УДК 528.3

МАТЕМАТИЧНІ ПРИНЦИПИ СТВОРЕННЯ КОМБІНОВАНИХ GNSS РОЗВ'ЯЗКІВ

С. Доскіч
Національний університет "Львівська політехніка"

Ключові слова: методи космічної геодезії, комбінований розв'язок, нормальні рівняння.

Постановка проблеми

Комбінування різних методів космічної геодезії – відома технологія для отримання точних геодезичних продуктів. Прикладом комбінування є реалізація Міжнародної земної референцної системи ITRF. Для розв'язання локальних геодезичних задач виконують згущення ITRF в національних масштабах. Здебільшого через зручність і низьку вартість використовують один метод космічної геодезії – GNSS. Для задачі згущення ITRF у національних/регіональних масштабах використовують також ті самі напрацювання, що й для розв'язування задачі реалізації загальноземної референцної системи глобального масштабу. Проте між ними є суттєві відмінності, а саме зміна конфігурації мережі й кількості станцій, велика кількість різноманітних моделей антен з проблемним калібруванням їхнього фазового центра тощо.

Аналіз останніх досліджень та публікацій, які стосуються вирішення цієї проблеми

Комбінування різних методів космічної геодезії можливе на трьох різних рівнях: на рівні спостережень, на рівні нормальних рівнянь і на рівні параметрів [Seitz, 2011].

Поєднання на рівні спостереження. Цей метод досліджено в роботах [Andersen, 2000; Coulot, 2007; Yaya, 2002], а у 2009 р. у Міжнародній службі обертання Землі (IERS) навіть створена робоча група для комбінування методів космічної геодезії на рівні спостережень. Таке об'єднання є найстрогішим підходом, оскільки всі спостереження обробляються разом, починаючи зі складання рівнянь спостережень. Для цього використовують однакові параметризації та моделі редукції. Такі етапи попереднього оброблення, як знаходження викидів та редагування даних спостережень, виконують, використовуючи всі доступні спостереження. В оптимальному випадку аналіз даних виконують в одному програмному забезпеченні.

Поєднання на рівні нормальних рівнянь [Литвин, 2006; Seitz, 2012] є комбінацією, близькою до комбінації на рівні спостереження. Відмінність лише в тому, що кроки попереднього оброблення є математично строгішими. Якщо рівняння спостережень складають, використовуючи однакові моделі параметризації та редукції, та якщо перед об'єднанням нормальних рівнянь не накладають обмежень, то об'єднання на рівні нормальних рівнянь прирівнюють до об'єднання на рівні спостережень. Єдиною відмінністю є те, що знаходження викидів та редагування даних є строгішим.

Поєднання на рівні параметрів [Панафидина, 2006; Brockmann, 1996] відображає чіткі відмінності з об'єднанням на рівні спостережень і нормальних рівнянь. Це об'єднання є різноманітнішим: спершу застосовують індивідуальні методи розв'язків для параметрів, а потім знайдені параметри об'єднують і заново обчислюють з використанням методу найменших квадратів. Допускається мінімальна кількість спостережень для уникнення надмірних обмежень, і отже, деформацій розв'язку. Крім того, потрібно враховувати, що об'єднаний розв'язок залежить від дисперсії та коваріації, отриманих з індивідуальних розв'язків, тому тільки надійні псевдоспостереження можуть застосовуватися для отримання вхідних розв'язків.

У поєднанні на рівні параметрів параметри обчислюють з використанням методу найменших квадратів (МНК). Відомо, що урівнювання цим методом (сума квадратів відхилень емпіричних значень від модельних мінімальна) є окремим випадком теорії лінійних статистичних моделей. Найвідомішою статистичною моделлю є модель Гаусса–Маркова. Згідно з цією моделлю – нульового математичного очікування відхилень, сталості дисперсії відхилень, відсутності їх автокореляції та незалежності від незалежних змінних – оцінки параметрів будуть найкращими лінійними незміщеними оцінками серед усіх альтернативних оцінок цих параметрів.

