{yk}(\theta_y, \sigma_y) = N_{yk}(y_k(\theta_y), \sigma_y^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \exp\left[-\frac{(y_k - (y_0 + V_y(\tau_n - \tau_0)))^2}{2\sigma_y^2}\right]. \quad (9)$$

МНК-оцінка параметрів видимого руху об'єкта

Видимий рух об'єкта уздовж кожної координати вважається незалежним. Отже, завдання визначення параметрів видимого руху об'єкта уздовж двох координат можна звести до незалежного визначення параметрів видимого руху вздовж кожної координати. Згідно з (3) і (4), оцінки векторів параметрів видимого руху містять оцінки координат $\hat{x}_0$ та $\hat{y}_0$ положення об'єкта, що досліджується, на базовому кадрі та оцінки швидкості $\hat{V}_x$ та $\hat{V}_y$ руху цього об'єкта за відповідними координатами.

Часто завдання оцінки параметрів видимого руху об'єкта вирішується методом максимальної правдоподібності [5]. За нормального розподілу відхилень оцінок координат об'єкта оцінки параметрів видимого руху об'єкта, отримані методами максимальної правдоподібності та найменших квадратів, повністю збігаються [10, 15].

МНК-оцінка вектора (5) параметрів видимого руху об'єкта уздовж координати x має вигляд:

$$\hat{\theta}_x = \arg\min_{\theta_x} \left(\mathrm{Y} - F_x\theta_x\right)^T \left(\mathrm{Y} - F_x\theta_x\right), \quad (10)$$

де

$$F_x = \begin{pmatrix} 1 & \Delta_{\tau 1(i,1)} \\ \dots & \dots \\ 1 & \Delta_{\tau k(i,n)} \\ \dots & \dots \\ 1 & \Delta_{\tau Nmea(i,Nfr)} \end{pmatrix} \quad (11)$$

– матриця плану [15], також звана матрицею часткових похідних [16] або матрицею диференційного оператора [5];

$$\Delta_{\tau k} = (\tau_k - \tau_0).$$

Розв’язок (МНК-оцінка параметрів видимого руху об'єкта уздовж координати x) системи рівнянь (10) подається виразом [15]:

$$\hat{\theta}_x = (F_x^T F_x)^{-1} F_x^T \mathrm{Y}. \quad (12)$$

МНК-оцінку параметрів видимого руху об'єкта уздовж координати x (координата $\hat{x}_0$ на базовому кадрі та швидкість $\hat{V}_x$ по цій координаті) можна подати у скалярному вигляді [17]:

$$\hat{x}_0 = \frac{D \cdot A_x - C \cdot B_x}{N_{mea} \cdot D - C^2}; \quad (13)$$

$$\hat{V}_x = \frac{N_{mea} \cdot B_x - C \cdot A_x}{N_{mea} \cdot D - C^2}, \quad (14)$$

де $A_x = \sum_{k=1}^{N_{mea}} x_k$; $B_x = \sum_{k=1}^{N_{mea}} \Delta_{\tau k} x_k$; $C = \sum_{k=1}^{N_{mea}} \Delta_{\tau k}$; $D = \sum_{k=1}^{N_{mea}} \Delta_{\tau k}^2$.

Аналогічно, для координати y:

$$\hat{y}_0 = \frac{D \cdot A_y - C \cdot B_y}{N_{mea} \cdot D - C^2}; \tag{15}$$

$$\hat{V}_y = \frac{N_{mea} \cdot B_y - C \cdot A_y}{N_{mea} \cdot D - C^2}, \tag{16}$$

де $A_y = \sum_{k=1}^{N_{mea}} y_k$; $B_y = \sum_{k=1}^{N_{mea}} \Delta_{\tau k} y_k$.

