3. Соколовський Я.І.,Бакалець А.В. Моделювання та оптимізація технологічних режимів сушіння деревини. Вісник НУ „Львівська Політехніка", Комп'ютерні науки та інформаційні технології,Випуск 629.-2008
4. Руденко О.Г.,Бодянський Є.В. Искуственние нейронные сети: архитектура, обучение, приминение. Харьков – 2004,369с.
5. Руденко О.Г., Бодянський Є.В. Штучні нейронні мережі: Навчальний посібник. – Харків: ТОВ "Компанія СМІТ", 2006. -404с.
6. Сигеру Омату Нейроуправление и его приложения. Кн. 2: Пер с англ. Н.В.Батина: М.: ИПРЖР, 2000. – 272с.: ил.

Однорідні послідовності періодичних ланцюгів Маркова

Прошин Сергій

Кафедра комп'ютерних наук, Тернопільський державний технічний університет ім. Івана Пулюя, УКРАЇНА, м.Тернопіль, вул. Руська, 23, E-mail: sergej.proshyn@gmail.com

***Abstract* – At the first time the homogeneous sequences of pair of random variables are extracted from the periodic chain, and the certain characteristics are established. The homogeneous chains, embedded toward to a periodic chain are selected, the matrix of transitions is determined for each of them. Received results have not only theoretical but, practical application, because on their basis the methods of estimation of transitional matrices of periodic chains and the methods of their prognosis can be developed.**

Ключові слова – periodic Markov's chain, matrix of transitions, homogeneity, periodicity.

I. Вступ

В оточуючому нас світі багато стохастичних явищ, сигналів та процесів носять ритмічний характер. В прикладних дослідженнях існує потреба їх математичної обробки з використанням методів, які розробляються на базі відповідної математичної моделі. На даний час використовується багато різних моделей, які описують такі процеси, наприклад, процеси, періодичними за Слуцьким періодично корельовані випадкові процеси, періодичні білі шуми, тощо. Проте крім сигналів, при дослідженні яких основна увага звертається на їх ритмічність, існує широкий клас сигналів та стохастичних систем, для яких одночасно із ритмічністю характерною особливістю є марковість. До таких, наприклад, можна віднести ритмічні вхідні потоки багатьох систем масового обслуговування, ритмічні режими функціонування енергосистем, потоки інформації в мережі Інтернет, тощо. Для обґрунтування моделей ритмічних сигналів марківського типу можуть бути використані періодичні марківські процеси [1] або періодичні ланцюги Маркова [2].

На даний час методи статистичного аналізу розроблені тільки для однорідних ланцюгів Маркова. Тому важливо виявити в періодичних ланцюгах властивості однорідності, базуючись на яких, з'являється можливість розробки методів статистичного аналізу періодичних ланцюгів.

II. Періодичні ланцюги Маркова

Перед розглядом основних питань зупинимось спочатку на понятті періодичного ланцюга Маркова [2].

Ланцюг Маркова $\{\xi_n, n = 0,1,2...\}$ з умовною ймовірністю

$$P\{\xi_n = j \mid \xi_0 = m, ...\xi_{n-2} = l, \xi_{n-1} = i\} = \\ = P\{\xi_n = j \mid \xi_{n-1} = i\} = p_{i,j}(n), \quad i, j, m, l \in X \tag{1}$$

називається періодичним, якщо періодичними є його ймовірності переходів, тобто існує ціле $L > 0$, що

$$p_{i,j}(n) = p_{i,j}(n + L). \tag{2}$$

Як наслідок, для періодичного ланцюга його матриці переходів $\Pi(n) = |p_{ij}(n)|$ теж змінюються періодично з періодом L:

$$\Pi(n) = \Pi(n + L), \; n = 0,1,... \tag{3}$$

Слід зауважити, то таку ж назву «періодичні ланцюги» має один із підкласів однорідних ланцюгів Маркова. Однак в даному випадку періодичними лише його стани, а не матриці переходів.

Розглянемо деякі властивості періодичних ланцюгів Маркова з метою виявлення в них ознак однорідності та можливістю розробки на цій основі методів статистичного аналізу періодичних ланцюгів

III. Однорідні $\varphi^{(k)}$-ланцюги періодичного ланцюга Маркова

Із наведеного означення випливає, що періодичний ланцюг Маркова визначається першими L матрицями переходів

$$\{\Pi(0), ..., \Pi(k), ..., \Pi(L-1)\}. \tag{4}$$

При $n > L - 1$ кожна матриця переходів буде повторюватись через sL кроків ($s = 1,2...$).

Оскільки любе число $n \geq 0$ можна подати у вигляді $n = k + sL$, де $k = n(\bmod L)$, $s = [n/L]$, то випадкові величини ланцюга Маркова позначимо

$$\xi_n = \xi_{k+sL} = \xi_s^{(k)}, \tag{5}$$

а його матриці переходів:

$$\Pi(n) = \Pi(k + sL) = \Pi_s^{(k)} \tag{6}$$

При цьому для матриць $\Pi_s^{(k)}$, $s = 1,2,...$ виконується рівність

$$\Pi_s^{(k)} = \Pi_0^{(k)},\ s = 1,2,..., \tag{7}$$

а першими L матрицями переходів є

$$\left\{\Pi_0^{(0)},...,\Pi_0^{(k)},...,\Pi_0^{(L-1)}\right\}. \tag{8}$$

Означення. $\varphi^{(k)}$-ланцюгом, $k = 0,1,...,L-1$, називається вкладена по відношенню до періодичного ланцюга Маркова послідовність випадкових величин $\left\{\xi_s^{(k)}\right\}$, $s = 0,1,...$, де $\xi_s^{(k)} = \xi_{k+sL}$.

