

ДИНАМІЧНИЙ АНАЛІЗ ШПИНДЕЛЬНИХ ВУЗЛІВ НА КОНІЧНИХ ГАЗОВИХ ОПОРАХ

© Віштак І. В., Савуляк В. І., 2016

Розглянуто деякі особливості зміщень вал-шпинделя на конічних газових опорах від співвісного з опорою-втулкою положення за довільних осьових та радіальних навантажень. Проведено динамічний аналіз впливу зміщень у різних напрямках на характеристики жорсткості шпиндельних систем. Запропоновано обґрунтовані аналітичні залежності для розрахунку характеристик шпиндельних систем. Обґрунтована необхідність динамічного аналізу шпиндельних систем та розрахунку несучої здатності та зміщень шпинделів швидкісних верстатів та пристроїв для досягнення високої точності. Доведено, що у фактично реалізованих конструкціях шпинделів з канавками змінної глибини усунути самозбудження можна також спеціальним підбором параметрів макро- та мікрогеометрії конічної газової опори шпиндельних систем.

Ключові слова: шпиндельна система, конічна газова опора, динамічний аналіз, жорсткість, демпфування, інерція, збурення, зміщення.

Some features of spindle shaft displacements on the conical gas bearings from the same axis with the support-sleeve position at arbitrary axial and radial loads. A dynamic analysis of the impact of displacement in different directions on the stiffness characteristics of the spindle unit. A reasonable analytical dependences for calculating the characteristics of the spindle units. Proved that the allowable parameters and microgeometry and macrogeometry friction pair of gas lubrication can be calculated to ensure the accuracy of the device. The necessity of dynamic analysis and calculation of spindle units bearing capacity and displacement spindle speed machines and tools in order to achieve high accuracy. Analysis of the conical gas bearings can also develop criteria optimization and determine the optimal parameters, which improves performance. It is proved that in practically realizable designs spindles with variable depth grooves stiffness parameters have improved as compared to the structures of the grooves of constant depth on the spindle shaft.

Keywords: spindle unit, conical gas bearing, dynamic analysis, stiffness, damping, inertia, disturbance, displacement.

Постановка проблеми. Шпиндельні системи на газових опорах знайшли широке застосування у різноманітних пристроях навігаційного обладнання та верстатів. Конструкція має дві основні деталі: вал-шпиндель та підшипникову опору-втулку. Для забезпечення високих швидкостей застосовують конічний вал-шпиндель та відповідну опору-втулку, які розділені газовим шаром. Конічна форма робочої поверхні тертя дає можливість газовому шару за необхідності, витримати значні радіальні та осьові навантаження без порушення безконтактного режиму роботи [1, 2].

Надійна робота та експлуатація таких підшипників можлива за правильного розрахунку опорної частини конічного типу. Для забезпечення заданого робочого зазору необхідно точно визначити осьове та радіальне зусилля, яким має протидіяти реакція газового шару в одному або в усіх напрямках. Зміщення вал-шпинделя під впливом зовнішніх збурень повинно бути мінімальним. Тому для підвищення жорсткості шпиндельної системи на вал були нанесені канавки змінної глибини [3].