Для отриманої МНК-оцінки [5, 17] параметрів моделі прямолінійного рівномірного руху, інтерпольовані оцінки координат досліджуваного об'єкта на k-му кадрі серії можна подати виразами:

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k(\hat{\theta}_x) = \hat{x}_0(\hat{\theta}_x) + \hat{V}_x(\hat{\theta}_x) \cdot (\tau_k - \tau_0); \tag{17}$$

$$\hat{y}_k = \hat{y}_k(\hat{\theta}_y) = \hat{y}_0(\hat{\theta}_y) + \hat{V}_y(\hat{\theta}_y) \cdot (\tau_k - \tau_0). \tag{18}$$

Отже, на момент кожного з N_{mea} вимірювань серії, що досліджуються:

- невідоме значення дійсного положення об'єкта $(x_k(\theta_x), y_k(\theta_y))$;
- вимірювання положення об'єкта на кадрі (x_k, y_k) у СК базового кадру;
- інтерпольовані (отримані згідно з виразами (17), (18)) координати об'єкта, що досліджується $(\hat{x}_k, \hat{y}_k) = (\hat{x}_k(\hat{\theta}_x), (\hat{y}_k(\hat{\theta}_y))$.

Функція правдоподібності для виявлення ненульового видимого руху досліджуваного об'єкта

Функцією правдоподібності вибрано спільну щільність розподілу вимірювань положення об'єкта, що досліджується, на серії вимірювань. Згідно з формулюванням задачі, оцінки положення об'єкта на кадрах вважаються рівноточними, а дисперсії оцінок положення об'єкта уздовж кожної координати вважаються рівними $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$.

Розглядаються дві гіпотези H_0 (1) та H_1 (2). За нульової щільності розподілу вимірювань положення досліджуваного об'єкта за умови, що об'єкт не є об'єктом Сонячної системи (є зіркою з нульовим видимим рухом на серії вимірювань), має вигляд:

$$f_0(\bar{x}, \bar{y}, \sigma) = \prod_{k=1}^{N_{mea}} \left[N_{xk}(\bar{x}, \sigma^2) \cdot N_{yk}(\bar{y}, \sigma^2) \right], \tag{19}$$

де $\bar{x}$, $\bar{y}$ – координати положення об'єкта, що досліджується.

За першою гіпотезою для щільності розподілу вимірювань положення об'єкта, що досліджується, з ненульовим видимим рухом (об'єкта Сонячної системи) використовується інше математичне сподівання. А саме: замість параметрів $\bar{x}$, $\bar{y}$ положення досліджуваного об'єкта використовуються координати $x_k(\theta_x)$, $y_k(\theta_y)$ положення об'єкта, що досліджується, в момент часу τ_k, обчислені згідно з виразами (17) і (18) відповідно:

$$f_1(\theta, \sigma) = \prod_{k=1}^{N_{mea}} \left[N_{xk}(x_k(\theta_x), \sigma^2) \cdot N_{yk}(y_k(\theta_y), \sigma^2) \right]. \tag{20}$$

Відсутність інформації про положення об'єкта, що досліджується, швидкості його видимого руху та дисперсії оцінок положення об'єкта на серії вимірювань призводить до необхідності використання підстановочного вирішального правила (вирішального правила "виявлення–вимірювання") [5, 12].

Статистикою для розрізнення гіпотез, що перевіряються, є оцінка відношення правдоподібності $\hat{\ell}(\Omega_{set})$ [10, 12].

Підстановочне вирішальне правило максимально правдоподібного виявлення ненульового видимого руху досліджуваних об'єктів за невідомої дисперсії вимірювань положення об'єкта на кадрах

Якщо дисперсії $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ вимірювань положення досліджуваного об'єкта на кадрах невідомі, пропонується використовувати оцінки дисперсій $\hat{\sigma}_0^2$ та $\hat{\sigma}_1^2$ оцінок координат об'єкта, що досліджується, за умови справедливості гіпотези H_0 та альтернативи H_1 відповідно.

Тоді підстановочне вирішальне правило (вирішальне правило "виявлення–вимірювання") для виявлення ненульового видимого руху об'єкта, що досліджується, матиме такий вигляд:

$$\hat{\ell}(\Omega_{set}) = \frac{\max\limits_{\hat{\theta}} f_1(\hat{\theta}, \hat{\sigma}_1)}{\max\limits_{\hat{\bar{x}}, \hat{\bar{y}}} f_0(\hat{\bar{x}}, \hat{\bar{y}}, \hat{\sigma}_0)} \geq \ell_{кр}\,, \tag{21}$$

