

УДК 519.6

Застосування адаптивних методів МСЕ для розв'язання варіаційних задач міграції домішок

Козел А. М., ст. викл. каф. МІ

Національний університет «Львівська політехніка»
(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)

Розподіл концентрації домішки в нестисливому середовищі описується параболічним диференціальним рівнянням конвекції-дифузії-реакції $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ u b_i - \mu_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\} + \sigma u = f$.

У роботі розглянуто деякі методи стабілізації наближеного розв'язку варіаційної задачі:

$$\begin{cases} \text{знайти концентрацію} & u \in V: \\ a(u, v) = \langle l, v \rangle & \forall v \in V. \end{cases}$$

де білінійна форма та лінійний функціонал визначаються відповідно

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \left[\mu_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} - b_i u \frac{\partial v}{\partial x_i} + \sigma uv \right] d\Omega, \quad u, v \in V,$$

$$\langle l, v \rangle := \int_{\Omega} f v d\Omega.$$

Шукана величина належить простору допустимих функцій

$$V = \{v \in H^1(\Omega) | v = 0 \text{ на } \partial\Omega\}.$$

Для знаходження числового розв'язку застосовується схема Гальоркіна і метод скінченних елементів (МСЕ).

При доволі великих числах Пекле ($Pe > 100$) параболічне диференціальне рівняння другого порядку з малими коефіцієнтами при старших похідних вироджується в гіперболічне рівняння першого порядку. При певному наборі крайових умов задачі з диференціальними рівняннями такого типу стають сингулярно збуреними та їхні розв'язки містять примежові шари.

В сингулярно збуреній задачі з несамоспряженим оператором схеми МСЕ, побудовані на основі класичного методу Гальоркіна, часто демонструють втрату стійкості й точності наближених розв'язків. Внаслідок цього отримуємо наближений розв'язок $u_h = u_h^* + e_h \in V_h$, який має іншу структуру, ніж точний розв'язок вихідної варіаційної задачі міграції домішок.

Для подолання згаданих недоліків апроксимацій МСЕ у роботі реалізовано низку стабілізованих схем, а також застосовуються p-, h- та hp-адаптивні методи, а також реалізовані базисні функції Лагранжа і Ерміта.

Як альтернативу стабілізованим методам побудовано ітераційну схему реконструкції розв'язку u_h^* , для якої вибір параметрів стабілізації базується на використанні апостеріорних оцінювачів похибок та побудові просторів функцій-бульбашок. Проведено порівняльний аналіз цих методів.

Наведено результати обчислювальних експериментів виконаних для одно- та двовимірних модельних задач з великими числами Пекле та Струхаля.

1. Козел А.М., Шинкаренко Г.А. Методи стабілізації для змішаних варіаційних задач мігрування домішок // Сучасні проблеми прикл. мат. та інформатики. Десята Всеукр. наук. конф. Львів, 2003. – С.74.