УДК 62 – 83 (071)

Б. Г. Бойчук, Б. С. Калужний, В. Б. Цяпа
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра електроприводу і комп’ютеризованих електромеханічних систем

ВИКОРИСТАННЯ СТРУКТУРОВАНИХ ХАРАКТЕРИСТИЧНИХ ПОЛІНОМІВ ДЛЯ СИНТЕЗУ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

Розглянуто використання структурованих характеристичних рівнянь з метою вироблення програми налаштування змінних параметрів системи. Розроблена система відносних одиниць, з використанням яких розраховується множина можливих варіантів систем автоматичного керування. Досліджено можливості використання цих одиниць для спрощення математичного опису систем.

Ключові слова: передатна функція, структурна схема, характеристичне рівняння, структурування, діаграма, налаштування, корінь рівняння.

The article discusses the use of structured characteristic equations to develop programs setting system variables. The relative units system designed for calculation of a set of options of automatic control. The possibility of using these units investigated to simplify the mathematical description of the system.

Key words: transfer function, block diagram, characteristic equation, structure, pattern, configuration, root equation.

Постановка проблеми

Під час досліджень систем автоматичного керування (САК) важливо, щоб кількість пропонованих варійованих параметрів була мінімальною, але водночас достатньою для можливості незалежного експериментального налагодження всіх коефіцієнтів характеристичного полінома. При цьому результати досліджень повинні мати узагальнений характер, тобто, щоб вони могли використовуватися для широкого ряду часткових варіантів. Прикладом цього є представлення передатних функцій у формі Вишнеградського, в якому проводиться масштабування передатних функцій за амплітудою та за частотою (часом). Якщо отримані у певних відносних одиницях найстарший і наймолодший коефіцієнти характеристичного полінома мають якесь фізичне трактування, то про проміжні коефіцієнти сказати щось конкретного не можна. Ця обставина обмежує можливості аналізу і синтезу. Отримання рішень, в яких цей недолік був би зменшений або ліквідований, дозволило б розширити можливості узагальнення результатів аналізу і синтезу САК. Варіант представлення всіх коефіцієнтів характеристичних поліномів через сукупність певних відносних параметрів надиться в роботах [1, 2], де пропонується процедура певного структурування передатних функцій, на підставі якої отримуються ці відносні параметри. Така структурована передатна функція відповідає певній регулярній структурній схемі, для якої можна вибрати мінімальну кількість необхідних незалежних варійованих параметрів та порядок їх налаштування.

Аналіз останніх досліджень

У сучасних електроприводах широко використовуються системи керування із стандартними налаштуваннями, простота реалізації яких забезпечується використанням схем підпорядкованого керування. Недоліком таких систем є те , що вони надаються лише для певного виду структурних схем незмінюваної частини (об’єкта), (наприклад, нехтування внутрішнім зворотним зв’язком за ЕРС двигуна), а також те, що вони не запевняють максимально можливої швидкодії системи, швидкодія з підвищенням порядку контуру знижується. Вказані недоліки ліквідовуються окремими частковими рішеннями, які не мають системного характеру. Питання дослідження синтезу систем автоматичного керування (САК) за стандартними налаштуваннями та стандартним розподілом коренів характеристичних рівнянь для систем електроприводів розглядаються, зокрема, в [2, 3]. Аналіз показує, що основною тенденцією досліджень має бути застосування системного підходу до виконання завдання синтезу, вироблення і застосування певних узагальнених параметрів, з тим, щоб результати синтезу мали універсальний характер і охоплювали б широку множину можливих варіантів.

Задача досліджень

Задачею досліджень є розроблення способу представлення передатних функцій САК і їх коефіцієнтів у такій формі, яка дозволила б спростити процес синтезу, зокрема, детермінувати задачу вибору мінімальної кількості потрібних варійованих параметрів САК, за допомогою яких можна було б їх налаштувати згідно з прийнятим критерієм; виявлення можливостей і переваг застосування системи відносних одиниць на базі відношень коефіцієнтів характеристичного рівняння для системних досліджень поведінки САК; виявлення можливостей застосування вказаних відношень для зниження порядку системи.