Модель Гаусса–Маркова (МГМ) повного рангу за [Koch, 1990]:

$$E(y) = X\beta; \;\; D(y) = \sigma^2 P^{-1}, \qquad (1)$$

де X – матриця $n \times u$ коефіцієнтів з повним рангом $rgX = u$; β – $u \times 1$ вектор невідомих; y – $n \times 1$ вектор спостережень; P – $n \times n$ вагова матриця; n, u – кількість спостережень і невідомих; $E(\cdot)$ – оператор сподівання (очікування); $D(\cdot)$ – оператор дисперсії; σ^2 – дисперсія одиниці ваги (коефіцієнт дисперсії).

Як правило, кількість спостережень більша, ніж кількість невідомих для того, щоб зменшити вплив одного спостереження на оцінку. Для $n > u$ система рівнянь $X\beta = y$ не є постійною (послідовною). З додаванням вектора помилок e до вектора спостережень y отримаємо послідовну, але неоднозначну систему рівнянь, яку також називають системою рівнянь спостережень:

$$y + e = X\beta, \text{ де } E(e) = \emptyset, \; D(e) = D(y) = \sigma^2 P^{-1}. \qquad (2)$$

Постановка завдання

Метою нашого дослідження є наведення тих математичних принципів, які важливі для розуміння алгоритмів обробки даних супутникових спостережень, що використовуються для комбінування. Розглянуто деякі аспекти процесу оцінювання параметрів: перетворення параметрів, укладання нормальних систем рівнянь і застосування апріорних обмежень.

Виклад основного матеріалу дослідження

У космічній геодезії рівняння спостережень, як правило, нелінійниі й записуються так:

$$y + e = f(\beta)$$
$$E(e) = \emptyset \text{ і } D(e) = D(y) = \sigma^2 P^{-1}, \quad (3)$$

де $f(\cdot)$ позначає реальну диференційну функцію з невідомими параметрами β.

У формулі (3), якщо відомі апріорні значення ($\beta|_0$) для невідомих параметрів β, то для перетворення нелінійної задачі на лінійну (лінеаризації) виконують розкладання рівняння спостережень в ряди Тейлора.

$$f(\beta) = f(\beta)\Big|_{\beta=\beta|_0} + \partial_\beta f(\beta)\Big|_{\beta=\beta|_0} \Delta\beta, \quad (4)$$

де $\Delta\beta = \beta - \beta\big|_0$, $\partial_\beta f(\beta)\Big|_{\beta=\beta|_0}$.

Урівнювання спостережень запишемо:

$$\left(y - f(\beta)\Big|_{\beta=\beta|_0}\right) + e = \partial_\beta f(\beta)\Big|_{\beta=\beta|_0} \Delta\beta, \quad (5)$$

або

$$\Delta y + e = X \Delta\beta. \quad (6)$$

Метод найменших квадратів вимагає обмежень для рівнянь спостережень. Оцінка параметра β мінімізує квадратичну форму:

$$\Omega(\beta) = \frac{1}{\sigma^2}(y - X\beta)' P (y - X\beta). \quad (7)$$

Введення умови $\Omega(\beta) \to \min$ необхідне для переходу від неоднозначних спостережень (1) чи (2) до однозначної системи нормальних рівнянь для визначення β. Обчислення мінімальних значень для $\Omega(\beta)$ потребує розв'язання u рівнянь $d\Omega(\beta)/d\beta = \emptyset$, які також називають нормальними рівняннями.

Нормальні рівняння:

$$X'PX\hat{\beta} = X'Py. \quad (8)$$

Оцінки вектора параметрів:

$$\hat{\beta} = (X'PX)^{-1} X'Py. \quad (9)$$

Очікується, що спостереження є випадковими величинами, а коваріаційна матриця спостережень (10) відома, за винятком коефіцієнта дисперсії $\hat{\sigma}^2$

$$D(\hat{\beta}) = \hat{\sigma}^2 (X'PX)'. \quad (10)$$

Спостереження:

$$\hat{y} = X\hat{\beta} = Ry. \quad (11)$$

Квадратична форма:

$$\Omega = \hat{e}'P\hat{e} = y'Py - y'PX\hat{\beta}. \quad (12)$$

Дисперсія одиниці ваги (коефіцієнт дисперсії):

$$\hat{\sigma}^2 = \Omega/(n-u). \quad (13)$$

Необхідно, щоб апріорні значення параметрів були достатньо точними для апроксимації нелінійної функції з першим розкладанням у ряд Тейлора. Якщо це не так, тоді в додаткових ітераціях необхідно використати останні обчислені параметри як нове наближене значення.

