

## РОЗРОБЛЕННЯ ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ З КАНАТНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

© Гелетій В. М., 2016

Розглянуто питання комп'ютерного моделювання динамічних процесів механічних систем з канатними елементами: вантажопідіймальних машин, лісозаготівельних канатних транспортувальних систем. Запропонована процедура вилучення квазіциклічних координат, пов'язаних з рухом окремих елементів системи як твердого цілого, що полегшує застосування комп'ютерних методів визначення власних частот і форм коливань і розв'язування задач динаміки таких систем. Наведено метод визначення параметрів демпфування дискретних моделей таких систем.

**Ключові слова:** канатні елементи, динамічні процеси, моделювання, квазіциклічні координати, демпфування.

Computer modeling dynamic processes mechanical systems, which consist of ropes, such as lifting machines and ropes transporting systems, are considered. Procedure of exception of quasi-cyclic coordinates associated with the elements of the system which move as a hard unit is offered. That facilitates application of computer methods of determination of eigen frequencies and forms of vibrations and other tasks of dynamics of such systems. Method of determination parameters damping such discrete mechanical systems is offered.

**Key words:** ropes elements, dynamic processes, computer simulation, quasi-cyclic coordinates, damping.

**Постановка проблеми.** Здебільшого математичні моделі динамічних процесів механічних систем, таких, наприклад, як вантажопідіймальні машини або лісозаготівельні канатні транспортувальні системи, адекватно подаються як лінійні пружні системи, рух яких описується лінійними диференціальними рівняннями вигляду

$$A\ddot{Y} + CY = F, \quad (1)$$

де  $A$ ,  $C$  – матриці інерційних і квазіпружних коефіцієнтів;  $Y$  і  $F$  – відповідно вектори-стовпці узагальнених координат і узагальнених сил. На етапі побудови таких динамічних моделей основні проблеми полягають у визначенні елементів матриць інерційних та квазіпружних коефіцієнтів і узагальнених сил і зведення задачі до розроблених чисельно методів аналізу малих коливань.

Ця задача виконується для кожної механічної системи індивідуально і не може бути повністю формалізована. У роботі пропонується алгоритм визначення елементів матриць  $A$ ,  $C$ ,  $F$  на прикладі розроблення динамічної моделі баштового крана.

Окрім того, рівняння (1) не можуть розглядатися як рівняння малих коливань, оскільки узагальнені координати пов'язані, наприклад, з кутом повороту барабана приводу або переміщенням візка, що визначають рух приводів цих механізмів як жорсткого цілого і зрозуміло, що вони не можуть розглядатися як малі переміщення. Наявність такої квазіциклічної координати пов'язана з появою нульової власної частоти коливання системи. При цьому у динамічних розрахунках найбільший інтерес становлять саме нециклічні (позиційні) координати, які визначають зусилля у пружних ланках. З рівнянь руху можна виключити циклічні координати. Для механічних систем, що розглядаються, пропонується загальний алгоритм вилучення квазіциклічних координат за допомогою певних перетворень рівнянь руху.

**Основний матеріал.** Розглядаються динамічні дискретні моделі баштових кранів з поворотною баштою і підйомною та балковою стрілами. Елементи крана з'єднані канатами, які розглядаються як гнучкі нитки, що працюють тільки на розтяг. Допускається, що зусилля розтягу по довжині каната постійне, а у вузлах змінюють лише напрямок. Переміщення вузлів викликають відповідні зміни довжин ділянок канатів. Для визначення геометричних співвідношень між переміщенням вузлів і деформаціями каната, наприклад, для баштового крана з поворотною баштою і підйомною стрілою На рис. 1 показано відповідну розрахункову схему.