Виклад основного матеріалу

Переваги використання відносних одиниць загальновідомі. Вибір системи таких одиниць може вплинути на ступінь узагальнення отримуваних результатів. Найчастіше при дослідженні об’єктів, які описуються в операторній формі диференціальними рівняннями вигляду

$$A_n S^n + ... + A_2 S^2 + A_1 S + A_0 = 0 \tag{1}$$

зі сталими коефіцієнтами, де S – оператор Лапласа, проводять масштабування за амплітудою і за часом (частотою). Наприклад, в системах третього порядку, поділивши вихідне рівняння на $\mathbf{A_0}$ *і* прийнявши $S = \mathbf{s}\sqrt[3]{\frac{A_0}{A_3}}$ тобто $s = S\sqrt[3]{\frac{A_3}{A_0}}$, одержимо

$$s^3 + \mathbf{A}s^2 + \mathbf{B}s + 1 = 0, \tag{2}$$

де $\mathbf{A} = \frac{A_2}{A_0}\sqrt[3]{\left(\frac{A_0}{A_3}\right)^2}$, $\mathbf{B} = \frac{A_1}{A_0}\sqrt[3]{\frac{A_0}{A_3}}$.

При переході в часову область базовою величиною часу буде величина $T_0^* = \sqrt[n]{A_n}$ (при A_0 =1), тобто вона визначатиметься лише одним, найстаршим, коефіцієнтом рівняння як його середньогеометричне.

Відомо, що поведінка систем автоматичного керування (САК) визначається не так самими коефіцієнтами характеристичного рівняння, як їх відношеннями. Спробуємо діяти за цим способом. Для цього характеристичний поліном рівняння (1) зобразимо в такій формі:

$$N(S) = A_1 S\left(\frac{A_2}{A_1} S ... \left(\frac{A_{n-1}}{A_{n-2}} S\left(\frac{A_n}{A_{n-1}} S + 1\right) + 1\right) ... + 1\right) + 1. \tag{3}$$

Далі, позначивши $\frac{A_n}{A_{n-1}} = T_0$, $\frac{A_{n-1}}{A_{n-2}} = T_1, \ldots, A_1 = T_{n-1}$, а потім $\frac{T_i}{T_{i-1}} = a_i$, де i =1, 2, 3, …, n-1, досліджуваний характеристичний поліном можна звести до вигляду:

$$N(s) = a_{n-1}a_{n-2}...a_1 T_0 S\left(a_{n-2}...a_1 T_0 S...\left(a_1 T_0 S\left(T_0 S + 1\right) + 1\right)... + 1\right) + 1,$$

і в розгорнутому вигляді

$$\begin{aligned} N(s) = {} & a_1^{n-1} a_2^{n-2} ... a_{n-1} T_0^n S^n + a_1^{n-1} a_2^{n-2} ... a_{n-1} T_0^{n-1} S^{n-1} + a_1^{n-2} a_2^{n-2} ... a_{n-1} T_0^{n-2} S^{n-2} + ... \\ & + a_1 a_2 ... a_{n-1} T_0 S + 1. \end{aligned} \tag{4}$$

У такому представленні коефіцієнти характеристичного полінома є добутками різних степенів певних параметрів a_i, причому в кожен коефіцієнт входять всі згадані параметри. Якщо звернутися до графічної інтерпретації системи у вигляді структурної схеми або графа, то вираз (3) відповідає структурі з n концентричних вкладених один в одного контурів, початковий, перший з яких є інтегрувальною ланкою із сталою часу інтегрування T_0, охопленою одиничним від'ємним зворотним зв'язком. До його входу приєднується наступна інтегрувальна ланка із сталою часу a_1T_0 і все це знову охоплюється одиничним від'ємним зворотним зв'язком за вихідною координатою початкової ланки тощо. Тобто параметри a_i є відношенням сталої часу інтегрування наступної ланки до попередньої. Коефіцієнти A_i містять параметри незмінюваної частини САК (об'єкта) і параметри синтезованої, змінюваної частини системи. Оскільки параметри об'єкта задані неточно, то забезпечення потрібних, бажаних значень коефіцієнтів передатної функції системи варійовані параметри необхідно налагоджувати експериментально, причому в певній послідовності. При цьому цих параметрів має бути достатньо для незалежного налаштування всієї системи. Представлення характеристичного рівняння у вигляді (3) дає змогу вибрати необхідні варійовані параметри САК, які б встановили коефіцієнти її передатної функції відповідно до бажаних, оптимальних значень. Якщо прийняти порядок налаштування від внутрішнього контуру, то першим налаштовується коефіцієнт A_n. Далі налаштовується коефіцієнт A_{n-1}, причому новим варійованим параметром, якого нема в попередньому контурі тощо.