Оцінку невідомих параметрів можна отримати з методу найменших квадратів, використовуючи одночасно всі спостереження. За [Brockmann, 1996] такий самий результат можна одержати, розділивши спостереження на декілька серій, для кожної серії незалежно визначити оцінку МНК загального набору параметрів, після чого отримати загальний комбінований розв'язок. Ця процедура також відома як "Helmert blocking" [Helmert, 1872]. Сьогодні її широко застосовують для обробки великої кількості спостережень GNSS даних.

За такими незалежними серіями спостережень можна отримати дві оцінки $\hat{\beta}_1$ і $\hat{\beta}_2$ вектора невідомих параметрів β. За цими оцінками можна обчислити комбінований розв'язок $\hat{\beta}_c$. Для цього індивідуальні оцінки використовують для формування системи урівнювання псевдоспостережень:

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix} \hat{\beta}_c, \quad (14)$$

де I – одинична матриця

$$D\left(\begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix}\right) = \sigma_c^2 \begin{bmatrix} \sum_1 & 0 \\ 0 & \sum_2 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Отже, індивідуальна оцінка використовується як псевдоспостереження з відповідною коваріаційною матрицею як ваговою матрицею. Тоді система нормальних рівнянь матиме вигляд:

$$[I', I'] \begin{bmatrix} \sum_1^{-1} & \emptyset \\ \emptyset & \sum_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix} \hat{\beta}_C = [I', I'] \begin{bmatrix} \sum_1^{-1} & \emptyset \\ \emptyset & \sum_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Система урівнювання псевдоспостережень і нормальних рівнянь виглядає аналогічною, якщо комбінований розв'язок обчислюють за більше ніж двома індивідуальними оцінками. Комбінацію m індивідуальних розв'язків можна записати у вигляді:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} X_i' P_i X_i^{-1}\right) \hat{\beta}_c = \sum_{i=1}^{m} X_i' P_i y_i. \quad (17)$$

Ця суперпозиція нормальних рівнянь можлива, якщо серії індивідуальних спостережень незалежні та якщо матриця дисперсії має діагональну форму.

Оцінку одиниці ваги для об'єднаного розв'язку можна обчислити за формулою [Brockmann, 1996]:

$$\hat{\sigma}_c^2 = \left(\sum_{i=1}^{m} \hat{\sigma}_i f_i + \sum_{i=1}^{m} \left(\hat{\beta}_c - \hat{\beta}_i\right)' X_i' P_i' X_i' \left(\hat{\beta}_c - \hat{\beta}_i\right)\right) / f_c, \quad (18)$$

де $f_i = n_i - u_i$ – кількість ступенів свободи індивідуальних розв'язків i; n_i – кількість спостережень для індивідуального розв'язку i; u_i – кількість невідомих для індивідуального розв'язку i; $f_c = n_c - u_c$ – кількість ступенів свободи комбінованого розв'язку; $n_c = \sum_{i=1}^{m} n_i$ – загальна кількість спостережень; u_c – загальна кількість невідомих.

Здебільшого доступні спостереження не містять всю інформацію, необхідну для отримання розв'язку. Це означає, що система нормальних рівнянь є сингулярною (виродженою) або майже сингулярною. Для перетворення нормальних рівнянь на несингулярні потрібно додати додаткову інформацію про параметри, так звані обмеження, які допоможуть виправити дефіцит рангу. Ввести обмеження можна різними способами [Bähr, 2007]:

1. Це фіксація координат. Певну кількість координат фіксують до заданої величини [Schön et al., 2000]. Потім ці координати більше не обчислюють, а всі інші координати обчислюють відносно них. Хоча це найочевидніший підхід, результат завжди залежить від довільного вибору фіксованих координат. Крім того, коваріаційна матриця є сингулярною, оскільки неможливо отримати стохастичну інформацію щодо фіксованих координат. Тому цей підхід більше не використовується.

2. *Стохастичні обмеження*. [Altamimi, 2002b] розділяє стохастичні обмеження на три категорії:

– строгі обмеження: $\sigma \le 10^{-10} m$ для координат і m / yr для швидкостей;

– змінні обмеження $\sigma \approx 10^{-5} m$ для координат і m / yr для швидкостей;

– вільні обмеження $\sigma \ge 1m$ для координат і 10 cm / yr для швидкостей.

