

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ
ІМ. Я.С.ПІДСТРИГАЧА

На правах рукопису

РАКОЧА ІРИНА ІГОРІВНА

УДК 539.3

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ
ШАРУВАТИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ТІЛ ЗА УМОВ СКЛАДНОГО
ВИСОКОТЕМПЕРАТУРНОГО НАГРІВАННЯ**

01.02.05 – «математичне моделювання та обчислювальні методи»

Дисертація на здобуття наукового ступеня

кандидата технічних наук

Науковий керівник

Попович Василь Степанович

доктор технічних наук,

професор

Львів – 2016

ЗМІСТ

| | |
|---|-----------|
| ВСТУП..... | 6 |
| РОЗДІЛ 1. АНАЛІЗ ПОТРЕБ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ ТА НАПРУЖЕНЬ ОДНОРІДНИХ ТА КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ТІЛ НА ОСНОВІ МОДЕЛІ ТЕРМОЧУТЛИВОГО ТІЛА..... | 13 |
| РОЗДІЛ 2. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОВОГО ТА ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ ШАРУВАТИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ТІЛ | 21 |
| 2.1 Математичне моделювання температурних полів шаруватих по осьовій координаті циліндричних тіл | 21 |
| 2.1.1. Термочутливі циліндричні тіла | 22 |
| 2.1.2. Нетермочутливі циліндричні тіла | 37 |
| 2.2 Математичне моделювання температурних полів радіально-шаруватих циліндричних тіл | 45 |
| 2.2.1. Термочутливі порожнисті циліндричні тіла | 45 |
| 2.2.2. Нетермочутливі порожнисті циліндричні тіла | 59 |
| 2.3. Математичне моделювання термопружного стану циліндричних тіл, шаруватих за осьовою координатою..... | 67 |
| 2.3.1. Термочутливі циліндричні тіла | 67 |
| 2.3.2. Нетермочутливі циліндричні тіла | 70 |
| 2.4. Математичне моделювання напружено-деформованого стану циліндричних тіл, шаруватих за радіальною координатою | 71 |
| 2.4.1. Термочутливі порожнисті циліндричні тіла | 71 |
| 2.4.1. Нетермочутливі порожнисті циліндричні тіла | 76 |
| 2.5. Висновки до розділу | 78 |
| РОЗДІЛ 3. МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОВОГО ТА ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ ШАРУВАТИХ ЗА ОСЬОВОЮ КООРДИНАТОЮ ТЕРМОЧУТЛИВИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ТІЛ ЗА СКЛАДНОГО ТЕПЛООБМІНУ | 80 |
| 3.1. Вхідні дані, що використовуються для визначення розподілів температур та напружень шаруватих за осьовою координатою термочутливих та нетермочутливих циліндричних тіл..... | 80 |
| 3.2. Моделювання термопружного стану двошарового циліндра за задання на плоских обмежувальних поверхнях сталого потоку тепла та конвективного теплообміну | 84 |
| 3.2.1. Формулювання задачі..... | 84 |

| | |
|---|-----|
| 3.2.2. Математична модель для розподілу температури та її розв'язок..... | 84 |
| 3.2.3. Числові дослідження | 86 |
| 3.3. Моделювання термопружного стану двошарового циліндра за задання на плоских обмежувальних поверхнях сталої температури та конвективно-променевого теплообміну | 88 |
| 3.3.1. Формулювання задачі..... | 88 |
| 3.3.2. Математична модель для розподілу температури та її розв'язок..... | 89 |
| 3.3.3. Числові дослідження | 91 |
| 3.4. Моделювання термопружного стану тришарового циліндра за підтримання сталих температур на плоских обмежувальних поверхнях..... | 93 |
| 3.4.1. Формулювання задачі..... | 93 |
| 3.4.2. Математична модель для розподілу температури та її розв'язок..... | 93 |
| 3.4.3. Числові дослідження | 95 |
| 3.5. Моделювання термопружного стану тришарового циліндра за задання на плоских обмежувальних поверхнях сталого потоку тепла та тепловідведення кипінням рідини | 96 |
| 3.5.1. Формулювання задачі..... | 96 |
| 3.5.2. Математична модель для розподілу температури та її розв'язок..... | 97 |
| 3.5.3. Числові дослідження | 99 |
| 3.6. Моделювання термопружного стану тришарового циліндра за задання на плоских обмежувальних поверхнях сталого потоку тепла та тепловідведення випаровуванням рідини | 102 |
| 3.6.1. Формулювання задачі..... | 102 |
| 3.6.2. Математична модель розподілу температури та її розв'язок..... | 103 |
| 3.6.3. Числові дослідження | 106 |
| 3.7. Порівняння розподілів температури та напружень за тепловідведення шляхом кипіння і випаровування рідини з плоских обмежувальних поверхонь | 109 |
| 3.8. Висновки до розділу | 110 |

РОЗДІЛ 4. МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛООВОГО ТА ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ ШАРУВАТИХ ЗА РАДІАЛЬНОЮ КООРДИНАТОЮ ТЕРМОЧУТЛИВИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ТІЛ ЗА СКЛАДНОГО ТЕПЛООБМІНУ 112

| | |
|--|-----|
| 4.1. Вхідні дані, що використовуються для визначення розподілів температур та компонент напружено-деформованого стану радіально-шаруватих термочутливих та нетермочутливих циліндрів..... | 112 |
| 4.2. Моделювання термопружного стану тришарового порожнистого циліндра за задання на циліндричних поверхнях сталої температури та конвективного теплообміну | 115 |
| 4.2.1. Формулювання задачі..... | 115 |
| 4.2.2. Математична модель для розподілу температури та її розв'язок..... | 115 |
| 4.2.3. Числові дослідження. | 118 |
| 4.3. Моделювання термопружного стану п'ятишарового порожнистого циліндра за задання на циліндричних поверхнях сталого потоку тепла та конвективного теплообміну | 121 |
| 4.3.1. Формулювання задачі..... | 121 |
| 4.3.2. Математична модель для розподілу температури та її розв'язок..... | 122 |
| 4.3.3. Числові дослідження | 125 |
| 4.4. Моделювання термопружного стану тришарового порожнистого циліндра за задання на циліндричних поверхнях конвективного та конвективно-променевого теплообмінів..... | 127 |
| 4.4.1. Формулювання задачі..... | 127 |
| 4.4.2. Математична модель для розподілу температури та її розв'язок..... | 128 |
| 4.4.3. Числові дослідження. | 131 |
| 4.5. Моделювання термопружного стану тришарового порожнистого циліндра за задання на циліндричних поверхнях конвективного теплообміну та тепловідведення кипінням рідини..... | 134 |
| 4.5.1. Формулювання задачі..... | 134 |
| 4.5.2. Математична модель для розподілу температури та її розв'язок..... | 134 |
| 4.5.3. Числові дослідження | 137 |
| 4.6. Моделювання термопружного стану тришарового порожнистого циліндра за задання на циліндричних поверхнях конвективно-променевого теплообміну та тепловідведення випаровуванням рідини | 140 |
| 4.6.1. Формулювання задачі..... | 140 |
| 4.6.2. Математична модель для розподілу температури та її розв'язок..... | 140 |
| 4.6.3. Числові дослідження | 143 |

| | |
|--|------------|
| 4.7. Порівняння розподілів температури та компонент напружено-деформованого стану за тепловідведення шляхом кипіння і випаровування рідини з циліндричних поверхонь..... | 146 |
| 4.8. Висновки до розділу | 150 |
| РОЗДІЛ 5. ПРОГРАМНІ ЗАСОБИ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ ШАРУВАТИХ ПО ОСЬОВІЙ ТА РАДІАЛЬНІЙ КООРДИНАТАХ ЦИЛІНДРІВ | 151 |
| 5.1. Програма для розрахунку температурних напружень багат шарових по осі циліндрів («StressCalc_axes») | 151 |
| 5.1.1. Підготовка та ввід даних, які використовуються під час виконання програми..... | 152 |
| 5.1.2. Результат виконання програми..... | 154 |
| 5.1.3. Розв’язування контрольного прикладу..... | 155 |
| 5.2. Програма для розрахунку температурних напружень багат шарових за радіальною координатою порожнистих циліндрів..... | 159 |
| 5.2.1. Підготовка та ввід даних, які використовуються під час виконання програми..... | 160 |
| 5.2.2. Результат виконання програми..... | 164 |
| 5.2.3. Розв’язування контрольного прикладу..... | 166 |
| 5.3. Висновки до розділу | 171 |
| ВИСНОВКИ | 172 |
| СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ | 174 |
| ДОДАТОК..... | 195 |

ВСТУП

Актуальність теми. Характерною особливістю розвитку сучасної космічної, авіаційної, енергетичної, нафтогазової, хімічної, електронної та інших галузей промисловості є створення та застосування для їх потреб нових конструкційних матеріалів на заміну традиційним. Серед найперспективніших виділяються композити, до яких відносяться, так звані, шаруваті. В основі розрахунків на міцність і надійність шаруватих конструкцій при дії на них інтенсивних експлуатаційних температурних і силових факторів лежать знання про їх термопружний стан.

Підтримка роботоздатності обладнання у теплоенергетиці є доволі актуальною проблемою у всьому світі. Воно постійно знаходяться під дією теплових, електричних, механічних, фізико-хімічних чинників. Через перевищення допустимого рівня термопружного стану конструкції виходять з ладу і часто не піддаються відновленню, а їх заміна на нові передбачає подекуди значні фінансові витрати. Їх міцність і надійність при дії інтенсивних експлуатаційних температурних і силових факторів залежить від рівня термопружного стану цих конструкцій. Для адекватного його визначення за експлуатації в умовах низьких чи високих температур слід виходити з моделі термочутливого тіла, в якій враховується залежність теплових та механічних характеристик, а також параметрів теплообміну (коефіцієнтів теплообміну, ступенів чорноти поверхонь) від температури.

З огляду на сказане, достовірне визначення компонент термопружного стану багат шаруватих елементів конструкцій, які працюють в умовах низьких чи високих температур, спричинених внутрішніми тепловиділеннями та складним теплообміном з довкіллям за одночасного силового навантаження є актуальною і важливою проблемою. Вона тісно пов'язана з побудовою адекватних математичних моделей та розробкою ефективних методів побудови їх розв'язків. Ці моделі для визначення розподілів температури є нелінійними задачами теплопровідності, для побудови розв'язків яких класичні методи математичної фізики є малопридатні. Відповідні моделі для визначення компонент термопружного стану є крайовими задачами для рівнянь в звичайних чи частинних похідних зі змінними коефіцієнтами, побудова зручних для числового аналізу аналітичних розв'язків яких є

важливою задачею. Здійснення числового аналізу температурних полів та спричинених ними та прикладними силовими навантаженнями компонент термопружного стану вимагає створення відповідного комплексу комп'ютерних програм. Такий аналіз є основою для прийняття конструктивних рішень на етапі виготовлення відповідних багатошарових циліндричних конструкцій. З іншого боку, наявність такого програмного комплексу дозволяє проводити необхідну кількість числових експериментів, внаслідок чого різко зменшити кількість високовартісних натурних випробовувань. Таким чином, у результаті уточнення математичної моделі визначення компонент термопружного стану багатошарових циліндричних конструкцій, які працюють за низьких, чи високих температур, шляхом врахування залежностей теплових та механічних характеристик матеріалів складових та параметрів теплообміну від температури, реальних умов їх нагрівання чи охолодження та взаємодії з довкіллям за одночасної дії силових факторів, застосування розвинутих методик побудови їх аналітичних розв'язків та розробленого комплексу комп'ютерних програм для проведення числових експериментів створить можливість більш точного, у порівнянні з відомими підходами, оцінювання напружено-деформованого стану згаданих конструкцій та їх використання в реальних експлуатаційних умовах.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана у межах держбюджетних науково-дослідних тем кафедри прикладної математики Інституту прикладної математики та фундаментальних наук Національного університету «Львівська політехніка» МОН України «Побудова і дослідження методів розв'язування задач прикладної математики та інформатики» (№ держреєстрації 0113U005296) та Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України «Аналітично-чисельні методи в математичних моделях механіки зв'язаних полів стосовно окремих технічних і медичних проблем» (№ держреєстрації РК №0111U009687), «Дослідження проблем керування тепловими і термопружними полями в композитних конструкціях» (№ держреєстрації РК №0115U002935), «Матема-

тичне моделювання та аналітико-чисельне визначення теплового і напруженого станів з урахуванням неоднорідностей їх структури» (№ держреєстрації РК № 0110U004821).

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є: формулювання математичних моделей для визначення усталених розподілів температури та компонент спричиненого нею напружено-деформованого стану в шаруватих по осьовій та радіальній координатах циліндричних тілах, в яких враховуються залежності теплових та механічних характеристик від температури, а також тепловиділення у шарах та на межах їх контакту; проведення досліджень, на базі запропонованих моделей, розподілів температури та компонент напружено-деформованого стану для конкретних випадків теплового та силового навантажень на основі побудованих розв'язків та створеного програмного забезпечення. При цьому на обмежувальних поверхнях можуть мати місце різні умови теплообміну (задання температури, теплового потоку, конвективного, променевого чи конвективно-променевого теплообмінів, тепловідведення шляхом кипіння чи випаровування рідини) та умови ідеального теплового та механічного контакту між сусідніми шарами.

Для досягнення мети розв'язано такі задачі:

- здійснено огляд літератури стосовно моделювання та методів визначення теплового та напружено-деформованого станів кусково-однорідних термочутливих та нетермочутливих шаруватих тіл за складного теплообміну з довкіллям;
- сформульовано математичні моделі для визначення усталених температурних полів в шаруватих за осьовою та радіальною координатами термочутливих циліндричних тілах, які враховують залежність теплових характеристик матеріалів шарів від температури, різноманітні умови взаємодії з навколишнім середовищем та внутрішні тепловиділення, а також аналогічні математичні моделі для нетермочутливих циліндричних тіл;
- сформульовано математичні моделі та визначено компоненти напружено-деформованого стану, спричиненого знайденим розподілом температури, шару-

ватих за осьовою та радіальною координатами термочутливих циліндричних тіл, які враховують залежності механічних характеристик матеріалів шарів від температури, та аналогічних нетермочутливих циліндричних тіл;

- створено програмне забезпечення, для проведення числових досліджень розподілів температури та компонент напружено-деформованого стану шаруватих за осьовою та радіальною координатами циліндрів.

Об'єкт дослідження – шаруваті за осьовою чи радіальною координатами циліндричні тіла, теплові та механічні характеристики яких залежать від температури.

Предмет дослідження – математичні моделі теплопровідності та термопружності термочутливих та нетермочутливих циліндричних багат шарових за осьовою чи радіальною координатами циліндричних тіл.

Методи досліджень. При формулюванні моделей використано теорію теплопровідності і термопружності термочутливих тіл. При побудові розв'язків нелінійних задач теплопровідності використано інтегральне перетворення Кірхгофа, теорію звичайних диференціальних рівнянь, методи розв'язання нелінійних алгебричних рівнянь. Задачі термопружності зведені до розв'язання систем інтегральних рівнянь Вольтерра II роду з відповідними інтегральними умовами, при побудові аналітичних розв'язків яких використано формулу трапецій. Апроксимація таблично заданих функцій здійснюється за допомогою методу найменших квадратів.

Наукова новизна одержаних результатів.

1. Узагальнено математичні моделі теплопровідності та термопружності багат шарових за осьовою та радіальною координатами циліндричних тіл за різних класичних умов теплообміну з довкіллям, які на відміну від відомих результатів враховують залежності усіх теплових та механічних характеристик матеріалів від температури та тепловиділення в шарах і на межах їх контакту, що дало

можливість визначити розподіли температур та компонент напружено-деформованого стану шаруватих елементів конструкцій.

2. Отримав подальший розвиток та пройшов належну апробацію метод розв'язування задач термопружності багатошарових циліндричних тіл за використання перетворення Кірхгофа та прямого інтегрування, який поширено та практично використано для тіл з термочутливих матеріалів за різних умов теплообміну з довкіллям, що уможливило знаходження розв'язків відповідних нових нелінійних математичних моделей у явному вигляді.
3. Вперше розроблено математичні моделі теплопровідності та термопружності багатошарових циліндричних тіл із термочутливих матеріалів, які враховують процеси відведення тепла з обмежувальних поверхонь шляхом кипіння чи випаровування рідини, що дозволило у явному вигляді отримати розв'язки нових нелінійних задач та показати ефективність такого тепловідведення.
4. Отримано та проаналізовано залежності розподілів температур та компонент напружено-деформованого стану у багатошарових термочутливих циліндричних тілах від вхідних параметрів та термочутливості термомеханічних характеристик матеріалів.

Практичне значення отриманих результатів. Наукові та практичні результати дисертаційної роботи використані у відділі фізичних основ руйнування та міцності матеріалів в агресивних середовищах Фізико-механічного інституту ім. Г. В. Карпенка Національної академії наук України при вирішенні науково-технічних задач оцінювання працездатності та ризику руйнування трубопроводів теплоенергетичного призначення та прогнозування можливих експлуатаційних пошкоджень у тришаровому металевому матеріалі, який застосовується при виготовленні корпусів енергетичних та хімічних реакторів.

Отримані результати можуть бути використані для аналізу та розрахунку розподілів температур та компонент напружено-деформованого стану багатошарових циліндричних елементів конструкцій, які використовуються у багатьох галузях промисловості та працюють в умовах високих чи низьких температур, коли істот-

ними є залежності їх характеристик від температури. Допоміжним засобом при цьому можуть слугувати розроблені та зареєстровані програмні продукти «StressCalc_axes» та «StressCalc_rad». Отримані аналітичні розв'язки нелінійних задач теплопровідності можуть бути використані у якості тестових прикладів при розробленні суто числових методів розв'язування таких задач.

Особистий внесок здобувача. Усі наукові результати дисертаційної роботи отримані автором самостійно. У друкованих працях, опублікованих у співавторстві, здобувачеві належать математичні моделі теплопровідності та термопружності багат шарових за осьюовою та радіальною координатами термочутливих циліндрів, на обмежувальних поверхнях яких задано умови теплообміну з довкіллям (сталі температури, сталі теплові потоки, конвективний, променевиий чи конвективно-променевиий теплообмін, умови тепловідведення шляхом кипіння чи випаровування рідини у будь-яких їх комбінаціях), побудова їх розв'язку, реалізація обчислювальних експериментів та аналіз отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертаційного дослідження доповідались на міжнародних та вітчизняних конференціях, зокрема на: VI Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації» (м. Кам'янець-Подільський, 2014); IX Міжнародній науковій конференції «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур» (м. Львів, 2014); 4-й Міжнародній науково-технічній конференції «Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення та експлуатації машинобудівних конструкцій» (м. Львів, 2014); 4th International Scientific Conference of Students and Young Scientists «Theoretical and Applied Aspects of Cybernetics» (м. Київ, 2014); Міжнародній науково-методичній конференції «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі» (м. Київ, 2015); Науково-технічній конференції «Мікро- та нанонеоднорідні матеріали: моделі та експеримент» (INTERPOR'15) (м. Львів, 2015); II Всеукраїнській науково-практичній конференції молодих учених і студентів «Інформаційні технології в освіті,

техніці та промисловості» (м. Івано-Франківськ, 2015); VIII Міжнародній науковій конференції ім. ак. І. І. Ляшка «Обчислювальна та прикладна математика» (м. Київ, 2015); XII Міжнародній конференції «Фізичні явища в твердих тілах» (м. Харків, 2015); Конференції молодих учених «Підстригачівські читання – 2016» (Львів, 2016); Міжнародній науково-практичній конференції «Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання» (м. Івано-Франківськ, 2016).

У повному обсязі робота доповідалася на науковому семінарі кафедри прикладної математики Інституту прикладної математики та фундаментальних наук Національного університету «Львівська політехніка», на розширеному науковому семінарі відділу термомеханіки Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, на об'єднаному семінарі кафедри технічної механіки і вищої математики Луцького національного технічного університету, розширеному науковому семінарі кафедри транспортних технологій Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту ім. В. Лазаряна.

Публікації. За результатами досліджень опубліковано 18 наукових праць (2 з яких одноосібні), у тому числі 7 статей у фахових наукових виданнях України, причому 2 з них включено до наукометричної бази Scopus, 9 публікацій в матеріалах та тезах доповідей на міжнародних та вітчизняних конференціях, 2 свідоцтва про реєстрацію авторського права на твір.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається зі вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел із 198 найменувань на 21 сторінках та додатку. Робота викладена на 198 сторінках, містить 149 сторінок основного тексту, 65 рисунків та 8 таблиць.

РОЗДІЛ 1. АНАЛІЗ ПОТРЕБ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ ТА НАПРУЖЕНЬ ОДНОРІДНИХ ТА КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ТІЛ НА ОСНОВІ МОДЕЛІ ТЕРМОЧУТЛИВОГО ТІЛА

Багато елементів сучасної техніки є багатошаровими конструкціями циліндричної форми. Дослідження їх термопружного стану відіграє важливу роль в будівельній індустрії, тепловій та атомній енергетиці, машино- та приладобудуванні, космічній та авіаційній техніці, а також при проектуванні та експлуатації елементів мікроелектроніки [1–3, 15, 17, 18, 27, 71, 99, 106, 109, 110]. Використання багатошарових (композитних) матеріалів в інженерії має ряд переваг. Такі сполуки отримують штучно, причому матеріали суттєво відрізняються один від одного своїми тепловими і механічними властивостями, а отже матеріал, з якого виготовлений елемент конструкції, має цілком передбачувані функціональні властивості або нові покращені термомеханічні характеристики.

Важливість правильного визначення теплового та напруженого стану елементів мікроелектроніки (рис.1.1) обумовлюється їх зростаючою функціональною складністю, термінами, вартістю проектування і т.д. Під час проектування мікроелектронних пристроїв (МЕП) варто уникати перегрівання пристрою чи певних його компонент [106]. Складність цієї задачі полягає в тому, що МЕП часто є багатошаровими структурами (напр., інтегральні схеми (ІС) (рис.1.2) [106], кожен елемент яких має різну температуру, за якої відбувається поломка пристрою [106]. Багатошарові гібридні ІС є досить складними мікроелектронними структурами. Їх створення забезпечило суттєве зниження габаритів і маси, розширення функціональних можливостей і підвищення надійності МЕП. Вони складаються із навісних компонентів, якими можуть бути безкорпусні ІС, напівпровідникові елементи – транзистори, діоди, конденсатори, а також плівкові пасивні елементи, які розміщуються на підшарку. Багатошарова гібридна ІС здатна виконувати досить складні функції з обробки сигналів.

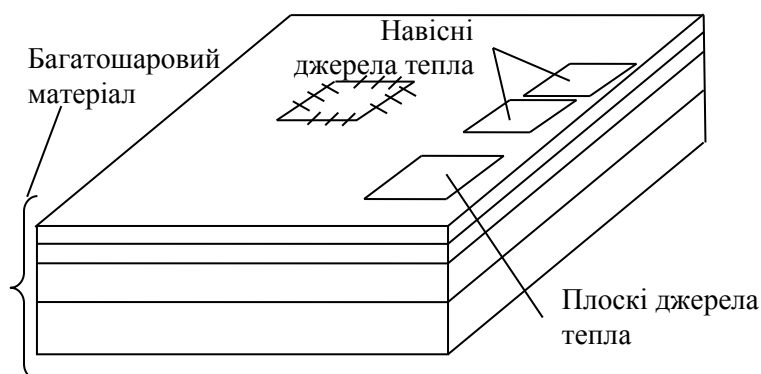


Рис.1.1. Базова теплова модель МЕМ

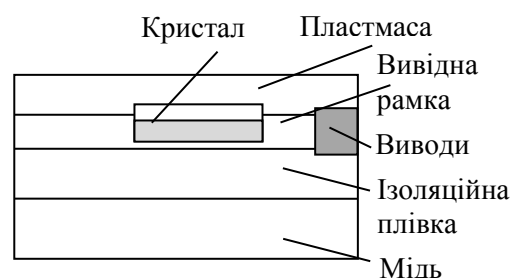


Рис.1.2. Схема конструкції корпусу ІС

Експлуатація елементів конструкцій машин та енергетичного обладнання вимагає додаткового зносостійкого, теплозахисного, корозієстійкого покриття. За постійних механічного навантаження та різких змін температури використовують багатошарове покриття (рис.1.3), товщина кожного шару якого залежить від функціонального призначення. У якості матеріалів можуть слугувати метали, сплави, полімери, оксиди та ін. Для утворення теплозахисних покриттів використовують матеріали із низькою теплопровідністю: кераміку, оксид алюмінію тощо. Для забезпечення надійного закріплення покриття до конструкції, зокрема під час використання різного роду оксидів, вдаються до нанесення прошарку з певного матеріалу (найчастіше це нікель-алюмінієві чи нікель-титанові сплави). Геометричною моделлю таких покриттів та МЕМ є багатошарові за осьовою координатою циліндри (рис.1.4).

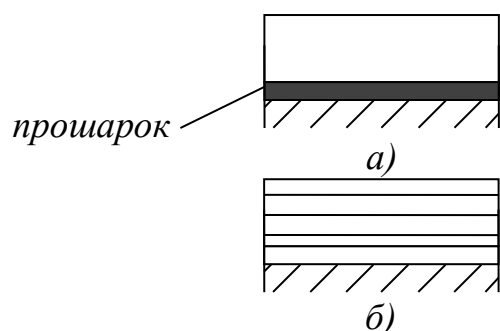


Рис.1.3. Конструкційні покриття:
а) з прошарком; б) багатошарове

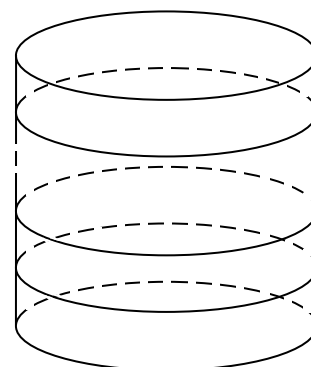


Рис.1.4. Багатошаровий за осьовою координатою циліндр

Із шаруватих композитних матеріалів виготовляють труби (рис.1.5) для обладнання теплової чи атомної енергетики, систем центрального опалення, підлогового опалення, гарячого і холодного водопостачання. Внутрішній та зовнішній шари труби виготовлені переважно із полімеру, середній шар – із алюмінію, а між ними – адгезійні шари, що надійно з'єднують метал з поліетиленом. Такі багат шарові труби витісняють з трубопровідного ринку чавунні, мідні, сталеві їх аналоги, оскільки є легшими, довговічнішими та дешевшими.

Композитні труби та корпуси теплових реакторів моделюють за допомогою безмежного багат шарового за радіальною координатою порожнистого циліндра (рис.1.6).