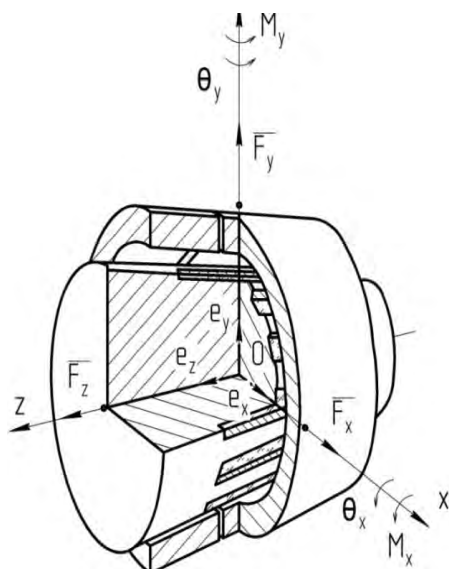


Рис. 1. Розрахункова схема вал-шпинделя на конічній газовій опорі

Зауважимо, що лише статичні характеристики газових опор мають обмежену цінність через те, що вони визначають витрати та жорсткість (несучу здатність) за умов постійного навантаження. За терміном “несуча здатність” у цьому випадку має максимальне осьове або радіальне навантаження, яке не порушує вимогу відсутності контакту між опорою та вал-шпинделем, тобто між ними повинен залишатись деякий мінімальний газовий прошарок.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Ми розглядали конічну газову опору в умовах дії випадкових збурень, що відхиляють вал-шпиндель від стану рівноваги та відповідні динамічні реакції газового мастильного шару. Математичну модель розподілення тиску у газовому мастильному шарі представлено системою рівнянь у частинних похідних [3].

Жорсткість системи залежить не лише від лінійних сил опору шару, але й від швидкості зміни товщини шару і тим самим від частоти коливань. Зовнішні збурення (вимушені коливання) можуть мати резонанс з власними частотами системи [4, 5]. Зрозуміло, що динамічна жорсткість газової опори зовсім не еквівалентна статичній, оскільки динамічна жорсткість та коефіцієнт демпфування залежать від частоти коливань.

Основний матеріал. У цій роботі розглянуто вільні та вимушені коливання вал-шпинделя, підвішеного в околі співвісного номінального положення, за якого змащувальний зазор на виступах між конічними робочими поверхнями становить c (рис. 1). Припускаємо, що зміщення вал-шпинделя не перевищує величину зазорів.

Рівняння вільних коливань подамо у такому вигляді:

$$\{I\} \cdot \begin{pmatrix} \ddot{e}_x \\ \ddot{e}_y \\ \ddot{e}_z \\ \ddot{\theta}_x \\ \ddot{\theta}_y \end{pmatrix} + \{D\} \cdot \begin{pmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_z \\ \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \end{pmatrix} + \{K\} \cdot \begin{pmatrix} e_x \\ q_y \\ e_y \\ q_x \\ e_z \end{pmatrix} = 0, \quad (1)$$

де e_x, e_y, e_z – невеликі зміщення вала у напрямку осей x, y, z ; θ_x, θ_y – невеликі зміщення осі вала по відношенню до осі втулки; $\{I\}, \{D\}, \{K\}$ – матриці інерції, демпфування та жорсткості відповідно мають такий вигляд:

$$\{I\} = \begin{pmatrix} m & mz_c & & & \\ mz_c & I_c + mz_c & & & \\ & & m & -mz_c & \\ & & -mz_c & I_c + mz_c & \\ & & & & m \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$\{D\} = \begin{pmatrix} D_{FR} & D_{Fq} & & & \\ D_{MR} & D_{Mq} & & & \\ & & D_{FR} & -D_{Fq} & \\ & & -D_{MR} & D_{Mq} & \\ & & & & D_{FZ} \end{pmatrix}, \quad \{K\} = \begin{pmatrix} K_{FR} & K_{Fq} & & & \\ K_{MR} & K_{Mq} & & & \\ & & K_{FR} & -K_{Fq} & \\ & & -K_{MR} & K_{Mq} & \\ & & & & K_{FZ} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Проаналізувавши матриці жорсткості та демпфування (3), можна зазначити, що самі вони не можуть бути динамічними характеристиками опори. Вони втрачають свій самостійний характер і є

проміжними під час розрахунку динамічних величин, що входять у матрицю інерції (2), яка включає масу підвішеного тіла, екваторіальний момент інерції та координату центра мас системи.

Обчислення елементів матриць включає визначення частот та коефіцієнтів згасання коливань в околі співвісного номінального положення, яке є положенням стійкої рівноваги. Отже, метою динамічного аналізу є визначення частот та коефіцієнтів загасання коливань.