3. *Псевдоінверсний*. Псевдоінверсія [Koch, 1998; Schön et al., 1999] матриці нормального рівняння використовується для визначення так званої «внутрішньої реалізації референцної системи». Її можна отримати за рахунок розширення функціональної моделі деяких умовних рівнянь, які доповнюють дефіцит рангу без введення будь-якої додаткової інформації. Отже, геометрія, визначена за допомогою спостережень, не спотворюється, і в результаті параметри мають мінімальну дисперсію. Однак цей метод дає сингулярні коваріаційні матриці обчислених координат, тому їх не можна використати для подальших комбінацій.

4. *Мінімальних обмежень*. Будь-який набір обмежень, який вводить мінімальну кількість інформації, щоб завершити дефіцит рангу матриці нормального рівняння, називається мінімальним обмеженням. Їх можна застосовувати, фіксуючи кількість координат, яка дорівнює дефекту реалізації референцної системи, обмежуючи відповідну кількість координат стохастично або вибравши обмеження, які визначають внутрішню реалізацію референцної системи, отримуючи псевдоінверсії. [Sillard and Boucher, 2001] запропонували підхід, який не залежить від довільної специфікації і зрештою дає регулярну коваріаційну матрицю, норма якої близька до мінімуму: замість обмеження координати виконується трансформація. Всебічний огляд використання мінімальних обмежень наведено в роботах [Altamimi et al. 2002 a, b; Altamimi and Dermanis, 2009; Sillard and Boucher, 2001].

Сьогодні використовують лише другий та четвертий підходи.

Отже, на основі розглянутих математичних принципів створення комбінованих розв'язків під час проведення GNSS спостережень пропонуємо два варіанти:

1. Комбінування на рівні окремих сесій, як правило, днів спостережень. Основна мета – отримати репрезентативну оцінку координат станцій із багатоденних спостережень. Сфера застосування – згущення земної референцної системи координат ITRF у національному чи регіональному масштабах для використання у мережах активних GNSS станцій.

2. Комбінування на рівні років спостережень. Основна мета – отримати багаторічну репрезентативну оцінку координат та швидкостей станцій спостережень. Сфера застосування – часові ряди координат станцій для використання у геодинамічних дослідженнях.

Для реалізації цих розв'язків рекомендуємо програмний пакет GAMIT/GLOBK, оскільки він уможливлює створення комбінованих розв'язків у вказаний часовий інтервал і приведення позицій станцій в ITRF за допомогою накладання мінімальних обмежень.

Висновки

1. Розглянуто математичні принципи створення комбінованих розв'язків, а саме модель Гаусса–Маркова, а також наведено параметри переходу між лінійними та нелінійними моделями.

2. Розглянуто процедуру "Helmert blocking" для оброблення великої кількості спостережень GNSS даних.

3. Розглянуто різні способи накладання обмежень. Сьогодні найпоширенішим є метод накладання мінімальних обмежень.

4. На основі розглянутих математичних принципів створення комбінованих розв'язків запропоновано два підходи: комбінування на рівні окремих сесій та комбінування на рівні років спостережень. А для реалізації цих підходів рекомендовано програмне забезпечення GAMIT/GLOBK.

Література

1. Литвин М. Алгоритм отримання комбінованого розв'язку за результатами спостережень різних методів космічної геодезії / М. Литвин // Новітні