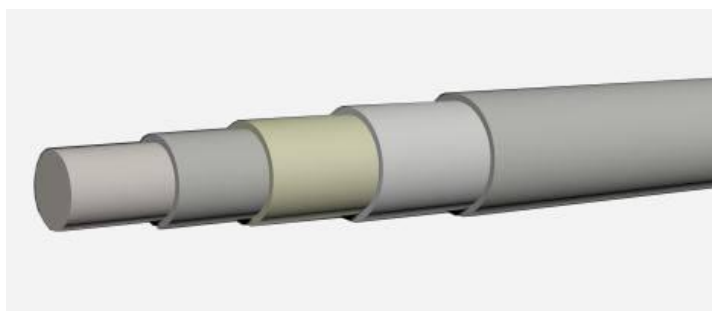


Рис.1.5. П'ятишарова композитна труба

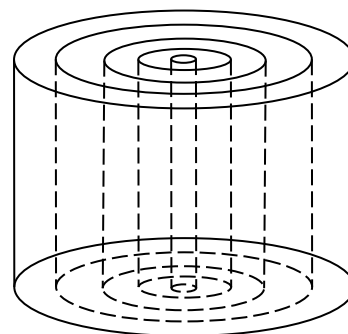


Рис.1.6. Багат шаровий за радіальною координатою циліндр

Надійність роботи багат шарових елементів конструкцій гарантує дотримання належного теплового та напружено-деформованого стану. Використання моделей нетермочутливого тіла [111, 112, 115, 117, 119–122, 124, 126, 127, 129, 133, 134, 137–139, 141, 144–148, 150, 152, 153, 161, 163, 172, 173, 181, 184, 185, 188, 191, 193–195], тобто таких, що нехтують залежністю від температури теплових чи механічних характеристик матеріалів, часто не дають достатньо точних розподілів температур чи компонент напружено-деформованого стану багат шарових тіл, оскільки при високих чи низьких температурах вони не здатні описати реальні властивості матеріалів. Це призводить не тільки до кількісних, але і якісних похибок. Дослідження з цього приводу знаходимо у працях Я. Й. Бурака, В. М Вігака, Г. Карслоу, Д. Егера, Ю. М. Коляна, О. О. Євтушенка, Р. М. Кушніра,

А. В. Ликова, Я. С. Підстригача, В. С. Поповича, Б. В. Процюка, М. В. Кутніва, Л. М. Журавчак, Д. В. Федасюка, Г. Ю. Гарматій, Я. Д. П'янила, N. Noda, T. Suhara, J. Nowinski, T. Koizumi, T. Taniwaki, R. Trostel та ін. [4, 5, 7–12, 14, 25, 26, 34, 38–41, 46–52, 66–70, 72–82, 88–90, 104–108, 151, 164–168, 192].

Належний тепловий та напружено-деформований стани однорідних та багаточастинкових тіл можна спроектувати, виходячи з моделі термочутливого тіла, у якій враховуються залежності теплових та механічних характеристик матеріалів шарів від температури. До вирішення проблеми їх визначення долучилися такі дослідники, як Я. І. Бурак [4, 5], В. М. Вігак [7–12], Б. В. Гера [5, 16, 132], Ю. Д. Зозуляк [5], Б. М. Калиняк [31–33], Г. Карслоу [34, 121], Л. А. Коздоба [35–37], Ю. М. Коляно [38–41], Р. М. Кушнір [46–51, 154–159], А. В. Ликов [52], В. А. Ломакін [54, 55], І. М. Махоркін [57], І. О. Мотовиловець [59], Ю. М. Неміш [63], Я. С. Підстригач [66–70], В. П. Плевако [65], В. С. Попович [56, 72, 73, 82, 174], Ю. С. Постольник [83–87], Б. В. Процюк [88, 89], С. П. Тимошенко [189] та інші [113, 114, 123, 125, 131, 135, 140, 142, 149, 160, 162, 169–171, 175, 179, 182, 186–189, 193, 196, 197].

Вивчення проблем термопружності термочутливих тіл розпочалося у ХХ ст. з праць Т. Suhara [187], Н. Н. Hilton [142], С. С. Chang та W. Н. Chu [122]. Т. Suhara, зокрема, вважаючи, що від температури залежить лише модуль зсуву, досліджував термопружний стан. У результаті проблему було зведено до розв'язування крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь. За таких же припущень Т. Nata [140] знайшов розв'язки задач термопружності для пластини з тріщинами.

Одним із ефективних методів визначення термопружного стану конструкцій є метод збурень, який у свої дослідженнях використовували А. Найфе [62] Т. Koizumi та Т. Taniwaki [151], N. Noda [164], J. Nowinski [168], Н. Nyuko та Y Takeuti [169], R. Trostel [192], Т. Nata [140] та інші. Метод привабливий тим, що дозволяє отримати точні аналітичні розв'язки задач термопружності. У результаті подання

переміщень і напружень через подвійні ряди за малими параметрами задача зводиться до розв'язування послідовності крайових задач, причому диференціальні рівняння мають сталі коефіцієнти. В. О. Ломакін [54, 55] розвинув цей метод для побудови розв'язків задач термопружності ізотропних та анізотропних тіл.

Ю. С. Постольник разом зі своїми учнями [20, 21, 83–87] у другій половині ХХ ст. розробили метод визначення термопружного стану конструкцій різної базової геометричної форми (кулі, циліндри, плоскі, плоскі, циліндричні та сферичні стінки), який пізніше отримав назву «метод еквівалентних джерел».

Розроблений Я. С. Підстригачем та Ю. М. Коляном [68–70] та їх учнями Р. М. Кушніром [46, 47], В. С. Поповичем [73], О. М. Куликом [45], Л. С. Гульчевським [23, 24], В. І. Громовиком [19] та ін. метод узагальнених функцій дозволяє звести задачу термопружності до розв'язування частково вироджених диференціальних рівнянь. В. М. Вігак [7], Г. Г. Онанов [64] та ін. присвятили низку праць розвитку методу розв'язування частково вироджених диференціальних рівнянь.

З огляду на важливість врахування неоднорідності та термочутливості матеріалів розглядуваних об'єктів В. М. Вігак та його учні розробили метод прямого (безпосереднього) інтегрування рівнянь рівноваги та суцільності при визначенні термопружного стану [7–12]. Це дозволило звести задачі пружності та термопружності у вигляді диференціальних рівнянь у частинних похідних до інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь.

Застосування числових та наближених аналітичних методів [22, 30, 43, 58, 100–102, 193] при визначенні теплового та напружено-деформованого станів шаруватих тіл використовують, коли необхідно розв'язувати нелінійні задачі теплопровідності для областей складної геометричної форми.

Цікавим є метод [79] визначення статичного термопружного стану багатошарових термочутливих циліндрів, запропонований В. С. Поповичем та Б. М. Калиняком. Він дозволяє отримати аналітичні вирази компонент напружено-деформо-

ваного стану (радіальних, колових та осьових напружень, радіальних та колових деформацій, радіальних та осьових переміщень) у довгих порожнистих багатошарових термочутливих циліндрах. Задача термопружності зводиться до розв'язання системи інтегральних рівнянь Вольтерра II роду із відповідними інтегральними умовами. При цьому, отримані аналітичні розв'язки є справедливими тільки для тонких шарів, тобто для таких, для яких під час обчислення із заданою точністю інтегралів, які містять невідомі величини, виконується формула трапецій. Тому, якщо циліндр містить і тонкі і товсті шари, то кожному із товстих шарів ставлять у відповідність певну кількість тонких з одного і того самого матеріалу. Перевірку достатності розбиття товстих шарів на тонкі забезпечує виконання інтегральної умови, що наведена в праці.

Дослідження термопружного стану шаруватих тіл великою мірою залежить від попереднього адекватного визначення їх теплового стану. Багато науковців, зокрема, Н. Fazeli, А. Abdous, Н. Karabi, М. Esmaili, Т. R. Tauchert, М. Jabbari, М. А. Elhagary, Е. Och, В. С. Попович, Б. М. Калиняк, А. Н. Кулик, О. О. Євтушенко [23, 24, 44, 45, 72, 79, 126, 127, 148, 170, 171, 189] та ін. при розв'язуванні задач теплопровідності використовували перетворення Фур'є, Лапласа, Гудмена, Больцмана, Кірхгофа та ін., методи послідовних наближень, потенціалів, лінеаризацію, методи збурень, що дозволило значно спростити числові обрахунки і в результаті отримати аналітичні розв'язки задач теплопровідності та термопружності.

Досить популярними методами зниження рівня температури у багатошарових тілах є тепловідведення шляхом кипіння (коли температура на обмежувальній поверхні тіл перевищує температуру кипіння рідини) чи випаровування (коли тепловідлення не є настільки великими, щоб забезпечити кипіння рідини на обмежувальній поверхні, або товщина плівки є настільки малою, що тепло передається через плівку рідини та відводиться з її поверхні в результаті випаровування) рідини [13, 42, 61, 116, 118, 136, 143, 177, 178, 183]. Такі методи широко є поширені в

мікроелектроніці. Недотримання належного температурного стану в пристроях створює загрозу їх виходу з ладу. Низку праць присвятили цій темі Д. В. Федасюк та Т. О. Муха [60, 104, 105, 107, 108], які удосконалили метод аналізу температурних полів у мікроелектронних пристроях при застосуванні вищеописаних методів тепловідведення для інтенсифікації охолодження за критичних умов.

Простим та ефективним у застосуванні (по суті інженерним) є метод визначення теплового стану шаруватих циліндричних за осью та радіальною координатами тіл [50, 79]. Він полягає у наступному. Сформульована задача зводиться до безрозмірного вигляду, після чого до неї застосовується інтегральне перетворення Кірхгофа. Специфічно подані розв'язки рівнянь на змінні Кірхгофа містять $2n$ невідомих сталих, які визначаються наступним чином. Сталі інтегрування одного із шарів вважаються відомими (їх називають базовими), а решту сталих, використовуючи крайові умови та умови теплообміну між шарами тіла, виражають через базові. В результаті задача визначення розподілів температури зводиться до розв'язування одного алгебричного рівняння. Ця методика є досить зручною, оскільки використовує класичний математичний апарат та не потребує великих затрат часу для проведення числових досліджень.

Широке застосування сучасними інженерами у тепловій енергетиці, мікроелектроніці, машино- та приладобудуванні у якості елементів конструкцій шаруватих матеріалів, у тому числі циліндричної форми, робить актуальним задачу визначення їх теплового та термопружного станів. Із проведеного аналізу літературних джерел випливає, що дослідження розподілів температур та компонент напружено-деформованого стану багат шарових термочутливих циліндрів за задання різних умов теплообміну (сталі температури, теплові потоки, конвективний, променевий чи конвективно-променевий теплообмін, тепловідведення кипінням чи випаровуванням рідини) на їх обмежувальних поверхнях за наявності внутрішніх джерел тепла в шарах та тепловиділень на межах контакту сусідніх шарів, виходя-

чи з моделі термочутливого тіла, потребує детальнішого вивчення. Важливими є дослідження їх термопружного стану за конкретних випадків термосилового навантаження на основі сформульованих математичних моделей та побудованих їх розв'язків шляхом реалізації числових експериментів з допомогою створеного з цією метою програмного забезпечення. На вирішення цих завдань і спрямоване дисертаційне дослідження.

РОЗДІЛ 2. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛООВОГО ТА ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ ШАРУВАТИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ТІЛ

В цьому розділі сформульовано математичні моделі одновимірних усталених температурних полів шаруватих по осі чи радіусу термочутливих циліндричних тіл за різних умов їх взаємодії через обмежувальні поверхні з довкіллям (на них можуть задаватися температури, теплові потоки, умови конвективного, променевого чи конвективно-променевого теплообміну, тепловідведення шляхом кипіння рідини чи її випаровування з поверхні), наявності внутрішніх джерел тепла в шарах та тепловиділень на межі контакту сусідніх шарів та наводиться методика їх розв'язування. Викладено методики визначення розподілів компонент напружено-деформованого стану таких циліндрів спричинених температурними полями та прикладеними силовими навантаженнями.

2.1 Математичне моделювання температурних полів шаруватих по осьовій координаті циліндричних тіл

Розглянемо n -шаровий за осьовою координатою циліндр (рис.2.1.), на кожній із зовнішніх плоских обмежувальних поверхонь $\tilde{z} = \tilde{z}_1$ та $\tilde{z} = \tilde{z}_{n+1}$ якого задані сталі температури, теплові потоки, умови конвективного, променевого чи конвективно-променевого теплообміну із зовнішніми середовищами сталих температур, умови тепловідведення шляхом кипіння рідини чи її випаровування з поверхні. У площинах контакту циліндрів, коефіцієнти теплопровідності яких є різні, наявні рівномірно розподілені джерела тепла, що створюють сталі потоки $q^{(i+1)}$ ($i = \overline{1, n-1}$). У кожній зі складових містяться рівномірно розподілені в нормальних до осі циліндра \tilde{z} площинах джерела тепла. Обмежувальні циліндричні поверхні теплоізовані, через що потік тепла в радіальному напрямі відсутній.

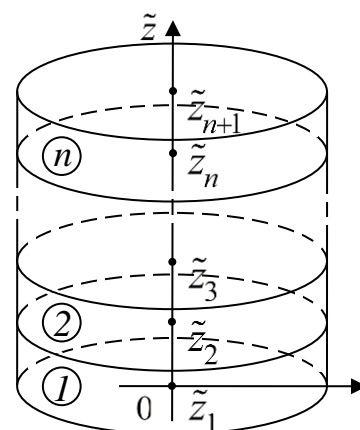


Рис.2.1. Циліндр n -шаровий за осьовою координатою

2.1.1. Термочутливі циліндричні тіла

Формулювання математичної моделі. Нехай коефіцієнти теплопровідності матеріалів складових циліндра залежать від температури. Стационарне температурне поле термочутливого багат шарового по осі циліндра описує система рівнянь теплопровідності

$$\frac{d}{d\tilde{z}} \left(\lambda_t^{(i)}(t_i) \frac{dt_i}{d\tilde{z}} \right) = -W^{(i)}(\tilde{z}), \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.1)$$

з умовами контакту сусідніх складових

$$t_i|_{\tilde{z}=\tilde{z}_{i+1}} = t_{i+1}|_{\tilde{z}=\tilde{z}_{i+1}}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (2.2)$$

$$\lambda_t^{(i)}(t_i) \frac{dt_i}{d\tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=\tilde{z}_{i+1}} = \lambda_t^{(i+1)}(t_{i+1}) \frac{dt_{i+1}}{d\tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=\tilde{z}_{i+1}} + q^{(i+1)}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (2.3)$$

де t_i – абсолютна температура, а $\lambda_t^{(i)}(t_i)$ – залежний від температури коефіцієнт теплопровідності i -ї складової циліндра, $W^{(i)}(\tilde{z})$ – густина джерел тепла i -ї складової, а $q^{(i+1)}$ ($i = \overline{1, n-1}$) – потоки тепла, які спричинені тепловиділеннями на межах контакту сусідніх шарів. Для повного формулювання математичної моделі для визначення температури багатоскладового циліндра до (2.1)-(2.3) слід долучити умови на обмежувальних поверхнях, можливі варіанти яких розглянемо пізніше.

Для зручності подальших викладок введемо безрозмірні температури $T_i = t_i/t_k$ та координату $z = \tilde{z}/l_0$, де t_k та l_0 – вибрані нами відлікова температура та характерний розмір. Коефіцієнти теплопровідності складових подамо у вигляді $\lambda_t^{(i)}(t_i) = \lambda_{t_0}^{(i)} \lambda_*^{(i)}(T_i)$, де величини $\lambda_{t_0}^{(i)}$ мають розмірність коефіцієнта теплопровідності (опорні значення), а $\lambda_*^{(i)}(T_i)$ – безрозмірні функції, які описують залежність коефіцієнтів теплопровідності від безрозмірних температур T_i . У довідниковій літературі залежності характеристик матеріалів від температури, переважно, подають у табличному вигляді. Для використання у теоретичних дослідженнях, у більшості випадків, їх апроксимують певними аналітичними

виразами (лінійними, квадратичними і т.д.), використовуючи при цьому для відшукування невідомих параметрів апроксимації метод найменших квадратів.

Нехай коефіцієнти теплопровідності матеріалів задані у діапазоні температур $[t_p, t_k]$. Тоді, найбільш поширену лінійну апроксимацію їх температурної залежності можна подати у вигляді

$$\lambda_t^{(i)}(t_i) = \lambda_{t_0}^{(i)} \left(1 + k_i (T_i - T_p) \right), \quad (2.4)$$

де $\lambda_{t_0}^{(i)}$ – значення коефіцієнтів теплопровідності матеріалів складових при мінімальній температурі T_p з діапазону їх задання.

Густина джерел тепла $W^{(i)}$ подамо у вигляді $W^{(i)} = w_0^{(i)} w_*^{(i)}(z)$, де $w_0^{(i)}$ – розмірні величини, а $w_*^{(i)}(z)$ – безрозмірні функції, що описують просторовий розподіл тепла.

У результаті обезрозмірення рівняння (2.1) разом з умовами контакту (2.2) і (2.3) набудуть вигляду

$$\frac{d}{dz} \left(\lambda_*^{(i)}(T_i) \frac{dT_i}{dz} \right) = -Po^{(i)} w_*^{(i)}(z), \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.5)$$

$$T_i \Big|_{z=z_{i+1}} = T_{i+1} \Big|_{z=z_{i+1}}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (2.6)$$

$$\frac{\lambda_{t_0}^{(i)}}{\lambda_{t_0}^{(i+1)}} \lambda_*^{(i)}(T_i) \frac{dT_i}{dz} \Big|_{z=z_{i+1}} = \lambda_*^{(i+1)}(T_{i+1}) \frac{dT_{i+1}}{dz} \Big|_{z=z_{i+1}} + Ki^{(i+1)}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (2.7)$$

де $Po^{(i)} = \frac{w_0^{(i)} l_0^2}{t_k \lambda_{t_0}^{(i)}}$ – опорні критерії Померанцева, $Ki^{(i+1)} = \frac{q^{(i+1)} l_0}{t_k \lambda_{t_0}^{(i+1)}}$ – опорні критерії Кірпічова.

Побудова розв'язків задачі (2.5)-(2.7). Через залежності коефіцієнтів теплопровідності від шуканих температур задача (2.5)-(2.7) є нелінійною. Для побудови її розв'язку на першому етапі скористаємось перетворенням Кірхгофа

$$\theta_i = \int_{T_p}^{T_i} \lambda_*^{(i)}(T_i) dT_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.8)$$

в результаті чого рівняння (2.5) та умови (2.7) трансформуються у лінійні

$$\frac{d^2\theta_i}{dz^2} = -\text{Po}^{(i)} w_*^{(i)}(z), \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.9)$$

$$\frac{\lambda_{t0}^{(i)}}{\lambda_{t0}^{(i+1)}} \frac{d\theta_i}{dz} \Big|_{z=z_{i+1}} = \frac{d\theta_{i+1}}{dz} \Big|_{z=z_{i+1}} + \text{Ki}^{(i+1)}, \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (2.10)$$

У той же час з лінійних умов (2.6) отримуємо такі нелінійні умови:

$$T_i(\theta_i) \Big|_{z=z_{i+1}} = T_{i+1}(\theta_{i+1}) \Big|_{z=z_{i+1}}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (2.11)$$

де $T_i(\theta_i)$ – вирази температури через змінні Кірхгофа. Їх вигляд для конкретних залежностей $\lambda_*^{(i)}(T_i)$ отримуємо з рівняння (2.8). Так, якщо залежності коефіцієнтів теплопровідності мають вигляд (2.4), то $\lambda_*^{(i)}(T_i) = 1 + k_i(T_i - T_p)$ і

$$\theta_i = T_i - T_p + \frac{k_i}{2}(T_i - T_p)^2, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.12)$$

Розв'язавши рівняння (2.12) відносно T_i , отримаємо вирази температури [50] через змінні Кірхгофа

$$T_i(\theta_i) = \frac{\sqrt{1 + 2k_i\theta_i - 1}}{k_i} + T_p, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.13)$$

Зауважимо, що з двох можливих знаків перед коренем квадратним у формулі (2.13) вибрали той, який відповідає фізичній суті задачі (при $k_i \rightarrow 0$ (нетермочутливі складові) $\theta_i \rightarrow T_i - T_p$).

Скориставшись результатом роботи [50], перетворимо дещо умови рівності температур на межі контакту сусідніх складових (2.11). Із виразів змінних Кірхгофа для i -ї та $(i+1)$ -ї складових маємо

$$\begin{aligned} \frac{2}{k_i} [\theta_i - (T_i - T_p)] \Big|_{z=z_{i+1}} &= (T_i - T_p)^2 \Big|_{z=z_{i+1}}, \\ \frac{2}{k_{i+1}} [\theta_{i+1} - (T_{i+1} - T_p)] \Big|_{z=z_{i+1}} &= (T_{i+1} - T_p)^2 \Big|_{z=z_{i+1}}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

З умов (2.6) слідує, що праві частини рівностей (2.14) однакові, а, отже, справедливими є рівності

$$\frac{1}{k_{i+1}} \left[\theta_{i+1} - (T_{i+1} - T_p) \right]_{z=z_{i+1}} = \frac{1}{k_i} \left[\theta_i - (T_i - T_p) \right]_{z=z_{i+1}},$$

з яких отримуємо такі умови:

$$\begin{aligned} \left(\theta_{i+1} - \frac{k_{i+1}}{k_i} \theta_i \right) \Big|_{z=z_{i+1}} &= \left(1 - \frac{k_{i+1}}{k_i} \right) \left(T_{i+1} (\theta_{i+1}) \Big|_{z=z_{i+1}} - T_p \right) \stackrel{або}{=} \\ &= \left(1 - \frac{k_{i+1}}{k_i} \right) \left(T_i (\theta_i) \Big|_{z=z_{i+1}} - T_p \right), \quad i = \overline{1, n-1}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Зауважимо, що вигляд умов (2.15), які рівносильні умовам (2.11), не є єдиним. Так, виходячи з виразів змінних Кірхгофа для i -ї та $(i+1)$ -ї складових та використовуючи умови (2.6), отримуємо умови типу (2.15) у вигляді

$$\begin{aligned} (\theta_{i+1} - \theta_i) \Big|_{z=z_{i+1}} &= \frac{k_{i+1} - k_i}{2} \left[T_{i+1} (\theta_{i+1}) \Big|_{z=z_{i+1}} - T_p \right]^2 \stackrel{або}{=} \\ &= \frac{k_{i+1} - k_i}{2} \left[T_i (\theta_i) \Big|_{z=z_{i+1}} - T_p \right]^2, \quad i = \overline{1, n-1}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Побудова розв'язку задачі на змінні Кірхгофа. Інтегруючи двічі рівняння (2.9), знаходимо, що

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_i}{dz} &= C_{i1} - \text{Po}^{(i)} w^{(i)}(z), \\ \theta_i &= C_{i1} (z - z_i) + C_{i2} - \text{Po}^{(i)} W^{(i)}(z), \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

де $w^{(i)}(z) = \int_{z_i}^z w_*^{(i)}(\xi) d\xi$, $W^{(i)}(z) = \int_{z_i}^z w^{(i)}(\xi) d\xi$, C_{ij} ($i = \overline{1, n}, j = 1, 2$) – сталі інтегрування.

Сталі інтегрування визначатимемо за методикою роботи. Вважаємо сталі інтегрування, наприклад, для першої складової (назвемо їх базовими) відомими величинами. Покажемо, що, використовуючи умови контакту сусідніх складових (2.10) та (2.15) або (2.16), всі решта сталі інтегрування C_{ij} ($i = \overline{2, n}, j = 1, 2$) можна виразити через вибрані базові. Дійсно, з умов (2.10) знаходимо, що

$$\text{для } i = 1: C_{21} = \frac{1}{\lambda_{t0}^{(2)}} \left(\lambda_{t0}^{(1)} C_{11} - \lambda_{t0}^{(1)} \text{Po}^{(1)} w^{(1)}(z_2) - \lambda_{t0}^{(2)} \text{Ki}^{(2)} \right),$$

$$\text{для } i = 2: C_{31} = \frac{1}{\lambda_{t0}^{(3)}} \left(\lambda_{t0}^{(1)} C_{11} - \lambda_{t0}^{(1)} \text{Po}^{(1)} w^{(1)}(z_2) - \right. \\ \left. - \lambda_{t0}^{(2)} \text{Po}^{(2)} w^{(2)}(z_3) - \lambda_{t0}^{(2)} \text{Ki}^{(2)} - \lambda_{t0}^{(3)} \text{Ki}^{(3)} \right).$$

Остаточню:

$$C_{i1} = \frac{1}{\lambda_{t0}^{(i)}} \left(\lambda_{t0}^{(1)} C_{11} - \sum_{j=1}^{i-1} \left(\lambda_{t0}^{(j)} \text{Po}^{(j)} w^{(j)}(z_{j+1}) + \lambda_{t0}^{(j+1)} \text{Ki}^{(j+1)} \right) \right), \quad i = \overline{2, n}.$$

Задовольняючи умови (2.15) (підкреслений варіант), враховуючи при цьому, що $\theta_i(z_i) = C_{i2}$, отримуємо рекурентне співвідношення

$$C_{i+1,2} = \frac{k_{i+1}}{k_i} \theta_i(z_{i+1}) + \left(1 - \frac{k_{i+1}}{k_i} \right) (T_i(\theta_i(z_{i+1})) - T_p), \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (2.18)$$

З (2.18) бачимо, що стала інтегрування

$$C_{22} = \frac{k_2}{k_1} \theta_1(z_2) + \left(1 - \frac{k_2}{k_1} \right) (T_1(\theta_1(z_2)) - T_p),$$

де $\theta_1(z_2) = C_{11}(z_2 - z_1) + C_{12} - \text{Po}^{(1)} w^{(1)}(z_2)$ виражається через базові сталі.

Оскільки сталі C_{21} та C_{22} виражаються через базові C_{11} і C_{12} , то і стала

$$C_{32} = \frac{k_3}{k_2} \theta_2(z_3) + \left(1 - \frac{k_3}{k_2} \right) (T_2(\theta_2(z_3)) - T_p),$$

іє $\theta_2(z_3) = C_{21}(z_3 - z_2) + C_{22} - \text{Po}^{(2)} w^{(2)}(z_3)$, також виражається через них. Так, продовжуючи, можна виписати решту сталих C_{42}, \dots, C_{n2} через сталі C_{11} і C_{12} .

Якщо C_{i2} ($i = \overline{2, n}$) визначити з умов (2.16) (підкреслений варіант), то змінні

Кірхгофа матимуть вигляд (2.17), де

$$C_{i+1,2} = \theta_i(z_{i+1}) + \frac{k_{i+1} - k_i}{2} (T_i(\theta_i(z_{i+1})) - T_p)^2, \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (2.19)$$

Нескладними перетвореннями можна показати, що вирази (2.18) і (2.19) є тотожними.

