УДК 621.313

В. М. Гладкий
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра електричних машин і апаратів

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ АСИНХРОННОГО ДВИГУНА З УРАХУВАННЯМ ВИТІСНЕННЯ СТРУМУ У СТРИЖНЯХ РОТОРА

Опрацьовано математичну модель асинхронного двигуна з урахуванням витіснення струму у стрижнях ротора. Модель ґрунтується на розрахунку одновимірного магнітного поля з урахуванням вищих просторових гармонік магніторушійних сил та насичення основного магнітного кола, алгебризації диференційних рівнянь методом ФДН g-ого порядку та розв’язуванні нелінійної системи алгебричних рівнянь методом Ньютона.

Ключові слова: асинхронний двигун, математична модель, витіснення струму у стрижнях ротора, насичення основного магнітного кола, вищі гармоніки МРС.

A mathematical model for asynchronous motor taking into account deep bar effect has been developed. The model is based on magnetic field computation allowing for core saturation and magnetomotive forces spatial harmonics, differential equations algebrization with the g-th order backward differentiation formula and nonlinear algebraic equations system solving with Newton’s method.

Key words: asynchronous motor, mathematical model, deep bar effect, core saturation, MMF spatial harmonics.

Постановка проблеми

Асинхронні двигуни є основними споживачами електричної енергії у промисловості і широко використовуються для приводу більшості промислових механізмів, тому дослідженню процесів в асинхронних двигунах за допомогою математичного моделювання завжди приділяли значну увагу.

Відомі математичні моделі, які призначені для розрахунків перехідних процесів в асинхронних двигунах з урахуванням насичення основного магнітного кола, грунтуються на припущенні про гармонічний розподіл провідників фаз статора і ротора вздовж розточки. Рівень адекватності таких моделей є вистачальним для трифазних асинхронних машин з фазним ротором.

Застосування таких моделей до розрахунків перехідних процесів у машинах з клітковим ротором може призвести до істотних відхилень, оскільки зумовлені насиченням основного магнітного кола вищі просторові гармоніки МРС спричиняють протікання у роторі вищих гармонік струмів. Ці струми призводять до виникнення електромагнітних моментів, створюваних взаємодією вищих гармонік робочого поля з відповідними гармоніками струму ротора і істотної зміни основної гармоніки поля і створюваного нею електромагнітного моменту.

Ще одним чинником, який впливатиме на перебіг перехідного процесу, є витіснення струму у пазах ротора, особливо ефект проявлятиметься за наявності вищих гармонік струму чи глибоких пазах.

Тому важливим є створення математичної моделі асинхронного двигуна з клітковим ротором, яка враховувала б насичення основного магнітного кола, вищі просторові гармоніки МРС та витіснення струму в стрижнях ротора у їхньому взаємозв’язку.

Аналіз останніх досліджень

Проведений аналіз літератури свідчить, що проблемі витіснення струму присвячено багато робіт, наприклад [7–11], однак усі вони не враховують насичення шляхів потоків розсіяння, яке призводить до протікання у роторі вищих часових гармонік струму. При живленні обмоток статора номінальною напругою насичення основного магнітного кола спостерігається переважно при малих ковзаннях, коли робочий магнітний потік є великим, а насичення шляхів потоків розсіяння – при великих ковзаннях, коли в обмотках протікають великі струми. При напругах живлення, що перевищують номінальні, одночасно має місце і насичення основного магнітного кола, і шляхів потоків розсіяння. Отже, в переважній більшості режимів роботи магнітопровід машини насичений.

Задачі досліджень

Задачею цього дослідження є розроблення математичної моделі асинхронного двигуна з клітковим ротором з урахуванням насичення основного магнітного кола, насичення шляхів потоків розсіяння ротора, вищих просторових гармонік магніторушійних сил та витіснення струму у стрижнях ротора у їхньому взаємозв’язку.

Виклад основного матеріалу

Пропонована математична модель опрацьована для асинхронного двигуна, що має довільну кількість фаз на статорі, активні провідники яких розподілені по пазах довільно, а на роторі – кліткову обмотку з довільною кількістю стрижнів.

Модель відповідає таким допущенням:

- гістерезис і вихрові струми відсутні;
- магнітне поле машини розділене на робоче поле й поля розсіяння, причому останні вважаються лінійними однорідними функціями струмів обмоток;
- обмотки статора й ротора замінені винесеними до повітряного проміжку нескінченно тонкими шарами й представлені кутовими розподілами густин провідників відповідних фаз;
- повітряний проміжок та зубцеві зони статора й ротора замінені однорідним вздовж розточки машини еквівалентним активним шаром, який у радіальному напрямі має характеристику намагнічування реального активного шару, а в тангенціальному – нескінченний магнітний опір;
- магнітні поля в ярмах статора й ротора мають лише тангенціальну складову;
- електричне поле у стрижні ротора має лише складову, що спрямована вздовж довжини стрижня.