досягнення геодезії геоінформатики та землевпорядкування – європейський досвід. – Чернігів, 2006. – Вип. 2. – С. 1–4.
2. Панафидина Н. А. Определение и анализ координат и скоростей станций по наблюдениям европейской GPS-сети: дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук: 01.03.01 / Н. А. Панафидина. – СПб., 2006. – 96 с.
3. Altamimi Z. ITRF2000: A new release of the international terrestrial reference frame for earth science applications / Z. Altamimi, P. Sillard, C. Boucher // J. Geophys Res. (Solid Earth) 107(10):1–19, 2002a. – P. 1–19.
4. Altamimi Z. Discussion on how to express a regional GPS solution in the ITRF / Z. Altamimi // Report on the Symposium of the IAG subcommission for Europe (EUREF), Ponta Delgada, 2002. – P. 162–167.
5. Altamimi Z. New trends for the realization of the International Terrestrial Reference System / Z. Altamimi, C. Boucher, P. Sillard // Advanced Space Research 30(2), 2002b. – P. 175–184.
6. Altamimi Z. The choice of reference system in ITRF formulation / Z. Altamimi, A. Dermanis // IAG Symposia, vol 137. Springer, Berlin, 2009. – P. 329–334.
7. Andersen P. H. Multi-level arc combination with stochastic parameters / P. H. Andersen // J. Geod., 74, 2000. – P. 531–551.
8. Bähr H. Variance Component Estimation for Combination of Terrestrial Reference Frames / H. Bähr, Z. Altamimi, B. Heck // Universitätsverlag Karlsruhe Schriftenreihe des Studiengangs Geodäsie und Geoinformatik, 6 ISBN: 978–3–86644–206–1, 2007. – 67 p.
9. Brockmann E. Combination of solutions for geodetic and geodynamic applications of the Global Positioning System (GPS) / E. Brockmann // Geodätisch Geophysikalische Arbeiten in der Schweiz, Schweizerische Geodätische Kommission, Vol. 55., 1996. – P. 210.
10. Coulot D. Toward a direct combination of space geodetic techniques at the measurement level: Methodology and main issues / D. Coulot, P. Berio, R. Biancale, S. Loyer, L. Soudarin, and A.–M. Gontier // J. Geophys. Res., 112, B05410, doi:10.1029/2006JB004336, 2007. – P. 1–21.
11. Helmert F. R. Die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate / F. R. Helmert // Teubner, Leipzig, 1872. – 215 p.
12. Koch K. Bayesian Inference with Gedetic Applications / K. Koch // Springer, Berlin Heidelberg New York, 1990. – 245 p.
13. Koch K.–R. Parameter Estimation and Hypothesis Testing in Linear Models / K.–R Koch // Springer, Berlin Heidelberg New York. ISBN 3–540–18840–1, 1998. – 334 p.
14. Schön S. A Study on the Transfer of the ITRF Datum to a GPS Network in Antarctica / S. Schön, H. Kutterer, M. Mayer, B. Heck // International Association of Geodesy Symposia Vol. 123:29–34, Springer, New York Berlin Heidelberg, 2000. – P. 29–34.
15. Seitz M. Comparison of different combination strategies applied for the computation of terrestrial reference frames and geodetic parameter series / M. Seitz // Proceedings of the 1st International Workshop on the Quality of Geodetic Observation and Monitoring Systems, 2011. – P.1–9.
16. Seitz M. The 2008 DGFI realization of the ITRS: DTRF2008 / M. Seitz, D. Angermann, M. Bloßfeld, H. Drewes, M. Gerstl // J Geod, Volume 86, Issue 12, DOI: 10.1007/s00190–2012–0567–2, 2012a. – P. 1097–1123.
17. Sillard P. A review of algebraic constraints in terrestrial reference frame datum definition / P. Sillard, C. Boucher // Journal of Geodesy 75(2–3):63–73, 2001.
18. Yaya P. Apport des combinaisons de techniques astrome´triques et ge´ode´siques a` l'estimation des parame`tres d'orientation de la Terre / P. Yaya // Ph.D. thesis, Obs. de Paris, Paris, 2002.

Математичні принципи створення комбінованих GNSS розв'язків

С. Доскіч

У ході досліджень розглянуто математичні принципи створення комбінованих розв'язків та запропоновано комбінування на рівні окремих сесій GNSS спостережень (днів) та на рівні багаторічних GNSS спостережень. Для реалізації цих розв'язків рекомендовано використовувати програмний пакет GAMIT/GLOBK.

Математические принципы создания комбинированных GNSS решений

С. Доскич

В ходе исследований рассмотрены математические принципы создания комбинированных решений и предложены комбинирования на уровне отдельных сессий GNSS наблюдений (дней) и на уровне многолетних GNSS наблюдений. Для реализации этих решений рекомендуется использовать программный пакет GAMIT / GLOBK.

Mathematical principles of creating combined GNSS solutions

S. Doskich

During the research it was investigated the mathematical principles of the combined solutions and two approaches were offered: the combination at the level of separate sessions GNSS observations (days) and combination at the level of long-term GNSS observations. For realization of these solutions were recommended software GAMIT/GLOBK.