де $\ell_{кр}$ – задане гранично допустиме (критичне) значення оцінки відношення правдоподібності для виявлення ненульового видимого руху досліджуваного об'єкта; $\hat{\bar{x}} = \sum\limits_{k=1}^{N_{mea}} \hat{x}_k \Big/ N_{mea}$, $\hat{\bar{y}} = \sum\limits_{k=1}^{N_{mea}} \hat{y}_k \Big/ N_{mea}$ – середні значення оцінок координат положення досліджуваного об'єкта на серії кадрів; $\hat{\theta} = \{\hat{\theta}_x, \hat{\theta}_y\} = \arg\max\limits_{\hat{\theta}} f_1(\hat{\theta}, \hat{\sigma}_1)$ – МНК-оцінки параметрів видимого руху досліджуваного об'єкта, отримані відповідно до виразів (13) ÷ (16); $\hat{\sigma}_0^2 = \dfrac{R_0^2}{2\left(N_{mea} - m\right)}$ – оцінка дисперсії оцінок положення досліджуваного об'єкта за умови справедливості гіпотези H_0; $\hat{\sigma}_1^2 = \dfrac{R_1^2}{2\left(N_{mea} - m\right)}$ – оцінка дисперсії оцінок положення досліджуваного об'єкта за умови справедливості альтернативи H_1;

$$R_0^2 = \sum_{k=1}^{N_{mea}} \left((x_k - \hat{\bar{x}})^2 + (y_k - \hat{\bar{y}})^2 \right); \tag{22}$$

$$R_1^2 = \sum_{k=1}^{N_{mea}} \left((x_k - \hat{x}_k(\hat{\theta}_x))^2 + (y_k - \hat{y}_k(\hat{\theta}_y))^2 \right) \tag{23}$$

– залишкові суми квадратів відхилень [15] положення досліджуваного об'єкта за умови справедливості гіпотез про нульовий (H_0) і ненульовий (H_1) видимий рух на цій серії вимірювань.

Після підстановки функцій правдоподібності $f_0(\hat{\bar{x}}, \hat{\bar{y}}, \hat{\sigma}_0)$ та $f_1(\hat{\theta}, \hat{\sigma}_1)$ вираз (21) для оцінки відношення правдоподібності $\hat{\ell}(\Omega_{set})$ набуває такого вигляду:

$$\hat{\ell}(\Omega_{set}) = \frac{\prod\limits_{k=1}^{N_{mea}} \left[N_{xk}(\hat{x}_k(\hat{\theta}_x), \hat{\sigma}_1^2) \cdot N_{yk}(\hat{y}_k(\hat{\theta}_y), \hat{\sigma}_1^2) \right]}{\prod\limits_{k=1}^{N_{mea}} \left[N_{xk}(\hat{\bar{x}}, \hat{\sigma}_0^2) \cdot N_{yk}(\hat{\bar{y}}, \hat{\sigma}_0^2) \right]}. \tag{24}$$

У разі використання отриманого виразу для оцінки відношення правдоподібності (24) правило «виявлення–вимірювання» (21) набуває такого вигляду:

$$\frac{\prod\limits_{k=1}^{N_{mea}} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\hat{\sigma}_1} \exp\left[-\frac{(x_k - \hat{x}_k(\hat{\theta}_x))^2}{2\hat{\sigma}_1^2} \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\hat{\sigma}_1} \exp\left[-\frac{(y_k - \hat{y}_k(\hat{\theta}_y))^2}{2\hat{\sigma}_1^2} \right] \right]}{\prod\limits_{k=1}^{N_{mea}} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\hat{\sigma}_0} \exp\left[-\frac{(x_k - \hat{\bar{x}}_k)^2}{2\hat{\sigma}_0^2} \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\hat{\sigma}_0} \exp\left[-\frac{(y_k - \hat{\bar{y}}_k)^2}{2\hat{\sigma}_0^2} \right] \right]} \geq \ell_{кр}\,. \tag{25}$$