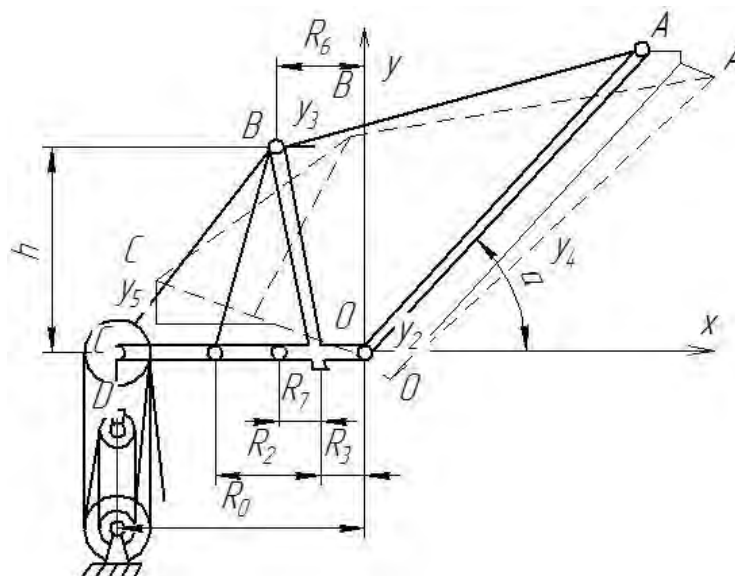


Рис. 1. Розрахункова схема баштового крана з підйомною стрілою

Для прийнятої системи відліку  $Oxy$  довжина ділянки каната між довільними вузлами з координатами  $x_1, y_1$  і  $x_2, y_2$  дорівнює

$$L_0 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Після того, як координати вузлів зміняться на величини  $\Delta x_1, \Delta y_1$  і  $\Delta x_2, \Delta y_2$ , довжина ділянки каната дорівнюватиме

$$L_1 = \sqrt{[x_1 + \Delta x_1 - (x_2 + \Delta x_2)]^2 + [y_1 + \Delta y_1 - (y_2 + \Delta y_2)]^2}.$$

Приймаємо, що величини  $\Delta x_1/L_0, \Delta y_1/L_0$  і  $\Delta x_2/L_0, \Delta y_2/L_0$  малі. Тоді під час визначення зміни довжини каната можна обмежитись лінійним наближенням:

$$\Delta L = \frac{(x_1 - x_2)(\Delta x_1 - \Delta x_2) + (y_1 - y_2)(\Delta y_1 - \Delta y_2)}{L_0}.$$

Позначивши  $X = x_1 - x_2, \Delta x = \Delta x_1 - \Delta x_2, Y = y_1 - y_2, \Delta y = \Delta y_1 - \Delta y_2$ , одержимо

$$\Delta L = \frac{X\Delta x + Y\Delta y}{\sqrt{X^2 + Y^2}}.$$

Величини  $X, Y, \Delta x, \Delta y$  є лінійними функціями узагальнених координат  $y_2, y_3, y_4, y_5$  (рис. 1).

Для визначення пружних деформацій канатів розглянемо геометричні і силові співвідношення у системі стрілового і розвантажувального поліспаств (рис. 1). Пружні деформації каната поліспаства стрілового розчалу і каната вантажного і розвантажувального поліспаств дорівнюють

$$\Delta_1 = p[(\Delta_{AB} + \Delta_{CB}) - \Delta_D + \Delta_C]; \quad (2)$$

$$\Delta_2 = m \cdot \Delta_D + n \cdot \Delta_C, \quad \Delta_C = y_5 + R_T y_2, \quad (3)$$

де  $m, n, p$  – кратність стрілового і розвантажувального поліспаств і поліспаства стрілового розчалу.

Для визначення переміщення у точці  $\Delta D$  розглянемо рівність сил у точці  $D$ :

$$p \cdot C_1 \cdot \Delta_1 = m \cdot C_2 \cdot \Delta_2, \quad (4)$$

де  $C_1$  і  $C_2$  – відповідно жорсткості канатів стрілового і розвантажувального поліспаств. З рівнянь (2)–(4) одержимо

$$\Delta_D = \frac{p^2 C_1 (\Delta_{AB} + \Delta_{BC}) + (p^2 C_1 - mn C_2) \cdot \Delta_{CB}}{p^2 C_1 + m^2 C_2}.$$

Деформація каната відтяжки розпірки  $\Delta_3 = \Delta_{CB}$ . Переміщення вузлів вантажного каната спричиняє відповідне переміщення вантажу:

$$\Delta_4 = -\Delta_{AB} - \Delta_{EB} - y_5 \frac{(R_2 - R_7)}{(R_0 - R_7)} + (R_3 - R_7) y_2 + L_C \cos \alpha y_4.$$

Враховуючи, що  $y_2$  є функцією узагальнених координат  $y_i$ , пружні деформації канатів  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\Delta_3$  і переміщення  $\Delta_4$  можна подати у вигляді

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^5 r_{i,j} \cdot y_j. \quad (5)$$

Визначення коефіцієнтів  $r_{i,j}$  нескладно реалізувати за допомогою комп'ютерних програм.