Приймемо сталу часу $\frac{A_n}{A_{n-1}} = T_0$ базовою величиною відносного часу. Зауважимо, що вона визначається за двома коефіцієнтами характеристичного полінома, а не за одним, як це робиться традиційно. Для характеристичного рівняння системи в формі (4) умови стійкості САК для систем різних порядків будуть виглядати так:

- система 2-го порядку: $a_1 > 0$;
- система 3-го порядку: $a_1 > 0, \quad a_1a_2 - 1 > 0$;
- система 4-го порядку: $a_1 > 0, \quad a_1a_2 - 1 > 0. \quad a_3 - \frac{a_1}{a_1a_2 - 1} > 0$;
- система 5-го порядку: $a_1 > 0, \quad a_1a_2 - 1 > 0. \quad a_4 - 1 > 0; \quad a_1a_2^2a_3^2a_4 - \frac{(a_1a_2a_3a_4 - 1)^2}{(a_1a_2 - 1)(a_3a_4 - 1)} > 0$.

В яких межах реально можуть змінюватися коефіцієнти a_i характеристичного рівняння, представленого в формі (4)? Оцінимо це на основі поліномів різної стандартної форми, привівши їх до вигляду (4). Отримані результати зведені в табл.1 і 2.

Таблиця 1

Стандартні характеристичні поліноми 4-го порядку та відповідні їм значення коефіцієнтів a_i

Вид характеристичного полінома (критерій, характер розподілу коренів)		Значення первісних коефіцієнтів		
№ з/п	Назва	a_1	a_2	a_3
1	2	3	4	5
1	Біноміальний ряд	2,67	2,25	2,67
2	Форма Батерворта (модульний оптимум)	2,00	1,70	2,00
3	Бесселя – Томсона	2,222	1,928	2,333
4	Комбінований Батерворта – Бесселя	1,667	1,5	2,0
5	Мінімум часу перехідного процесу	0,813	2,531	1,906
6	З кратними коренями	2,118	2,007	2,118
7	Найбільша швидкодія	1,779	1,984	2,063
8	ІТО (ІТАЕ, Грехема – Летропа)	1,297	2,039	2,144
9	Мінімум середньоквадратичної похибки (за Петровим)	0,333	4,5	1,333
10	Однакова відстань коренів від уявної осі	1,754	2,031	2,024

1	2	3	4	5
11	Рівні проекції коренів на уявну вісь	2,331	1,957	2,331
12	З оптимальною імпульсною характеристикою	1,480	2,025	2,016
13	Батерворта – Томсона	2,077	1,782	2,118
14а	За Яворським № 8 (всі корені комплексні)	2,015	2,650	2,015
14б	За Яворським № 9 (всі корені комплексні)	2,003	4,070	2,003
14в	За Яворським № 25 (старші корені комплексні)	3,678	2,591	2,122
14г	За Яворським № 27 (старші корені комплексні)	1,522	2,056	2,807
14д	За Яворським № 37 (молодший і старший корені дійсні)	2,294	2,031	2,589
15	Оптимальні за швидкодією	1,96	2,041	1,96
16а	Чебишева, Нерівномірність АЧХ в смузі пропускання (0,5 дБ)	0,837	2,394	1,623
16б	Чебишева (1 дБ)	0,622	2,991	1,453
16в	Чебишева (3 дБ)	0,288	5,757	0,798
17а	Оптимальний за АЧХ з лін. фазою, відхилення фази від лін, закону 1^o	0,985	2,261	1,954
17б	Оптимальний за АЧХ з лін. фазою, відхилення фази від лін, закону 5^o	0,593	3,226	1,466
17в	Оптимальний за АЧХ з лін. фазою, відхилення фази від лін, закону 3^o	0,647	2,988	1,596
18а	Поліном Лежандра. Нерівномірність АЧХ у смузі пропускання 0,5 дБ	1,603	1,703	2,002
18б	Поліном Лежандра. Нерівномірність АЧХ у смузі пропускання 1 дБ	1,511	1,735	2,003
18в	Поліном Лежандра. Нерівномірність АЧХ у смузі пропускання 3 дБ	1,288	1,847	1,984
19а	Параболічний. Абсциса фокуса 0	1,732	1,778	2,275
19б	Параболічний. Абсциса фокуса 3	1,494	1,988	2,499
19в	Параболічний. Абсциса фокуса 8	1,412	2,101	2,585
20	Апроксимація за Чебишевим. Осциляції фази 5^o	0,665	3,456	1,417

Таблиця 2

Стандартні характеристичні поліноми різних порядків та відповідні їм значення коефіцієнтів a_i