Натуральне логарифмування обох частин нерівності (25) дає змогу усунути експоненту з виразів функцій правдоподібності, а добуток у знаменнику й чисельнику замінити на суму:

$$\frac{N_{mea}}{\hat{\sigma}_1^2}-\frac{1}{2\hat{\sigma}_1^2}\left(\sum_{k=1}^{N_{mea}}(x_k-\hat{x}_k(\hat{\theta}_x))^2+\sum_{k=1}^{N_{mea}}(y_k-\hat{y}_k(\hat{\theta}_y))^2\right)-$$

$$-\frac{N_{mea}}{\hat{\sigma}_0^2}+\frac{1}{2\hat{\sigma}_0^2}\left(\sum_{k=1}^{N_{mea}}(x_k-\hat{\hat{x}})^2+\sum_{k=1}^{N_{mea}}(y_k-\hat{\hat{y}})^2\right)\ge \ln(\ell_{\kappa p}). \tag{26}$$

Внаслідок підстановки значень оцінок дисперсій $\hat{\sigma}_0^2$ і $\hat{\sigma}_1^2$ вимірювань оцінок положення об'єкта, що досліджується, підстановочне вирішальне правило (26) виявлення набуває такого вигляду:

$$\frac{A\cdot N_{mea}}{R_1^2}-\frac{A}{2R_1^2}R_1^2-\frac{A\cdot N_{mea}}{R_0^2}-\frac{A}{2R_0^2}R_0^2\ge \ln(\ell_{\kappa p}), \tag{27}$$

де $A=2\left(N_{mea}-m\right)$;

Після скорочення і зведення подібних у лівій частині нерівності (27) правило «виявлення–вимірювання» виглядатиме так:

$$A\cdot N_{mea}\cdot\frac{R_0^2-R_1^2}{R_0^2\cdot R_1^2}\ge \ln(\ell_{\kappa p}). \tag{28}$$

В результаті перетворень та перенесення констант у праву частину нерівності (28) підстановочне вирішальне правило набуває вигляду:

$$\frac{R_0^2-R_1^2}{R_0^2\cdot R_1^2}\ge\frac{\ln(\ell_{\kappa p})}{A\cdot N_{mea}}. \tag{29}$$

Підстановочне вирішальне правило максимально правдоподібного виявлення ненульового видимого руху досліджуваних об'єктів за відомої дисперсії вимірювань положення об'єкта на кадрах

Якщо відома дисперсія $\sigma_x^2=\sigma_y^2=\sigma^2$ оцінок координат об’єкта, правило пошуку набуває такого вигляду:

$$\hat{\ell}(\Omega_{set})=\frac{\max\limits_{\hat{\theta}} f_1(\hat{\theta},\sigma)}{\max\limits_{\hat{\hat{x}},\hat{\hat{y}}} f_0(\hat{\hat{x}},\hat{\hat{y}},\sigma)}\ge \ell_{\kappa p}. \tag{30}$$

Внаслідок підстановки функції правдоподібності $f_0(\hat{\hat{x}},\hat{\hat{y}},\sigma)$ і $f_1(\hat{\theta},\sigma)$ вираз (30) для оцінки відношення правдоподібності $\hat{\ell}(\Omega_{set})$ набуває такого вигляду:

$$\hat{\ell}(\Omega_{set})=\frac{\prod\limits_{k=1}^{N_{mea}}\left[N_{xk}(\hat{x}_k(\hat{\theta}_x),\sigma^2)\cdot N_{yk}(\hat{y}_k(\hat{\theta}_y),\sigma^2)\right]}{\prod\limits_{k=1}^{N_{mea}}\left[N_{xk}(\hat{\hat{x}},\sigma^2)\cdot N_{yk}(\hat{\hat{y}},\sigma^2)\right]}. \tag{31}$$

Використання отриманого виразу для оцінки відношення правдоподібності (31) приведе до такого вигляду підстановочного вирішального правила (вирішальне правило «виявлення–вимірювання») (30):

$$\frac{\prod\limits_{k=1}^{N_{mea}}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x_k-\hat{x}_k(\hat{\theta}_x))^2}{2\sigma^2}\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(y_k-\hat{y}_k(\hat{\theta}_y))^2}{2\sigma^2}\right]\right]}{\prod\limits_{k=1}^{N_{mea}}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x_k-\hat{\hat{x}}_k)^2}{2\sigma^2}\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(y_k-\hat{\hat{y}}_k)^2}{2\sigma^2}\right]\right]}\ge \ell_{\kappa p}. \tag{32}$$

Значення σ вважається відмінним від нуля, а константу $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ в чисельнику і знаменнику дробу в лівій частині нерівності (32) можна винести за знак добутку і скоротити.