Динаміка конічної опори, враховуючи рівняння (1), визначається динамікою трьох незалежних систем: системи з одним ступенем вільності (осьові коливання) та двох однакових коливальних систем з двома ступенями вільності кожна у декартових координатах.

Динаміку газової опори можна описати системою рівнянь, яка містить рівняння у частинних похідних, але якщо розглядати газову опору як лінійний осцилятор, то можна оперувати інженерними поняттями про жорсткість мастильного шару та сили у ньому [4].

Для визначення межі адекватності лінеаризованого динамічного аналізу конічних газових опор (рис. 1) необхідно розв'язати задачу про розподілення тиску у мастильному шарі у номінальному положенні, а також за наявності малого осьового e_z , радіального e_x зміщень та кутового перекоосу e_y (рис. 2, а).

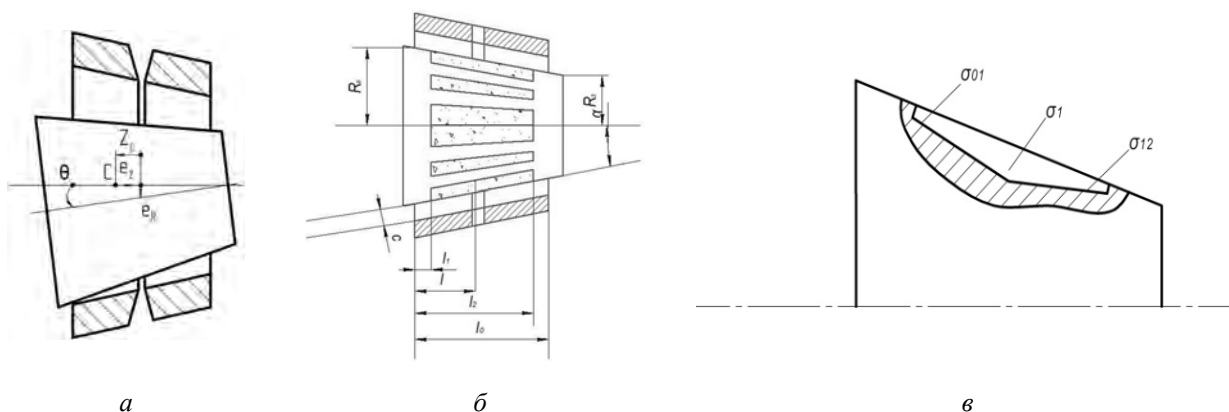


Рис. 2. Введення зміщень конічної опори

Запровадимо безрозмірні величини зміщень та зазору (рис. 2, а): $\varepsilon_z = e_z/c$; $\varepsilon_R = e_{x,y}/c$; $\varepsilon_\theta = \theta R_0/c$; $H = h/c$, безрозмірний час $\tau = t/T_0$, де характерний період T_0 визначається за формулою

$$T_0 = \sqrt{\frac{mc}{p p_a R_0^2}}, \quad (4)$$

де p_a – атмосферний тиск; R_0 – максимальний радіус опори.

Параметри макро- та мікрогеометрії опори (рис. 2, б, в): $\lambda = l/2R_0$; $\sigma = (R_0 - R_2)/R_0$; $\lambda_0 = \sqrt{(4\lambda^2 + \sigma^2)}$; $\zeta_{01} = l_1/l_0$; $\zeta_{12} = l_2/l_0$; $\zeta_1 = l/l_0$; $\gamma_{01} = \sigma_{01}/c$; $\gamma_{12} = \sigma_{12}/c$; $\gamma_1 = \sigma_1/c$; $\kappa = \varphi_\kappa / (\varphi_\kappa + \varphi_e)$.