У знайдених виразах змінних Кірхгофа (2.18) невідомими залишаються дві базові сталі інтегрування, для визначення яких слід використати умови теплообміну на обмежувальних поверхнях. Розглянемо можливі їх варіанти.

1. Нехай обмежувальна поверхня $\tilde{z} = \tilde{z}_1$ підтримується при сталій температурі, тобто $t_1|_{\tilde{z}=\tilde{z}_1} = t_{c1}$. У безрозмірних величинах ця умова має вигляд

$$T_1|_{z=z_1} = T_{c1},$$

а записана через змінну Кірхгофа

$$\theta_1|_{z=z_1} = \theta_{c1},$$

Де $T_{c1} = t_{c1}/t_0$, $\theta_{c1} = T_{c1} - T_p + \frac{k_1}{2}(T_{c1} - T_p)^2$. Задовольняючи дану умову знаходимо, що $C_{12} = \theta_{c1}$.

На другій обмежувальній поверхні можуть бути задані:

а) стала температура t_{cn} . У безрозмірних величинах ця умова має вигляд

$$T_n|_{z=z_{n+1}} = T_{cn},$$

а через змінну Кірхгофа для n -ї складової вона запишеться

$$\theta_n|_{z=z_{n+1}} = \theta_{cn}, \quad (2.20)$$

де $T_{cn} = t_{cn}/t_0$, $\theta_{cn} = T_{cn} - T_p + \frac{k_n}{2}(T_{cn} - T_p)^2$.

З умови (2.20) отримуємо рівняння

$$(z_{n+1} - z_n)C_{n1}(C_{11}) + C_{n2}(C_{11}, C_{12})|_{C_{12}=\theta_{c1}} = \text{Po}^{(n)}W^{(n)}(z_{n+1}) + \theta_{cn}$$

для визначення сталої C_{11} .

б) сталий тепловий потік $q^{(n+1)}$, а саме $\lambda_t^{(n)} \frac{dt_n}{d\tilde{z}}|_{\tilde{z}=\tilde{z}_{n+1}} = q^{(n+1)}$.

У безрозмірних величинах ця умова набуває вигляду

$$\lambda_*^{(n)} \frac{dT_n}{dz}|_{z=z_{n+1}} = \text{Ki}^{(n+1)},$$

а через змінну Кірхгофа для n -ї складової вона запишеться так:

$$\left. \frac{d\theta_n}{dz} \right|_{z=z_{n+1}} = \text{Ki}^{(n+1)}. \quad (2.21)$$

У цьому випадку з умови (2.21) знаходимо, що

$$C_{11} = \frac{1}{\lambda_{t_0}^{(1)}} \left[\sum_{j=1}^n \lambda_{t_0}^{(j)} \text{Po}^{(j)} w^{(j)}(z_{j+1}) + \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{t_0}^{(j+1)} \text{Ki}^{(j+1)} + \lambda_{t_0}^{(n)} \text{Ki}^{(n+1)} \right],$$

а отже отримуємо точний аналітичний розв'язок задачі.

В) конвективно-променевий теплообмін із середовищем сталої температури t_{cn} , а саме

$$\left[\lambda_t^{(n)}(t_n) \frac{dt_n}{d\tilde{z}} + \alpha^{(n)}(t_n - t_{\text{cn}}) + \sigma^{(n)} \varepsilon^{(n)} (t_n^4 - t_{\text{cn}}^4) \right]_{\tilde{z}=\tilde{z}_{n+1}} = 0,$$

де $\alpha^{(n)}$, $\sigma^{(n)}$, $\varepsilon^{(n)}$ – коефіцієнт теплообміну, стала Стефана-Больцмана та ступінь чорноти поверхні $\tilde{z} = \tilde{z}_{n+1}$ відповідно. У безрозмірних величинах умова конвективно-променевого теплообміну набуває вигляду

$$\left[\lambda_*^{(n)}(T_n) \frac{dT_n}{dz} + \text{Bi}^{(n)}(T_n - T_{\text{cn}}) + \text{Sk}^{(n)}(T_n^4 - T_{\text{cn}}^4) \right]_{z=z_{n+1}} = 0, \quad (2.22)$$

де $\text{Bi}^{(n)} = \frac{\alpha^{(n)} l_0}{\lambda_{t_0}^{(n)}}$ — критерії Біо, $\text{Sk}^{(n)} = \frac{\sigma^{(n)} \varepsilon^{(n)} l_0 t_k^3}{\lambda_{t_0}^{(n)}}$ — критерії Старка.

Через змінну Кірхгофа для n -ї складової умова (2.22) запишеться так:

$$\left[\frac{d\theta_n}{dz} + q_{\text{кр}}^{(n+1)}(T_n(\theta_n)) \right]_{z=z_{n+1}} = 0, \quad (2.23)$$

де $q_{\text{кр}}^{(n+1)}(T_n(\theta_n)) = \text{Bi}^{(n)}(T_n(\theta_n) - T_{\text{cn}}) + \text{Sk}^{(n)}(T_n^4(\theta_n) - T_{\text{cn}}^4)$.

З умови (2.23) отримуємо рівняння

$$\begin{aligned} \lambda_{t_0}^{(1)} C_{11} + \lambda_{t_0}^{(n)} \left[q_{\text{кр}}^{(n+1)}(T_n(\theta_n|_{z=z_{n+1}})) \right]_{C_{12}=\theta_{c1}} - \\ - \sum_{j=1}^n \lambda_{t_0}^{(j)} \text{Po}^{(j)} w^{(j)}(z_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{t_0}^{(j+1)} \text{Ki}^{(j+1)} = 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

для визначення сталої інтегрування C_{11} . Зауважимо, що, поклавши в рівнянні (2.24) $Sk^{(n)} = 0$, отримаємо рівняння для визначення сталої C_{11} у випадку суто конвективного, а при $Bi^{(n)} = 0$ – суто променевого теплообміну на обмежувальній поверхні $z = z_{n+1}$.

г) умова кипіння рідини [42, 60, 118], що забезпечує відведення тепла через поверхню $\tilde{z} = \tilde{z}_{n+1}$. Вона можлива лише тоді, коли температура на цій обмежувальній поверхні циліндра перевищує температуру кипіння рідини, тобто коли $t_n \geq t_{\text{boil}} + 5[\text{K}]$. В такому разі процес теплообміну описується таким рівнянням

$$\left[\lambda_t^{(n)}(t_n) \frac{dt_n}{d\tilde{z}} + \alpha^{(n)}(t_n - t_{\text{cn}}) + \mu_1 h_{\text{fg}} \left(\frac{g(\hat{\rho}_1 - \hat{\rho}_v)}{\sigma} \right)^{1/2} \left(\frac{C_{p,l}(t_n - t_{\text{boil}}^{(n)})}{C_{s,f} h_{\text{fg}} Pr_1^n} \right)^3 \right]_{\tilde{z}=\tilde{z}_{n+1}} = 0,$$

де μ_1 – в'язкість рідини $[\text{кг}/\text{с} \cdot \text{м}]$; h_{fg} – питома теплота випаровування рідини $[\text{Дж}/\text{кг}]$; g – прискорення вільного падіння $[\text{м}/\text{с}^2]$; $\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_v$ – густина речовини, яка кипить у рідкому і газоподібному станах $[\text{кг}/\text{м}^3]$ відповідно; σ – поверхневий натяг рідини $[\text{Н}/\text{м}]$, $C_{p,l}$ – питома теплоємність рідини при сталому тиску, $C_{s,f}, n$ – константи, які знаходять експериментально для кожної пари поверхня-рідини; Pr_1 – число Прандтля для рідини, $t_{\text{boil}}^{(n)}$ – температура кипіння рідини.

У безрозмірному вигляді умова кипіння набуде вигляду

$$\left[\lambda_*^{(n)}(T_n) \frac{dT_n}{dz} + Bi^{(n)}(T_n - T_{\text{cn}}) + M_{\text{boil}}^{(n)}(T_n - T_{\text{boil}}^{(n)})^3 \right]_{z=z_{n+1}} = 0, \quad (2.25)$$

$$\text{де } M_{\text{boil}}^{(n)} = \frac{l_0 t_k^2 \mu_1 h_{\text{fg}}}{\lambda_{t0}^{(n)}} \left(\frac{g(\hat{\rho}_1 - \hat{\rho}_v)}{\sigma} \right)^{1/2} \left(\frac{C_{p,l}}{C_{s,f} h_{\text{fg}} Pr_1} \right)^3.$$

У змінних Кірхгофа умова (2.25) запишеться так:

$$\left[\frac{d\theta_n}{dz} + q_{\text{boil}}^{(n+1)}(T_n(\theta_n)) \right]_{z=z_{n+1}} = 0, \quad (2.26)$$

де $q_{\text{boil}}^{(n+1)}(T_n(\theta_n)) = \text{Bi}^{(n)}(T_n(\theta_n) - T_{\text{cn}}) + \text{M}_{\text{boil}}^{(n)}(T_n(\theta_n) - T_{\text{boil}}^{(n)})^3$.

Рівняння для визначення сталої інтегрування C_{11} отримуємо, задовольнивши умову (2.26)

$$\begin{aligned} \lambda_{t0}^{(1)} C_{11} + \lambda_{t0}^{(n)} \left[q_{\text{boil}}^{(n+1)}(T_n(\theta_n|_{z=z_{n+1}})) \right]_{C_{12}=\theta_{c1}} - \\ - \sum_{j=1}^n \lambda_{t0}^{(j)} \text{Po}^{(j)} w^{(j)}(z_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{t0}^{(j+1)} \text{Ki}^{(j+1)} = 0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Зауважимо, що, поклавши у рівнянні (2.27) $\text{M}_{\text{boil}}^{(n)} = 0$, отримаємо рівняння для визначення сталої C_{11} у випадку суто конвективного теплообміну.

д) умова випаровування рідини [13, 61, 104, 105, 107, 108, 116, 136, 143, 177, 178, 183], яка можлива, коли тепловиділення не є настільки великими, щоб забезпечити кипіння рідини на обмежувальній поверхні, або товщина плівки є настільки малою, що тепло передається через плівку рідини та відводиться з її поверхні в результаті випаровування. Такий процес описується рівнянням

$$\left[\lambda_t^{(n)}(t_n) \frac{dt_n}{dz} + \alpha^{(n)}(t_n - t_{\text{cn}}) + \frac{h_{\text{fg}} \alpha^{(n)} M_A}{R \rho_a c_a} \text{Le}^{-2/3} \left(\frac{p_{\text{A,sat}}(t_n)}{t_n} - \frac{p_{\text{A,cn}}}{t_{\text{cn}}} \right) \right]_{z=z_{n+1}} = 0, \quad (2.28)$$

де M_A – молярна маса рідини [кг/моль], R – універсальна газова стала, $p_{\text{A,sat}}(t_n)$, $p_{\text{A,cn}}$ – тиски насиченої пари рідини на обмежувальній поверхні при температурі t_n та в навколишньому середовищі при температурі t_{cn} відповідно [Па], ρ_a – густина повітря, c_a – питома теплоємність повітря при сталому тиску, $\text{Le} = \alpha_a / D_{\text{AB}}$ – число Льюїса, α_a – коефіцієнт теплопровідності повітря, D_{AB} – коефіцієнт дифузії для двокомпонентної суміші.

У роботах [104, 105, 107, 108] нелінійну функцію $p_{A,\text{sat}}(t_n)/t_n$ апроксимували лінійною вигляду $\xi_1 t_n + \xi_2$. В результаті з нелінійної умови (2.28) отримано таку лінійну

$$\left[\lambda_t^{(n)}(t_n) \frac{dt_n}{d\tilde{z}} + \alpha^{(n)}(t_n - t_{\text{cn}}) + \frac{h_{\text{fg}} \alpha^{(n)} M_A}{R \rho_a c_a} \text{Le}^{-2/3} \left(\xi_1 t_n + \xi_2 - \frac{p_{A,\text{cn}}}{t_{\text{cn}}} \right) \right]_{\tilde{z}=\tilde{z}_{n+1}} = 0,$$

яка у безрозмірних величинах має вигляд

$$\left[\lambda_*^{(n)}(T_n) \frac{dT_n}{dz} + \text{Bi}^{(n)} \left((T_n - T_{\text{cn}}) + M_{\text{evap}}^{(n)} (\xi_1 T_n + \tau^{(n)}) \right) \right]_{z=z_{n+1}} = 0, \quad (2.29)$$

$$\text{де } M_{\text{evap}}^{(n)} = \frac{h_{\text{fg}} M_A \text{Le}^{-2/3}}{R \rho_a c_a}, \quad \tau^{(n)} = \frac{1}{t_k} \left(\xi_2 - \frac{p_{A,\text{cn}}}{t_{\text{cn}}} \right).$$

У змінних Кірхгофа умова (2.29) запишеться так:

$$\left[\frac{d\theta_n}{dz} + q_{\text{evap}}^{(n+1)}(T_n(\theta_n)) \right]_{z=z_{n+1}} = 0, \quad (2.30)$$

$$\text{де } q_{\text{evap}}^{(n+1)}(T_n(\theta_n)) = \text{Bi}^{(n)} \left((T_n(\theta_n) - T_{\text{cn}}) + M_{\text{evap}}^{(n)} (\xi_1 T_n(\theta_n) + \tau^{(n)}) \right).$$

Рівняння для визначення сталої інтегрування C_{11} отримуємо, виходячи з умови (2.30)

$$\lambda_{t0}^{(1)} C_{11} + \lambda_{t0}^{(n)} \left[q_{\text{evap}}^{(n+1)} \left(T_n \left(\theta_n \Big|_{z=z_{n+1}} \right) \right) \right]_{C_{12}=\theta_{c1}} - \sum_{j=1}^n \lambda_{t0}^{(j)} \text{Po}^{(j)} w^{(j)}(z_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{t0}^{(j+1)} \text{Ki}^{(j+1)} = 0 \quad (2.31)$$

Методика, запропонована у роботі, дозволяє використати умову (2.28) без її лінеаризації. У безрозмірних величинах вона має вигляд

$$\left[\lambda_*^{(n)}(T_n) \frac{dT_n}{dz} + \text{Bi}^{(n)} \left((T_n - T_{\text{cn}}) + \bar{M}_{\text{evap}}^{(n)} \left(\frac{p_{A,\text{sat}}}{T_n} + \bar{\tau}^{(n)} \right) \right) \right]_{z=z_{n+1}} = 0,$$

де $\bar{M}_{\text{evap}}^{(n)} = \frac{1}{t_k^2} M_{\text{evap}}^{(n)}$, $\bar{\tau}^{(n)} = -\frac{P_{A,\text{cn}}}{T_{\text{cn}}}$, а записана через змінну Кірхгофа для n -го шару

$$\left[\frac{d\theta_n}{dz} + \bar{q}_{\text{evap}}^{(n+1)}(T_n(\theta_n)) \right]_{z=z_{n+1}} = 0, \quad (2.32)$$

де $\bar{q}_{\text{evap}}^{(n+1)}(T_n(\theta_n)) = \text{Bi}^{(n)} \left((T_n(\theta_n) - T_{\text{cn}}) + M_{\text{evap}}^{(n)} \frac{1}{t_k^2} \left(\frac{P_{A,\text{sat}}}{T_n(\theta_n)} + \bar{\tau}^{(n)} \right) \right)$.

З даної умови отримаємо алгебричне рівняння для визначення сталої C_{11} , а саме

$$\lambda_{t0}^{(1)} C_{11} + \lambda_{t0}^{(n)} \left[\bar{q}_{\text{evap}}^{(n+1)}(T_n(\theta_n|_{z=z_{n+1}})) \right]_{C_{12}=\theta_{c1}} - \sum_{j=1}^n \lambda_{t0}^{(j)} \text{Po}^{(j)} w^{(j)}(z_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{t0}^{(j+1)} \text{Ki}^{(j+1)} = 0$$

2. Нехай на обмежувальній поверхні $z = z_1$ заданий сталий потік тепла $q^{(1)}$.

Тоді відповідна умова на цій поверхні записана через змінну Кірхгофа має вигляд

$$\left. \frac{d\theta_1}{dz} \right|_{z=z_1} = -\text{Ki}^{(1)},$$

звідки $C_{11} = -\text{Ki}^{(1)}$, де $\text{Ki}^{(1)} = q^{(1)} l_0 / (t_0 \lambda_{t0}^{(1)})$. Сталу C_{12} визначаємо з умови теплообміну на поверхні $z = z_{n+1}$.

а) при заданні на цій поверхні умови конвективно-променевого теплообміну (2.23), із неї для визначення сталої C_{12} отримуємо рівняння

$$\lambda_{t0}^{(n)} \left[q_{\text{kp}}^{(n+1)}(T_n(\theta_n|_{z=z_{n+1}})) \right]_{C_{11}=-\text{Ki}^{(1)}} - \lambda_{t0}^{(1)} \text{Ki}^{(1)} - \sum_{j=1}^n \lambda_{t0}^{(j)} \text{Po}^{(j)} w^{(j)}(z_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{t0}^{(j+1)} \text{Ki}^{(j+1)} = 0.$$

б) за умови кипіння рідини (2.26) отримуємо рівняння для визначення сталої C_{12} , яке має вигляд

$$\lambda_{t_0}^{(n)} \left[\bar{q}_{\text{boil}}^{(n+1)} \left(T_n \left(\theta_n \Big|_{z=z_{n+1}} \right) \right) \right]_{C_{11}=-\text{Ki}^{(1)}} - \lambda_{t_0}^{(1)} \text{Ki}^{(1)} - \sum_{j=1}^n \lambda_{t_0}^{(j)} \text{Po}^{(j)} w^{(j)} (z_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{t_0}^{(j+1)} \text{Ki}^{(j+1)} = 0.$$

в) якщо на цій поверхні задана лінеаризована умова випаровування речовини (2.31), то рівняння для визначення сталої C_{12} буде

$$\lambda_{t_0}^{(n)} \left[\bar{q}_{\text{evap}}^{(n+1)} \left(T_n \left(\theta_n \Big|_{z=z_{n+1}} \right) \right) \right]_{C_{11}=-\text{Ki}^{(1)}} - \lambda_{t_0}^{(1)} \text{Ki}^{(1)} - \sum_{j=1}^n \lambda_{t_0}^{(j)} \text{Po}^{(j)} w^{(j)} (z_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{t_0}^{(j+1)} \text{Ki}^{(j+1)} = 0.$$

За використання нелінійної умови випаровування (2.32), для визначення сталої C_{12} отримаємо алгебричне рівняння

$$\lambda_{t_0}^{(n)} \left[\bar{q}_{\text{evap}}^{(n+1)} \left(T_n \left(\theta_n \Big|_{z=z_{n+1}} \right) \right) \right]_{C_{11}=-\text{Ki}^{(1)}} - \lambda_{t_0}^{(1)} \text{Ki}^{(1)} - \sum_{j=1}^n \lambda_{t_0}^{(j)} \text{Po}^{(j)} w^{(j)} (z_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{t_0}^{(j+1)} \text{Ki}^{(j+1)} = 0.$$

3. Нехай розглядуваний циліндр через поверхню $z = z_1$ конвективно-променевим способом обмінюється теплом із зовнішнім середовищем сталої температури t_{c1} . Тоді умова теплообміну, записана через змінну Кірхгофа для першої складової, має вигляд

$$\left[\frac{d\theta_1}{dz} - q_{\text{кр}}^{(1)} (T_1(\theta_1)) \right]_{z=z_1} = 0,$$

де

$$q_{\text{кр}}^{(1)} (T_1(\theta_1)) = \text{Bi}^{(1)} (T_1(\theta_1) - T_{c1}) + \text{Sk}^{(1)} (T_1^4(\theta_1) - T_{c1}^4),$$

$$\text{Bi}^{(1)} = \alpha^{(1)} l_0 / \lambda_{t_0}^{(1)}, \text{Sk}^{(1)} = \sigma^{(1)} \varepsilon^{(1)} l_0 t_0^3 / \lambda_{t_0}^{(1)},$$

звідки отримуємо рівняння

$$C_{11} - q_{\text{кр}}^{(1)}(T_1(\theta_1(z_1))) = 0.$$

Оскільки $\theta_1(z_1) = C_{12}$, то вираз $q_{\text{кр}}^{(1)}(T_1(\theta_1(z_1)))$ не містить сталої C_{11} , а отже,

$$C_{11} = q_{\text{кр}}^{(1)}(C_{12}). \quad (2.33)$$

На поверхні $z = z_{n+1}$ можуть бути задані:

а) конвективно-променеви́й теплообмін, в результаті якого відбувається обмін теплом із середовищем сталої температури $t_{\text{сн}}$.

Умова теплообміну на поверхні $z = z_{n+1}$ через змінну Кірхгофа має вигляд (2.23), звідки отримуємо алгебричне рівняння для визначення сталої інтегрування C_{12} :

$$\begin{aligned} & \lambda_{t0}^{(n)} \left[q_{\text{кр}}^{(n+1)} \left(T_n \left(\theta_n \Big|_{z=z_{n+1}} \right) \right) \right]_{C_{11}=q_{\text{кр}}^{(1)}(C_{12})} + \lambda_{t0}^{(1)} q_{\text{кр}}^{(1)}(C_{12}) - \\ & - \sum_{j=1}^n \lambda_{t0}^{(j)} \text{Po}^{(j)} w^{(j)}(z_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{t0}^{(j+1)} \text{Ki}^{(j+1)} = 0. \end{aligned}$$

б) процес тепловідведення шляхом кипіння. В такому разі лінеаризована умова теплообміну у змінних Кірхгофа на поверхні $z = z_{n+1}$ має вигляд (2.26), звідки отримуємо алгебричне рівняння для визначення сталої інтегрування C_{12} :

$$\begin{aligned} & \lambda_{t0}^{(n)} \left[q_{\text{boil}}^{(n+1)} \left(T_n \left(\theta_n \Big|_{z=z_{n+1}} \right) \right) \right]_{C_{11}=q_{\text{кр}}^{(1)}(C_{12})} + \lambda_{t0}^{(1)} q_{\text{кр}}^{(1)}(C_{12}) - \\ & - \sum_{j=1}^n \lambda_{t0}^{(j)} \text{Po}^{(j)} w^{(j)}(z_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{t0}^{(j+1)} \text{Ki}^{(j+1)} = 0. \end{aligned}$$

в) процес тепловідведення шляхом випаровування. Лінеаризований варіант умови у змінних Кірхгофа має вигляд (2.30). Тоді рівняння для визначення сталої інтегрування C_{12} буде

$$\lambda_{t0}^{(n)} \left[\bar{q}_{\text{evap}}^{(n+1)} \left(T_n \left(\theta_n |_{z=z_{n+1}} \right) \right) \right]_{C_{11}=q_{\text{kp}}^{(1)}(C_{12})} + \lambda_{t0}^{(1)} q_{\text{kp}}^{(1)}(C_{12}) - \sum_{j=1}^n \lambda_{t0}^{(j)} \text{Po}^{(j)} w^{(j)}(z_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{t0}^{(j+1)} \text{Ki}^{(j+1)} = 0.$$

Нелінеаризована умова тепловідведення шляхом випаровування, записана у змінних Кірхгофа, має вигляд (2.32), з якої отримуємо таке рівняння для визначення сталої C_{12}

$$\lambda_{t0}^{(n)} \left[\bar{q}_{\text{evap}}^{(n+1)} \left(T_n \left(\theta_n |_{z=z_{n+1}} \right) \right) \right]_{C_{11}=q_{\text{kp}}^{(1)}(C_{12})} + \lambda_{t0}^{(1)} q_{\text{kp}}^{(1)}(C_{12}) - \sum_{j=1}^n \lambda_{t0}^{(j)} \text{Po}^{(j)} w^{(j)}(z_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{t0}^{(j+1)} \text{Ki}^{(j+1)} = 0.$$

4. Нехай через обмежувальну плоску поверхню $z = z_1$ тепловідведення відбувається шляхом процесу кипіння рідини, яка подається на неї. Тоді умова теплообміну, записана у змінних Кірхгофа для першої складової, матиме вигляд

$$\left[\frac{d\theta_1}{dz} - q_{\text{boil}}^{(1)}(T_1(\theta_1)) \right]_{z=z_1} = 0,$$

де

$$q_{\text{boil}}^{(1)}(T_1(\theta_1)) = \text{Bi}^{(1)}(T_1(\theta_1) - T_{c1}) + M_{\text{boil}}^{(1)}(T_1(\theta_1) - T_{\text{boil}}^{(n)})^3, \quad \text{Bi}^{(1)} = \alpha^{(1)} l_0 / \lambda_{t0}^{(1)},$$

$$M_{\text{boil}}^{(1)} = \frac{l_0 t_k \mu_1 h_{\text{fg}}}{\lambda_{t0}^{(1)}} \left(\frac{g(\hat{\rho}_1 - \hat{\rho}_v)}{\sigma} \right)^{1/2} \left(\frac{C_{p,l}}{C_{s,f} h_{\text{fg}} \text{Pr}_1^n} \right)^3,$$

звідки отримуємо рівняння

$$C_{11} - q_{\text{boil}}^{(1)}(T_1(\theta_1(z_1))) = 0,$$

а, беручи до уваги міркування (2.33),

$$C_{11} = q_{\text{boil}}^{(1)}(C_{12}).$$

На поверхні $z = z_{n+1}$ можливі такі умови теплообміну:

а) умова кипіння рідини (2.26), в результаті чого рівняння для визначення сталої інтегрування C_{12} буде

$$\lambda_{t0}^{(n)} \left[q_{\text{boil}}^{(n+1)} \left(T_n \left(\theta_n \Big|_{z=z_{n+1}} \right) \right) \right]_{C_{11}=q_{\text{kp}}^{(1)}(C_{12})} + \lambda_{t0}^{(1)} q_{\text{boil}}^{(1)}(C_{12}) - \sum_{j=1}^n \lambda_{t0}^{(j)} \text{Po}^{(j)} w^{(j)}(z_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{t0}^{(j+1)} \text{Ki}^{(j+1)} = 0.$$

б) умова випаровування рідини. Використавши її лінеаризований варіант у змінних Кірхгофа (2.30), отримуємо рівняння для визначення сталої інтегрування C_{12}

$$\lambda_{t0}^{(n)} \left[q_{\text{evap}}^{(n+1)} \left(T_n \left(\theta_n \Big|_{z=z_{n+1}} \right) \right) \right]_{C_{11}=q_{\text{kp}}^{(1)}(C_{12})} + \lambda_{t0}^{(1)} q_{\text{boil}}^{(1)}(C_{12}) - \sum_{j=1}^n \lambda_{t0}^{(j)} \text{Po}^{(j)} w^{(j)}(z_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{t0}^{(j+1)} \text{Ki}^{(j+1)} = 0.$$

З нелінеаризованої умови випаровування у змінних Кірхгофа (2.32) отримуємо таке рівняння для визначення сталої C_{12}

$$\lambda_{t0}^{(n)} \left[\bar{q}_{\text{evap}}^{(n+1)} \left(T_n \left(\theta_n \Big|_{z=z_{n+1}} \right) \right) \right]_{C_{11}=q_{\text{kp}}^{(1)}(C_{12})} + \lambda_{t0}^{(1)} q_{\text{boil}}^{(1)}(C_{12}) - \sum_{j=1}^n \lambda_{t0}^{(j)} \text{Po}^{(j)} w^{(j)}(z_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{t0}^{(j+1)} \text{Ki}^{(j+1)} = 0.$$

5. Нехай на обох зовнішніх обмежувальних поверхнях тепловідведення відбувається шляхом випаровування рідини.