Після перетворень останній вираз набуде такого вигляду:

$$\frac{\sum_{k=1}^{N_{mea}}(x_k-\hat{\bar{x}})^2+\sum_{k=1}^{N_{mea}}(y_k-\hat{\bar{y}})^2-\sum_{k=1}^{N_{mea}}(x_k-\hat{x}_k(\hat{\theta}_x))^2-\sum_{k=1}^{N_{mea}}(y_k-\hat{y}_k(\hat{\theta}_y))^2}{2\sigma^2}\geq\ln(\ell_{кр})\,. \tag{33}$$

З урахуванням попередньо введених позначень (22), (23) і за умови $\sigma^2 \neq 0$ підстановочне вирішальне правило максимально правдоподібного виявлення ненульового видимого руху досліджуваних об'єктів, якщо відома дисперсія вимірювань положення об'єкта на кадрах, виглядатиме так:

$$R_0^2 - R_1^2 \geq 2\sigma^2 \cdot \ln(\ell_{кр})\,. \tag{34}$$

Підстановочне вирішальне правило максимально правдоподібного виявлення ненульового видимого руху досліджуваних об'єктів у разі використання зовнішньої оцінки дисперсії вимірювань положення об'єкта на кадрах

У деяких випадках дисперсію оцінок координат об’єкта за кожною координатою можна оцінити за даними, що є зовнішніми відносно вибірки. Оцінка СКВ позиційних вимірювань об’єкта, що досліджується, на серії ПЗЗ-кадрів не є апріорно заданою константою. Цю оцінку можна отримати із зовнішньої вибірки, яка містить інші позиційні вимірювання цієї серії кадрів.

Для отримання відповідного вирішального правила необхідно у правилі (34) замінити СКВ позиційних вимірювань на його зовнішню оцінку та перенести її до лівої частини вирішального правила як таку, що залежить від вибірки:

$$\frac{R_0^2 - R_1^2}{\hat{\sigma}_{out}^2} \geq 2\ln(\ell_{кр})\,. \tag{35}$$

СКВ оцінок координат об’єкта можна визначити на основі відхилень положень опорних зірок на ПЗЗ-кадрі. Оскільки сьогодні використовується понад 500 опорних зірок на ПЗЗ-кадрі, така оцінка може вважатись надійною і використовуватись як зовнішня оцінка дисперсії вимірювань положення об’єкта у підстановочному вирішальному правилі (35) максимально правдоподібного виявлення ненульового видимого руху об'єктів, що досліджуються.

Це зумовлено тим, що або умови формування всіх вимірювань вибірки можна вважати однаковими, або залежність СКВ позиційних вимірювань від блиску і координат об’єктів кадру легко апроксимується експериментальними даними.

Дослідженнями встановлено, що залежність СКВ позиційних вимірювань від координат об’єктів на кадрі майже відсутня.

Своєю чергою, залежність СКВ позиційних вимірювань від блиску значуща й іноді в літературі згадується як «астрономічне рівняння блиску» [18]. Блиск астероїдів тьмяніший порівняно із блиском опорних зірок, як правило, не менше ніж на 2–3 зіркові величини. Як наслідок, у разі використання СКВ вимірювань опорних зірок як зовнішньої оцінки СКВ вимірювань серії, що досліджується, необхідні додаткові поправки, які враховуватимуть зменшення блиску у вибірці, що досліджується, щодо блиску навчальної (зовнішньої) вибірки. Це є недоліком використання оцінки СКВ позиційних вимірювань за опорними зірками.

Іншим недоліком цього підходу є необхідність підбору граничного значення вирішальної статистики.

Висновки

У статті розроблено підстановочний обчислювальний метод максимально правдоподібного виявлення ненульового видимого руху об’єктів на серії ПЗЗ-кадрів. Метод оснований на підстановочних вирішальних правилах виявлення видимого руху об’єктів. Використання підстановочних вирішальних правил виявлення обґрунтовано відсутністю апріорних даних про такі параметри функції правдоподібності, як параметри видимого руху об’єктів і дисперсія позиційних вимірювань серії, що досліджується.