Сумарна потенціальна енергія деформації вказаних канатів дорівнює

$$U_K = \frac{1}{2} (C_1 \cdot \Delta_1^2 + C_2 \cdot \Delta_2^2 + C_3 \cdot \Delta_3^2).$$

Враховуючи (5), одержимо

$$U_K = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^3 C_m \left( \sum_{j=1}^5 r_{m,j} \cdot y_j \right)^2.$$

Квазіпружні коефіцієнти визначаються на основі такого співвідношення:

$$C_{i,j} = \frac{\partial U}{\partial y_i \partial y_j}.$$

Наприклад, квазіпружні коефіцієнти, які відповідають деформаціям вказаних канатів, визначаються за формулою

$$C_{i,j}^k = \sum_{m=1}^3 C_m r_{m,i} r_{m,j}.$$

Матриця квазіпружних коефіцієнтів усієї системи  $C$  визначається сумуванням квазіпружних коефіцієнтів по кожній складовій потенціальної енергії. Аналогічно матриця інерційних коефіцієнтів усієї системи  $A$  визначається сумуванням інерційних коефіцієнтів по кожній складовій потенціальної енергії.

За активні сили переважно приймаються сили ваги і пусковий момент двигуна, приведений до барабана вантажної лебідки. Відповідно вектор-стовпець узагальнених сил системи визначається за формулою

$$F_i = \frac{\partial A}{\partial y_i},$$

де  $A$  – робота (потенціал) активних сил на можливих переміщеннях системи.

У роботах з дослідження динаміки механізму підйому вантажопідіймальних машин рух системи привод-вантаж подається як рух жорсткого цілого під дією залишкового моменту двигуна приводу і пружних коливань щодо цього руху. За узагальнену координату, яка визначає рух системи як жорсткого цілого, приймають кут повороту барабана вантажної лебідки –  $\varphi$ . При цьому потенціальна енергія системи не залежить від  $\varphi$ .

Узагальнену координату, яка не входить явно у функцію Лагранжа  $L = T - U$ , називають циклічною [2]. Переважно вона відповідає рівномірному руху. Поняття циклічної координати можна узагальнити і на системи, аналогічні до тих, що розглядаються у цій роботі, коли функція Лагранжа залежить від цієї координати лінійно. У цьому випадку координата входить у функцію Лагранжа у вигляді потенціалу узагальнених сил. Відповідна цій координаті узагальнена сила не

залежить від неї, але не дорівнює нулю. Такі координати, згідно з визначенням [2], називаються квазіциклічними.

Розглянемо дискретну лінійну недисипативну систему зі скінченною кількістю ступенів вільності, рух якої описується лінійними диференціальними рівняннями вигляду (1).

За наявності циклічних координат рівняння (1) можна подати за допомогою блочних матриць:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{Y}_1 \\ \ddot{Y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

де  $Y_1$  – вектор позиційних координат;  $Y_2$  – вектор квазіциклічних координат.

Використовуючи властивості блочних матриць, з рівнянь (3) одержимо

$$A_{11} \ddot{Y}_1 + A_{12} \ddot{Y}_2 + C_{11} Y_1 = F_1; \quad (4)$$

$$A_{21} \ddot{Y}_1 + A_{22} \ddot{Y}_2 = F_2. \quad (5)$$

Визначивши з (5)  $\ddot{Y}_2$  і підставивши його в (4), одержимо рівняння, які містять лише позиційні координати, або

$$A^1 \ddot{Y}_1 + C^1 Y_1 = F_1^1, \quad (7)$$

де  $A^1 = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}), \quad C^1 = C_{11}, \quad F_1^1 = F_1 - A_{12}A_{22}^{-1}F_2. \quad (8)$

Оскільки  $A_{12} = A_{21}$ , то і матриця  $A^1$  є симетрична.

В окремому найпоширенішому випадку, коли є тільки одна квазіциклічна координата  $y_n$  процедура її виключення спрощується. Інерційні і квазіпружні коефіцієнти та узагальнені сили щодо позиційних координат матимуть такий вигляд:

$$a_{i,j}^1 = a_{i,j} - \frac{a_{i,n} a_{n,j}}{a_{n,n}}, \quad c_{i,j}^1 = c_{i,j}, \quad F_1^1 = F_1 - \frac{a_{i,n}}{a_{n,n}} F_n \quad (9)$$

де  $i=1,2,\dots,n-1, \quad j=1,2,\dots,n-1$ .

За допомогою одержаних формул можна послідовно виключити кілька квазіциклічних координат, що в обчислювальному сенсі ефективніше, ніж використання матричних перетворень, які включають процедуру обчислення оберненої матриці  $A_{22}$ . Отже, алгоритм виключення квазіциклічних координат – це формалізована процедура, яка легко реалізується у комп'ютерних програмах.