Лінеаризована умова випаровування, записана у змінних Кірхгофа для поверхні $z = z_1$, має вигляд

$$\left[\frac{d\theta_1}{dz} - q_{\text{evap}}^{(1)}(T_1(\theta_1)) \right]_{z=z_1} = 0, \quad (2.34)$$

де $q_{\text{evap}}^{(1)}(T_1(\theta_1)) = \text{Bi}^{(1)} \left((T_1(\theta_1) - T_{c1}) + \text{M}_{\text{evap}}^{(1)} \left(\xi_1^{(1)} T_1(\theta_1) + \tau^{(1)} \right) \right)$.

З умови (2.34) отримуємо рівняння для визначення сталої C_{11}

$$C_{11} - q_{\text{evap}}^{(1)}(T_1(\theta_1(z_1))) = 0,$$

звідки, подібно до (2.33)

$$C_{11} = q_{\text{evap}}^{(1)}(C_{12}),$$

а, використавши лінеаризовану умову (2.30) на поверхні $z = z_{n+1}$, отримуємо рівняння для визначення сталої C_{12}

$$\lambda_{t0}^{(n)} \left[\bar{q}_{\text{evap}}^{(n+1)} \left(T_n \left(\theta_n \Big|_{z=z_{n+1}} \right) \right) \right]_{C_{11}=\bar{q}_{\text{kp}}^{(1)}(C_{12})} + \lambda_{t0}^{(1)} \bar{q}_{\text{evap}}^{(1)}(C_{12}) - \sum_{j=1}^n \lambda_{t0}^{(j)} \text{Po}^{(j)} w^{(j)}(z_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{t0}^{(j+1)} \text{Ki}^{(j+1)} = 0.$$

Нелінеаризована умова випаровування на поверхні $z = z_1$ має вигляд

$$\left[\frac{d\theta_1}{dz} - \bar{q}_{\text{evap}}^{(1)}(T_1(\theta_1)) \right]_{z=z_1} = 0, \quad (2.35)$$

де $\bar{q}_{\text{evap}}^{(1)}(T_1(\theta_1)) = \text{Bi}^{(1)} \left((T_1(\theta_1) - T_{c1}) + \text{M}_{\text{evap}}^{(1)} \frac{1}{t_k^2} \left(\frac{P_{A,\text{sat}}}{T_1(\theta_1)} + \bar{\tau}^{(1)} \right) \right)$, звідки

$$C_{11} = \bar{q}_{\text{evap}}^{(1)}(C_{12}),$$

На поверхні $z = z_{n+1}$ ця умова має вигляд (2.32), звідки отримуємо рівняння для визначення сталої інтегрування C_{12}

$$\lambda_{t0}^{(n)} \left[\bar{q}_{\text{evap}}^{(n+1)} \left(T_n \left(\theta_n \Big|_{z=z_{n+1}} \right) \right) \right]_{C_{11}=\bar{q}_{\text{kp}}^{(1)}(C_{12})} + \lambda_{t0}^{(1)} \bar{q}_{\text{evap}}^{(1)}(C_{12}) - \sum_{j=1}^n \lambda_{t0}^{(j)} \text{Po}^{(j)} w^{(j)}(z_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{t0}^{(j+1)} \text{Ki}^{(j+1)} = 0.$$

2.1.2. Нетермочутливі циліндричні тіла

Нехай коефіцієнти теплопровідності складових циліндричних тіл не залежать від температури, тобто $\lambda_t^{(i)} = \lambda_{tN}^{(i)}$. Стационарне температурне поле таких циліндрів описує система рівнянь теплопровідності

$$\lambda_{tN}^{(i)} \frac{d^2 t_{iN}}{d\tilde{z}^2} = -W^{(i)}(\tilde{z}), \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.36)$$

з умовами контакту сусідніх складових

$$t_{iN} \Big|_{\tilde{z}=\tilde{z}_{i+1}} = t_{i+1N} \Big|_{\tilde{z}=\tilde{z}_{i+1}}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (2.37)$$

$$\lambda_{tN}^{(i)} \frac{dt_{iN}}{d\tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=\tilde{z}_{i+1}} = \lambda_{tN}^{(i+1)} \frac{dt_{i+1N}}{d\tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=\tilde{z}_{i+1}} + q^{(i+1)}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (2.38)$$

Можливі варіанти умов на обмежувальних поверхнях розглянемо пізніше.

У безрозмірних величинах рівняння (2.36)-(2.38) мають вигляд

$$\frac{d^2 T_{iN}}{dz^2} = -\text{Po}_N^{(i)} w_*^{(i)}(z), \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.39)$$

$$T_{iN} \Big|_{z=z_{i+1}} = T_{i+1N} \Big|_{z=z_{i+1}}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (2.40)$$

$$K_{\lambda N}^{(i)} \frac{dT_{iN}}{dz} \Big|_{z=z_{i+1}} = \frac{dT_{i+1N}}{dz} \Big|_{z=z_{i+1}} + \text{Ki}_N^{(i+1)}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (2.41)$$

де $\text{Po}_N^{(i)} = \text{Po}^{(i)} \frac{\lambda_{t0}^{(i)}}{\lambda_{tN}^{(i)}}$, $\text{Ki}_N^{(i+1)} = \text{Ki}^{(i+1)} \frac{\lambda_{t0}^{(i+1)}}{\lambda_{tN}^{(i+1)}}$.

Двічі проінтегрувавши рівняння теплопровідності (2.39), знаходимо, що

$$\frac{dT_{iN}}{dz} = \bar{C}_{i1} - \text{Po}_N^{(i)} w^{(i)}(z),$$

$$T_{iN} = \bar{C}_{i1} (z - z_i) + \bar{C}_{i2} - \text{Po}_N^{(i)} W^{(i)}(z),$$

де $w^{(i)}(z) = \int_{z_i}^z w_*^{(i)}(\xi) d\xi$, $W^{(i)}(z) = \int_{z_i}^z w^{(i)}(\xi) d\xi$, \bar{C}_{ij} ($i = \overline{1, n}$, $j = 1, 2$) – сталі інтегрування.

З умов (2.40) та (2.41) знаходимо, що

$$\bar{C}_{i1} = \frac{1}{\lambda_{tN}^{(i)}} \left(\lambda_{tN}^{(1)} \bar{C}_{11} - \sum_{j=1}^{i-1} \left(\lambda_{tN}^{(j)} \text{Po}_N^{(j)} w^{(j)}(z_{j+1}) + \lambda_{tN}^{(j+1)} \text{Ki}_N^{(j+1)} \right) \right), \quad (2.42)$$

$$\bar{C}_{i2} = \bar{C}_{i2} + \sum_{j=1}^{i-1} \left(\bar{C}_{j1} (z_{j+1} - z_j) - \text{Po}_N^{(j)} W^{(j)}(z_{j+1}) \right), \quad i = \overline{2, n}. \quad (2.43)$$

У знайдених виразах (2.42) та (2.43) невідомими залишаються дві сталі інтегрування \bar{C}_{11} та \bar{C}_{12} , які визначимо з умов теплообміну на плоских обмежувальних поверхнях циліндричних тіл. Розглянемо можливі варіанти.

1. Нехай на обмежувальній поверхні $z = z_1$ підтримується стала температура

T_{c1} , тобто

$$T_{1N} \Big|_{z=z_1} = T_{c1}.$$

В такому разі $\bar{C}_{12} = T_{c1}$.

На другій обмежувальній поверхні $z = z_{n+1}$ можуть бути задані

а) стала температура T_{cn} . Тоді крайова умова має вигляд

$$T_{nN} \Big|_{z=z_{n+1}} = T_{cn},$$

звідки отримуємо сталу \bar{C}_{11}

$$\bar{C}_{11} = \left(z_2 - z_1 + (z_{n+1} - z_n) \frac{\lambda_{tN}^{(1)}}{\lambda_{tN}^{(n)}} \right)^{-1} \times \left(\text{Po}_N^{(n)} w^{(n)}(z_{n+1}) + T_{cn} - T_{c1} + \right. \\ \left. + \left(\frac{z_{n+1} - z_n}{\lambda_{tN}^{(n)}} + 1 \right) \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{tN}^{(j+1)} \text{Po}_N^{(j+1)} w^{(j)}(z_{j+1}) - \sum_{j=2}^{i-1} \bar{C}_{j1} (z_{j+1} - z_j) \right).$$

б) сталий тепловий потік $q^{(n+1)}$, а саме

$$\frac{dT_{nN}}{dz} \Big|_{z=z_{n+1}} = \text{Ki}_N^{(n+1)},$$

де $\text{Ki}_N^{(n+1)} = \text{Ki}_N^{(n+1)} \frac{\lambda_{t0}^{(n+1)}}{\lambda_{tN}^{(n+1)}}$. У цьому випадку стала \bar{C}_{11} обчислюється за формулою

$$\bar{C}_{11} = \frac{1}{\lambda_{tN}^{(1)}} \left[\sum_{j=1}^n \lambda_{tN}^{(j)} \text{Po}_N^{(j)} w^{(j)}(z_{j+1}) + \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{tN}^{(j+1)} \text{Ki}_N^{(j+1)} + \lambda_{tN}^{(n)} \text{Ki}_N^{(n+1)} \right].$$

в) конвективно-променевий теплообмін із середовищем сталої температури T_{cn} , коефіцієнтом теплообміну $\alpha^{(n)}$, сталою Стефана-Больцмана $\sigma^{(n)}$ та ступенем чорноти $\varepsilon^{(n)}$ поверхні $z = z_{n+1}$, тобто

$$\left[\frac{dT_{nN}}{dz} + \text{Bi}_N^{(n)} (T_{nN} - T_{cn}) + \text{Sk}_N^{(n)} (T_{nN}^4 - T_{cn}^4) \right] \Big|_{z=z_{n+1}} = 0, \quad (2.44)$$

де $\text{Bi}_N^{(n)} = \text{Bi}_N^{(n)} \frac{\lambda_{t0}^{(n)}}{\lambda_{tN}^{(n)}}$, $\text{Sk}_N^{(n)} = \text{Sk}_N^{(n)} \frac{\lambda_{t0}^{(n)}}{\lambda_{tN}^{(n)}}$. Стала \bar{C}_{11} визначатиметься з такого рів-

няння:

$$\lambda_{tN}^{(1)} \bar{C}_{11} + \lambda_{tN}^{(n)} \left[q_{Nkp}^{(n+1)} \left(T_{nN} \Big|_{z=z_{n+1}} \right) \right]_{\bar{C}_{12}=T_{c1}} - \\ - \sum_{j=1}^n \lambda_{tN}^{(j)} \text{Po}_N^{(j)} w^{(j)}(z_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{tN}^{(j+1)} \text{Ki}_N^{(j+1)} = 0,$$

де $q_{Nkp}^{(n+1)}(T_{nN}) = \text{Bi}_N^{(n)}(T_{nN} - T_{cn}) + \text{Sk}_N^{(n)}(T_{nN}^4 - T_{cn}^4)$,

Г) процес тепловідведення шляхом кипіння рідини на поверхні $z = z_{n+1}$

$$\left[\frac{dT_{nN}}{dz} + \text{Bi}_N^{(n)}(T_{nN} - T_{cn}) + M_{N\text{boil}}^{(n)}(T_{nN} - T_{\text{boil}}^{(n)})^3 \right]_{z=z_{n+1}} = 0, \quad (2.45)$$

де $M_{N\text{boil}}^{(n)} = M_{\text{boil}}^{(n)} \frac{\lambda_{t0}^{(n)}}{\lambda_{tN}^{(n)}}$, $\text{Bi}_N^{(n)} = \text{Bi}_N \frac{\lambda_{t0}^{(n)}}{\lambda_{tN}^{(n)}}$.

Рівняння для визначення сталої інтегрування \bar{C}_{11} отримуємо, виходячи з умови (2.45)

$$\lambda_{tN}^{(1)} \bar{C}_{11} + \lambda_{tN}^{(n)} \left[q_{N\text{boil}}^{(n+1)}(T_{nN}) \right]_{\bar{C}_{12}=T_{c1}} - \sum_{j=1}^n \lambda_{tN}^{(j)} \text{Po}_N^{(j)} w^{(j)}(z_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{tN}^{(j+1)} \text{Ki}_N^{(j+1)} = 0,$$

де $q_{N\text{boil}}^{(n+1)}(T_{nN}) = \text{Bi}_N^{(n)}(T_{nN} - T_{cn}) + M_{N\text{boil}}^{(n)}(T_{nN} - T_{\text{boil}}^{(n)})^3$.

Д) процес тепловідведення шляхом випаровування рідини з поверхні $z = z_{n+1}$ описується такою лінеаризованою умовою

$$\left[\frac{dT_{nN}}{dz} + \text{Bi}_N^{(n)} \left((T_{nN} - T_{cn}) + M_{\text{evap}}^{(n)} (\xi_1^{(n)} T_{nN} + \tau^{(n)}) \right) \right]_{z=z_{n+1}} = 0, \quad (2.46)$$

звідки сталу інтегрування \bar{C}_{11} визначаємо з рівняння

$$\lambda_{tN}^{(1)} \bar{C}_{11} + \lambda_{tN}^{(n)} \left[q_{N\text{evap}}^{(n+1)}(T_{nN}) \right]_{\bar{C}_{12}=T_{c1}} - \sum_{j=1}^n \lambda_{tN}^{(j)} \text{Po}_N^{(j)} w^{(j)}(z_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{tN}^{(j+1)} \text{Ki}_N^{(j+1)} = 0,$$

де $q_{N\text{evap}}^{(n+1)}(T_{nN}) = \text{Bi}_N^{(n)} \left((T_{nN} - T_{cn}) + M_{\text{evap}}^{(n)} (\xi_1^{(n)} T_{nN} + \tau^{(n)}) \right)$,

або такою нелінеаризованою

$$\left[\frac{dT_{nN}}{dz} + \text{Bi}_N^{(n)} \left((T_{nN} - T_{cn}) + \bar{M}_{\text{evap}}^{(n)} \left(\frac{p_{A,\text{sat}}}{T_{nN}} + \bar{\tau}^{(n)} \right) \right) \right]_{z=z_{n+1}} = 0, \quad (2.47)$$

звідки сталу інтегрування \bar{C}_{11} визначаємо з рівняння

$$\lambda_{tN}^{(1)} \bar{C}_{11} + \lambda_{tN}^{(n)} \left[\bar{q}_{N\text{evap}}^{(n+1)} (T_{nN}) \right]_{\bar{C}_{12}=T_{cn}} -$$

$$- \sum_{j=1}^n \lambda_{tN}^{(j)} \text{Po}_N^{(j)} w^{(j)} (z_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{tN}^{(j+1)} \text{Ki}_N^{(j+1)} = 0,$$

де $q_{N\text{evap}}^{(n+1)} (T_{nN}) = \text{Bi}_N^{(n)} \left((T_{nN} - T_{cn}) + \bar{M}_{\text{evap}}^{(n)} \left(\frac{p_{A,\text{sat}}}{T_{nN}} + \bar{\tau}^{(n)} \right) \right)$.

2. Нехай на обмежувальній поверхні $z = z_1$ заданий потік тепла q_1 , а саме

$$\frac{dT_{1N}}{dz} = -\text{Ki}_N^{(1)},$$

звідки $\bar{C}_{11} = -\text{Ki}_N^{(1)}$. На плоскій обмежувальній поверхні $z = z_{n+1}$ можуть бути задані:

а) умова конвективно-променевого теплообміну (2.44). Тоді рівняння для визначення сталої \bar{C}_{12} матиме вигляд

$$\lambda_{tN}^{(n)} \left[q_{N\text{kp}}^{(n+1)} (T_{nN}) \right]_{\bar{C}_{11}=-\text{Ki}_N^{(1)}} - \lambda_{tN}^{(1)} \text{Ki}_N^{(1)} -$$

$$- \sum_{j=1}^n \lambda_{tN}^{(j)} \text{Po}_N^{(j)} w^{(j)} (z_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{tN}^{(j+1)} \text{Ki}_N^{(j+1)} = 0.$$

б) умова кипіння рідини (2.45). Сталу інтегрування \bar{C}_{12} знаходимо з рівняння

$$\lambda_{tN}^{(n)} \left[q_{N\text{boil}}^{(n+1)} (T_{nN}) \right]_{\bar{C}_{11}=-\text{Ki}_N^{(1)}} - \lambda_{tN}^{(1)} \text{Ki}_N^{(1)} -$$

$$- \sum_{j=1}^n \lambda_{tN}^{(j)} \text{Po}_N^{(j)} w^{(j)} (z_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{tN}^{(j+1)} \text{Ki}_N^{(j+1)} = 0.$$

в) лінеаризована умова випаровування рідини (2.46), з якої визначаємо другу сталу інтегрування \bar{C}_{12}

$$\lambda_{tN}^{(n)} \left[q_{N\text{evap}}^{(n+1)} (T_{nN}) \right]_{\bar{C}_{11}=-\text{Ki}_N^{(1)}} - \lambda_{tN}^{(1)} \text{Ki}_N^{(1)} -$$

$$- \sum_{j=1}^n \lambda_{tN}^{(j)} \text{Po}_N^{(j)} w^{(j)} (z_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{tN}^{(j+1)} \text{Ki}_N^{(j+1)} = 0,$$

або ж нелінеаризована умова (2.47), з якої рівняння для визначення сталої \bar{C}_{12} має вигляд

$$\lambda_{tN}^{(n)} \left[\bar{q}_{N\text{evap}}^{(n+1)} (T_{nN}) \right]_{\bar{C}_{11} = -\text{Ki}^{(1)}} - \lambda_{tN}^{(1)} \text{Ki}^{(1)} - \\ - \sum_{j=1}^n \lambda_{tN}^{(j)} \text{Po}_N^{(j)} w^{(j)} (z_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{tN}^{(j+1)} \text{Ki}_N^{(j+1)} = 0,$$

3. Нехай через обмежувальну поверхню $z = z_1$ циліндричне тіло обмінюється теплом із зовнішнім середовищем сталої температури T_{c1} шляхом конвективно-променевого теплообміну, тобто

$$\left[\frac{dT_{1N}}{dz} - q_{N\text{kp}}^{(1)} (T_{1N}) \right]_{z=z_{n+1}} = 0,$$

де $q_{N\text{kp}}^{(1)} (T_{1N}) = \text{Bi}_N^{(1)} (T_{1N} - T_{c1}) + \text{Sk}_N^{(1)} (T_{1N}^4 - T_{c1}^4)$. Тоді

$$\bar{C}_{11} = q_{N\text{kp}}^{(1)} (\bar{C}_{12}).$$

На поверхні $z = z_{n+1}$ можуть бути задані:

а) умова конвективно-променевого теплообміну (2.44), з якої отримуємо рівняння для визначення сталої інтегрування \bar{C}_{12}

$$\lambda_{tN}^{(n)} \left[q_{N\text{kp}}^{(n+1)} (T_{nN}) \right]_{\bar{C}_{11} = q_{N\text{kp}}^{(1)} (\bar{C}_{12})} + \lambda_{tN}^{(1)} q_{N\text{kp}}^{(1)} (\bar{C}_{12}) - \\ - \sum_{j=1}^n \lambda_{tN}^{(j)} \text{Po}_N^{(j)} w^{(j)} (z_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{tN}^{(j+1)} \text{Ki}_N^{(j+1)} = 0.$$

б) умова кипіння рідини (2.45). Сталу інтегрування \bar{C}_{12} знаходимо з рівняння

$$\lambda_{tN}^{(n)} \left[q_{N\text{boil}}^{(n+1)} (T_{nN}) \right]_{\bar{C}_{11} = q_{N\text{kp}}^{(1)} (\bar{C}_{12})} + \lambda_{tN}^{(1)} q_{N\text{kp}}^{(1)} (\bar{C}_{12}) - \\ - \sum_{j=1}^n \lambda_{tN}^{(j)} \text{Po}_N^{(j)} w^{(j)} (z_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{tN}^{(j+1)} \text{Ki}_N^{(j+1)} = 0.$$

в) лінеаризована умова випаровування рідини (2.46). Рівняння для визначення \bar{C}_{12} має вигляд

$$\lambda_{tN}^{(n)} \left[q_{N\text{evap}}^{(n+1)} (T_{nN}) \right]_{\bar{C}_{11} = q_{N\text{kp}}^{(1)} (\bar{C}_{12})} + \lambda_{tN}^{(1)} q_{N\text{kp}}^{(1)} (\bar{C}_{12}) - \\ - \sum_{j=1}^n \lambda_{tN}^{(j)} \text{Po}_N^{(j)} w^{(j)} (z_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{tN}^{(j+1)} \text{Ki}_N^{(j+1)} = 0.$$

Якщо на обмежувальній поверхні $z = z_{n+1}$ задано нелінеаризовану умову випаровування рідини (2.47), то стала \bar{C}_{12} визначатиметься з рівняння

$$\lambda_{tN}^{(n)} \left[\bar{q}_{N \text{ evap}}^{(n+1)} (T_{nN}) \right]_{\bar{C}_{11} = q_{N \text{ kp}}^{(1)} (\bar{C}_{12})} + \lambda_{tN}^{(1)} q_{N \text{ kp}}^{(1)} (\bar{C}_{12}) - \sum_{j=1}^n \lambda_{tN}^{(j)} \text{Po}_N^{(j)} w^{(j)} (z_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{tN}^{(j+1)} \text{Ki}_N^{(j+1)} = 0.$$

4. Нехай на плоскій циліндричній поверхні $z = z_1$ тепловідведення відбувається шляхом кипіння рідини, тобто

$$\left[\frac{dT_{1N}}{dz} + q_{N \text{ boil}}^{(1)} (T_{1N}) \right]_{z=z_1} = 0,$$

де $q_{N \text{ boil}}^{(1)} (T_{1N}) = \text{Bi}_N^{(1)} (T_{1N} - T_{c1}) + \text{M}_{N \text{ boil}}^{(1)} (T_{1N} - T_{\text{boil}}^{(n)})^3$. В такому разі

$$\bar{C}_{11} = q_{N \text{ boil}}^{(1)} (\bar{C}_{12}).$$

На поверхні $z = z_{n+1}$ можуть бути задані:

а) умова кипіння рідини (2.45). Сталу інтегрування \bar{C}_{12} знаходимо з рівняння

$$\lambda_{tN}^{(n)} \left[q_{N \text{ boil}}^{(n+1)} (T_{nN}) \right]_{\bar{C}_{11} = q_{N \text{ boil}}^{(1)} (\bar{C}_{12})} + \lambda_{tN}^{(1)} q_{N \text{ boil}}^{(1)} (\bar{C}_{12}) - \sum_{j=1}^n \lambda_{tN}^{(j)} \text{Po}_N^{(j)} w^{(j)} (z_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{tN}^{(j+1)} \text{Ki}_N^{(j+1)} = 0.$$

б) лінеаризована умова випаровування рідини (2.46). Рівняння для визначення \bar{C}_{12} має вигляд

$$\lambda_{tN}^{(n)} \left[q_{N \text{ evap}}^{(n+1)} (T_{nN}) \right]_{\bar{C}_{11} = q_{N \text{ boil}}^{(1)} (\bar{C}_{12})} + \lambda_{tN}^{(1)} q_{N \text{ boil}}^{(1)} (\bar{C}_{12}) - \sum_{j=1}^n \lambda_{tN}^{(j)} \text{Po}_N^{(j)} w^{(j)} (z_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{tN}^{(j+1)} \text{Ki}_N^{(j+1)} = 0.$$

У випадку використання нелінеаризованої умови випаровування (2.47), рівняння для визначення \bar{C}_{12} стане

$$\lambda_{tN}^{(n)} \left[\bar{q}_{N \text{ evap}}^{(n+1)} (T_{nN}) \right]_{\bar{C}_{11} = q_{N \text{ boil}}^{(1)} (\bar{C}_{12})} + \lambda_{tN}^{(1)} q_{N \text{ boil}}^{(1)} (\bar{C}_{12}) - \sum_{j=1}^n \lambda_{tN}^{(j)} \text{Po}_N^{(j)} w^{(j)} (z_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{tN}^{(j+1)} \text{Ki}_N^{(j+1)} = 0.$$

5. Нехай через обидві зовнішні обмежувальні поверхні тепловідведення відбувається шляхом випаровування рідини. Лінеаризована умова на поверхні $z = z_1$ запишеться

$$\left[\frac{dT_{1N}}{dz} - q_{N \text{ evap}}^{(1)} (T_{1N}) \right]_{z=z_1} = 0,$$

а на поверхні $z = z_{n+1}$ вона матиме вигляд (2.46), звідки отримуємо рівняння для визначення сталої інтегрування \bar{C}_{12}

$$\lambda_{tN}^{(n)} \left[q_{N \text{ evap}}^{(n+1)} (T_{nN}) \right]_{\bar{C}_{11} = q_{N \text{ evap}}^{(1)} (\bar{C}_{12})} + \lambda_{tN}^{(1)} q_{N \text{ evap}}^{(1)} (\bar{C}_{12}) - \sum_{j=1}^n \lambda_{tN}^{(j)} \text{Po}_N^{(j)} w^{(j)} (z_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{tN}^{(j+1)} \text{Ki}_N^{(j+1)} = 0,$$

причому, $\bar{C}_{11} = q_{N \text{ evap}}^{(1)} (\bar{C}_{12})$.

Нелінеаризована умова випаровування на поверхні $z = z_1$ має вигляд

$$\left[\frac{dT_{1N}}{dz} - \bar{q}_{N \text{ evap}}^{(1)} (T_{1N}) \right]_{z=z_1} = 0,$$

звідки

$$\bar{C}_{11} = \bar{q}_{N \text{ evap}}^{(1)} (\bar{C}_{12}),$$

а нелінеаризована умова на $z = z_{n+1}$ – вигляд (2.47), звідки стала \bar{C}_{12} визначатиметься з рівняння

$$\lambda_{tN}^{(n)} \left[\bar{q}_{N \text{ evap}}^{(n+1)} (T_{nN}) \right]_{\bar{C}_{11} = \bar{q}_{N \text{ evap}}^{(1)} (\bar{C}_{12})} + \lambda_{tN}^{(1)} \bar{q}_{N \text{ evap}}^{(1)} (\bar{C}_{12}) - \sum_{j=1}^n \lambda_{tN}^{(j)} \text{Po}_N^{(j)} w^{(j)} (z_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{tN}^{(j+1)} \text{Ki}_N^{(j+1)} = 0.$$

2.2 Математичне моделювання температурних полів радіально-шаруватих циліндричних тіл

Розглянемо безмежний n -шаровий порожнистий круговий циліндр [105] (рис. 2.2), на кожній з обмежувальних поверхонь $r = r_1$ та $r = r_{n+1}$ якого задані сталі температури, теплові потоки, умови конвективного, променевого чи конвективно-променевого теплообміну із зовнішніми середовищами сталих температур, умови тепловідведення шхом кипіння рідини та її випаровування її з поверхонь. У площинах контакту циліндрів, коефіцієнти теплопровідності яких є різні, наявні тепловиділення, що створюють сталі потоки тепла $q^{(i+1)}$ ($i = \overline{1, n-1}$). У кожній зі складових діють внутрішні джерела тепла, густина яких залежить від радіальної координати.