Вид полінома	Порядок системи	Значення коефіцієнтів						
		a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
Біноміальний ряд	2	4						
	3	3	3					
	4	2,67	2,25	2,67				
	5	2,50	2,00	2,00	2,50			
	6	2,40	1,88	1,78	1,88	2,40		
	7	2,33	1,80	1,67	1,67	1,80	2,33	
	8	2,29	1,75	1,60	1,56	1,60	1,75	2,29
Форма Батерворта (ідентичний з модульним оптимумом)	2	1,96						
	3	2,00	2,00					
	4	2,00	1,70	2,00				
	5	2,00	1,62	1,62	2,00			
	6	2,00	1,58	1,50	1,58	2,00		
	7	2,01	1,55	1,45	1,45	1,55	2,01	
	8	2,04	1,57	1,38	1,42	1,42	1,55	2,00
Оптимальний за швидкодією аперіодичний процес з перерегулюванням	2	1,904						
	3	1,758	2,786					
	4	1,777	1,984	2,063				
	5	1,180	2,057	1,545	2,427			
	6	1,739	1,667	1,548	1,702	2,04		
	7	0,939	2,035	1,182	1,526	1,896	2,054	
	8	2,298	0,840	1,925	1,463	1,386	1,699	1,980

Як видно з отриманих результатів, для доволі великої кількості стандартних характеристичних поліномів, які вивели різні автори з умов забезпечення найрізноманітніших показників якості, числові значення їх коефіцієнтів a_i лежать у доволі вузьких межах, тобто вони можуть мати узагальнювальний характер. У зв'язку з цим пропонується називати їх первісними коефіцієнтами системи.

При представленні характеристичного рівняння в формі (2) поведінка системи визначається двома узагальненими параметрами – **A** і **B.** Для оцінки впливу цих параметрів на розв'язки в системах 3-го порядку використовується відома діаграма Вишнеградського, яка площину координат **(A, B)** ділить на зони з різним характером поведінки системи. Розрахуємо таку діаграму в площині координат первісних коефіцієнтів a_1 і a_2. Для цього використаємо загальновідому в теорії автоматичного керування методику побудови діаграми Вишнеградського. Співвідношення між первісними коефіцієнтами a_i рівняння $a_1^2 a_2 T_0^3 S^3 + a_1^2 a_2 T_0^2 S^2 + a_1 a_2 T_0 S + 1 = 0$ і коефіцієнтами **A** і **B** рівняння (2) в [1], мають вигляд

$$\mathbf{A} = \sqrt[3]{a_1^2 a_2}\ ; \quad \mathbf{B} = \sqrt[3]{a_1 a_2^2}\ ; \quad a_1 = \mathbf{A}^2 / \mathbf{B}\ ; \quad a_2 = \mathbf{B}^2 / \mathbf{A}\ . \tag{5}$$

Розрахована в координатах (a_1, a_2) діаграма наведена на рис. 1. На цій же діаграмі нанесені також лінії однакового степеня стійкості η.

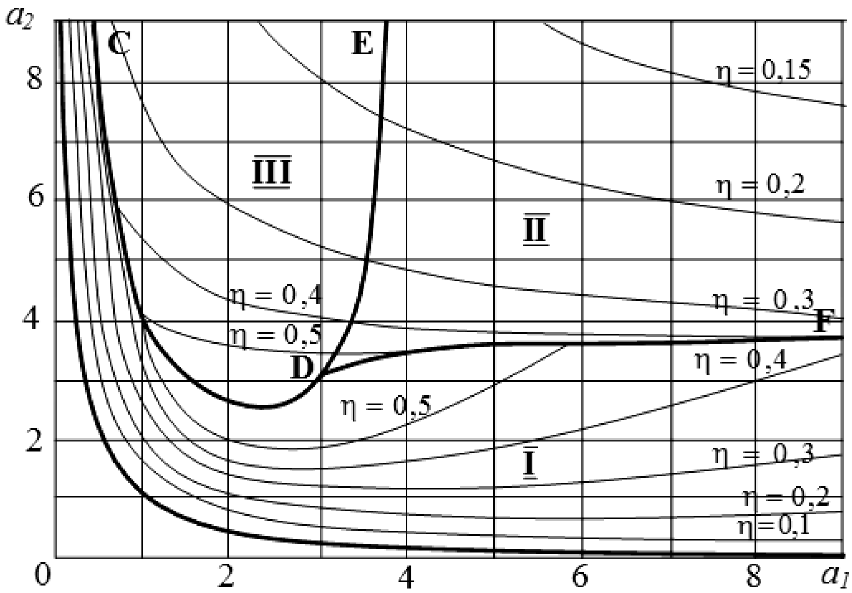

Рис. 1. Трансформована діаграма Вишнеградського в координатах (a_1, a_2)