Розглянемо для $\varphi^{(k)}$-ланцюга матрицю переходів $\Pi^{(k)}$ між випадковими величинами $\xi_s^{(k)} = \xi_{k+sL}$ і $\xi_{s+1}^{(k)} = \xi_{k+(s+1)L} = \xi_{k+sL+L}$. Це буде матриця переходів через L кроків. Можна показати, що для $\varphi^{(k)}$-ланцюга дана матриця переходів визначається рівністю

$$\begin{gathered}\Pi^{(k)} = \Pi_0^{(k)} \times \Pi_0^{(k+1)} \times \cdots \\ \cdots \times \Pi_0^{(L-1)} \times \Pi_0^{(0)} \times \Pi_0^{(1)} \times \cdots \times \Pi_0^{(k-1)},\end{gathered} \tag{9}$$

тобто вона є добутком матриць із множини (8), взятих у строго визначеному для кожного k ($k = 0,1,...,L-1$) порядку. Оскільки операція множення матриць не комутативна, в нашому випадку це означає, що для k і l таких, що $k \neq l$, взагалі кажучи, $\Pi^{(k)} \neq \Pi^{(l)}$. Розглянуте вище сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема. $\varphi^{(k)}$-ланцюг $\left\{\xi_s^{(k)}\right\}$, $s = 0,1,...$, як вкладена по відношенню до періодичного ланцюга Маркова із періодом L послідовність, є однорідним ланцюгом Маркова із матрицею переходів

$$\begin{gathered}\Pi^{(k)} = \Pi_0^{(k)} \times \Pi_0^{(k+1)} \times \cdots \\ \cdots \times \Pi_0^{(L-1)} \times \Pi_0^{(0)} \times \Pi_0^{(1)} \times \cdots \times \Pi_0^{(k-1)}.\end{gathered}$$

Результат цієї теореми дозволяє застосувати певні методи статистичної обробки однорідного ланцюга Маркова для періодичного ланцюга.

IV. Однорідні k - послідовності пар випадкових величин періодичного ланцюга Маркова

Із визначення періодичного ланцюга Маркова слідує, що кожна із матриць $\Pi_s^{(k)}$, $s = 1,2,...$ задає ймовірності переходів від випадкової величини $\xi_s^{(k)}$, $s = 0,1,...$ до величини $\xi_s^{(k+1)}$, $s = 0,1,...$. Враховуючи рівність (7), ймовірності переходів від випадкової величини $\xi_s^{(k)}$, $s = 0,1,...$ до величини $\xi_s^{(k+1)}$, $s = 0,1,...$ задаються матрицею $\Pi_0^{(k)}$.

Утворимо із сусідніх випадкових величин $\xi_s^{(k)}$ і $\xi_s^{(k+1)}$ пару випадкових величин $\left(\xi_s^{(k)}, \xi_s^{(k+1)}\right)$ і позначимо їх через $\hat{\xi}_s^{(k)}$:

$$\hat{\xi}_s^{(k)} = \left(\xi_s^{(k)}, \xi_s^{(k+1)}\right),\ s = 0,1,2,... . \tag{10}$$

Із зазначеного вище випливає, що ймовірності переходів від випадкової величини $\xi_s^{(k)}$ до величини $\xi_s^{(k+1)}$ для кожної із пар $\hat{\xi}_s^{(k)}$, $s = 0,1,...$ задаються однією і тією ж матрицею $\Pi_0^{(k)}$.

На основі даного поданого матеріалу наведемо означення і теорему.

Означення. Виділена із періодичного ланцюга Маркова $\left\{\xi_n\right\}$, $n = 0,1,2,...$, послідовність пар випадкових величин $\left\{\hat{\xi}_s^{(k)}\right\}$, $s = 0,1,2,...$, будемо називати однорідною послідовністю пар випадкових величин або k-послідовністю пар, $k = 0,1,...,L-1$.

Теорема. k-послідовність пар $\left\{\xi_n, n = 0,1,2...\right\}$, є однорідною послідовністю, для якої переходи між випадковими величинами кожної із пар визначаються однією і тією ж фазовою матрицею переходів $\Pi_0^{(k)}$, $k = 0,1,...,L-1$.

Результат цієї теореми може бути використаний при розробці методу оцінки матриць переходів періодичного ланцюга Маркова, що планується розглянути в одній із наступних робіт.

Висновок

В роботі вперше із періодичного ланцюга Маркова виділені однорідні послідовності пар випадкових величини. Також вперше виділені однорідні ланцюги, вкладені по відношенню до періодичного ланцюга.

Базуючись на виділених однорідних послідовностях, можуть бути розроблені методи статистичного аналізу періодичних ланцюгів Маркова, і в першу чергу методів оцінки їх матриць переходів, використовуючи для цього лише одну реалізацію.

References

[1] Приймак М.В. Марківські періодичні процеси // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2003. – Т.8, число 3. – С. 17-21.

[2] Приймак М.В. Періодичні ланцюги Маркова в задачах статистичного аналізу і прогнозу енергонавантажень // Технічна електродинаміка. – 2004. – №2. – С. 3-7.