Запропонований алгоритм був використаний під час дослідження динамічних процесів вантажопідіймальної машини.

Важливо зазначити, що наведені в [3] розрахункові схеми аналогічних досліджень не містять координати, пов'язаної з обертанням барабана вантажної лебідки, а надлишковий момент електроприводу приводять до вантажу за формулою.

$$F_n = \frac{m_B \cdot M_H}{(m_B \cdot r^2 + J_n) \cdot i_n}, \quad (10)$$

де  $m_B$  – маса вантажу;  $M_H$  – надлишковий момент приводу, приведений до барабана;  $r$  – радіус барабана до осі каната;  $J_n$  – сумарний момент інерції елементів приводу, що обертається, приведений до барабана;  $i_n$  – кратність поліспасти

Таке приведення ґрунтується на допущенні, що коливання не впливають на рух приводу механізму підйому, а частотні характеристики системи не залежать від інерційних параметрів приводу. Похибка, яка при цьому виникає, залежить від відношення приведенного моменту інерції вантажу до сумарного моменту інерції приводу.

У разі двомасової розрахункової схеми відносна похибка квадрата власної частоти дорівнює

$$dw^2 = \frac{m_B}{(m_B \cdot r^2 + J_n)}.$$

За існуючих співвідношень  $m_B / (m_B r^2 + J_n)$ , характерних для механізмів підйому кранів, похибка визначення частот власних коливань крана під час використання формули (10) незначна, однак за інших співвідношень  $m_B$  і  $J_n$  вона може виявитись істотно.

Природа сил опору, які викликають розсіяння енергії під час коливань, доволі складна. Переважно є це конструктивне демпфування, причому найбільше поглинання коливальної енергії відбувається у канатах і опорних елементах. Оцінка розсіяння енергії в подібних елементах отримана експериментально. Встановлено, що їх поглинальні властивості фактично не залежать від частоти коливань. Тому для кількісної оцінки інтенсивності демпфування використовують коефіцієнт поглинання  $\psi$  або пов'язаний з ним логарифмічний або пов'язаний з ним логарифмічний декримент коливань  $\delta$ . Під час дослідження нестационарних вимушених коливань систем з багатьма ступенями вільності найзручніше нелінійні дисипативні сили подати у вигляді в'язкого опору.

За наявності в'язкого опору рівняння власних коливань лінійної системи з багатьма ступенями вільності мають такий вигляд:

$$A \cdot \ddot{Y} + B \cdot \dot{Y} + C \cdot Y = 0, \quad (11)$$

де  $A$  і  $C$  – матриці інерційних і квазіпружних коефіцієнтів;  $B$  – матриця коефіцієнта в'язкого опору.

Побудова пружнов'язкої моделі механічної системи полягає у визначенні коефіцієнтів матриці  $B$ . Вважається, що  $A$  і  $C$  визначені зазделегідь.

Коефіцієнти еквівалентного демпфування вибирають так, щоб вихідна і замінна схеми мали однакову поглинальну властивість. Для моногармонічних коливань з частотою  $\omega$  виду  $y = a \cdot \cos(\omega t)$  коефіцієнт еквівалентного демпфування визначається за допомогою порівняння енергій розсіяння лінійного еквівалентного демпфера  $y = p a^2 \omega b$  і вихідного дисипативного елемента, який має коефіцієнт поглинання  $\psi$ ,  $y = 1/2 \psi c a^2 p$ . Прирівнюючи ці величини, отримаємо еквівалентний коефіцієнт опору:

$$b = \psi c / (2p\omega). \quad (12)$$

Коефіцієнт поглинання і логарифмічний декримент коливань пов'язані залежністю  $\psi = 2\delta$ .

Для полігармонічного пружного демпфування елементів механічної системи еквівалентний коефіцієнт в'язкого опору можна наближено визначити, вважаючи, що частоти коливань відрізняються істотно і фактично не залежать від дисипативних сил.

За аналогією з (2) еквівалентний коефіцієнт опору можна подати у такому вигляді:

$$b = \psi c / (2p\omega_1 k_1), \text{ де } k_1 = \sum_{j=1}^n \left( \frac{a_j}{a_1} \right)^2 \times \left( \frac{w_j}{w_1} \right); \sum_{j=1}^n \left( \frac{a_j}{a_1} \right)^2 \times \left( \frac{w_j}{w_1} \right)^2. \quad (13)$$

Використовуючи допущення про слабе демпфування, співвідношення  $a_j / a_1$  і  $w_j / w_1$  можна взяти з результатів динамічного розрахунку без врахування демпфування.