Згідно з прийнятими допущеннями, рівняння, які описують розподіл магнітного поля при заданих струмах статора і ротора та куті повороту ротора, мають вигляд [1]

$$\frac{dF}{d\alpha_м} - \frac{r_с}{p_м} H_с + \frac{r_р}{p_м} H_р + \vec{n}_{ст}(\alpha_м)\vec{i}_с / a_с + e^{-p_м\gamma\frac{d}{d\alpha_м}} \vec{n}_{рт}(\alpha_м)\vec{i}_р = 0;$$

$$r_р \int_0^{2\pi} e^{-p_м\gamma\frac{d}{d\alpha_м}} H_р \, d\alpha_м = 0; \tag{1}$$

$$B_d = \frac{1}{c_с}\frac{dB_с}{d a_м}; \quad B_р = B_п - cB_с;$$

$$F = F(B_\delta); \quad H_с = H_с(B_с); \quad H_р = H_р(B_р),$$

де $\vec{i}_с = [i_{с1} \; \ldots \; i_{сs}]_т$; $\vec{i}_р = \left[i_{р1} \; \ldots \; i_{рZ}\right]_Т$ – вектор струмів фаз статора й контурів обмотки ротора відповідно; $\vec{n}_с(\alpha_м) = [n_{с1}(\alpha_м) \; \ldots \; n_{сs}(\alpha_м)]_т$; $\vec{n}_р(a_м) = \left[n_{р1}(a_м) \; \ldots \; n_{рZ}(a_м)\right]_Т$ – вектор кутових густин провідників фаз статора й контурів ротора відповідно; $a_С$ – кількість паралельних гілок фаз статора; $\alpha_м$ – магнітний кут нахилу променя, який проходить через вісь обертання машини й довільну точку А на розточці статора, до прийнятого нерухомого відносно статора променя $OX_С$; $p_м\gamma$ – магнітний кут нахилу променя $OX_Р$ до променя $OX_С$, який ототожнюємо з магнітним кутом повороту машини; $p_м$ – кількість періодів магнітного поля вздовж розточки статора машини; B_c, $B_р$, H_c, $H_р$ – магнітні індукції та напруженості магнітного поля в ярмах статора й ротора відповідно; B_δ – магнітна індукція в повітряному проміжку; F – магнітна напруга еквівалентного шару; $B_п$ – деяка магнітна індукція, що не залежить від координати $\alpha_м$; k_δ – коефіцієнт Картера; r_c – радіус кола, що проходить через середину ярма статора; $r_р$ – радіус кола, що проходить через середину ярма ротора; c, c_c – постійні коефіцієнти, які обчислюють за формулами $c = h_c l_c k_c / (h_р l_р k_р)$, $c_c = \dfrac{l_\delta r_\delta}{p_м h_c l_c k_c}$, у яких h_c – висота ярма статора; $h_р$ – висота ярма ротора; l_c – довжина осердя статора; $l_р$ – довжина осердя ротора; k_c – коефіцієнт заповнення сталі статора; $k_р$ – коефіцієнт заповнення сталі ротора, r_δ – радіус кола, яке проходить через середину повітряного проміжку, l_δ – розрахункова довжина машини, $e^{-p_м\gamma\frac{d}{d\alpha_м}}$ – оператор зсуву на кут $-p_м\gamma$ [4].

Нижній індекс „т” тут і надалі означає транспонування.

Рівняння електромагнітного стану стрижнів при прийнятих допущеннях мають такий вигляд [2]:

$$
\begin{aligned}
& && H_{ст1,0} = 0;\\
& r_{ст} n_0 (j_{1,1} - j_{1,2}) - \int_{y_1}^{y_2} \frac{dH_{ст1}}{dt}\, dy = 0; && b_1 H_{ст1,1} - b_2 H_{ст1,2} - \int_{y_1}^{y_2} j_1 b\, dy = 0;\\
& \vdots && \vdots\\
& && H_{стZ,0} = 0;\\
& r_{ст} n_0 (j_{Z,1} - j_{Z,2}) - \int_{y_1}^{y_2} \frac{dH_{стZ}}{dt}\, dy = 0; && b_1 H_{стZ,1} - b_2 H_{стZ,2} - \int_{y_1}^{y_2} j_Z b\, dy = 0;\\
& -r_{ст} j_{пов1} + E_{стор1} - \frac{d\Phi_{корр1}}{dt} = 0; \quad \Phi_{корр1} = \Phi_{корр}(i_{пазр1}); && i_{пазр1} = \int_0^{y_{пов}} j_1 b\, dy;\\
& \vdots \qquad\qquad \vdots && \vdots\\
& -r_{ст} j_{повZ} + E_{сторZ} - \frac{d\Phi_{коррZ}}{dt} = 0; \quad \Phi_{коррZ} = \Phi_{корр}(i_{пазрZ}); && i_{пазрZ} = \int_0^{y_{пов}} j_Z b\, dy,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