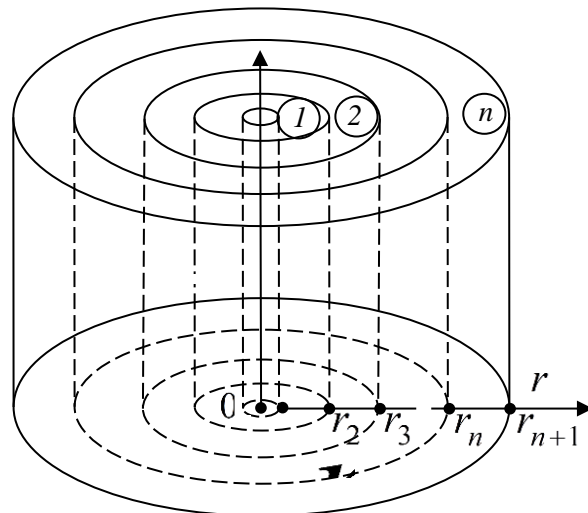


Рис.2.2. Циліндр n -шаровий за радіальною координатою

2.2.1. Термочутливі порожнисті циліндричні тіла

Формулювання математичних моделей. Нехай коефіцієнти теплопровідності матеріалів складових описаного вище шарового циліндра залежать від температури. Математична модель стаціонарного температурного поля включає систему рівнянь теплопровідності

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \lambda_t^{(i)}(t_i) \frac{dt_i}{dr} \right) = -W^{(i)}(r), \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.48)$$

умови контакту сусідніх складових

$$t_i \Big|_{r=r_{i+1}} = t_{i+1} \Big|_{r=r_{i+1}}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (2.49)$$

$$\lambda_t^{(i)}(t_i) \frac{dt_i}{dr} \Big|_{r=r_{i+1}} = \lambda_t^{(i+1)}(t_{i+1}) \frac{dt_{i+1}}{dr} \Big|_{r=r_{i+1}} + q^{(i+1)}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (2.50)$$

де t_i – абсолютна температура, а $\lambda_t^{(i)}(t_i)$ – залежний від температури коефіцієнт теплопровідності i -ї складової циліндра, $W^{(i)}(r)$ – густина джерел

тепла i -ї складової, а $q^{(i+1)} (i = \overline{1, n-1})$ – потоки тепла, які спричинені тепловиділеннями на межах контакту сусідніх шарів. Для повного формулювання математичної моделі для визначення температури багатоскладового циліндра до (2.48)-(2.50) слід долучити умови на обмежувальних поверхнях, можливі варіанти яких розглянемо пізніше.

Для зручності подальших викладок введемо безрозмірні температури $T_i = t_i/t_k$ та безрозмірну координату $\rho = r/l_0$, де t_k та l_0 – вибрані нами відлікова температура та характерний розмір. Коефіцієнти теплопровідності складових подано у вигляді $\lambda_t^{(i)}(t_i) = \lambda_{t_0}^{(i)} \lambda_*^{(i)}(T_i)$, де величини $\lambda_{t_0}^{(i)}$ мають розмірність коефіцієнта теплопровідності, а $\lambda_*^{(i)}(T_i)$ – безрозмірні функції безрозмірної температури T_i .

Нехай коефіцієнти теплопровідності матеріалів задані у діапазоні температур $[t_p, t_k]$. Найбільш поширена лінійна апроксимація їх температурної залежності має вигляд (2.4).

Густини джерел тепла $W^{(i)}(r)$ подамо таким чином: $W^{(i)} = w_0^{(i)} w_*^{(i)}(\rho)$, де $w_0^{(i)}$ – розмірні величини, а $w_*^{(i)}(\rho)$ – безрозмірні функції, що описують просторовий розподіл джерел тепла.

У результаті обезрозмірення рівняння (2.48) разом з умовами контакту (2.49) і (2.50) набудуть вигляду

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \lambda_*^{(i)}(T_i) \frac{dT_i}{d\rho} \right) = -Po^{(i)} w_*^{(i)}(\rho), \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.51)$$

$$T_i|_{\rho=\rho_{i+1}} = T_{i+1}|_{\rho=\rho_{i+1}}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (2.52)$$

$$\frac{\lambda_{t_0}^{(i)}}{\lambda_{t_0}^{(i+1)}} \lambda_*^{(i)}(T_i) \frac{dT_i}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_{i+1}} = \lambda_*^{(i+1)}(T_{i+1}) \frac{dT_{i+1}}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_{i+1}} + Ki^{(i+1)}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (2.53)$$

де $Po^{(i)} = \frac{w_0^{(i)} l_0^2}{t_k \lambda_{t_0}^{(i)}}$ – критерії Померанцева, $Ki^{(i+1)} = \frac{q^{(i+1)} l_0}{t_k \lambda_{t_0}^{(i+1)}}$ – критерії Кірпічова.

Побудова розв'язків задачі (2.51-2.53). Через залежності коефіцієнтів теплопровідності від шуканих температур рівняння (2.51) та умови (2.53) є нелінійними. Для їх лінеаризації скористаємось перетворенням Кірхгофа (2.8) в результаті чого рівняння (2.51) та умови (2.53) трансформуються у лінійні відносно змінних Кірхгофа

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d\theta}{d\rho} \right) = -\text{Po}^{(i)} w_*^{(i)}(\rho), \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.54)$$

$$\frac{\lambda_{t0}^{(i)}}{\lambda_{t0}^{(i+1)}} \frac{d\theta_i}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_{i+1}} = \frac{d\theta_{i+1}}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_{i+1}} + \text{Ki}^{(i+1)}, \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (2.55)$$

У той же час з лінійних умов (2.52) отримуємо такі нелінійні:

$$T_i(\theta_i) \Big|_{\rho=\rho_{i+1}} = T_{i+1}(\theta_{i+1}) \Big|_{\rho=\rho_{i+1}}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (2.56)$$

де $T_i(\theta_i)$ – вирази температури через змінні Кірхгофа. Для конкретних залежностей $\lambda_*^{(i)}(T_i)$ вони мають вигляд (2.13).

Побудова розв'язку задачі на змінні Кірхгофа. Інтегруючи двічі рівняння (2.54), знаходимо, що

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_i}{d\rho} &= \frac{1}{\rho} \left(C_{i1} - \text{Po}^{(i)} w^{(i)}(\rho) \right), \\ \theta_i &= C_{i1} \ln \frac{\rho}{\rho_i} + C_{i2} - \text{Po}^{(i)} W^{(i)}(\rho), \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (2.57)$$

де $w^{(i)}(\rho) = \int_{\rho_i}^{\rho} w_*^{(i)}(\xi) d\xi$, $W^{(i)}(\rho) = \int_{\rho_i}^{\rho} w^{(i)}(\xi) d\xi$, C_{ij} ($i = \overline{1, n}$, $j = 1, 2$) – сталі інтегрування.

Сталі інтегрування визначатимемо за методикою, наведеною в роботі. Вважаємо сталі інтегрування, наприклад, для першої складової C_{1j} (назвемо їх базовими) відомими величинами. Покажемо, що, використовуючи умови контакту сусідніх складових (2.55), (2.56), всі решта сталі інтегрування C_{ij} ($i = \overline{2, n}$, $j = 1, 2$) можна виразити через вибрані базові. Дійсно, з умов (2.55) знаходимо, що

$$C_{i1} = \frac{1}{\lambda_{t0}^{(i)}} \left(\lambda_{t0}^{(1)} C_{11} - \sum_{j=1}^{i-1} \left(\lambda_{t0}^{(j)} \text{Po}^{(j)} w^{(j)}(\rho_{j+1}) + \lambda_{t0}^{(j+1)} \rho_{j+1} \text{Ki}^{(j+1)} \right) \right), \quad i = \overline{2, n}. \quad (2.58)$$

Бачимо, що сталі C_{i1} ($i = \overline{2, n}$) у виразах змінних Кірхгофа подані через сталу C_{11} – першу базову сталу.

Для знаходження сталих інтегрування C_{i2} ($i = \overline{2, n}$) скористаємося умовами

$$\left(\theta_{i+1} - \frac{k_{i+1}}{k_i} \theta_i \right) \Big|_{\rho=\rho_{i+1}} = \left(1 - \frac{k_{i+1}}{k_i} \right) \left(T_i(\theta_i) \Big|_{\rho=\rho_{i+1}} - T_p \right), \quad i = \overline{1, n-1}.$$

які рівнозначні умовам (2.56). При цьому врахуємо, що $\theta_i(z_i) = C_{i2}$. В результаті отримуємо рекурентний зв'язок

$$C_{i+1,2} = \frac{k_{i+1}}{k_i} \theta_i(\rho_{i+1}) + \left(1 - \frac{k_{i+1}}{k_i} \right) \left(T_i(\theta_i(\rho_{i+1})) - T_p \right), \quad i = \overline{1, n-1},$$

де $\theta_i(\rho_{i+1}) = C_{i1} \ln \frac{\rho_{i+1}}{\rho_i} + C_{i2} - \text{Po}^{(i)} W^{(i)}(\rho_{i+1})$. Бачимо, що стала з другим індексом «2» для кожного наступного шару виражається через сталі у попередньому шарі. Так,

$$C_{22} = \frac{k_2}{k_1} \theta_1(\rho_2) + \left(1 - \frac{k_2}{k_1} \right) \left(T_1(\theta_1(\rho_2)) - T_p \right),$$

де $\theta_1(\rho_2) = C_{11} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} + C_{12} - \text{Po}^{(1)} W^{(1)}(\rho_2)$ виражається через базові сталі.

Подібно до цього

$$C_{32} = \frac{k_3}{k_2} \theta_2(\rho_3) + \left(1 - \frac{k_3}{k_2} \right) \left(T_2(\theta_2(\rho_3)) - T_p \right),$$

де $\theta_2(\rho_3) = C_{21}(\rho_3 - \rho_2) + C_{22} - \text{Po}^{(2)} W^{(2)}(\rho_3)$.

Оскільки, як показано вище, сталі C_{21} і C_{22} виражаються через C_{11} і C_{12} , то і стала C_{32} виражається через них. Так, продовжуючи, можна виписати вирази всіх сталих інтегрування C_{i2} ($i = \overline{2, n}$).

В результаті проведених обчислень у виразах змінних Кірхгофа (2.57) невідомими залишилися дві базові сталі інтегрування, для визначення яких слід використати умови теплообміну на обмежувальних поверхнях. Розглянемо можливі їх варіанти.

1. Нехай обмежувальна поверхня $r = r_1$ підтримується при сталій температурі t_{c1} . Тоді гранична умова на цій поверхні матиме вигляд $t_1|_{r=r_1} = t_{c1}$. У безрозмірних величинах ця умова має вигляд

$$T_1|_{\rho=\rho_1} = T_{c1},$$

а записана через змінну Кірхгофа

$$\theta_1|_{\rho=\rho_1} = \theta_{c1},$$

де $T_{c1} = t_{c1}/t_0$, $\theta_{c1} = \int_{T_p}^{T_{c1}} \lambda_*^{(i)}(T) dT = T_{c1} - T_p + \frac{k_1}{2}(T_{c1} - T_p)^2$.

З даної умови знаходимо, що друга базова стала інтегрування $C_{12} = \theta_{c1}$.

На другій обмежувальній поверхні можуть бути задані:

а) стала температура t_{cn} . У безрозмірних величинах відповідна гранична умова має вигляд $T_n|_{\rho=\rho_{n+1}} = T_{cn}$, з якої отримуємо умову на змінну Кірхгофа

$$\theta_n|_{\rho=\rho_{n+1}} = \theta_{cn}, \quad (2.59)$$

де $T_{cn} = t_{cn}/t_0$, $\theta_{cn} = T_{cn} - T_p + \frac{k_n}{2}(T_{cn} - T_p)^2$.

Задовольнивши умову (2.59), отримуємо алгебричне рівняння для визначення першої базової сталої інтегрування C_{11}

$$C_{n1}(C_{11}) \ln \frac{\rho_{n+1}}{\rho_n} + C_{n2}(C_{11}, C_{12})|_{C_{12}=\theta_{c1}} = \text{Po}^{(n)} W^{(n)}(\rho_{n+1}) + \theta_{cn},$$

де C_{n1} визначається через C_{11} формулою (2.58).

б) сталий тепловий потік $q^{(n+1)}$, а саме $\lambda_t^{(n)}(t_n) \frac{dt_n}{dr} \Big|_{r=r_{n+1}} = q^{(n+1)}$. У безрозмірних

величинах ця умова має вигляд

$$\lambda_*^{(n)}(T_n) \frac{dT_n}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_{n+1}} = \text{Ki}^{(n+1)},$$

а через змінну Кірхгофа для n -ї складової вона запишеться так:

$$\left. \frac{d\theta_n}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_{n+1}} = \text{Ki}^{(n+1)}, \quad (2.60)$$

де $\text{Ki}^{(n+1)} = (q^{(n+1)} l_0) / t_0 \lambda_{t_0}^{(n)}$ – критерій Кірпічова.

З умови (2.60) знаходимо, що

$$C_{11} = \frac{1}{\lambda_{t_0}^{(1)}} \left[\sum_{j=1}^n \lambda_{t_0}^{(j)} \text{Po}^{(j)} w^{(j)}(\rho_{j+1}) + \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{t_0}^{(j+1)} \rho_{j+1} \text{Ki}^{(j+1)} + \lambda_{t_0}^{(n)} \rho_{n+1} \text{Ki}^{(n+1)} \right].$$

В розглянутому випадку всі сталі інтегрування виражені у явному вигляді, а отже отримано точний аналітичний розв'язок нелінійної задачі теплопровідності.

В) конвективно-променевий теплообмін з середовищем сталої температури t_{cn} . В цьому випадку гранична умова на зовнішній поверхні циліндра має вигляд

$$\left[\lambda_t^{(n)}(t_n) \frac{dt_n}{dr} + \alpha^{(n)}(t_n - t_{\text{cn}}) + \sigma^{(n)} \varepsilon^{(n)} (t_n^4 - t_{\text{cn}}^4) \right]_{r=r_{n+1}} = 0,$$

де $\alpha^{(n)}$, $\sigma^{(n)}$, $\varepsilon^{(n)}$ – коефіцієнт теплообміну, стала Стефана-Больцмана та ступінь чорноти поверхні $r = r_{n+1}$ відповідно. У безрозмірних величинах умова конвективно-променевого теплообміну набуває вигляду

$$\left[\lambda_*^{(n)}(T_n) \frac{dT_n}{d\rho} + \text{Bi}^{(n)}(T_n - T_{\text{cn}}) + \text{Sk}^{(n)}(T_n^4 - T_{\text{cn}}^4) \right]_{\rho=\rho_{n+1}} = 0, \quad (2.61)$$

де $\text{Bi}^{(n)} = \alpha^{(n)} l_0 / \lambda_{t_0}^{(n)}$ – критерій Біо, $\text{Sk}^{(n)} = \sigma^{(n)} \varepsilon^{(n)} l_0 t_k^3 / \lambda_{t_0}^{(n)}$ – критерій Старка.

Якщо скористатись змінною Кірхгофа для n -го шару, то умова (2.61) запишеться

$$\left[\frac{d\theta_n}{d\rho} + q_{\text{кр}}^{(n+1)}(T_n(\theta_n)) \right]_{\rho=\rho_{n+1}} = 0, \quad (2.62)$$

де $q_{\text{кр}}^{(n+1)}(T_n(\theta_n)) = \text{Bi}^{(n)}(T_n(\theta_n) - T_{\text{cn}}) + \text{Sk}^{(n)}(T_n^4(\theta_n) - T_{\text{cn}}^4)$.

З умови (2.62) отримаємо алгебричне рівняння для визначення сталої інтегрування C_{11}

$$\lambda_{t_0}^{(1)} C_{11} + \lambda_{t_0}^{(n)} \rho_{n+1} \left[q_{\text{кр}}^{(n+1)} \left(T_n \left(\theta_n \Big|_{\rho=\rho_{n+1}} \right) \right) \right]_{C_{12}=\theta_{c1}} - \\ - \sum_{j=1}^n \lambda_{t_0}^{(j)} \text{Po}^{(j)} w^{(j)} (\rho_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{t_0}^{(j+1)} \rho_{j+1} \text{Ki}^{(j+1)} = 0.$$

Зауважимо, що, поклавши в рівнянні (2.61) $\text{Sk}^{(n)} = 0$, отримаємо рівняння для визначення сталої C_{11} у випадку суто конвективного, а при $\text{Vi}^{(n)} = 0$ – суто променевого теплообміну на обмежувальній поверхні $\rho = \rho_{n+1}$.

Г) умова кипіння рідини, яка можлива лише тоді, коли температура на обмежувальній поверхні циліндра перевищує температуру кипіння рідини, тобто коли $t_n \geq t_{\text{boil}} + 5[\text{K}]$. В такому разі процес теплообміну описується таким рівнянням

$$\left[\lambda_t^{(n)} (t_n) \frac{dt_n}{dr} + \alpha^{(n)} (t_n - t_{\text{cn}}) + \right. \\ \left. + \mu_1 h_{\text{fg}} \left(\frac{g(\hat{\rho}_1 - \hat{\rho}_v)}{\sigma} \right)^{1/2} \left(\frac{C_{p,1} (t_n - t_{\text{boil}})}{C_{s,f} h_{\text{fg}} \text{Pr}_1^n} \right)^3 \right]_{r=r_{n+1}} = 0,$$

де μ_1 – в'язкість рідини $[\text{кг}/\text{с} \cdot \text{м}]$; h_{fg} – питома теплота випаровування рідини $[\text{Дж}/\text{кг}]$; g – прискорення вільного падіння $[\text{м}/\text{с}^2]$; $\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_v$ – густина речовини, яка кипить у рідкому і газоподібному станах $[\text{кг}/\text{м}^3]$ відповідно; σ – поверхневий натяг рідини $[\text{Н}/\text{м}]$, $C_{p,1}$ – питома теплоємність рідини при сталому тиску, $C_{s,f}$, n – константи, які знаходять експериментально для кожної пари поверхня-рідина; Pr_1 – число Прандтля для рідини, $t_{\text{boil}}^{(n)}$ – температури кипіння рідини.

У безрозмірному вигляді умова кипіння набуде вигляду

$$\left[\lambda_*^{(n)} (T_n) \frac{dT_n}{d\rho} + \text{Vi}^{(n)} (T_n - T_{\text{cn}}) + \text{M}_{\text{boil}}^{(n)} (T_n - T_{\text{boil}}^{(n)})^3 \right]_{\rho=\rho_{n+1}} = 0, \quad (2.63)$$

де $\text{M}_{\text{boil}}^{(n)} = \frac{l_0 t_k^2 \mu_1 h_{\text{fg}}}{\lambda_{t_0}^{(n)}} \left(\frac{g(\hat{\rho}_1 - \hat{\rho}_v)}{\sigma} \right)^{1/2} \left(\frac{C_{p,1}}{C_{s,f} h_{\text{fg}} \text{Pr}_1^n} \right)^3$, $\text{Vi}^{(n)} = \frac{\alpha^{(n)} l_0}{\lambda_{t_0}^{(n)}}$ – критерій Біо.

У змінних Кірхгофа умова (2.63) запишеться так:

$$\left[\frac{d\theta_n}{d\rho} + q_{\text{boil}}^{(n+1)}(T_n(\theta_n)) \right]_{\rho=\rho_{n+1}} = 0, \quad (2.64)$$

де $q_{\text{boil}}^{(n+1)}(T_n(\theta_n)) = \text{Bi}^{(n)}(T_n(\theta_n) - T_{\text{cn}}) + \text{M}_{\text{boil}}^{(n)}(T_n(\theta_n) - T_{\text{boil}}^{(n)})^3$.

Рівняння для визначення сталої інтегрування C_{11} отримуємо, виходячи з умови (2.64)

$$\lambda_{t_0}^{(1)} C_{11} + \lambda_{t_0}^{(n)} \rho_{n+1} \left[q_{\text{boil}}^{(n+1)}(T_n(\theta_n|_{\rho=\rho_{n+1}})) \right]_{C_{12}=\theta_{c1}} - \\ - \sum_{j=1}^n \lambda_{t_0}^{(j)} \text{Po}^{(j)} w^{(j)}(\rho_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{t_0}^{(j+1)} \rho_{j+1} \text{Ki}^{(j+1)} = 0.$$

Д) умова випаровування рідини, яка можлива, коли тепловиділення не є настільки великими, щоб забезпечити кипіння рідини на обмежувальній поверхні, або товщина плівки є настільки малою, що тепло передається через плівку рідини та відводиться з її поверхні в результаті випаровування. Такий процес описується рівнянням

$$\left[\lambda_t^{(n)}(t_n) \frac{dt_n}{dr} + \alpha^{(n)}(t_n - t_{\text{cn}}) + \right. \\ \left. + h_{\text{fg}} \alpha^{(n)} \frac{M_A}{R \hat{\rho}_a c_a} \text{Le}^{-2/3} \left(\frac{p_{\text{A,sat}}(t_n)}{t_n} - \frac{p_{\text{A,cn}}}{t_{\text{cn}}} \right) \right]_{r=r_{n+1}} = 0,$$

де M_A – молярна маса рідини [кг/моль], R – універсальна газова стала, $p_{\text{A,sat}}(t_n)$, $p_{\text{A,cn}}$ – тиски насиченої пари рідини на обмежувальній поверхні при температурі t_n та в навколишньому середовищі при температурі t_{cn} відповідно [Па], $\hat{\rho}_a$ – густина повітря, c_a – питома теплоємність повітря при сталому тиску, $\text{Le} = \alpha_a / D_{\text{AB}}$ – число Льюїса, α_a – коефіцієнт температуропровідності повітря, D_{AB} – коефіцієнт дифузії для двокомпонентної суміші.

Апроксимувавши вираз умови випаровування лінійною функцією вигляду $\xi_1 t_n + \xi_2$ [60], отримано такий вираз

$$\left[\lambda_t^{(n)}(t_n) \frac{dt_n}{dr} + \alpha^{(n)}(t_n - t_{cn}) + \right. \\ \left. + h_{fg} \alpha^{(n)} \frac{M_A}{R \hat{\rho}_a c_a} Le^{-2/3} \left(\xi_1 t_n + \xi_2 - \frac{P_{A,cn}}{t_{cn}} \right) \right]_{r=r_{n+1}} = 0,$$

який у безрозмірних величинах запишеться:

$$\left[\lambda_*^{(n)}(T_n) \frac{dT_n}{d\rho} + Bi^{(n)} \left((T_n - T_{cn}) + M_{\text{evap}}^{(n)} \left(\xi_1^{(n)} T_n + \tau^{(n)} \right) \right) \right]_{\rho=\rho_{n+1}} = 0, \quad (2.65)$$

$$\text{де } M_{\text{evap}}^{(n)} = \frac{h_{fg} M_A Le^{-2/3}}{R \hat{\rho}_a c_a}, \quad \tau^{(n)} = \frac{1}{t_k} \left(\xi_2^{(n)} - \frac{P_{A,c}}{t_{cn}} \right).$$

У змінних Кірхгофа умова (2.65) запишеться так:

$$\left[\frac{d\theta_n}{d\rho} + q_{\text{evap}}^{(n+1)}(T_n(\theta_n)) \right]_{\rho=\rho_{n+1}} = 0, \quad (2.66)$$

$$\text{де } q_{\text{evap}}^{(n+1)}(T_n(\theta_n)) = Bi^{(n)} \left((T_n(\theta_n) - T_{cn}) + M_{\text{evap}}^{(n)} \left(\xi_1^{(n)} T_n(\theta_n) + \tau^{(n)} \right) \right).$$

Рівняння для визначення сталої інтегрування C_{11} отримуємо, виходячи з умови (2.66)

$$\lambda_{t0}^{(1)} C_{11} + \lambda_{t0}^{(n)} \rho_{n+1} \left[q_{\text{evap}}^{(n+1)} \left(T_n \left(\theta_n \Big|_{\rho=\rho_{n+1}} \right) \right) \right]_{C_{12}=\theta_{c1}} - \\ - \sum_{j=1}^n \lambda_{t0}^{(j)} Po^{(j)} w^{(j)}(\rho_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{t0}^{(j+1)} \rho_{j+1} Ki^{(j+1)} = 0$$

Умова випаровування у безрозмірній формі без застосування лінеаризації має вигляд

$$\left[\lambda_*^{(n)}(T_n) \frac{dT_n}{d\rho} + Bi^{(n)} \left((T_n - T_{cn}) + \bar{M}_{\text{evap}}^{(n)} \left(\frac{P_{A,\text{sat}}}{T_n} + \bar{\tau}^{(n)} \right) \right) \right]_{\rho=\rho_{n+1}} = 0,$$

$$\text{де } \bar{M}_{\text{evap}}^{(n)} = \frac{1}{t_k^2} M_{\text{evap}}^{(n)}, \quad \bar{\tau}^{(n)} = -\frac{P_{A,cn}}{T_{cn}}, \text{ а записана через змінну Кірхгофа для } n\text{-го}$$

шару

$$\left[\frac{d\theta_n}{d\rho} + \bar{q}_{\text{evap}}^{(n+1)}(T_n(\theta_n)) \right]_{\rho=\rho_{n+1}} = 0, \quad (2.67)$$

$$\text{де } \bar{q}_{\text{evap}}^{(n+1)}(T_n(\theta_n)) = \text{Bi}^{(n)} \left((T_n(\theta_n) - T_{\text{cn}}) + M_{\text{evap}}^{(n)} \frac{1}{t_k^2} \left(\frac{P_{A,\text{sat}}}{T_n(\theta_n)} + \bar{\tau}^{(n)} \right) \right).$$

З даної умови отримаємо алгебричне рівняння для визначення сталої C_{11} , а саме

$$\begin{aligned} \lambda_{t_0}^{(1)} C_{11} + \lambda_{t_0}^{(n)} \left[\bar{q}_{\text{evap}}^{(n+1)}(T_n(\theta_n|_{\rho=\rho_{n+1}})) \right]_{C_{12}=\theta_{c_1}} - \\ - \sum_{j=1}^n \lambda_{t_0}^{(j)} \text{Po}^{(j)} w^{(j)}(\rho_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{t_0}^{(j+1)} \text{Ki}^{(j+1)} = 0. \end{aligned}$$

2. Нехай на обмежувальній поверхні $\rho = \rho_1$ заданий сталий потік тепла $q^{(1)}$,

тобто $\lambda_t^{(1)}(t_1) \frac{dt_1}{dr} \Big|_{r=r_1} = -q^{(1)}$. У безрозмірному вигляді ця умова запишеться

$$\lambda_*^{(1)}(T_1) \frac{dT_1}{dr} \Big|_{r=r_1} = -\text{Ki}^{(1)}, \text{ звідки отримуємо умову на змінну Кірхгофа}$$

$$\frac{d\theta_1}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_1} = -\text{Ki}^{(1)}.$$

Задовольнивши умову (2.140), знаходимо, що $C_{11} = -\rho_1 \text{Ki}^{(1)}$. Другу базову сталу C_{12} визначимо з умови теплообміну на поверхні $r = r_{n+1}$. На ній можуть бути задані:

а) умова конвективно-променевого теплообміну (2.62). В такому разі рівняння для визначення базової сталої інтегрування C_{12} в матиме вигляд

$$\begin{aligned} \lambda_{t_0}^{(n)} \rho_{n+1} \left[q_{\text{kp}}^{(n+1)}(T_n(\theta_n|_{\rho=\rho_{n+1}})) \right]_{C_{11}=-\rho_1 \text{Ki}^{(1)}} - \lambda_{t_0}^{(1)} \rho_1 \text{Ki}^{(1)} - \\ - \sum_{j=1}^n \lambda_{t_0}^{(j)} \text{Po}^{(j)} w^{(j)}(z_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{t_0}^{(j+1)} \rho_{n+1} \text{Ki}^{(j+1)} = 0. \end{aligned}$$

б) умова кипіння рідини (2.64). з якої отримуємо рівняння для визначення сталої C_{12}

$$\lambda_{t_0}^{(n)} \rho_{n+1} \left[q_{\text{boil}}^{(n+1)} \left(T_n \left(\theta_n \mid_{\rho=\rho_{n+1}} \right) \right) \right]_{C_{11}=-\rho_1 \text{Ki}^{(1)}} - \lambda_{t_0}^{(1)} \rho_1 \text{Ki}^{(1)} - \\ - \sum_{j=1}^n \lambda_{t_0}^{(j)} \text{Po}^{(j)} w^{(j)} (\rho_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{t_0}^{(j+1)} \rho_{j+1} \text{Ki}^{(j+1)} = 0.$$

Г) умова випаровування речовини.