Доволі ефективний наближений метод визначення коефіцієнтів демпфування може бути побудований на основі розкладання дисипативної матриці за формами власних коливань недисипативної системи.

Введемо нові координати рівняння (1), пов'язані з вихідним співвідношенням  $Y = VQ$ , де  $V$  – нормована матриця власних форм коливань недисипативної системи. У цьому випадку справедливі такі співвідношення:

$$V^t \cdot B \cdot V = E; \quad V^t \cdot C \cdot V = \text{diag}(w_i^2); \quad V^t \cdot A \cdot V = D. \quad (14)$$

Матриця  $D$  загалом не діагональна і перетворені рівняння руху виявляються пов'язаними:

$$DQ + DQ + \text{diag}(w_i^2) = 0. \quad (15)$$

Нормальні координати для дисипативної системи, яка описується рівняннями (11), існують тільки за обмежень, які накладені на співвідношення між елементами матриць  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Однак штучне приведення матриці демпфування до діагональної форми переважно не має фізичної основи. У праці Хесельмана показано, що рівняння руху (11) можуть розглядатися як динамічно не пов'язані, навіть якщо дисипативна матриця у нормальних координатах не є діагональною за умови, що частоти відрізняються і дотримуються умови слабого дисипативного зв'язку. Ці умови ґрунтуються на порівнянні діагональних і недиагональних елементів перетвореної комплексної

динамічної матриці рівняння (11) і утворюють матрицю коефіцієнтів зв'язку форм коливань. Для різних числових значень поглинальних характеристик елементів на прикладі баштового крана побудовані матриці цих коефіцієнтів, які фактично задовольняють умови слабого дисипативного зв'язку. Відповідно у рівнянні (15) можна знехтувати недиагональними елементами матриці  $D$  і розглядати рівняння (15) як незв'язані:

$$\ddot{q}_i + d_{ii} \dot{q}_i + w_i^2 q_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (16)$$

Коефіцієнти демпфування  $\varepsilon_i$  і власні частоти коливань  $\omega_i$  дисипативної системи відповідно дорівнюють

$$\varepsilon_i = d_{ii} / 2, \quad w_i = (w_i^2 - \varepsilon_i^2)^{1/2}. \quad (17)$$

Визначення коефіцієнтів демпфування вищенаведеним методом виконувалось за допомогою комп'ютерних програм.

В обчислювальному плані метод розкладання дисипативної матриці за власними формами виявляється значно ефективнішим порівняно з точним методом, що особливо важливо під час проведення багатоваріантних розрахунків і оптимізації параметрів. Крім того, розв'язок рівнянь (16) дає змогу використати метод головних координат для визначення пружних переміщень і зусиль в елементах розрахункової схеми за наявності демпфування і дослідити можливості ефективного гасіння коливань.

**Висновки.** Задача комп'ютерного моделювання динамічних процесів механічних систем з канатними елементами, такими, наприклад, як вантажопідіймальні машини, канатні транспортувальні системи, розв'язується для кожної механічної системи індивідуально і не може бути повністю формалізована. Запропоновано методику визначення елементів матриць лінійної динамічної моделі таких систем на прикладі баштового крана. Моделювання динамічних процесів механічних систем з квазіциклічними координатами, пов'язаних з рухом окремих елементів системи як твердого цілого, пов'язане з багатьма проблемами використання ефективних методів теорії лінійних коливань і відповідних комп'ютерних алгоритмів. Запропонована процедура виключає квазіциклічні координати, що полегшує застосування комп'ютерних методів визначення власних частот і форм коливань і розв'язування інших задач динаміки таких систем. Наведено оцінку похибки використання традиційних спрощених підходів порівняно з точним розв'язком. Наведено метод визначення параметрів демпфування дискретних моделей механічних систем.

1. Гелетій В. М. Комп'ютерне моделювання і визначення фактичних навантажень довгомірних металокопункцій з гнучкими елементами // Вісник НУ "Львівська політехніка" "Динаміка, міцність та проектування машин і приладів". – 2008. – № 614. – С. 112–115. 2. Лурье А. И. Аналитическая механика. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с. 3. Вейц В. Л., Качура А. Е., Мартиненко А. М. Динамические расчеты приводов машин. – Л.: Машиностроение, 1971. – 353 с. 4. Гелетій В. М. Розробка математичних моделей та дослідження демпфуючої здатності електропривода крана // Вісник НУ "Львівська політехніка" "Динаміка, міцність та проектування машин і приладів". – 2012. – № 731. – С. 35–38.