Диференційне рівняння розподілу тиску у змащувальному шарі між двома конічними поверхнями в осередненому вигляді:

$$2\Gamma \frac{\partial}{\partial t} (I_0 (1 - sx) E \sqrt{U}) - \frac{\partial}{\partial j} \left(\frac{I_0}{1 - sx} A \frac{\partial U}{\partial j} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1 - sx}{I_0} B \frac{\partial U}{\partial x} \right) = 0, \quad (5)$$

де

$$E(\tau, \varphi, \zeta) = \kappa(H + \gamma) + (1 - \kappa)H; \quad B(\tau, \varphi, \zeta) = \kappa(H + \gamma)^3 + (1 - \kappa)H^3;$$

$$A(\tau, j, x) = \frac{H^3(H + g)^3}{kH^3 + (1 - k)(H + g)^3}; \quad U = P^2, \quad P = p/p_a$$

з крайовими умовами $U(\tau, \varphi, 0) = U(\tau, \varphi, 1) = 1$; $U(\tau, \varphi, \zeta) = U(\tau, \varphi + 2\pi, \zeta)$; $U(\tau, \varphi, \zeta_1) = P_H^2$.

Головним параметром, який визначає ступінь нестационарності процесу є:

$$\Gamma = \frac{12mR_0^2}{p_a c_0^2 T_0}, \quad (6)$$

де μ – динамічна в'язкість газу; p_a – атмосферний тиск; T_0 – масштаб часу, який, своєю чергою, визначається із цього співвідношення.

Маючи на меті визначення частот власних коливань та коефіцієнтів загасання для кожної з вказаних вище динамічних систем, застосуємо метод збурення [6].

Для подальшого аналізу сформулюємо задачу про динаміку осьових збурень, враховуючи усі необхідні співвідношення у безрозмірному вигляді. За запровадженого масштабу часу T_0 (4) рівняння динаміки підвішеної маси запишеться як

$$\ddot{\mathbf{e}}_z + D_{FZ}^* \dot{\mathbf{e}}_z + K_{FZ}^* \mathbf{e}_z = 0, \quad (7)$$

де
$$\mathbf{e}_z = \frac{d\mathbf{e}_z}{dt}; D_{FZ}^* = \frac{D_{FZ}c}{p p_a R_0^2 T_0}; K_{FZ}^* = \frac{K_{FZ}c}{p p_a R_0^2}.$$

Припустивши, що підвішена маса опори, що переміщається за законом

$$\mathbf{e}_z(t) = e_0 \exp(-b_z t) \cos(n_z t),$$

не суперечить рівнянню (7). Тоді

$$D_{FZ}^* = 2b_z, K_{FZ}^* = n_z^2 + b_z^2. \quad (8)$$

За осьового збурення $\varepsilon_0 = \varepsilon_z$ маємо осиметричний розподіл тиску. Розкладання по параметру збурення матимуть, такий вигляд:

$$H(t) = 1 + e_z \sin a, U(t, x) = U_0(x) + e_0 U_1(t, x) + \dots, \sqrt{U(t, x)} = \sqrt{U_0(x)} + e_0 \frac{U_1(t, x)}{2\sqrt{U_0(x)}} + \dots,$$

$$E(t, x) = E_0(x) + e_0 E_{1z}(t, x) + \dots, B(t, x) = B_0(x) + e_0 B_{1z}(t, x) + \dots$$

Підставляючи вказані розкладання у рівняння (5) та подаючи

$$U_1(t, x) = \exp(-b_z t) (X_{1z}(x) \cos(n_z t) + Y_{1z}(x) \sin(n_z t)), \quad (9)$$

одержимо крайову задачу для системи лінійних диференціальних рівнянь для $X_{1z}(\xi), Y_{1z}(\xi)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(B_0^* \frac{dX_{1z}}{dx} \right) + b_z E_0^* X_{1z} - n_z E_0^* Y_{1z} &= - \frac{d}{dx} \left(B_{1z}^* \frac{dU_0}{dx} \right) - b_z E_{1z}^*; \\ \frac{d}{dx} \left(B_0^* \frac{dY_{1z}}{dx} \right) + n_z E_0^* X_{1z} + b_z E_0^* Y_{1z} &= -n_z E_{1z}^*; \end{aligned} \quad (10)$$

$$X_{1z}(0) = X_{1z}(x_1) = X_{1z}(1) = 0, Y_{1z}(0) = Y_{1z}(x_1) = Y_{1z}(1) = 0.$$

$$B_0^* = \frac{c_1 [k(1+g)^3 + (1-k)]}{I_0}, B_{1z}^* = B_1^* \sin a, B_1^* = 3(1-sx) \frac{[k(1+g)^2 + (1-k)]}{I_0},$$