Лінеаризований варіант умови має вигляд (2.66), звідки отримуємо таке рівняння для визначення сталої C_{12}

$$\lambda_{t_0}^{(n)} \rho_{n+1} \left[q_{\text{evap}}^{(n+1)} \left(T_n \left(\theta_n \mid_{\rho=\rho_{n+1}} \right) \right) \right]_{C_{11}=-\rho_1 \text{Ki}^{(1)}} - \lambda_{t_0}^{(1)} \rho_1 \text{Ki}^{(1)} - \\ - \sum_{j=1}^n \lambda_{t_0}^{(j)} \text{Po}^{(j)} w^{(j)} (\rho_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{t_0}^{(j+1)} \rho_{j+1} \text{Ki}^{(j+1)} = 0.$$

Нелінеаризована умова має вигляд (2.67). Тоді стала C_{12} знаходиться з рівняння

$$\lambda_{t_0}^{(n)} \rho_{n+1} \left[\bar{q}_{\text{evap}}^{(n+1)} \left(T_n \left(\theta_n \mid_{\rho=\rho_{n+1}} \right) \right) \right]_{C_{11}=-\rho_1 \text{Ki}^{(1)}} - \lambda_{t_0}^{(1)} \rho_1 \text{Ki}^{(1)} - \\ - \sum_{j=1}^n \lambda_{t_0}^{(j)} \text{Po}^{(j)} w^{(j)} (\rho_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{t_0}^{(j+1)} \rho_{j+1} \text{Ki}^{(j+1)} = 0,$$

3. Нехай розглядуваний циліндр через поверхню $\rho = \rho_1$ конвективно-променевим способом обмінюється теплом із зовнішнім середовищем сталої температури t_{c1} . Тоді умова теплообміну, записана через змінну Кірхгофа для першої складової, має вигляд

$$\left[\frac{d\theta_1}{d\rho} - q_{\text{kp}}^{(1)} (T_1 (\theta_1)) \right]_{\rho=\rho_1} = 0,$$

де

$$q_{\text{kp}}^{(1)} (T_1 (\theta_1)) = \text{Bi}^{(1)} (T_1 (\theta_1) - T_{c1}) + \text{Sk}^{(1)} (T_1^4 (\theta_1) - T_{c1}^4),$$

$$\text{Bi}^{(1)} = \alpha^{(1)} l_0 / \lambda_{t_0}^{(1)}, \text{Sk}^{(1)} = \sigma^{(1)} \varepsilon^{(1)} l_0 t_0^3 / \lambda_{t_0}^{(1)},$$

звідки отримуємо рівняння

$$C_{11}/\rho_1 - q_{\text{кр}}^{(1)}(T_1(\theta_1(\rho_1))) = 0.$$

Оскільки $\theta_1(\rho_1) = C_{12}$, то вираз $q_{\text{кр}}^{(1)}(T_1(\theta_1(\rho_1)))$ в цьому рівнянні не містить сталої C_{11} , а отже,

$$C_{11} = \rho_1 q_{\text{кр}}^{(1)}(C_{12}). \quad (2.68)$$

На поверхні $\rho = \rho_{n+1}$ можуть бути задані:

а) конвективно-променевий теплообмін, в результаті якого відбувається обмін теплом із середовищем сталої температури $t_{\text{сн}}$.

Умова теплообміну на поверхні $\rho = \rho_{n+1}$ через змінну Кірхгофа має вигляд (2.62), звідки отримуємо алгебричне рівняння для визначення сталої інтегрування C_{12} :

$$\begin{aligned} & \lambda_{t_0}^{(n)} \rho_{n+1} \left[q_{\text{кр}}^{(n+1)} \left(T_n \left(\theta_n \Big|_{\rho=\rho_{n+1}} \right) \right) \right]_{C_{11}=\rho_1 q_{\text{кр}}^{(1)}(C_{12})} + \rho_1 q_{\text{кр}}^{(1)}(C_{12}) - \\ & - \sum_{j=1}^n \lambda_{t_0}^{(j)} \text{Po}^{(j)} w^{(j)}(\rho_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{t_0}^{(j+1)} \rho_{j+1} \text{Ki}^{(j+1)} = 0. \end{aligned}$$

б) процес тепловідведення шляхом кипіння. В такому разі умова теплообміну у змінних Кірхгофа на поверхні $\rho = \rho_{n+1}$ має вигляд (2.64). Беручи до уваги міркування в (2.68), з граничної умови (2.64) отримуємо алгебричне рівняння для визначення сталої інтегрування C_{12} :

$$\begin{aligned} & \lambda_{t_0}^{(n)} \rho_{n+1} \left[q_{\text{boil}}^{(n+1)} \left(T_n \left(\theta_n \Big|_{\rho=\rho_{n+1}} \right) \right) \right]_{C_{11}=\rho_1 q_{\text{кр}}^{(1)}(C_{12})} + \rho_1 q_{\text{кр}}^{(1)}(C_{12}) - \\ & - \sum_{j=1}^n \lambda_{t_0}^{(j)} \text{Po}^{(j)} w^{(j)}(\rho_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{t_0}^{(j+1)} \rho_{j+1} \text{Ki}^{(j+1)} = 0. \end{aligned}$$

в) процес тепловідведення шляхом випаровування. З лінеаризованої умови у змінних Кірхгофа (2.66) на поверхні $\rho = \rho_{n+1}$ отримано таке рівняння для визначення сталої інтегрування C_{12}

$$\lambda_{t0}^{(n)} \rho_{n+1} \left[q_{\text{evap}}^{(n+1)} \left(T_n \left(\theta_n \Big|_{\rho=\rho_{n+1}} \right) \right) \right]_{C_{11}=\rho_1 q_{\text{kp}}^{(1)}(C_{12})} + \rho_1 q_{\text{kp}}^{(1)}(C_{12}) - \sum_{j=1}^n \lambda_{t0}^{(j)} \text{Po}^{(j)} w^{(j)}(\rho_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{t0}^{(j+1)} \rho_{j+1} \text{Ki}^{(j+1)} = 0.$$

Нелінійна умова тепловідведення шляхом випаровування рідини у змінних Кірхгофа матиме вигляд (2.67), а рівняння для визначення сталої інтегрування C_{12} буде

$$\lambda_{t0}^{(n)} \rho_{n+1} \left[q_{\text{evap}}^{(n+1)} \left(T_n \left(\theta_n \Big|_{\rho=\rho_{n+1}} \right) \right) \right]_{C_{11}=\rho_1 q_{\text{kp}}^{(1)}(C_{12})} + \rho_1 q_{\text{kp}}^{(1)}(C_{12}) - \sum_{j=1}^n \lambda_{t0}^{(j)} \text{Po}^{(j)} w^{(j)}(\rho_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{t0}^{(j+1)} \rho_{j+1} \text{Ki}^{(j+1)} = 0.$$

4. Нехай через поверхню $\rho = \rho_1$ тепловідведення із середовищем сталої температури t_{c1} відбувається шляхом кипіння рідини, яка подається на обмежувальну поверхню циліндра. Тоді умова теплообміну, записана у змінних Кірхгофа для першої складової, матиме вигляд

$$\left[\frac{d\theta_1}{d\rho} - q_{\text{boil}}^{(1)}(T_1(\theta_1)) \right]_{\rho=\rho_1} = 0,$$

де

$$q_{\text{boil}}^{(1)}(T_1(\theta_1)) = \text{Bi}^{(1)}(T_1(\theta_1) - T_{c1}) + M_{\text{boil}}^{(1)}(T_1(\theta_1) - T_{\text{boil}}^{(n)})^3,$$

$$\text{Bi}^{(1)} = \alpha^{(1)} l_0 / \lambda_{t0}^{(1)},$$

$$M_{\text{boil}}^{(1)} = \frac{l_0 t_k^2 \mu_1 h_{\text{fg}}}{\lambda_{t0}^{(1)}} \left(\frac{g(\hat{\rho}_1 - \hat{\rho}_v)}{\sigma} \right)^{1/2} \left(\frac{C_{p,l}}{C_{s,f} h_{\text{fg}} \text{Pr}_1^n} \right)^3,$$

звідки отримуємо рівняння

$$C_{11}/\rho_1 - q_{\text{boil}}^{(1)}(T_1(\theta_1(\rho_1))) = 0,$$

а, звернувши увагу на міркування (2.68),

$$C_{11} = \rho_1 q_{\text{boil}}^{(1)}(C_{12}).$$

На поверхні $\rho = \rho_{n+1}$ можливі такі умови теплообміну:

а) кипіння рідини (2.64) в результаті чого рівняння для визначення сталої інтегрування C_{12} буде

$$\lambda_{t0}^{(n)} \rho_{n+1} \left[q_{\text{boil}}^{(n+1)} \left(T_n \left(\theta_n \Big|_{\rho=\rho_{n+1}} \right) \right) \right]_{C_{11}=\rho_1 q_{\text{boil}}^{(1)}(C_{12})} + \rho_1 q_{\text{boil}}^{(1)}(C_{12}) - \sum_{j=1}^n \lambda_{t0}^{(j)} \text{Po}^{(j)} w^{(j)}(\rho_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{t0}^{(j+1)} \rho_{j+1} \text{Ki}^{(j+1)} = 0.$$

б) випаровування рідини (лінеаризована умова) (2.66) в результаті чого рівняння для визначення сталої інтегрування C_{12} стане

$$\lambda_{t0}^{(n)} \rho_{n+1} \left[q_{\text{evap}}^{(n+1)} \left(T_n \left(\theta_n \Big|_{\rho=\rho_{n+1}} \right) \right) \right]_{C_{11}=\rho_1 q_{\text{boil}}^{(1)}(C_{12})} + \rho_1 q_{\text{boil}}^{(1)}(C_{12}) - \sum_{j=1}^n \lambda_{t0}^{(j)} \text{Po}^{(j)} w^{(j)}(\rho_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{t0}^{(j+1)} \rho_{j+1} \text{Ki}^{(j+1)} = 0.$$

Якщо на обмежувальній поверхні задано нелінеаризовану умову випаровування рідини (2.67), то стала C_{12} визначатиметься з рівняння

$$\lambda_{t0}^{(n)} \rho_{n+1} \left[\bar{q}_{\text{evap}}^{(n+1)} \left(T_n \left(\theta_n \Big|_{\rho=\rho_{n+1}} \right) \right) \right]_{C_{11}=\rho_1 q_{\text{boil}}^{(1)}(C_{12})} + \rho_1 q_{\text{boil}}^{(1)}(C_{12}) - \sum_{j=1}^n \lambda_{t0}^{(j)} \text{Po}^{(j)} w^{(j)}(\rho_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{t0}^{(j+1)} \rho_{j+1} \text{Ki}^{(j+1)} = 0.$$

5. Нехай через обидві зовнішні обмежувальні поверхні тепловідведення відбувається шляхом випаровування рідини. Лінеаризована умова на поверхні $\rho = \rho_1$ запишеться

$$\left[\frac{d\theta_1}{d\rho} - q_{\text{evap}}^{(1)}(T_1(\theta_1)) \right]_{\rho=\rho_1} = 0,$$

звідки отримуємо рівняння

$$C_{11}/\rho_1 - q_{\text{evap}}^{(1)}(T_1(\theta_1(\rho_1))) = 0,$$

а, звернувши увагу на міркування (2.68),

$$C_{11} = \rho_1 q_{\text{evap}}^{(1)}(C_{12}).$$

На поверхні $\rho = \rho_{n+1}$ лінеаризована умова випаровування матиме вигляд (2.66), а рівняння для визначення сталої інтегрування C_{12} буде

$$\lambda_{t0}^{(n)} \rho_{n+1} \left[q_{\text{evap}}^{(n+1)} \left(T_n \left(\theta_n \Big|_{\rho=\rho_{n+1}} \right) \right) \right]_{C_{11}=\rho_1 q_{\text{evap}}^{(1)}(C_{12})} + \rho_1 q_{\text{evap}}^{(1)}(C_{12}) - \sum_{j=1}^n \lambda_{t0}^{(j)} \text{Po}^{(j)} w^{(j)}(\rho_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{t0}^{(j+1)} \rho_{j+1} \text{Ki}^{(j+1)} = 0.$$

Нелінеаризована умова випаровування на поверхні $\rho = \rho_1$ має вигляд

$$\left[\frac{d\theta_1}{d\rho} - q_{\text{evap}}^{(1)}(T_1(\theta_1)) \right]_{\rho=\rho_1} = 0,$$

звідки

$$C_{11} = \rho_1 \bar{q}_{\text{evap}}^{(1)}(C_{12}),$$

а нелінеаризована – (2.67), звідки отримуємо рівняння для визначення сталої інтегрування C_{12}

$$\lambda_{t0}^{(n)} \rho_{n+1} \left[\bar{q}_{\text{evap}}^{(n+1)} \left(T_n \left(\theta_n \Big|_{\rho=\rho_{n+1}} \right) \right) \right]_{C_{11}=\rho_1 \bar{q}_{\text{evap}}^{(1)}(C_{12})} + \rho_1 \bar{q}_{\text{evap}}^{(1)}(C_{12}) - \sum_{j=1}^n \lambda_{t0}^{(j)} \text{Po}^{(j)} w^{(j)}(\rho_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{t0}^{(j+1)} \rho_{j+1} \text{Ki}^{(j+1)} = 0.$$

2.2.2. Нетермочутливі порожнисті циліндричні тіла

Нехай коефіцієнти теплопровідності складових циліндричних тіл не залежать від температури, тобто $\lambda_t^{(i)} = \lambda_{tN}^{(i)}$.

Стаціонарне температурне поле таких циліндрів описує система рівнянь теплопровідності

$$\lambda_{tN}^{(i)} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d^2 t_{iN}}{dr} \right) = -W^{(i)}(r), \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.69)$$

з умовами контакту сусідніх складових

$$t_{iN} \Big|_{r=r_{i+1}} = t_{i+1N} \Big|_{r=r_{i+1}}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (2.70)$$

$$\lambda_{iN}^{(i)} \frac{dt_{iN}}{dr} \Big|_{r=r_{i+1}} = \lambda_{iN}^{(i+1)} \frac{dt_{i+1N}}{dr} \Big|_{r=r_{i+1}} + q^{(i+1)}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (2.71)$$

Можливі варіанти умов на обмежувальних поверхнях розглянемо пізніше.

У безрозмірних величинах рівняння (2.69)-(2.71) мають вигляд

$$\frac{d^2 T_{iN}}{d\rho^2} = -\text{Po}_N^{(i)} w_*^{(i)}(\rho), \quad i = \overline{1, n},$$

$$T_{iN} \Big|_{\rho=\rho_{i+1}} = T_{i+1N} \Big|_{\rho=\rho_{i+1}}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (2.72)$$

$$K_{\lambda N}^{(i)} \frac{dT_{iN}}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_{i+1}} = \frac{dT_{i+1N}}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_{i+1}} + \text{Ki}_N^{(i+1)}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (2.73)$$

$$\text{де } \text{Po}_N^{(i)} = \text{Po}^{(i)} \frac{\lambda_{t0}^{(i)}}{\lambda_{tN}^{(i)}}, \quad \text{Ki}_N^{(i+1)} = \text{Ki}^{(i+1)} \frac{\lambda_{t0}^{(i+1)}}{\lambda_{tN}^{(i+1)}}.$$

Двічі проінтегрувавши рівняння теплопровідності (2.71), знаходимо, що

$$\frac{dT_{iN}}{d\rho} = \frac{1}{\rho} (\bar{C}_{i1} - \text{Po}_N^{(i)} w^{(i)}(\rho)),$$

$$T_{iN} = \bar{C}_{i1} \ln \frac{\rho}{\rho_i} + \bar{C}_{i2} - \text{Po}_N^{(i)} W^{(i)}(\rho), \quad (2.74)$$

$$\text{де } w^{(i)}(\rho) = \int_{\rho_i}^{\rho} w_*^{(i)}(\xi) d\xi, \quad W^{(i)}(\rho) = \int_{\rho_i}^{\rho} w^{(i)}(\xi) d\xi, \quad \bar{C}_{ij} \quad (i = \overline{1, n}, j = 1, 2) - \text{сталі інте-}$$

грування.

З умов (2.72) та (2.73) знаходимо, що

$$\bar{C}_{i1} = \frac{1}{\lambda_{tN}^{(i)}} \left(\lambda_{tN}^{(1)} \bar{C}_{11} - \sum_{j=1}^{i-1} (\lambda_{tN}^{(j)} \text{Po}_N^{(j)} w^{(j)}(\rho_{j+1}) + \lambda_{tN}^{(j+1)} \rho_{j+1} \text{Ki}_N^{(j+1)}) \right), \quad (2.75)$$

$$\bar{C}_{i2} = \bar{C}_{12} + \sum_{j=1}^{i-1} \left(\bar{C}_{j1} \ln \frac{\rho_{j+1}}{\rho_j} - \text{Po}_N^{(j)} W^{(j)}(\rho_{j+1}) \right), \quad i = \overline{2, n}. \quad (2.76)$$

У знайдених виразах (2.75) та (2.76) невідомими залишаються дві сталі інтегрування \bar{C}_{11} та \bar{C}_{12} , які визначимо з умов теплообміну на краях циліндричних тіл.

Розглянемо можливі її варіанти.

1. Нехай на обмежувальній поверхні $\rho = \rho_1$ підтримується стала температура T_{c1} , тобто

$$T_{1N} \Big|_{\rho=\rho_1} = T_{c1}.$$

В такому разі $\bar{C}_{12} = T_{c1}$.

На другій обмежувальній поверхні $\rho = \rho_{n+1}$ можуть бути задані

а) стала температура T_{cn} . Тоді крайова умова має вигляд

$$T_{nN} \Big|_{\rho=\rho_{n+1}} = T_{cn},$$

звідки отримуємо рівняння для визначення сталої \bar{C}_{11}

$$\begin{aligned} \bar{C}_{11} = & \left(\frac{(\rho_{n+1} - \rho_n) \lambda_{tN}^{(1)}}{\lambda_{tN}^{(n)}} + \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{-1} \left(\sum_{j=1}^{i-1} \text{Po}_N^{(j)} W^{(j)}(\rho_{j+1}) + \right. \\ & + \frac{(\rho_{n+1} - \rho_n)}{\lambda_{tN}^{(n)}} \sum_{j=1}^{i-1} (\lambda_{tN}^{(j)} \text{Po}_N^{(j)} w^{(j)}(\rho_{j+1}) + \lambda_{tN}^{(j+1)} \rho_{j+1} \text{Ki}_N^{(j+1)}) + \\ & \left. + \text{Po}_N^{(n)} W^{(n)}(\rho_{n+1}) + T_{cn} - T_{c1} \right). \end{aligned}$$

б) сталий тепловий потік $q^{(n+1)}$, а саме

$$\frac{dT_{nN}}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_{n+1}} = \text{Ki}_N^{(n+1)},$$

де $\text{Ki}_N^{(n+1)} = \text{Ki}_N^{(n+1)} \frac{\lambda_{t0}^{(n+1)}}{\lambda_{tN}^{(n+1)}}$. У цьому випадку стала \bar{C}_{11} має вигляд

$$\begin{aligned} \bar{C}_{11} = & \frac{1}{\lambda_{tN}^{(1)}} \left(\sum_{j=1}^n \lambda_{tN}^{(j)} \text{Po}_N^{(j)} w^{(j)}(\rho_{j+1}) + \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^{n-1} \rho_{j+1} \lambda_{tN}^{(j+1)} \text{Ki}_N^{(j+1)} + \lambda_{tN}^{(n)} \rho_{n+1} \text{Ki}_N^{(n+1)} \right). \end{aligned}$$

в) конвективно-променевий теплообмін із середовищем сталої температури T_{cn} , коефіцієнтом теплообміну $\alpha^{(n)}$, сталою Стефана-Больцмана $\sigma^{(n)}$ та ступенем чорноти $\varepsilon^{(n)}$ поверхні $\rho = \rho_{n+1}$, тобто

$$\left[\frac{dT_{nN}}{d\rho} + \text{Bi}_N^{(n)} (T_{nN} - T_{cn}) + \text{Sk}_N^{(n)} (T_{nN}^4 - T_{cn}^4) \right] \Big|_{\rho=\rho_{n+1}} = 0, \quad (2.77)$$

де $\text{Bi}_N^{(n)} = \text{Bi}_N^{(n)} \frac{\lambda_{t0}^{(n)}}{\lambda_{tN}^{(n)}}$, $\text{Sk}_N^{(n)} = \text{Sk}_N^{(n)} \frac{\lambda_{t0}^{(n)}}{\lambda_{tN}^{(n)}}$. Стала \bar{C}_{11} визначатиметься з такого

рівняння:

$$\lambda_{tN}^{(1)} \bar{C}_{11} + \lambda_{tN}^{(n)} \rho_{n+1} \left[q_{Nkp}^{(n+1)} \left(T_{nN} \Big|_{\rho=\rho_{n+1}} \right) \right]_{\bar{C}_{12}=T_{c1}} - \sum_{j=1}^n \lambda_{tN}^{(j)} \text{Po}_N^{(j)} \rho^{(j)} (z_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{tN}^{(j+1)} \rho_{j+1} \text{Ki}_N^{(j+1)} = 0,$$

де $q_{Nkp}^{(n+1)} (T_{nN}) = \text{Bi}_N^{(n)} (T_{nN} - T_{cn}) + \text{Sk}_N^{(n)} (T_{nN}^4 - T_{cn}^4)$,

Г) процес тепловідведення шляхом кипіння рідини на поверхні $\rho = \rho_{n+1}$

$$\left[\frac{dT_{nN}}{d\rho} + \text{Bi}_N^{(n)} (T_{nN} - T_{cn}) + M_{Nboil}^{(n)} (T_{nN} - T_{boil}^{(n)})^3 \right]_{\rho=\rho_{n+1}} = 0, \quad (2.78)$$

де $M_{Nboil}^{(n)} = M_{boil}^{(n)} \frac{\lambda_{t0}^{(n)}}{\lambda_{tN}^{(n)}}$, $\text{Bi}_N^{(n)} = \text{Bi}_N^{(n)} \frac{\lambda_{t0}^{(n)}}{\lambda_{tN}^{(n)}}$.

Рівняння для визначення сталої інтегрування C_{11} отримуємо, виходячи з умови (2.78)

$$\lambda_{tN}^{(1)} C_{11} + \lambda_{tN}^{(n)} \rho_{n+1} \left[q_{Nboil}^{(n+1)} \left(T_{nN} \Big|_{\rho=\rho_{n+1}} \right) \right]_{\bar{C}_{12}=T_{c1}} - \sum_{j=1}^n \lambda_{tN}^{(j)} \text{Po}_N^{(j)} w^{(j)} (\rho_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{tN}^{(j+1)} \rho_{n+1} \text{Ki}_N^{(j+1)} = 0,$$

де $q_{Nboil}^{(n+1)} (T_{nN}) = \text{Bi}_N^{(n)} (T_{nN} - T_{cn}) + M_{Nboil}^{(n)} (T_{nN} - T_{boil}^{(n)})^3$.

Д) лінеаризована умова випаровування рідини з поверхні $\rho = \rho_{n+1}$

$$\left[\frac{dT_{nN}}{d\rho} + \text{Bi}_N^{(n)} \left((T_{nN} - T_{cn}) + M_{evap}^{(n)} \left(\xi_1^{(n)} T_{nN} + \tau^{(n)} \right) \right) \right]_{\rho=\rho_{n+1}} = 0, \quad (2.79)$$

звідки сталу інтегрування \bar{C}_{11} визначаємо з рівняння

$$\lambda_{tN}^{(1)} \bar{C}_{11} + \lambda_{tN}^{(n)} \rho_{n+1} \left[q_{Nevap}^{(n+1)} \left(T_{nN} \Big|_{\rho=\rho_{n+1}} \right) \right]_{\bar{C}_{12}=T_{c1}} - \sum_{j=1}^n \lambda_{tN}^{(j)} \text{Po}_N^{(j)} w^{(j)} (\rho_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{tN}^{(j+1)} \rho_{j+1} \text{Ki}_N^{(j+1)} = 0,$$

де $q_{Nevap}^{(n+1)} (T_{nN}) = \text{Bi}_N^{(n)} \left((T_{nN} - T_{cn}) + M_{Nevap}^{(n)} \left(\xi_1^{(n)} T_{nN} + \tau^{(n)} \right) \right)$.