Лінії розмежування зон з різним характером поведінки САК відповідають виведеним згідно з методикою [1] рівнянням. Для лінії CD таке рівняння має вигляд:

$$2a_1^2 a_2 - 9\, a_1 a_2 + 27 = 0.$$

Лінії DE і DF проведені згідно з розв'язками одного рівняння

$$a_1^2 a_2^2 - 4\, a_1 a_2 (a_1 + a_2) + 18\, a_1 a_2 - 27 = 0.$$

Трансформована в координати (a_1, a_2) діаграма Вишнеградського наведена на рис. 1 (суцільні лінії). Гіпербола $a_1 a_2 = 1$ є межею стійкості системи. Порівнюючи її з традиційною діаграмою, можна зробити висновок, що одна і та сама область поведінки системи охоплюється меншим діапазоном зміни первісних коефіцієнтів a_i, . Отже, представлення характеристичних рівнянь у структурованому вигляді (4), тобто за допомогою первісних коефіцієнтів a_i, дозволяє отримати рішення в компактнішому вигляді, ніж за допомогою простого масштабування за часом і амплітудою. Обидва варіанти діаграм надають якісну оцінку варіантів розв'язків. Але, враховуючи те, що, згідно з попередніми висновками, значення первісних коефіцієнтів лежать у доволі вузьких межах, можна просто прорахувати через певний крок зміни величини a_i корені рівнянь 3-го порядку для широкого діапазону значень a_i і представити отриману множину розв'язків у графічному вигляді. Розрахунки доцільно проводити для відносного оператора $s = T_0S$, тобто, для відносного часу, базовою величино якого є стала часу T_0. Результати таких розрахунків для пар комплексних коренів наведені на рис. 2. Тут для зручності показана половина комплексної площини. Для отримання абсолютних величин коренів їх треба поділити на сталу часу T_0.

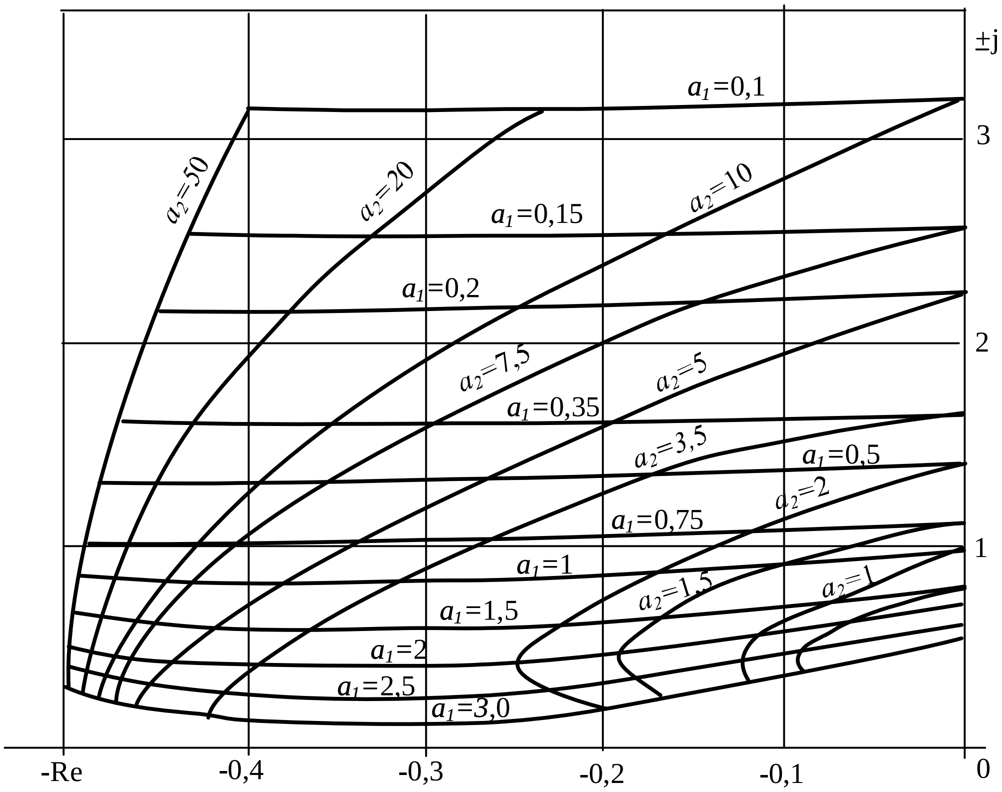

Рис. 2. Траєкторії комплексних коренів систем 3-го порядку для різних первісних коефіцієнтів

Величини дійсних значень цих коренів зведені в табл. 3. Для отримання абсолютних величин коренів їх треба поділити на сталу часу T_0.