де $\rho_{ст}$ – питомий опір матеріалу стрижня; $\nu_0 = 1/\mu_0$; b_1, b_2 – ширини стрижня на висоті y_1, y_2 від дна паза відповідно; $H_{стi,1}$, $H_{стi,2}$ – напруженість магнітного поля *i*-го ($i = 1...Z$) стрижня на висоті y_1, y_2 відповідно; $b = b(y)$ – ширина паза як відома функція; $j_i = j_i(y)$ – густина струму *i*-го стрижня; $H_{стi,0}$ – напруженість магнітного поля на дні *i*-го стрижня; $j_{i\,пов}$ – густина струму на поверхні *i*-го стрижня; $\Phi_{корр\,i}$ – потік через коронки *i*-го стрижня; $E_{сторi} = E_{сторi}(t)$ – напруженість стороннього електричного поля як відома функція часу.

Доповнимо (1) – (2) формулами для обчислення потокозчеплень та електромагнітного моменту двигуна [1, 3]

$$
\begin{aligned}
\vec{\psi}_c &= L_{\sigma c}\vec{i}_c + \frac{r_\delta}{p_м c_c a_c}\int_0^{2\pi} \vec{n}_c(\alpha_м) B_c\, d\alpha_м;\\
\vec{\psi}_р &= L_{\sigma р}\vec{i}_р + \mathbf{B}_{пазр}\vec{\Phi}_{корр} + \frac{r_\delta}{p_м c_р}\int_0^{2\pi} e^{-p_м\frac{d}{d\alpha_м}}\vec{n}_р(\alpha_м) B_c\, d\alpha_м;
\end{aligned}
\tag{3}
$$

$$M=-\frac{p_м r_\delta}{a_c}\int_0^{2\pi}\vec{i}_{ст}\vec{n}_c(\alpha_м)B_\delta d\alpha_м\,, \qquad (4)$$

де

$$L_{\sigma c}=\begin{bmatrix} L_{\sigma c1c1} & \dots & L_{\sigma c1cs}\\ \vdots & & \vdots\\ L_{\sigma csc1} & \dots & L_{\sigma cscs}\end{bmatrix};\quad L_{s\,p}=\begin{bmatrix} L_{s\,p1p1} & \dots & L_{s\,p1pZ}\\ \vdots & & \vdots\\ L_{s\,pZp1} & \dots & L_{s\,pZpZ}\end{bmatrix}$$

– стала матриця індуктивностей розсіяння фаз статора й ротора відповідно; $\vec{\psi}_c=[\psi_{c1}\ \ \dots\ \ \psi_{cs}]_т$; $\vec{\psi}_р=[\psi_{р1}\ \ \dots\ \ \psi_{рZ}]_т$ – вектори потокозчеплень фаз статора й контурів ротора відповідно; $\vec{\Phi}_{корр}=[\Phi_{корр1}\ \ \dots\ \ \Phi_{корр\mathbf{Z}}]_T$ – вектор потоків коронок зубців кліткового ротора;

$$\mathbf{B}_{пазр}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1\\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1\end{bmatrix}$$ – квадратна матриця розміру $\mathbf{Z}$.

Систему (1) рівнянь розв’язуватимемо методом тригонометричної колокації [3], в якому алгебризація рівнянь зводиться до формальної заміни усіх функцій аргументу $\alpha_М$ векторами їх дискрет (тобто значеннями функції у вузлах накладеної вздовж періоду магнітного поля сітки з $N=1+2n$ вузлами, де n – ціле число), диференційного оператора $\frac{d}{d\alpha_М}$ – його дискретним аналогом

$$Д=\frac{2}{N}\begin{bmatrix} \sum_{\nu=1}^{n}\nu\sin(\nu(\alpha_{м1}-\alpha_{м1})) & \dots & \sum_{\nu=1}^{n}\nu\sin(\nu(\alpha_{м1}-\alpha_{мN}))\\ \vdots & & \vdots\\ \sum_{\nu=1}^{n}\nu\sin(\nu(\alpha_{мN}-\alpha_{м1})) & \dots & \sum_{\nu=1}^{n}\nu\sin(\nu(\alpha_{мN}-\alpha_{мN}))\end{bmatrix},$$

а інтегрального оператора $\int_0^{2\pi}\cdot\, d\alpha_М$ – його алгебричним аналогом $\vec{I}_G=\frac{2\pi}{N}\Big[\underbrace{1\ \dots\ 1}_{N}\Big]$.