Якщо на поверхні $\rho = \rho_{n+1}$ задано нелінеаризовану умову випаровування

$$\left[\frac{dT_{nN}}{d\rho} + \text{Bi}_N^{(n)} \left((T_{nN} - T_{cn}) + \bar{M}_{\text{evap}}^{(n)} \left(\frac{p_{A,\text{sat}}}{T_{nN}} + \bar{\tau}^{(n)} \right) \right) \right]_{\rho=\rho_{n+1}} = 0, \quad (2.80)$$

то рівняння для визначення сталої інтегрування \bar{C}_{11} матиме вигляд

$$\lambda_{tN}^{(1)} \bar{C}_{11} + \lambda_{tN}^{(n)} \rho_{n+1} \left[\bar{q}_{N\text{evap}}^{(n+1)} \left(T_{nN} \Big|_{\rho=\rho_{n+1}} \right) \right]_{\bar{C}_{12}=T_{c1}} - \\ - \sum_{j=1}^n \lambda_{tN}^{(j)} \text{Po}_N^{(j)} w^{(j)}(\rho_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{tN}^{(j+1)} \rho_{j+1} \text{Ki}_N^{(j+1)} = 0,$$

де $q_{N\text{evap}}^{(n+1)}(T_{nN}) = \text{Bi}_N^{(n)} \left((T_{nN} - T_{cn}) + \bar{M}_{\text{evap}}^{(n)} \left(\xi_1^{(n)} T_{nN} + \tau^{(n)} \right) \right)$.

2. Нехай на обмежувальній поверхні $\rho = \rho_1$ заданий потік тепла q_1 , а саме

$$\frac{dT_{1N}}{d\rho} = -\text{Ki}_N^{(1)},$$

звідки $\bar{C}_{11} = -\rho_1 \text{Ki}_N^{(1)}$. На плоскій обмежувальній поверхні $\rho = \rho_{n+1}$ можуть бути задані:

а) умова конвективно-променевого теплообміну (2.77). Тоді рівняння для визначення сталої \bar{C}_{12} матиме вигляд

$$\lambda_{tN}^{(n)} \left[q_{N\text{kp}}^{(n+1)} \left(T_{nN} \Big|_{\rho=\rho_{n+1}} \right) \right]_{\bar{C}_{11}=-\rho_1 \text{Ki}_N^{(1)}} - \lambda_{tN}^{(1)} \text{Ki}_N^{(1)} - \\ - \sum_{j=1}^n \lambda_{tN}^{(j)} \text{Po}_N^{(j)} w^{(j)}(\rho_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{tN}^{(j+1)} \rho_{j+1} \text{Ki}_N^{(j+1)} = 0.$$

б) умова кипіння рідини (2.78). Сталу інтегрування \bar{C}_{12} знаходимо з рівняння

$$\lambda_{tN}^{(n)} \left[q_{N\text{boil}}^{(n+1)} \left(T_{nN} \Big|_{\rho=\rho_{n+1}} \right) \right]_{\bar{C}_{11}=-\rho_1 \text{Ki}_N^{(1)}} - \lambda_{tN}^{(1)} \text{Ki}_N^{(1)} - \\ - \sum_{j=1}^n \lambda_{tN}^{(j)} \text{Po}_N^{(j)} w^{(j)}(\rho_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{tN}^{(j+1)} \rho_{j+1} \text{Ki}_N^{(j+1)} = 0.$$

в) лінеаризована умова випаровування рідини з обмежувальної поверхні (2.79), з якої визначаємо сталу інтегрування \bar{C}_{12}

$$\lambda_{iN}^{(n)} \left[\mathbf{q}_{N\text{evap}}^{(n+1)} \left(T_{nN} \Big|_{\rho=\rho_{n+1}} \right) \right]_{\bar{C}_{11}=-\rho_1 \mathbf{Ki}^{(1)}} - \lambda_{iN}^{(1)} \mathbf{Ki}^{(1)} - \sum_{j=1}^n \lambda_{iN}^{(j)} \mathbf{Po}_N^{(j)} w^{(j)}(\rho_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{iN}^{(j+1)} \rho_{j+1} \mathbf{Ki}_N^{(j+1)} = 0.$$

Якщо задано нелінеаризовану умову випаровування рідини (2.79), то стала інтегрування \bar{C}_{12} визначатиметься з рівняння

$$\lambda_{iN}^{(n)} \left[\bar{\mathbf{q}}_{N\text{evap}}^{(n+1)} \left(T_{nN} \Big|_{\rho=\rho_{n+1}} \right) \right]_{\bar{C}_{11}=-\rho_1 \mathbf{Ki}^{(1)}} - \lambda_{iN}^{(1)} \mathbf{Ki}^{(1)} - \sum_{j=1}^n \lambda_{iN}^{(j)} \mathbf{Po}_N^{(j)} w^{(j)}(\rho_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{iN}^{(j+1)} \rho_{j+1} \mathbf{Ki}_N^{(j+1)} = 0.$$

3. Нехай через обмежувальну поверхню $\rho = \rho_1$ циліндричне тіло обмінюється теплом із зовнішнім середовищем сталої температури $T = T_{c1}$ шляхом конвективно-променевого теплообміну, тобто

$$\left[\frac{dT_{1N}}{d\rho} - \mathbf{q}_{N\text{kp}}^{(1)}(T_{1N}) \right]_{\rho=\rho_{n+1}} = 0,$$

де $\mathbf{q}_{N\text{kp}}^{(1)}(T_{1N}) = \mathbf{Bi}_N^{(1)}(T_{1N} - T_{c1}) + \mathbf{Sk}_N^{(1)}(T_{1N}^4 - T_{c1}^4)$. Тоді

$$\bar{C}_{11} = \rho_1 \mathbf{q}_{N\text{kp}}^{(1)}(\bar{C}_{12}).$$

На поверхні $z = z_{n+1}$ можуть бути задані:

а) умова конвективно-променевого теплообміну (2.77), з якої отримуємо рівняння для визначення сталої інтегрування \bar{C}_{12}

$$\lambda_{iN}^{(n)} \rho_{n+1} \left[\mathbf{q}_{N\text{kp}}^{(n+1)} \left(T_{nN} \Big|_{\rho=\rho_{n+1}} \right) \right]_{\bar{C}_{11}=\rho_1 \mathbf{q}_{N\text{kp}}^{(1)}(\bar{C}_{12})} + \lambda_{iN}^{(1)} \rho_1 \mathbf{q}_{N\text{kp}}^{(1)}(\bar{C}_{12}) - \sum_{j=1}^n \lambda_{iN}^{(j)} \mathbf{Po}_N^{(j)} w^{(j)}(\rho_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{iN}^{(j+1)} \rho_{j+1} \mathbf{Ki}_N^{(j+1)} = 0.$$

б) умова кипіння рідини (2.78). Сталу інтегрування \bar{C}_{12} знаходимо з рівняння

$$\lambda_{tN}^{(n)} \rho_{n+1} \left[q_{N\text{boil}}^{(n+1)} \left(T_{nN} \Big|_{\rho=\rho_{n+1}} \right) \right]_{\bar{C}_{11}=\rho_1 q_{N\text{kp}}^{(1)}(\bar{C}_{12})} + \lambda_{tN}^{(1)} \rho_1 q_{N\text{kp}}^{(1)}(\bar{C}_{12}) - \sum_{j=1}^n \lambda_{tN}^{(j)} \text{Po}_N^{(j)} w^{(j)}(\rho_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{tN}^{(j+1)} \rho_{j+1} \text{Ki}_N^{(j+1)} = 0.$$

в) лінеаризована умова випаровування рідини (2.79). Рівняння для визначення \bar{C}_{12} має вигляд

$$\lambda_{tN}^{(n)} \rho_{n+1} \left[q_{N\text{evap}}^{(n+1)} \left(T_{nN} \Big|_{\rho=\rho_{n+1}} \right) \right]_{\bar{C}_{11}=\rho_1 q_{N\text{kp}}^{(1)}(\bar{C}_{12})} + \lambda_{tN}^{(1)} \rho_1 q_{N\text{kp}}^{(1)}(\bar{C}_{12}) - \sum_{j=1}^n \lambda_{tN}^{(j)} \text{Po}_N^{(j)} w^{(j)}(\rho_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{tN}^{(j+1)} \rho_{j+1} \text{Ki}_N^{(j+1)} = 0.$$

Якщо задано нелінеаризовану умову випаровування рідини з обмежувальної поверхні (2.79), то стала \bar{C}_{12} визначатиметься з рівняння

$$\lambda_{tN}^{(n)} \rho_{n+1} \left[\bar{q}_{N\text{evap}}^{(n+1)} \left(T_{nN} \Big|_{\rho=\rho_{n+1}} \right) \right]_{\bar{C}_{11}=\rho_1 q_{N\text{kp}}^{(1)}(\bar{C}_{12})} + \lambda_{tN}^{(1)} \rho_1 q_{N\text{kp}}^{(1)}(\bar{C}_{12}) - \sum_{j=1}^n \lambda_{tN}^{(j)} \text{Po}_N^{(j)} w^{(j)}(\rho_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{tN}^{(j+1)} \rho_{j+1} \text{Ki}_N^{(j+1)} = 0.$$

4. Нехай на плоскій циліндричній поверхні $z = z_1$ тепловідведення відбувається шляхом кипіння рідини, тобто

$$\left[\frac{dT_{1N}}{d\rho} - q_{N\text{boil}}^{(1)}(T_{1N}) \right]_{\rho=\rho_1} = 0,$$

де $q_{N\text{boil}}^{(1)}(T_{1N}) = \text{Bi}_N^{(1)}(T_{1N} - T_{c1}) + \text{M}_N^{(1)}(T_{1N} - T_{\text{boil}}^{(n)})^3$. В такому разі

$$\bar{C}_{11} = \rho_1 q_{N\text{boil}}^{(1)}(\bar{C}_{12}).$$

На поверхні $\rho = \rho_{n+1}$ можуть бути задані:

а) умова кипіння рідини (2.78). Сталу інтегрування \bar{C}_{12} знаходимо з рівняння

$$\lambda_{tN}^{(n)} \rho_{n+1} \left[q_{N\text{boil}}^{(n+1)} \left(T_{nN} \Big|_{\rho=\rho_{n+1}} \right) \right]_{\bar{C}_{11}=\rho_1 q_{N\text{boil}}^{(1)}(\bar{C}_{12})} + \lambda_{tN}^{(1)} \rho_1 q_{N\text{boil}}^{(1)}(\bar{C}_{12}) - \sum_{j=1}^n \lambda_{tN}^{(j)} \text{Po}_N^{(j)} w^{(j)}(\rho_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{tN}^{(j+1)} \rho_{j+1} \text{Ki}_N^{(j+1)} = 0.$$

б) лінеаризована умова випаровування рідини (2.79). Рівняння для визначення \bar{C}_{12} має вигляд

$$\lambda_{tN}^{(n)} \rho_{n+1} \left[q_{N\text{evap}}^{(n+1)} \left(T_{nN} \Big|_{\rho=\rho_{n+1}} \right) \right]_{\bar{C}_{11}=\rho_1 q_{N\text{boil}}^{(1)}(\bar{C}_{12})} + \lambda_{tN}^{(1)} \rho_1 q_{N\text{boil}}^{(1)}(\bar{C}_{12}) - \sum_{j=1}^n \lambda_{tN}^{(j)} \text{Po}_N^{(j)} w^{(j)}(\rho_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{tN}^{(j+1)} \rho_{j+1} \text{Ki}_N^{(j+1)} = 0.$$

Якщо на обмежувальній поверхні задано нелінеаризовану умову випаровування рідини (2.79), то стала \bar{C}_{12} визначатиметься з рівняння

$$\lambda_{tN}^{(n)} \rho_{n+1} \left[\bar{q}_{N\text{evap}}^{(n+1)} \left(T_{nN} \Big|_{\rho=\rho_{n+1}} \right) \right]_{\bar{C}_{11}=\rho_1 q_{N\text{boil}}^{(1)}(\bar{C}_{12})} + \lambda_{tN}^{(1)} \rho_1 q_{N\text{boil}}^{(1)}(\bar{C}_{12}) - \sum_{j=1}^n \lambda_{tN}^{(j)} \text{Po}_N^{(j)} w^{(j)}(\rho_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{tN}^{(j+1)} \rho_{j+1} \text{Ki}_N^{(j+1)} = 0.$$

5. Нехай на обох зовнішніх обмежувальних поверхнях теплообмін відбувається шляхом випаровування рідини.

Лінеаризована умова на $\rho = \rho_1$ матиме вигляд

$$\left[\frac{dT_{1N}}{d\rho} - q_{N\text{evap}}^{(1)}(T_{1N}) \right]_{\rho=\rho_1} = 0,$$

звідки

$$\bar{C}_{11} = \rho_1 q_{N\text{evap}}^{(1)}(\bar{C}_{12}),$$

а на $\rho = \rho_{n+1}$ – вигляд (2.79). В такому разі стала інтегрування \bar{C}_{12} визначатиметься з рівняння

$$\lambda_{tN}^{(n)} \rho_{n+1} \left[q_{N\text{evap}}^{(n+1)} \left(T_{nN} \Big|_{\rho=\rho_{n+1}} \right) \right]_{\bar{C}_{11}=\rho_1 q_{N\text{evap}}^{(1)}(\bar{C}_{12})} + \lambda_{tN}^{(1)} \rho_1 q_{N\text{evap}}^{(1)}(\bar{C}_{12}) - \sum_{j=1}^n \lambda_{tN}^{(j)} \text{Po}_N^{(j)} w^{(j)}(\rho_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{tN}^{(j+1)} \rho_{j+1} \text{Ki}_N^{(j+1)} = 0.$$

Нелінеаризована умова випаровування на поверхні $\rho = \rho_1$ матиме вигляд

$$\left[\frac{dT_{1N}}{d\rho} - \bar{q}_{N\text{evap}}^{(1)}(T_{1N}) \right]_{\rho=\rho_1} = 0,$$

звідки

$$\bar{C}_{11} = \rho_1 \bar{q}_{N\text{evap}}^{(1)}(\bar{C}_{12}),$$

а, використавши нелінеаризовану умову (2.80), рівняння для визначення сталої \bar{C}_{12} матиме вигляд

$$\begin{aligned} & \lambda_{tN}^{(n)} \rho_{n+1} \left[\bar{q}_{N\text{evap}}^{(n+1)} \left(T_{nN} \Big|_{\rho=\rho_{n+1}} \right) \right]_{\bar{C}_{11}=\rho_1 \bar{q}_{N\text{evap}}^{(1)}(\bar{C}_{12})} + \lambda_{tN}^{(1)} \rho_1 \bar{q}_{N\text{evap}}^{(1)}(\bar{C}_{12}) - \\ & - \sum_{j=1}^n \lambda_{tN}^{(j)} \rho_{j+1} \text{Po}_N^{(j)} w^{(j)}(\rho_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{tN}^{(j+1)} \rho_{j+1} \text{Ki}_N^{(j+1)} = 0. \end{aligned}$$

2.3. Математичне моделювання термопружного стану циліндричних тіл, шаруватих за осью координатою

Визначимо температурні напруження [70] в шаруватих за осью координатою циліндричних тілах.

2.3.1. Термочутливі циліндричні тіла

Розглядається віднесений до декартової системи координат $(0, x, y, z) = (0, 1, 2, 3)$ n -шаровий за осью координатою z циліндр (рис.2.1.), вільний від навантажень з ізотропними ідеально контактуючими шарами. Температура такого циліндра змінюється лише по висоті циліндра.

У математичну модель [51] для визначення термопружного стану входять

- рівняння рівноваги

$$\hat{\sigma}_{ij,j} = 0, \quad (i, j = 1, 2, 3); \quad (2.81)$$

- рівняння сумісності деформацій

$$\varepsilon_{ijl} \varepsilon_{kmn} e_{lm,jn} = 0, \quad (2.82)$$

які у напруженнях мають вигляд

$$\varepsilon_{ijl} \varepsilon_{kmn} \left[\frac{1}{2\mu(t)} \left(\sigma_{lm} - \frac{\lambda(t)}{\beta(t)} \sigma_{pp} \delta_{lm} \right) + \Phi(t) \delta_{lm} \right]_{,jn} = 0. \quad (2.83)$$

Тут $\sigma_{pp} = \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}$ – сумарне напруження, $\mu(t) = \frac{E(t)}{2(1+\nu(t))}$,

$\lambda(t) = \frac{\nu(t)E(t)}{(1+\nu(t))(1-2\nu(t))}$ – залежні від температури параметри Ляме,

$\beta(t) = 3\lambda(t) + 2\mu(t)$; $\Phi(t) = \int_{t_p}^{t_i} \alpha_t(t) dt$ – суто тепла деформація; величина ε_{ijl}

дорівнює $+1(-1)$, якщо i, j, k утворюють парну (непарну) перестановку чисел 1, 2, 3;

$E^{(i)}(t_i), \nu^{(i)}(t_i), \alpha_t^{(i)}(t_i)$ – залежні від температури модулі пружності, коефіцієнти

Пуассона та температурні коефіцієнти лінійного розширення складових циліндра,

причому

$$\begin{aligned} \{E(\hat{z}, t), \nu(\hat{z}, t), \alpha_t(\hat{z}, t), \Phi(\hat{z}, t)\} = \\ = \begin{cases} \{E^{(1)}(t_1), \nu^{(1)}(t_1), \alpha_t^{(1)}(t_1), \Phi^{(1)}(t_1)\}, \hat{z}_1 \leq \hat{z} < \hat{z}_2, \\ \{E^{(2)}(t_2), \nu^{(2)}(t_2), \alpha_t^{(2)}(t_2), \Phi^{(2)}(t_2)\}, \hat{z}_2 \leq \hat{z} < \hat{z}_3, \\ \vdots \\ \{E^{(n)}(t_n), \nu^{(n)}(t_n), \alpha_t^{(n)}(t_n), \Phi^{(n)}(t_n)\}, \hat{z}_n \leq \hat{z} \leq \hat{z}_{n+1}, \end{cases} \end{aligned}$$

З огляду на це його термопружний стан визначають дві ненульові компоненти тензора напружень $\hat{\sigma}_{yy} = \hat{\sigma}_{zz} = \hat{\sigma}(\hat{z})$, при цьому $\hat{\sigma}_{xx} = \hat{\sigma}_{ij} = 0$ ($i, j = x, y, z, i \neq j$).

Ці напруження задовольняють умови

$$\int_{\hat{z}_1}^{\hat{z}_{n+1}} \hat{\sigma}(\hat{z}) d\hat{z} = 0, \quad \int_{\hat{z}_1}^{\hat{z}_{n+1}} \hat{z} \cdot \hat{\sigma}(\hat{z}) d\hat{z} = 0. \quad (2.84)$$

Побудова розв'язку. Рівняння рівноваги задовольняються тотожно, якщо напруження, $\hat{\sigma}_{\hat{x}\hat{x}} = \hat{\sigma}_{\hat{y}\hat{y}} = \hat{\sigma}(\hat{z}) \neq 0$, $\hat{\sigma}_{\hat{z}\hat{z}} = \hat{\sigma}_{\hat{x}\hat{y}} = \hat{\sigma}_{\hat{x}\hat{z}} = \hat{\sigma}_{\hat{y}\hat{z}} = 0$. Відповідно рівняння сумісності деформацій у напруженнях (2.83) будуть виконуватися, якщо

$$\frac{\partial^2}{\partial \hat{z}^2} \left(\frac{1-\nu(\hat{z})}{E(\hat{z})} \sigma(\hat{z}) + \Phi(\hat{z}, t) \right) = 0. \quad (2.85)$$

Інтегруючи двічі рівняння (2.85), отримаємо

$$\hat{\sigma}(\hat{z}) = \frac{E(\hat{z})}{1-\nu(\hat{z})} (C_1 + \hat{z}C_2) - \frac{E(\hat{z})}{1-\nu(\hat{z})} \Phi(\hat{z}, t), \quad (2.86)$$

де C_1, C_2 – сталі інтегрування, які знаходимо, задовольнивши умови (2.84)

$$C_1 = \frac{\hat{M}_t \hat{C} - \hat{N}_t \hat{A}}{\hat{B} \hat{C} - \hat{A}^2}, \quad C_2 = \frac{\hat{N}_t \hat{B} - \hat{M}_t \hat{A}}{\hat{B} \hat{C} - \hat{A}^2}.$$

Таким чином, формули для обчислення термопружного стану багатошарового циліндра мають вигляд [70]

$$\hat{\sigma}(\hat{z}) = \frac{E(\hat{z}, t)}{1 - \nu(\hat{z}, t)} \left(\frac{(\hat{A} \hat{N}_t - \hat{B} \hat{M}_t) \hat{z} + \hat{A} \hat{M}_t - \hat{C} \hat{N}_t}{\hat{A}^2 - \hat{B} \hat{C}} - \Phi(\hat{z}, t) \right), \quad (2.87)$$

де

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \sum_{i=1}^n \int_{\hat{z}_i}^{\hat{z}_{i+1}} \frac{\hat{z} E^{(i)}(t_i)}{1 - \nu^{(i)}(t_i)} d\hat{z}, & \hat{B} &= \sum_{i=1}^n \int_{\hat{z}_i}^{\hat{z}_{i+1}} \frac{E^{(i)}(t_i)}{1 - \nu^{(i)}(t_i)} d\hat{z}, & \hat{C} &= \sum_{i=1}^n \int_{\hat{z}_i}^{\hat{z}_{i+1}} \frac{\hat{z}^2 E^{(i)}(t_i)}{1 - \nu^{(i)}(t_i)} d\hat{z}, \\ \hat{N}_t &= \sum_{i=1}^n \int_{\hat{z}_i}^{\hat{z}_{i+1}} \frac{E^{(i)}(t_i) \Phi^{(i)}(t_i)}{1 - \nu^{(i)}(t_i)} d\hat{z}, & \hat{M}_t &= \sum_{i=1}^n \int_{\hat{z}_i}^{\hat{z}_{i+1}} \frac{\hat{z} E^{(i)}(t_i) \Phi^{(i)}(t_i)}{1 - \nu^{(i)}(t_i)} d\hat{z}, \\ \Phi(\hat{z}, t) &= \int_{t_p}^{t_i} \alpha_t^{(i)}(t) dt, \end{aligned}$$

Якщо термомеханічні характеристики складових подати у вигляді $\chi^{(i)}(t_i) = \chi_0^{(i)} \chi_i^*(T_i)$, де $\chi_0^{(i)}$ – розмірні величини, що дорівнюють значенню відповідної характеристики при температурі t_p (опорні значення), а величини $\chi_i^*(T_i)$ – безрозмірні функції від безрозмірних температур T_i , які описують залежність відповідних характеристик від температури, то

$$E^{(i)}(t_i) = E_0^{(i)} E_i^*(T_i), \quad \nu^{(i)}(t_i) = \nu_0^{(i)} \nu_i^*(T_i), \quad \alpha_t^{(i)}(t_i) = \alpha_{t_0}^{(i)} \alpha_{t_i}^*(T_i).$$

Для зручності подальших викладок введемо безрозмірні температури $T_i = t_i/t_k$, $T_p = t_p/t_k$ та безрозмірну координату $\tilde{z} = z/l_0$, де t_k та l_0 – вибрані нами відлікова температура та характерний розмір.

У результаті обезрозмірення формула (2.87) набуде вигляду

$$\sigma(z) = \frac{E(z, t)}{1 - \nu(z, t)} \left(\frac{(AN_t - BM_t)z + AM_t - CN_t}{A^2 - BC} - \Phi(z, t) \right), \quad (2.88)$$

де

$$\sigma(z) = \frac{\hat{\sigma}(\hat{z})}{E_0^{(1)} \alpha_{t0}^{(1)} t_k}, \quad \Phi_i^*(T_i) = (T_i - T_p) + \frac{k_\alpha^{(i)}}{2} (T_i - T_p)^2, \quad S_+(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi > 0, \\ 0, & \xi \leq 0, \end{cases}$$

$$\Phi(z, t) = \Phi_1^*(T_1) + \sum_{i=1}^n \left[\left(\Phi_{i+1}^*(T_{i+1}) \frac{\alpha_{t0}^{(i+1)}}{\alpha_{t0}^{(1)}} - \Phi_i^*(T_i) \frac{\alpha_{t0}^{(i)}}{\alpha_{t0}^{(1)}} \right) S_+(z - z_i) \right],$$

$$A = \sum_{i=1}^n \frac{E_0^{(i)}}{E_0^{(1)}} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{z E_i^*(T_i)}{1 - \nu^{(i)}(T_i)} dz, \quad B = \sum_{i=1}^n \frac{E_0^{(i)}}{E_0^{(1)}} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{E_i^*(T_i)}{1 - \nu^{(i)}(T_i)} dz,$$

$$C = \sum_{i=1}^n \frac{E_0^{(i)}}{E_0^{(1)}} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{z^2 E_i^*(T_i)}{1 - \nu^{(i)}(T_i)} dz, \quad N_t = \sum_{i=1}^n \frac{E_0^{(i)}}{E_0^{(1)}} \frac{\alpha_{t0}^{(i)}}{\alpha_{t0}^{(1)}} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{E_i^*(T_i) \Phi_i^*(T_i)}{1 - \nu^{(i)}(T_i)} dz,$$

$$M_t = \sum_{i=1}^n \frac{E_0^{(i)}}{E_0^{(1)}} \frac{\alpha_{t0}^{(i)}}{\alpha_{t0}^{(1)}} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{z E_i^*(T_i) \Phi_i^*(T_i)}{1 - \nu^{(i)}(T_i)} dz.$$

2.3.2. Нетермочутливі циліндричні тіла

Нехай механічні характеристики матеріалів складових циліндричних тіл не залежать від температури.