Таблиця 3

Величини дійсних частин коренів систем 3-го порядку для різних величин первісних коефіцієнтів

a_2 / a_1	0,1	0,2	0,5	1	2	5	10	20
0,1	–10	–7,85	–5,597	–4,228	–3,06	–1,760	**–1,0**	–0,51
0,2	–6,37	–5	–3,553	–2,66	–1,88	**–1**	–0,53	–0,26
0,5	–3,57	–2,81	–2,0	–1,48	**–1,0**	–0,46	–0,22	–0,10
1	–2,36	–1,88	–1,353	**–1,0**	–0,65	–0,24	–0,11	–0,05
2	–1,63	–1,33	**–1,0**	–0,77	–0,5	–0,13	–0,06	–0,030
5	–1,13	**–1,0**	–0,88	–0,82	–0,78	–0,75 –0,2; 0,05	–0,73 –0,2; 0,02	–0,73 –0,26; 0
10	**–1,0**	–0,95	–0,92	–0,90	–0,89	–0,89; –0,08; 0	–0,89 -0,1; –0,01	–0,89 –0,12; 0
20	–0,98	–0,96	–0,95	–0,95	–0,95	–0,95 –0,04; 0	–0,95 –0,05; 0	–0,95 –0,05; 0

Три значення кореня в одній клітинці відповідають випадкові, коли всі три корені дійсні. Дуже малі значення одного або двох із них свідчать про можливість зниження порядку рівняння відповідно на 1 або на 2. Оцінку можливості зниження порядку системи можна робити не тільки за величинами коренів, але і безпосередньо за величинами первісних коефіцієнтів. Покажемо це для системи третього порядку, записавши її рівняння в канонічній формі:

$$s^3 + s^2 + \frac{1}{a_1}s + \frac{1}{a_1^2 a_2} = 0 .$$

Як видно з цього рівняння, при дуже великому коефіцієнтові a_2, але скінченному a_1, порядок рівняння можна знизити на одиницю. Якщо ж дуже великим є також і коефіцієнт a_1, то рівняння зведеться до першого порядку.

Діагональ наведеної табл. 3, яка містить одиничні коефіцієнти, відповідає межі стійкості системи.

Висновки

Результати проведених досліджень показали, що структурування характеристичних поліномів забезпечує при синтезі САК вибір мінімальної кількості незалежних варійованих параметрів та програму їх налаштування. Застосування такого підходу дозволяє представити кожен коефіцієнт характеристичного полінома як добуток певних елементарних множників, тобто фактично розкласти його на елементарні складові, кожна з яких вносить свою часточку впливу на увесь коефіцієнт. Ці складові названі первісними коефіцієнтами. Введення цього поняття дозволяє у відносних одиницях прорахувати в числовому вигляді широку множину варіантів реально можливих розв’язків, провести їх системний аналіз і класифікацію. Зокрема, по числових значеннях первісних коефіцієнтів і їх коренів можна судити про можливість зниження порядку системи. Таке системне дослідження для широкого діапазону величин первісних коефіцієнтів проведене для систем 3-го порядку.

1. Бойчук Б. Г. Дослідження динамічних властивостей систем автоматичного керування за співвідношеннями коефіцієнтів їх характеристичних рівнянь / Б. Г. Бойчук, І. М. Білозор // Електроінформ. № 2. 2005. – С. 13–15. 2. Бойчук Б. Г. Дослідження поведінки систем автоматичного керування за співвідношеннями коефіцієнтів їх характеристичних поліномів / Б. Г. Бойчук, О. Ю. Лозинський // Вісник Нац. техн. ун-ту “Харківський політехн. інститут”: зб. наук. праць. Темат. вип. – 2006. – С.137–139. 3. Осичев А. В. Стандартные распределения корней в задачах синтеза в электроприводе / А. В. Осичев, В. О. Котляров, В. С. Марков // Вісник Держ. техн. ун-ту ”Харківський політехн. інститут”. Зб. наук. праць. Темат. вип., 1997. – С.104–109.