Під час розв’язування системи (2) рівнянь на підставі методу колокації невідомі функції замінюють многочленами Тейлора Q-го степеня і шукають розв’язок системи у вигляді сукупності (Q+1) дискрет невідомих. Записуючи дискретний аналог вихідної системи рівнянь на підставі методу колокації, невідомі функції замінюємо їх дискретами, а інтегральний оператор $\int_{y_1}^{y_2}\cdot\, dy$ – його алгебричним аналогом [5]

$$\vec{I}_{(1,2)}=\left[y_2-y_1\quad \frac{y_2^2-y_1^2}{2!}\quad \frac{y_2^3-y_1^3}{3!}\quad \dots\quad \frac{y_2^{Q+1}-y_1^{Q+1}}{(Q+1)!}\right]T^{-1}=$$
$$=\left[I_{(1,2)0}\quad I_{(1,2)1}\quad I_{(1,2)2}\quad \dots\quad I_{(1,2)Q}\right],$$

де T^{-1} – обернена матриця Тейлора для комплекту вузлів, накладених вздовж висоти стрижня.

Застосувавши згадані правила для рівнянь (1) – (4), отримуємо такі алгебричні рівняння:

$$Д\vec{F}_д-\frac{r_c}{p_м}\vec{H}_{сд}+\frac{r_р}{p_м}\vec{H}_{рд}+n_{сдт}\vec{i}_c/a_c+e^{-p_м\gamma Д}n_{рдт}\vec{i}_р=0;$$

$$r_р \vec{I}_G \vec{H}_{рд} = 0\,;$$

$$\vec{B}_{δд} = \frac{1}{c_с} Д \vec{B}_{сд}\,; \qquad \vec{B}_{рд} = \vec{c}_1 B_п - c\vec{B}_{сд}\,;$$

$$\vec{F}_д = \vec{F}_д(\vec{B}_{δд})\,; \qquad \vec{H}_{сд} = \vec{H}_{сд}(\vec{B}_{сд})\,; \qquad \vec{H}_{рд} = \vec{H}_{рд}(\vec{B}_{рд})\,;$$

$$K_{б1}\vec{j}_д + K_{б1пов}\vec{j}_{пов} + K_{б2}\frac{d\vec{H}_{стд}}{dt} = 0\,; \quad \vec{H}_{стд} = K_{б3}^{-1}(K_{б4}\vec{j}_д + K_{б4пов}\vec{j}_{пов})\,; \tag{5}$$

$$-\rho_{ст}\vec{j}_{пов} + \vec{E}_{стор} - \frac{d\vec{\Phi}_{корр}}{dt} = 0\,; \quad \vec{\Phi}_{корр} = \vec{\Phi}_{корр}(\vec{i}_{пазр})\,; \quad \vec{i}_{пазр} = K_{б5}\vec{j}_д + K_{б5пов}\vec{j}_{пов}$$

$$\vec{\psi}_с = L_{σс}\vec{i}_с + \frac{2\pi}{N}\frac{r_δ}{p_м c_с a_с} n_{сд}\vec{B}_{сд}\,; \qquad \vec{\psi}_р = L_{σр}\vec{i}_р + \mathbf{B}_{пазр}\Phi_{корр} + \frac{2\pi}{N}\frac{r_δ}{p_м c_р} e^{-p_м \gamma Д} n_{рд}\vec{B}_{сд}\,;$$

$$M = -\frac{2\pi}{N}\frac{p_м r_δ}{a_с}\vec{i}_{ст} n_{сд}\vec{B}_{δд}\,,$$

де $\vec{Y}_д = \left[Y_1 \quad \ldots \quad Y_N\right]_T$ – вектор дискрет відповідних змінних ($Y = B_c$, H_c, B_p, H_p, $B_δ$, F);

$$n_{сд} = \begin{bmatrix} n_{c1,д1} & \dots & n_{c1,дN} \\ \vdots & & \vdots \\ n_{cs,д1} & \dots & n_{cs,дN} \end{bmatrix}; \quad n_{рд} = \begin{bmatrix} n_{р1,д1} & \dots & n_{р1,дN} \\ \vdots & & \vdots \\ n_{рZ,д1} & \dots & n_{рZ,дN} \end{bmatrix}$$