де
$$E_0^* = \Gamma I_0 c_1 \frac{[k(1+g) + (1-k)]}{\sqrt{U_0(x)}}, E_{1z}^* = E_1^* \sin a, E_1^* = 2\Gamma I_0 c_1 \sqrt{U_0(x)}; c_1 = 1 - sx.$$

Інакше запишемо рівняння динаміки осьових рухів у такому вигляді:

$$\ddot{\mathbf{e}}_z = e I_0 \sin a \int_0^1 \frac{U_1(x)}{\sqrt{U_0(x)}} (1 - sx_1) dx.$$

Розв'язок $U_1(\xi)$ рівняння (9) використовується для обчислення коефіцієнтів жорсткості та демпфування:

$$D_{FZ}^* = \frac{I_0 \sin a}{n_z} \int_0^1 \frac{Y_{1z}(x)}{\sqrt{U_0(x)}} c_1 dx; K_{FZ}^* = I_0 \sin a \int_0^1 \frac{U_1(x)}{\sqrt{U_0(x)}} c_1 dx. \quad (11)$$

Співвідношення (8), (10) та (11) породжують систему нелінійних рівнянь щодо β_z, ν_z . Розв'язання системи рівнянь (10) проводилось за кінцево-різницевою схемою методом матричної прогонки [5].

Результати обчислень показано на графіку рис. 3: $P_m=3,0$; $\alpha=16^0$; $\lambda=1,5$; $\sigma=0,86$; $\xi_{01}=0,15$; $\xi_1=0,5$; $\xi_{12}=0,85$; $\gamma_{01}=\gamma_{12}=1$; $\gamma_1=1,02$; $\alpha_{01}=\alpha_1=\alpha_{12}=0,5$. Суцільною лінією показана залежність v_z від Γ , а штриховою – для β_z . Очевидна осьова стійкість в усьому діапазоні Γ .

Розглядаючи задачу про вимушені коливання підвищеного тіла (вала) за наявності доволі малих порівняно з зазором c осьових вібрацій корпусу, який здійснює осьові коливання за певним законом: $z(t)=\varepsilon \cdot c \cdot \cos(\nu_0 \tau)$. При цьому підлягають визначенню коливання внутрішнього корпусу $\varepsilon_z(t)=\varepsilon \cdot c \cdot v_z \cdot \cos(\nu_0 \tau + \psi_z)$ щодо зовнішнього. Рівняння динаміки вимушених коливань одержимо з (7), записавши у правій частині $\nu_0^2 \cdot \cos(\nu_0 \tau)$. За такої постановки задачі впливають рівняння про вимушені коливання для класичних осциляторів [6]. У співвідношеннях (10)–(11) скрізь потрібно покласти ν_0 замість ν_z та $\beta_z = 0$. Залежність $v_z(\nu_0)$ – амплітудно-частотна характеристика, показана на рис. (4). Крива 1 відповідає $\Gamma=1$, крива 2 – $\Gamma=5$ та крива 3 – $\Gamma=20$.

За суто радіального зміщення $\varepsilon_0=\varepsilon_R$ безрозмірну товщину шару газу можна виразити як

$$H(t, j, x) = 1 - e_R \cos a \cdot \cos j,$$

а розкладання за параметром збурення ε_i набудуть такого вигляду:

$$\begin{aligned} A(t, j, x) &= A_0(x) + e_i A_{1R}(t, x) \cos j + \dots; \\ B(t, j, x) &= B_0(x) + e_i B_{1R}(t, x) \cos j + \dots; \\ E(t, j, x) &= E_0(x) + e_i E_{1R}(t, x) \cos j + \dots; \\ U(t, j, x) &= U_0(x) + e_i Z_{1R}(t, x) \cos j + \dots; \\ \sqrt{U(t, j, x)} &= \sqrt{U_0(x)} + e_i \frac{Z_{1R}(t, x)}{2\sqrt{U_0(x)}} \cos j + \dots \end{aligned} \quad (12)$$