Практичне значення розробленого обчислювального методу полягає у тому, що його можна використати у програмах оперативного автоматизованого пошуку астероїдів і комет, наприклад, в програмі CoLiTec [19]. Відповідно до розробленого методу об'єкт дослідження можна визнати зіркою з нульовим видимим рухом або об'єктом Сонячної системи з ненульовим видимим рухом.

Надалі передбачається провести дослідження показників якості виявлення ненульового видимого руху об'єктів.

1. Brian E. Searching For Hazardous Asteroids [Текст] / E. Brian, A. W. Puckett, K. Coble, et al. // American Astronomical Society, AAS Meeting #218, #224.04; Bulletin of the American Astronomical Society, Vol. 43. – 2011. 2. Kortencamp Steve. Asteroids, Comets, and Meteorids. Mankato, MN: Capstone Press. – 2012. 3. George E. Smith The invention and early history of the CCD [Text] / E. Smith George // Rev. Mod. Phys. – 2010. – Vol. 3, No. 82. – P. 2307–2312. 4. Саваневич В. Е. Метод обнаружения астероидов, основанный на накоплении сигналов вдоль траекторий с неизвестными параметрами / Саваневич В. Е., Брюховецкий А. Б., Кожухов А. М., Диков Е. Н. // Системи оброб. інформації: зб. наук. праць. – Харків, 2011. – Вип. 2. – С. 137–144. 5. Кузьмин С. З. Цифровая радиолокация. Введение в теорию / С. З. Кузьмин. – К.: Издательство КвіЦ, 2000. – 428 с. 6. Bar–Shalom Y. Kalman Filter Versus IMM Estimator: When Do We Need / Y. Bar–Shalom // IEEE Trans. on AES. – 2003. – Vol. 39, No. 4. – P. 1452–1456. 7. Masson M. E. J. A tutorial on a practical Bayesian alternative to null-hypothesis significance testing // Behavior Reseach Methods. – 2011. – Vol. 43. – P. 679–690. 8. Lee M. D. Bayesian Cognitive Modeling: A Practical Course / Lee M. D., Wagenmakers E.-J. // Cambridge University Press. – 2014. – P. 284. 9. Myung I. J. Tutorial on maximum likelihood estimation // Journal of Mathematical Psychology. – 2003. – Vol. 47. – P. 90–100.10. Lehman E. L. Romano J. P. Testing Statistical Hypotheses // Springer. – 3rd edition, – 2010. – P. 768. 11. Wagenmakers E.-J. Simple relation between one–sided and two–sided Bayesian point–null hypothesis tests / Wagenmakers E.-J., Morey R. D. // Statistics Probability Letters. – 2014. – Vol. 92. – P. 121–124. 12. Трифонов А. П., Шинаков Ю. С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. – М.: Радио и связь, 1986. – 264 с. 13. Мину М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы / пер. с фр. и предисловие А. И. Штерна. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 488 с. 14. Arora J. S. Methods for Optimization of Nonlinear Problems with Discrete Variables: A Review / Arora J. S., Haug M. W. // Structural Optimization. – 1994. – Vol. 8. – P. 69–85. 15. Ермаков С. М. Математическая теория оптимального эксперимента / С. М. Ермаков, А. А. Жиглявский. – М.: Наука, 1987. – 320 с. 16. Мудров В. И. Методы обработки измерений / В. И. Мудров, В. Л. Кушко. – М.: Советское радио, 1976. – 252 с. 17. Кузьмин С. З. Основы проектирования систем цифровой обработки радиолокационной информации. – М.: Радио и связь, 1986. – 352 с. 18. Girard T. M. The Southern Proper Motion Program. I. Magnitude equation correction / T. M. Girard, I. Platais, V. Kozhurina-Platais et al. // Astron. J. – 1998. – Vol. 11. – P. 855–865. 19. Саваневич В. Е. Программа CoLiTec автоматизированного обнаружения небесных тел со слабым блеском [Текст] / В. Е. Саваневич, А. Б. Брюховецкий, А. М. Кожухов, Е. Н. Диков, В. П. Власенко // Космічна наука і технологія. – 2012. – Т. 18(1). – С. 39–46.