– матриця дискрет кутових густин провідників фаз статора й контурів ротора відповідно; $\vec{c}_1 = [1 \quad \dots \quad 1]_T$ – матриця-стовпець розміру N; $\vec{H}_{стд} = \left[H_{ст1,0} \ \dots \ H_{ст1,Q} \ \dots \ H_{ст\mathbf{Z},0} \ \dots \ H_{ст\mathbf{Z},Q}\right]_T$ – вектор дискрет напруженостей магнітного поля в стрижнях; $\vec{j}_д = \left[j_{1,0} \quad \dots \quad j_{1,Q-1} \quad \dots \quad j_{\mathbf{Z},0} \quad \dots \quad j_{\mathbf{Z},Q-1}\right]_T$ – вектор густин струмів стрижнів у вузлах 0, 1, ..., Q–1; $\vec{j}_{пов} = [j_{1пов} \quad \dots \quad j_{\mathbf{Z}пов}]_T$ – вектор густин струмів на поверхні стрижнів; $\vec{E}_{стор} = \left[E_{стор1} \quad \dots \quad E_{стор\mathbf{Z}}\right]_T$ – вектор напруженостей стороннього електричного поля; $K_1 = \rho_{ст}\nu_0 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ – квадратна матриця розміру Q; $K_{б1} = \mathrm{diag}\ (K_1, \dots, K_1)$ – квадратна матриця розміру $\mathbf{Z}$Q; $K_{1пов} = \rho_{ст}\nu_0 [0 \quad 0 \quad \dots \quad -1]_T$ – стовпець розміру *Q*; $K_{б1пов} = \mathrm{diag}\ (K_{1пов}, \dots, K_{1пов})$ – матриця розміру $\mathbf{Z}Q \times \mathbf{Z}$; $K_2 = \begin{bmatrix} -I_{(0,1)0} & \dots & -I_{(0,1)Q} \\ \vdots & & \vdots \\ -I_{(Q-1,Q)0} & \dots & -I_{(Q-1,Q)Q} \end{bmatrix}$ – матриця розміру $Q \times (Q+1)$; $K_{б2} = \mathrm{diag}\ (K_2, \dots, K_2)$ – матриця розміру $\mathbf{Z}Q \times \mathbf{Z}(Q+1)$;

$K_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_0 & -b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & -b_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{Q-1} & -b_Q \end{bmatrix}$ – квадратна матриця розміру $Q+1$;

$K_{б3} = \mathrm{diag}\ (K_3, \dots, K_3)$ – квадратна матриця розміру $\mathbf{Z}(Q+1)$;

$$K_4=\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{K} & 0 \\ I_{(0,1)0}\,b_0 & \mathbf{K} & I_{(0,1)Q-1}\,b_{Q-1} \\ \mathrm{M} & & \mathrm{M} \\ I_{(Q-1,Q)0}\,b_0 & \mathbf{K} & I_{(Q-1,Q)Q-1}\,b_{Q-1} \end{bmatrix}$$ – матриця розміру $(Q+1)\times Q$; $K_{б4}=\mathrm{diag}\ (K_4,\mathbf{K},K_4)$ – матриця розміру $\mathbf{Z}(Q+1)\times\mathbf{Z}Q$; $K_{4пов}=\begin{bmatrix}0 & I_{(0,1)Q}\,b_Q & \mathbf{K} & I_{(Q-1,Q)Q}\,b_Q\end{bmatrix}^T$ – стовпець розміру $Q+1$; $K_{б4пов}=\mathrm{diag}\ (K_{4пов},\mathbf{K},K_{4пов})$ – матриця розміру $\mathbf{Z}(Q+1)\times\mathbf{Z}$; $K_5=\begin{bmatrix}I_{(0,Q)0}\,b_0 & \mathbf{K} & I_{(0,Q)Q-1}\,b_{Q-1}\end{bmatrix}$ – рядок розміру *Q*; $K_{б5}=\mathrm{diag}\ (K_5,\mathbf{K},K_5)$ – матриця розміру $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}Q$; $K_{б5пов}=\mathrm{diag}\ (I_{(0,Q)Q}\,b_Q,\mathbf{K},I_{(0,Q)Q}\,b_Q)$ – квадратна матриця розміру **Z**.