Підставляючи наведені розкладання у рівняння (5) па подаючи для i -ї пари

$$Z_{iR}(t, x) = \exp(-b_i t) (X_{iR}(x) \cos(n_i t) + Y_{iR}(x) \sin(n_i t)), \quad i = 1, 2, \quad (13)$$

одержимо крайову задачу для радіального збурення системи лінійних рівнянь для $X_{iR}(\xi)$, $Y_{iR}(\xi)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(B_0^* \frac{dX_{1R}}{dx} \right) - (A_0^* - b_1 E_0^*) X_{1R} - n_1 E_0^* Y_{1R} &= - \frac{d}{dx} \left(B_{1R}^* \frac{dU_0}{dx} \right) - b_1 E_{1R}^*; \\ \frac{d}{dx} \left(B_0^* \frac{dY_{1R}}{dx} \right) + n_1 E_0^* X_{1R} - (A_0^* - b_1 E_0^*) Y_{1R} &= -n_1 E_{1R}^*; \end{aligned} \quad (14)$$

$$X_{1R}(0) = X_{1R}(x_1) = X_{1R}(1) = 0, \quad Y_{1R}(0) = Y_{1R}(x_1) = Y_{1R}(1) = 0,$$

$$\text{де } A_0^* = \frac{I_0(1+g)^3}{[k+(1-k)(1+g)^3]c_1}, \quad B_{1R}^* = -B_1^* \cos a, \quad E_{1R}^* = -E_1^* \cos a.$$

Розв'язки крайових задач дають змогу обчислити елементи матриць жорсткості та демпфування для i -го значення частоти та коефіцієнта загасання:

$$D_{FR}^{*(i)} = \frac{I_0 \cos a}{2n_i} \int_0^1 \frac{Y_{1R}(x)}{\sqrt{U_0(x)}} c_1 dx; \quad K_{FR}^{*(i)} = \frac{I_0 \cos a}{2} \int_0^1 \frac{(b_i/n_i)Y_{1R} - X_{1R}}{\sqrt{U_0(x)}} c_1 dx;$$

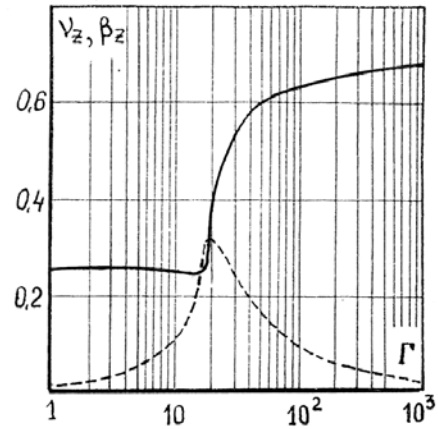


Рис. 3. Залежність параметра Γ від частоти ν_z (суцільна лінія) коливаний вала та β_z (штрихова лінія) – відносний коефіцієнт демпфування коливаний

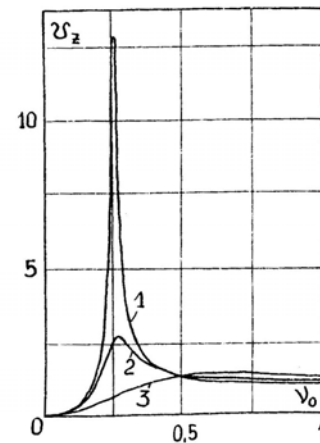


Рис. 4. Амплітудно-частотна характеристика

$$D_{MR}^{*(i)} = \frac{I_0}{2n_i} \int_0^1 \frac{Y_{1R}(x)}{\sqrt{U_0(x)}} c_1 c_2 dx; K_{MR}^{*(i)} = \frac{I_0}{2} \int_0^1 \frac{(b_i/n_i)Y_{1R} - X_{1R}}{\sqrt{U_0(x)}} c_1 c_2 dx;$$