Доповнимо рівняння (5) рівняннями електричного стану статора фаз статора та контурів ротора

$$d\vec{\psi}_c/dt+R_c\vec{i}_c-\vec{u}_c=0;\quad d\vec{\psi}_p/dt+R_p\vec{i}_p-l_p\rho_{ст}\mathbf{B}_{пазр}\vec{j}_{пов}=0;\quad \vec{i}_{пазр}-\mathbf{B}_{пазрT}\vec{i}_p=0 \tag{6}$$

та рівняннями механічного стану

$$M+M_в-J\cdot d\omega/dt=0;\quad \omega=d\gamma/dt, \tag{7}$$

де $R_c=\mathrm{diag}\left(R_{c1},\mathbf{K},R_{cs}\right)$; $R_p=\mathrm{diag}\ \left(2R_{кл},...,2R_{кл}\right)$ – матриця опорів фаз статора й контурів ротора відповідно; $R_{кл}$ – опір елемента кільця обмотки ротора; $\vec{u}_c=[u_{c1}\ \ \ldots\ \ u_{cs}]_т$ – вектор напруг фаз статора як відомих функцій часу; J – момент інерції обертових мас; $M_в$ – момент на валі як відома функція часу; ω – кутова швидкість ротора.

Друге рівняння системи (6) за своїм фізичним змістом аналогічне до некласичної крайової умови (десяте рівняння системи (5)), а в цьому випадку воно виконує функцію контактної умови [5]. Надалі використовуватимемо саме рівняння контактної умови.

Система рівнянь (5)–(7) при початковій умові

$$t=t_0;\quad \vec{i}_c=\vec{i}_{c0};\quad \vec{i}_p=\vec{i}_{p0};\quad \gamma=\gamma_0;\quad \omega=\omega_0;\quad \vec{H}_{стд}=\vec{H}_{стд0}$$

описує електромеханічні перехідні процеси в асинхронному двигуні з урахуванням витіснення струму у стрижнях ротора. Її розв'язком є сукупність залежностей $\vec{i}_c$, $\vec{i}_p$, $\vec{i}_{пазр}$, $\vec{\Phi}_{корр}$, $\vec{j}_д$, $\vec{j}_{пов}$, $\vec{H}_{стд}$, γ, ω, M, $B_п$, $\vec{B}_{сд}$, $\vec{H}_{сд}$, $\vec{B}_{рд}$, $\vec{H}_{рд}$, $\vec{B}_{\delta д}$, $\vec{F}_д$, $\vec{\psi}_c$, $\vec{\psi}_p$ від часу, які будуть відображати обчислюваний електромеханічний перехідний процес.

До інтегрування нелінійної САР (5), (6), (7), яка описує електромеханічні перехідні процеси в асинхронному двигуні з урахуванням витіснення струму у стрижнях ротора під час розрахунку його магнітного поля методом тригонометричної колокації, застосуємо метод ФДН [6].

Алгебризувавши похідні в диференційних рівняннях за формулою диференціювання назад g-го порядку, отримуємо алгебричні рівняння

$$b\vec{\psi}_c+\sum_{j=1}^{g}b_j\vec{\psi}_{cj}+R_c\vec{i}_c-\vec{u}_c=0;\quad b\vec{\psi}_p+\sum_{j=1}^{g}b_j\vec{\psi}_{pj}+R_p\vec{i}_p-l_p\rho_{ст}\mathbf{B}_{пазр}\vec{j}_{пов}=0;$$

$$K_{б1}\vec{j}_д+K_{б1пов}\vec{j}_{пов}+K_{б2}(b\vec{H}_{стд}+\sum_{j=1}^{g}b_j\vec{H}_{стд\,j})=0; \tag{8}$$

$$M+M_в-J(b\omega+\sum_{j=1}^{g}b_j\omega_j)=0;\quad \omega=b\gamma+\sum_{j=1}^{g}b_j\gamma_j,$$

де $\vec{i}_c$, $\vec{i}_p$, $\vec{j}_{пов}$, $\vec{j}_д$, $\vec{H}_{стд}$, γ, $\vec{\psi}_c$, $\vec{\psi}_p$, M, ω – невідомі значення змінних стану в моменті t; $\vec{u}_c$, $M_в$ – відомі значення вимушуючих сил у моменті t; γ_j, $\vec{\psi}_{cj}$, $\vec{\psi}_{pj}$, ω_j, $\vec{H}_{стдj}$ – обчислені на попередніх g кроках інтегрування значення змінних γ, $\vec{\psi}_{с}$, $\vec{\psi}_{р}$, ω, $\vec{H}_{стд}$ в моментах $t_g < t_{g-1} < \mathbf{K} < t_1$; b, b_j (j=1,...,g) – коефіцієнти, що визначаються сукупністю значень t, t_1,..., t_g. До розв'язування нелінійної системи алгебричних рівнянь (5), (8) застосуємо метод Ньютона.

Лінеаризована система рівнянь (5), (8) на *i*-й ітерації методу Ньютона зводиться до вигляду

$$A^{\langle i-1\rangle}\Delta\vec{X}_{п}^{\langle i\rangle} = -\vec{f}^{\langle i-1\rangle}, \tag{9}$$

де $\vec{f}^{\langle i-1\rangle}$, $A^{\langle i-1\rangle}$ – значення вектора нев'язок $\vec{f} = \begin{bmatrix} \vec{f}_{м1} & f_{м2} & \vec{f}_{Н} & \vec{f}_{с} & \vec{f}_{р} & \vec{f}_{паз} & f_{м} \end{bmatrix}_{T}$ і матриці

$$A = \begin{bmatrix}
-\dfrac{n_{сдт}}{a_{с}} & e^{p_{м}\gamma Д} n_{рдт} & 0 & 0 & -p_{м} e^{-p_{м}\gamma Д} Д n_{рдт} \vec{i}_{р} & \begin{matrix}\dfrac{1}{c_{с}} Д\rho_{д} Д - \dfrac{r_{с}}{p_{м}} \nu_{сд} - \\ -\dfrac{r_{р}}{p_{м}} \nu_{рд} c\end{matrix} & \dfrac{r_{р}}{p_{м}} \nu_{рд} \vec{c}_{1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_{р} \vec{I}_{G} \nu_{рд} c & r_{р} \vec{I}_{G} \nu_{рд} \vec{c}_{1} \\
0 & 0 & K_{б1пов} + bK_{б3}K_{б2}^{-1}K_{б4пов} & K_{б1} + bK_{б3}K_{б2}^{-1}K_{б4} & 0 & 0 & 0 \\
bL_{\sigma с} + R_{с} & 0 & 0 & 0 & 0 & b\dfrac{2\pi}{N}\dfrac{r_{\delta}}{p_{м}c_{с}a_{с}} n_{сд} & 0 \\
0 & bL_{\sigma р} + R_{р} & \begin{matrix} b\mathbf{B}_{пазр}\Lambda_{корр}K_{б5пов} - \\ -l_{р}\rho_{ст}\mathbf{B}_{пазр}\end{matrix} & b\mathbf{B}_{пазр}\Lambda_{корр}K_{б5} & -b\dfrac{2\pi}{N}\dfrac{r_{\delta}}{c_{р}} e^{-p_{м}\gamma Д} Д n_{рд} \vec{B}_{сд} & b\dfrac{2\pi}{N}\dfrac{r_{\delta}}{p_{м}c_{р}} e^{-p_{м}\gamma Д} n_{рд} & 0 \\
0 & -\mathbf{B}_{пазрт} & K_{б5пов} & K_{б5} & 0 & 0 & 0 \\
-\dfrac{2\pi}{N}\dfrac{p_{м}r_{\delta}}{a_{с}} \vec{B}_{\delta д} n_{сдт} & 0 & 0 & 0 & -Jb^{2} & -\dfrac{2\pi}{N}\dfrac{p_{м}r_{\delta}}{a_{с}c_{с}} \vec{i}_{сТ} n_{сд} Д & 0
\end{bmatrix}$$

обчислені за (i–1)-м наближенням невідомих;

$$\Delta\vec{X}_{п}^{\langle i\rangle} = \begin{bmatrix} \Delta\vec{i}_{с}^{\langle i\rangle} & \Delta\vec{i}_{р}^{\langle i\rangle} & \Delta\vec{j}_{пов}^{\langle i\rangle} & \Delta\vec{j}_{д}^{\langle i\rangle} & \Delta\gamma^{\langle i\rangle} & \Delta\vec{B}_{сд}^{\langle i\rangle} & \Delta B_{п}^{\langle i\rangle} \end{bmatrix}_{T}$$

– вектор поправок первинних невідомих на *i*-й ітерації.

Утворимо вектор $\vec{X}_{в} = \begin{bmatrix} \vec{H}_{сд} & \vec{B}_{рд} & \vec{H}_{рд} & \vec{B}_{\delta д} & \vec{F}_{д} & \vec{H}_{стд} & \vec{i}_{пазр} & \vec{\Phi}_{корр} & \vec{\psi}_{с} & \vec{\psi}_{р} & M & \omega \end{bmatrix}_{T}$, який назвемо вектором вторинних невідомих.