$$c_2 = 2I(0,5 - x) \cos a + c_1 \sin a.$$

Для суто кутового зміщення $\varepsilon = \varepsilon_\theta$ величину H потрібно подати як

$$H = 1 + e_q c_2 \cos j.$$

Далі усі розрахунки проводяться аналогічно, тільки з тією різницею, що у формулах скрізь потрібно змінити індекс R на θ , а також покласти $B_{1\theta}^* = B_1^* \chi_2$, чим завершується визначення $D_{FR}^{*(i)}$, $K_{FR}^{*(i)}$, $D_{MR}^{*(i)}$, $K_{MR}^{*(i)}$.

Крайові задачі доцільно розв'язувати прямими чисельними методами, оскільки побудова аналітичних розв'язків громізка. Для цього ідеально підходять кінцево-різницеві схеми [5].

Висновки. Очевидною перевагою наведеного аналізу є те, що вдалось описати поведінку шпинделя на газовій опорі за допомогою небагатьох характеристик, які мають прозорий фізичний зміст. Однак питання про межі застосування цього аналізу доволі складне.

Переважно це питання може бути розв'язане за допомогою прямих числових методів для задач (2), (4). Попередні дослідження для непрофільованих кінчних опор та кінчних опор, профільованих канавками постійної глибини, вказують на те, що діапазон лінійності статичних силових характеристик щодо величини збурень e_R , θ є доволі протяжним.

Метою описаного аналізу роботи кінчних опор є не простота сама по собі, а розробка фактично цінних критеріїв оптимізації та одержання оптимальних параметрів, які можна рекомендувати для запровадження у конкретній конструкції. Очевидним є також те, що подібній розробці повинні передувати дослідження впливу конструктивних параметрів та характеристик кінчних опор.

Зауважимо, що у фактично реалізованих конструкціях шпинделів параметри жорсткості покращились порівняно з конструкціями з кінчними опорами з канавками сталої глибини. Усунути самозбудження можна як спеціальним підбором параметрів мікрогеометрії, так і призначенням робочого параметра Γ таким, що не потрапляє в область нестійкості, тобто змінити масу m , зазор c та радіус R_0 .

Дослідження показали, що глибина канавок найбільше впливає на виникнення умов самозбудження, про що свідчать експериментальні факти та виробничий досвід. Крім того, виявлено, що підвищення тиску нагнітання газу дещо розширює область нестійкості.

1. Степанчук В. І. Лінійний статичний аналіз газостатичних кінчних підвісок, профільованих поздовжніми канавками / В. І. Степанчук, В. О. Федотов // Вісник Вінницького політехнічного інституту (ВПІ). – 1994. – Вип. 3. – С. 57–61. 2. Шнайдер А. Г. Статические характеристики конического газового смазочного слоя радиально-упорных мотор-подшипников и повышение их экономичности по расходу газа / А. Г. Шнайдер, В. И. Степанчук // Трение и износ. М., 1992. – Вып. 3. – Т. 13. 3. Vishtak I. Spindle on the conical gas suspension their design and research performance / I. Vishtak, V Savulyak // TEHNOMUS “New Technologies and Products in Machines Manufacturing Technologies”. – Romania, 2013. – Вып. 20. – P. 234–239. 4. Пинегин С. В. Статические и динамические характеристики газостатических опор / С. В. Пинегин, Ю. Б. Табачников, И. Е. Сипенков. – М.: Наука, 1982. – 265 с. 5. Самарский А. А. Разностные методы для эллиптических уравнений / А. А. Самарский, В. Б. Андреев. – М.: Наука, 1976. – 352 с. 6. Магнус К. Колебания: Введение в исследование колебательных систем // пер. с нем. – М.: Мир, 1982. – 304 с.