На *i*-й ітерації розв'язування нелінійної системи алгебричних рівнянь (9) необхідно виконати такі операції:

- за (i–1)-м наближенням невідомих обчислити значення $A^{\langle i-1\rangle}$ матриці A і значення $\vec{f}^{\langle i-1\rangle}$ вектора $\vec{f}$ нев'язок;
- розв'язати числовим методом лінійну систему алгебричних рівнянь (9);
- обчислити i-те наближення первинних невідомих за формулою
$$\vec{X}_{п}^{\langle i\rangle} = \vec{X}_{п}^{\langle i-1\rangle} + \Delta\vec{X}_{п}^{\langle i\rangle};$$
- обчислити i-те наближення вторинних невідомих безпосередньо за тими рівняннями системи (5), які розв'язані відносно цих невідомих.

Висновки

Опрацьована математична модель асинхронного двигуна з урахуванням витіснення струму у стрижнях ротора, з урахуванням насичення основного магнітного кола, насичення шляхів потоків розсіяння ротора та вищих просторових гармонік МРС дозволяє досліджувати поведінку двигуна в перехідних процесах, усталених режимах, оцінювати зазначені вище чинники на статичні характеристики.

1. Фильц Р. В. Математические основы теории электромеханических преобразователей. – Киев: Наук. думка, 1979. – 208 с. 2. Фільц Р. В. Математичне моделювання електромагнітних *процесів у стрижні короткозамкненої обмотки. / Фільц Р. В., Макарчук О. В. // Технічна електродинаміка. – 1995. – № 1. – С. 3–8. 3. Фільц Р. В. Математична модель узагальненої неявнополюсної електричної машини з урахуванням насичення основного магнітного кола. / Фільц Р. В., Гладкий В. М. // Вісник ЛПІ. Електроенергетичні та електромеханічні системи. – 1999. – №372. – С. 181 – 189. 4. Фильц Р. В. Оператор сдвига и его применение в задачах электромеханики // Изв. вузов, Электромеханика. – 1991. – № 4. – С. 5–12. 5. Макарчук О. В. Математичне моделювання електромеханічних перехідних процесів у явнополюсних електричних машинах: дис. ... канд. техн. наук: 05.09.01. – Львів, 1996. – 203 с. 6. Чуа Л. О. Машинный анализ электронных схем. / Чуа Л. О., Пен-Мин Лин. // М.: Энергия. – 1980. – 638 с. 7. Повстень В. А. Использование интегральных уравнений для расчета электрических параметров роторных стержней асинхронных двигателей. // Изв. вузов. Электромеханика. – 1981. – № 4. – С. 374–379. 8. Сивокобыленко В. Ф. Математическое моделирование глубокопазных асинхронных машин. / Сивокобыленко В. Ф., Костенко В. И. // Электричество. – 1980. – № 4. – С. 32–36. 9. Цуканов В. В. Коеффициенты вытеснения тока и проводимости пазового рассеяния с учетом зазора между стержнем обмотки и пазом ротора электрической машины / Цуканов В. В., Георгиади В. Х. // Электричество. – 1990. – № 1. – С. 67–71. 10. Петрушин В. С. Влияние насыщения стали магнитопровода и вытеснения тока в обмотке ротора на динамические характеристики регулируемых асинхронных двигателей. / Петрушин В. С., Бухалфа Бендахман, Якимец А. М., Каленик О. В. // Електротехніка і Електромеханіка. – 2010. – № 2. – С. 21–23. 11. Сивокобиленко В. Ф. Математична модель асинхронного двигуна з урахуванням насичення сталі та витіснення струму в роторі / Сивокобиленко В. Ф., Василець С. В. // Моделювання та інформаційні технології. – 2013. – Вип. 69. – С. 3–10.*

. **УДК 62-83:621.313.3**

І. Р. Головач, Л. Ф. Карплюк, Б. Я. Панченко, В. Б. Цяпа
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра електроприводу і комп'ютеризованих електромеханічних систем

СИСТЕМА КЕРУВАННЯ ЕЛЕКТРОПРИВОДУ КРИВОШИПНО-ШАТУННОГО МЕХАНІЗМУ З НЕЛІНІЙНИМИ ЗВОРОТНИМИ ЗВ’ЯЗКАМИ

Проаналізовано роботу системи керування електроприводу кривошипно-шатунного механізму. Розроблено методику налаштування регуляторів. Результати досліджень можуть бути використані під час розроблення нових систем електроприводів.

Ключові слова: кривошипно-шатунний механізм, електропривід, система регулювання, нелінійні зворотні зв’язки.

The control system of electric drives with Crankshaft mechanism load has been analyzed. Method of tuning speed feedback adjusting was developed. The result can be used for the designing new systems of electric drives.

Key words: crankshaft mechanism, electric drive, control system , nonlinear feedbacks.

Постановка задачі

Особливий інтерес становить застосування сучасних частотно-регульованих електроприводів змінного струму для машини з кривошипно-шатунними або ексцентриковими механізмами, робота