1. Розглянемо випадок, коли механічні характеристики матеріалів шарів рівні опорним значенням відповідних складових термочутливих. Тоді модулі Юнга, коефіцієнти Пуассона та теплового розширення складових таких циліндричних тіл будуть

$$E^{(i)} = E_0^{(i)}, \quad \nu^{(i)} = \nu_0^{(i)}, \quad \alpha_t^{(i)} = \alpha_{t0}^{(i)},$$

а формула для обчислення напружень набуде вигляду

$$\sigma(z) = \frac{E(z)}{1 - \nu(z)} \left(\frac{(AN_t - BM_t)z + AM_t - CN_t}{A^2 - BC} - \Phi(z) \right), \quad (2.89)$$

де

$$\{E(z), \nu(z), \Phi(z)\} = \left\{ \frac{E_0^{(i)}}{E_0^{(1)}}, \nu_0^{(i)}, \frac{\alpha_{t0}^{(i)}}{\alpha_{t0}^{(1)}} (T_{iN} - T_p) \right\}, \quad z_i \leq z < z_{i+1}, \quad i = \overline{1, n},$$

$$A = \sum_{i=1}^n \frac{E_0^{(i)}}{E_0^{(1)}} \frac{z_{i+1}^2 - z_i^2}{2(1 - \nu_0^{(i)})}, \quad B = \sum_{i=1}^n \frac{E_0^{(i)}}{E_0^{(1)}} \frac{z_{i+1} - z_i}{1 - \nu_0^{(i)}}, \quad C = \sum_{i=1}^n \frac{E_0^{(i)}}{E_0^{(1)}} \frac{z_{i+1}^3 - z_i^3}{3(1 - \nu_0^{(i)})},$$

$$N_t = \sum_{i=1}^n \frac{E_0^{(i)}}{E_0^{(1)}} \frac{\alpha_{t0}^{(i)}}{\alpha_{t0}^{(1)}} \frac{\bar{C}_{i1} (z_{i+1} - z_i)^2 / 2 + (\bar{C}_{i2} - T_p)(z_{i+1} - z_i)}{1 - \nu_0^{(i)}},$$

$$M_t = \sum_{i=1}^n \frac{E_0^{(i)}}{E_0^{(1)}} \frac{\alpha_{t0}^{(i)}}{\alpha_{t0}^{(1)}} \frac{\bar{C}_{i1} (z_{i+1} - z_i)^3 / 3 + (\bar{C}_{i2} - \bar{C}_{i1} z_i - T_p)(z_{i+1} - z_i)^2 / 2}{1 - \nu_0^{(i)}}.$$

2. Нехай механічні характеристики рівні середньоінтегральним значенням, тобто

$$\lambda_{tN}^{(i)} = \lambda_{tc}^{(i)} = \frac{1}{T_k - T_p} \int_{T_p}^{T_k} (\lambda_{t0}^{(i)} (1 + k_i (T - T_p))) dT = \lambda_{t0}^{(i)} \left(1 + \frac{k_i}{2} (T_k - T_p) \right), \quad i = \overline{1, n}.$$

$$\{v_N^{(i)}, \alpha_{tN}^{(i)}, E_N^{(i)}\} = \{v_c^{(i)}, \alpha_{tc}^{(i)}, E_c^{(i)}\} = \frac{1}{T_k - T_p} \int_{T_p}^{T_k} \{v^{(i)}(T), \alpha_t^{(i)}(T), E^{(i)}(T)\} dT, \quad i = \overline{1, n}.$$

У розподілі температури (2.35)

$$v_N^{(i)} = v_c^{(i)} \cdot \lambda_{t0}^{(i)} / \lambda_{tc}^{(i)}, \quad \rho_{oN}^{(i)} = \rho_{o}^{(i)} \cdot \lambda_{t0}^{(i)} / \lambda_{tc}^{(i)}, \quad K_{iN}^{(i)} = K_i^{(i)} \cdot \lambda_{t0}^{(i)} / \lambda_{tc}^{(i)}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Формули для визначення розподілу температурних напружень циліндра матимуть вигляд (2.81), у яких опорні значення механічних характеристик слід замінити на середньоінтегральні.

2.4. Математичне моделювання напружено-деформованого стану циліндричних тіл, шаруватих за радіальною координатою

Визначимо температурні напруження [79] в шаруватих за радіальною координатою циліндричних тілах.

2.4.1. Термочутливі порожнисті циліндричні тіла

Формулювання задачі. Нехай розглядуваний n -шаровий циліндр з ідеальним механічним контактом між шарами і відомим радіальним розподілом температури, визначеним з відповідної задачі теплопровідності, перебуває під дією заданих сталих нормальних навантажень на його зовнішніх поверхнях. Вважаємо,

що механічні характеристики (модулі пружності, коефіцієнти Пуассона та температурні коефіцієнти лінійного розширення) складових циліндра є функціями від температури (термочутливі матеріали).

Основними рівняннями, які описують термопружний стан такого циліндра, будуть [79]:

– рівняння рівноваги

$$\frac{d}{d\rho}(\rho^2 \sigma_r^{(i)}) = \rho(\sigma^{(i)} - \rho f^{(i)}), \quad i = 1, \dots, n; \quad (2.90)$$

– зв'язки між компонентами тензорів деформацій і напружень

$$\begin{aligned} E^{(i)} e_r^{(i)} &= \sigma_r^{(i)} - \nu^{(i)} (\sigma_\phi^{(i)} + \sigma_z^{(i)}) + E^{(i)} \Phi^{(i)} (T^{(i)}) = \\ &= (1 + \nu^{(i)}) (\sigma_r^{(i)} - \nu^{(i)} \sigma^{(i)}) - \nu^{(i)} E^{(i)} e_z + (1 + \nu^{(i)}) E^{(i)} \Phi^{(i)} (T^{(i)}), \\ E^{(i)} e_\phi^{(i)} &= \sigma_\phi^{(i)} - \nu^{(i)} (\sigma_r^{(i)} + \sigma_z^{(i)}) + E^{(i)} \Phi^{(i)} (T^{(i)}) = \\ &= (1 + \nu^{(i)}) ((1 - \nu^{(i)}) \sigma^{(i)} - \sigma_r^{(i)}) - \nu^{(i)} E^{(i)} e_z + \\ &\quad + (1 + \nu^{(i)}) E^{(i)} \Phi^{(i)} (T^{(i)}), \\ E^{(i)} e_z &= \sigma_z^{(i)} - \nu^{(i)} (\sigma_r^{(i)} + \sigma_\phi^{(i)}) + E^{(i)} \Phi^{(i)} (T^{(i)}) = \\ &= \sigma_z^{(i)} - \nu^{(i)} \sigma^{(i)} + E^{(i)} \Phi^{(i)} (T^{(i)}), \quad i = 1, \dots, n; \end{aligned} \quad (2.91)$$

– рівняння сумісності

$$\rho \frac{de_\phi^{(i)}}{d\rho} = e_r^{(i)} - e_\phi^{(i)},$$

які у напруженнях мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1 - (\nu^{(i)})^2}{E^{(i)}} \sigma^{(i)} - \nu^{(i)} e_z + (1 + \nu^{(i)}) \Phi^{(i)} (T^{(i)}) \right) = \\ = \sigma_r^{(i)} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1 + \nu^{(i)}}{E^{(i)}} \right) - f^{(i)} \frac{1 + \nu^{(i)}}{E^{(i)}}; \end{aligned} \quad (2.92)$$

– умови на обмежувальних поверхнях і в перерізі

$$\sigma_r^{(1)}(\rho_1) = -p_1, \quad \sigma_r^{(n)}(\rho_{n+1}) = -p_2, \quad 2\pi \int_{\rho_1}^{\rho_{n+1}} \eta \sigma_z(\eta) d\eta = p; \quad (2.93)$$

– умови ідеального механічного контакту сусідніх шарів

$$u_r^{(i+1)}(\rho_{i+1}) = u_r^{(i)}(\rho_{i+1}), \quad \sigma_r^{(i+1)}(\rho_{i+1}) = \sigma_r^{(i)}(\rho_{i+1}), \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (2.94)$$

У вищеписаних рівняннях і співвідношеннях $f^{(i)}$ – масові сили, залежні від радіальної координати, $\Phi^{(i)}(T^{(i)}) = t_0 \int_{T_p}^{T^{(i)}} \alpha^{(i)}(T^{(i)}) dT^{(i)}$ – чисто теплова деформація; $\sigma_r^{(i)}$, $\sigma_\phi^{(i)}$, $\sigma_z^{(i)}$ – радіальна, колова та осьова компоненти тензора напружень; $e_r^{(i)}$, $e_\phi^{(i)}$ – радіальна та колова компоненти тензора деформацій у i -му шарі відповідно; e_z – стала осьова деформація циліндра; $\sigma^{(i)} = \sigma_r^{(i)} + \sigma_\phi^{(i)}$; $u_r^{(i)}$ – радіальна компонента вектора переміщень i -го шару, віднесена до характерного розміру l_0 ; p_1 , p_2 – задані сталі тиски (напруження) на внутрішній ($\rho = \rho_1$) і зовнішній ($\rho = \rho_{n+1}$) поверхнях циліндра; p – задане на торцях циліндра зусилля, що діє уздовж його осі.

Побудова розв'язку задачі термопружності передбачає інтегрування у межах від ρ_i до ρ рівнянь рівноваги (2.90), та рівнянь сумісності у напруженнях (2.92), використовуючи при цьому перші дві умови (2.93) та другі умови (2.94). В результаті отримуємо $2n$ інтегральних рівнянь, які містять невідому сталу осьову деформацію e_z та $(n-1)$ -е сумарне напруження $\sigma^{(i)}(\rho_i)$ ($i = 2, \dots, n$). Останні, використовуючи перші з умов (2.94), виражаємо через сумарне напруження на поверхні $\rho = \rho_1$.

Розв'язання отриманих інтегральних рівнянь здійснюємо, використовуючи результати роботи [79]. Вважаємо, що порожнистий циліндр складається лише з тонких шарів, тобто таких, для яких при обчисленні присутніх інтегралів, які містять у підінтегральних виразах невідомі напруження, з заданою нами точністю справедлива формула трапецій

$$\int_{\rho_i}^{\rho} Y(\eta) d\eta = \frac{\rho - \rho_i}{2} (Y(\rho) + Y(\rho_i)),$$

Як результат, для кожного шару отримуємо систему із двох алгебричних рівнянь, розв'язавши які знаходимо вирази для визначення сумарних та радіальних напружень, через які визначаємо решту компонент напружено-деформованого стану:

$$\sigma_{\varphi}^{(i)} = \sigma^{(i)} - \sigma_z^{(i)}, \quad \sigma_z^{(i)} = \nu^{(i)} \sigma^{(i)} + E^{(i)} \left(e_z - \Phi^{(i)}(T^{(i)}) \right), \quad u_r^{(i)} = \rho e_{\varphi}^{(i)},$$

а $e_r^{(i)}$ і $e_{\varphi}^{(i)}$ – за формулами (2.91).

Для визначення невідомих сталих e_z та $\sigma^{(1)}(\rho_1)$, що входять в отримані вирази для напружень, використовуємо третьою з умов (2.92) та отриману під час інтегрування рівнянь рівноваги інтегральну умову

$$\rho_1^2 p_1 - \rho_{n+1}^2 p_2 = \sum_{k=1}^n \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta \sigma^{(k)}(\eta) d\eta. \quad (2.94)$$

Якщо циліндр складається з одного і того ж термочутливого матеріалу [105], то розглядаємо його як складений із n тонких шарів, матеріали яких мають одні і ті ж термомеханічні характеристики.

Якщо ж циліндр містить тонкі і товсті шари [79], то кожному із товстих шарів ставимо у відповідність певну кількість тонких з одного і того ж матеріалу. Перевірку достатності розбиття товстих шарів на тонкі забезпечує виконання інтегральної умови (2.94).

Основні формули. Радіальні $\sigma_r^{(i)}$, колові $\sigma_{\varphi}^{(i)}$ та осьові $\sigma_z^{(i)}$ напруження, радіальні $e_r^{(i)}$ та колові $e_{\varphi}^{(i)}$ деформації, а також радіальні переміщення $u_r^{(i)}$ без врахування силових навантажень обчислюємо за формулами:

$$\sigma_r^{(i)}(\rho) = \gamma_{1r}^{(i)}(\rho) \sigma^{(1)}(\rho_1) + \gamma_{2r}^{(i)}(\rho) e_z + \gamma_{0r}^{(i)}(\rho), \quad (2.95)$$

$$\sigma_{\varphi}^{(i)}(\rho) = \sigma^{(i)}(\rho) - \sigma_r^{(i)}(\rho), \quad (2.96)$$

$$\sigma_z^{(i)}(\rho) = E^{(i)} e_z + \nu^{(i)} \sigma^{(i)}(\rho) - E^{(i)} \Phi_i(T_i), \quad (2.97)$$

$$e_r^{(i)}(\rho) = \left(\sigma_r^{(i)}(\rho) - \nu^{(i)} \left(\sigma_{\varphi}^{(i)}(\rho) + \sigma_z^{(i)}(\rho) \right) + E^{(i)} \Phi_i(T_i) \right) / E_i, \quad (2.98)$$

$$e_{\varphi}^{(i)}(\rho) = \left(\sigma_{\varphi}^{(i)}(\rho) - \nu^{(i)} \left(\sigma_r^{(i)}(\rho) + \sigma_z^{(i)}(\rho) \right) + E^{(i)} \Phi_i(T_i) \right) / E_i, \quad (2.99)$$

$$u_r^{(i)}(\rho) = \rho \cdot e_{\varphi}^{(i)}(\rho), \quad (2.100)$$

де $\sigma^{(i)} = \sigma_r^{(i)} + \sigma_{\varphi}^{(i)}$ – сумарні напруження, які обчислюються за формулою

$$\sigma^{(i)}(\rho) = \gamma_{10}^{(i)}(\rho)\sigma^{(1)}(\rho_1) + \gamma_{20}^{(i)}(\rho)e_z + \gamma_{00}^{(i)}(\rho), \quad (2.101)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{10}^{(i)}(\rho) &= \frac{1}{\psi^{(i)}(\rho)} \left((1 - \delta_{1i}) \gamma_{1r}^{(i-1)}(\rho_i) \chi_2^{(i)}(\rho) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1 - (v^{(1)}(\rho_1))^2}{E^{(1)}(\rho_1)} + (1 - \delta_{1i}) \sum_{k=1}^{i-1} \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \gamma_{1r}^{(k)}(\eta) (\varphi^{(k)}(\eta))' d\eta + \beta^{(k)} \gamma_{1r}^{(k)}(\rho_{k+1}) \right) \chi_1^{(i)}(\rho) \right), \\ \gamma_{20}^{(i)}(\rho) &= \frac{1}{\psi^{(i)}(\rho)} \left(v^{(i)}(\rho) - v^{(i)}(\rho_i) + (1 - \delta_{1i}) \gamma_{2r}^{(i-1)}(\rho_i) \chi_2^{(i)}(\rho) + \right. \\ &\quad \left. + \left(v^{(i)}(\rho_i) - v^{(1)}(\rho_1) + (1 - \delta_{1i}) \sum_{k=1}^{i-1} \left(\int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \gamma_{2r}^{(k)}(\eta) (\varphi^{(k)}(\eta))' d\eta + \beta^{(k)} \gamma_{2r}^{(k)}(\rho_{k+1}) \right) \right) \chi_1^{(i)}(\rho) \right), \\ \gamma_{00}^{(i)}(\rho) &= \frac{1}{\psi^{(i)}(\rho)} \left((-\delta_{1i} p_1 + (1 - \delta_{1i}) \gamma_{0r}^{(i-1)}(\rho_i)) \chi_2^{(i)}(\rho) - F^{(i)}(\rho) + F^{(i)}(\rho_i) + \right. \\ &\quad \left. + \left((1 - \delta_{1i}) \sum_{k=1}^{i-1} \left(\int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \gamma_{0r}^{(k)}(\eta) (\varphi^{(k)}(\eta))' d\eta + \beta^{(k)} \gamma_{0r}^{(k)}(\rho_{k+1}) \right) - F^{(i)}(\rho_i) \right) \chi_1^{(i)}(\rho) \right), \\ \gamma_{1r}^{(i)}(\rho) &= \frac{1}{\rho^2} \left((1 - \delta_{1i}) \rho_i^2 \gamma_{1r}^{(i-1)}(\rho_i) + \int_{\rho_i}^{\rho} \eta \gamma_{10}^{(i)}(\eta) d\eta \right), \\ \gamma_{2r}^{(i)}(\rho) &= \frac{1}{\rho^2} \left((1 - \delta_{1i}) \rho_i^2 \gamma_{2r}^{(i-1)}(\rho_i) + \int_{\rho_i}^{\rho} \eta \gamma_{20}^{(i)}(\eta) d\eta \right), \\ \gamma_{0r}^{(i)}(\rho) &= \frac{1}{\rho^2} \left(-\rho_1^2 p_1 \delta_{1i} + (1 - \delta_{1i}) \rho_i^2 \gamma_{0r}^{(i-1)}(\rho_i) + \int_{\rho_i}^{\rho} \eta \gamma_{00}^{(i)}(\eta) d\eta \right), \\ \chi_1^{(i)}(\rho) &= 1 + ((\rho - \rho_i)/2)^2 (\varphi^{(i)}(\rho))' \rho_i E^{(i)}(\rho_i) / \left(\rho^2 (1 - (v^{(i)}(\rho_i))^2) \right), \\ \chi_2^{(i)}(\rho) &= ((\rho - \rho_i)/2) \left((\varphi^{(i)}(\rho))' \rho_i^2 / \rho^2 + (\varphi^{(i)}(\rho_i))' \right), \\ \psi^{(i)}(\rho) &= \left(1 - (v^{(i)}(\rho_i))^2 \right) / E^{(i)}(\rho_i) - ((\rho - \rho_i)/2)^2 (\varphi^{(i)}(\rho))' / \rho, \\ \varphi^{(i)}(\rho) &= \frac{1 - v^{(i)}(\rho)}{E^{(i)}(\rho)}, \quad (\varphi^{(i)}(\rho))' = \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1 - v^{(i)}(\rho)}{E^{(i)}(\rho)} \right), \\ \beta^{(i)} &= \varphi^{(i+1)}(\rho_{i+1}) - \varphi^{(i)}(\rho_{i+1}), \\ F^{(i)}(\rho) &= (1 + v^{(i)}(\rho)) \Phi^{(i)}(T_i(\rho)) - (1 + v^{(1)}(\rho_1)) \Phi^{(1)}(T_1(\rho_1)), \end{aligned}$$

$$\Phi^{(i)}(T_i) = t_0 \int_{T_p}^{T_i} \alpha_t^{(i)}(T_i) dT_i,$$

$$\sigma^{(1)}(\rho_1) = \frac{c_1 d_{22} - c_2 d_{12}}{d_{11} d_{22} - d_{21} d_{12}}, \quad e_z = \frac{c_2 d_{11} - c_1 d_{21}}{d_{11} d_{22} - d_{21} d_{12}},$$

$$d_{11} = \sum_{k=1}^n \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta \gamma_{10}^{(k)}(\eta) d\eta, \quad d_{12} = \sum_{k=1}^n \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta \gamma_{20}^{(k)}(\eta) d\eta,$$

$$d_{21} = \sum_{k=1}^n \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta v_k(\eta) \gamma_{10}^{(k)}(\eta) d\eta, \quad d_{22} = \sum_{k=1}^n \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta (v^{(k)}(\eta) \gamma_{20}^{(k)}(\eta) + E^{(k)}(\eta)) d\eta,$$

$$c_1 = \rho_1^2 p_1 - \rho_{n+1}^2 p_2 + \sum_{k=1}^n \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta \gamma_{00}^{(k)}(\eta) d\eta,$$

$$c_2 = \frac{p}{2\pi} + \sum_{k=1}^n \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta (E^{(k)}(\eta) \Phi^{(k)}(T_k(\eta)) - v^{(k)}(\eta) \gamma_{00}^{(k)}(\eta)) d\eta,$$

де $\delta_{ik} = \begin{cases} 1, i = k, \\ 0, i \neq k, \end{cases}$ – символ Кронекера.

2.4.1. Нетермочутливі порожнисті циліндричні тіла

1. Розглянемо випадок, коли термомеханічні характеристики складових нетермочутливого циліндра (їх помічаємо індексом N) дорівнюють опорним значенням відповідних складових термочутливого. Тоді розподіл температури матиме вигляд (2.170), де $\lambda_t^{(i)} = \lambda_{t0}^{(i)}$, $i = \overline{1,3}$. Коефіцієнти Пуассона, теплового розширення та модулі Юнга складових циліндра в такому разі будуть

$$v^{(i)} = v_0^{(i)}, \quad \alpha_t^{(i)} = \alpha_{t0}^{(i)}, \quad E^{(i)} = E_0^{(i)}, \quad i = \overline{1,n},$$

а формули для обчислення компонент термопружного стану набудуть вигляду

$$\bar{\sigma}^{(i)}(\rho) = \bar{\gamma}_{10}^{(i)}(\rho) \bar{\sigma}^{(1)}(\rho_1) + \bar{\gamma}_{20}^{(i)}(\rho) \bar{e}_z + \bar{\gamma}_{00}^{(i)}(\rho), \quad (2.102)$$

$$\bar{\sigma}_r^{(i)}(\rho) = \bar{\gamma}_{1r}^{(i)}(\rho) \bar{\sigma}^{(1)}(\rho_1) + \bar{\gamma}_{2r}^{(i)}(\rho) e_z + \bar{\gamma}_{0r}^{(i)}(\rho), \quad (2.103)$$

$$\bar{\sigma}_\phi^{(i)}(\rho) = \bar{\sigma}^{(i)}(\rho) - \bar{\sigma}_r^{(i)}(\rho), \quad (2.104)$$

$$\bar{\sigma}_z^{(i)}(\rho) = E_0^{(i)} \bar{e}_z + v_0^{(i)} \bar{\sigma}^{(i)}(\rho) - E_0^{(i)} \bar{\Phi}^{(i)}(T_{iN}), \quad (2.105)$$

$$\bar{e}_r^{(i)}(\rho) = \left(\bar{\sigma}_r^{(i)}(\rho) - v_0^{(i)} \left(\bar{\sigma}_\phi^{(i)}(\rho) + \bar{\sigma}_z^{(i)}(\rho) \right) + E_0^{(i)} \bar{\Phi}^{(i)}(T_{iN}) \right) / E_0^{(i)}, \quad (2.106)$$

$$\bar{e}_\phi^{(i)}(\rho) = \left(\bar{\sigma}_\phi^{(i)}(\rho) - \bar{v}_0^{(i)} \left(\bar{\sigma}_r^{(i)}(\rho) + \bar{\sigma}_z^{(i)}(\rho) \right) + E_0^{(i)} \bar{\Phi}^{(i)}(T_{iN}) \right) / E_0^{(i)}, \quad (2.107)$$

$$\bar{u}_r^{(i)}(\rho) = \rho \cdot \bar{e}_\phi^{(i)}(\rho), \quad (2.108)$$

$$\bar{\gamma}_{10}^{(i)}(\rho) = \left(\left(1 - (v_0^{(1)})^2 \right) / E_0^{(1)} + (1 - \delta_{1i}) \sum_{k=1}^{i-1} \bar{\beta}^{(k)} \bar{\gamma}_{1r}^{(k)}(\rho_{k+1}) \right) / \bar{\psi}^{(i)}$$

$$\bar{\gamma}_{20}^{(i)}(\rho) = \left(v_0^{(i)} - v_0^{(1)} + (1 - \delta_{1i}) \sum_{k=1}^{i-1} \bar{\beta}^{(k)} \bar{\gamma}_{2r}^{(k)}(\rho_{k+1}) \right) / \bar{\psi}^{(i)},$$

$$\bar{\gamma}_{00}^{(i)}(\rho) = \left((1 - \delta_{1i}) \sum_{k=1}^{i-1} \bar{\beta}^{(k)} \bar{\gamma}_{0r}^{(k)}(\rho_{k+1}) - \bar{F}^{(i)}(\rho) \right) / \bar{\psi}^{(i)},$$

$$\bar{\gamma}_{1r}^{(i)}(\rho) = \left((1 - \delta_{1i}) \rho_i^2 \bar{\gamma}_{1r}^{(i-1)}(\rho_i) + \int_{\rho_i}^{\rho} \eta \bar{\gamma}_{10}^{(i)}(\eta) d\eta \right) / \rho^2,$$

$$\bar{\gamma}_{2r}^{(i)}(\rho) = \left((1 - \delta_{1i}) \rho_i^2 \bar{\gamma}_{2r}^{(i-1)}(\rho_i) + \int_{\rho_i}^{\rho} \eta \bar{\gamma}_{20}^{(i)}(\eta) d\eta \right) / \rho^2,$$

$$\bar{\gamma}_{0r}^{(i)}(\rho) = \left(-\rho_1^2 p_1 \delta_{1i} + (1 - \delta_{1i}) \rho_i^2 \bar{\gamma}_{0r}^{(i-1)}(\rho_i) + \int_{\rho_i}^{\rho} \eta \bar{\gamma}_{00}^{(i)}(\eta) d\eta \right) / \rho^2,$$

$$\bar{\psi}^{(i)} = \left(1 - (v_0^{(i)})^2 \right) / E_0^{(i)}, \quad \bar{\phi}^{(i)} = (1 - v_0^{(i)}) / E_0^{(i)}, \quad \bar{\beta}^{(i)} = \bar{\phi}^{(i+1)} - \bar{\phi}^{(i)},$$

$$\bar{F}^{(i)}(\rho) = (1 + v_0^{(i)}) \bar{\Phi}^{(i)}(T_{iN}(\rho)) - (1 + v_0^{(i)}(\rho_1)) \bar{\Phi}^{(i)}(T_{1N}(\rho_1)),$$

$$\bar{\Phi}^{(i)}(T_{iN}) = t_0 \alpha_{t0}^{(i)}(T_{iN} - T_p).$$

$$\bar{\sigma}^{(1)}(\rho_1) = \frac{\bar{c}_1 \bar{d}_{22N} - \bar{c}_{2N} \bar{d}_{12N}}{\bar{d}_{11N} \bar{d}_{22N} - \bar{d}_{21N} \bar{d}_{12N}}, \quad \bar{e}_z = \frac{\bar{c}_{2N} \bar{d}_{11N} - \bar{c}_{1N} \bar{d}_{21N}}{\bar{d}_{11N} \bar{d}_{22N} - \bar{d}_{21N} \bar{d}_{12N}},$$

$$\bar{d}_{11} = \sum_{k=1}^n \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta \bar{\gamma}_{10}^{(k)}(\eta) d\eta, \quad \bar{d}_{12} = \sum_{k=1}^n \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta \bar{\gamma}_{20}^{(k)}(\eta) d\eta,$$

$$\bar{d}_{21} = \sum_{k=1}^n \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta v_0^{(k)} \bar{\gamma}_{10}^{(k)}(\eta) d\eta, \quad \bar{d}_{22} = \sum_{k=1}^n \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta (v_0^{(k)} \bar{\gamma}_{20}^{(k)}(\eta) + E_0^{(k)}) d\eta,$$

$$\bar{c}_1 = \rho_1^2 p_1 - \rho_{n+1}^2 p_2 + \sum_{k=1}^n \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta \bar{\gamma}_{00}^{(k)}(\eta) d\eta,$$

$$\bar{c}_2 = \frac{p}{2\pi} + \sum_{k=1}^n \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta (E_0^{(k)} \bar{\Phi}^{(k)}(T_{kN}(\eta)) - v_0^{(k)} \bar{\gamma}_{00}^{(k)}(\eta)) d\eta.$$

2. Нехай механічні характеристики рівні середньоінтегральним значенням, тобто

$$\begin{aligned}\lambda_t^{(i)} &= \lambda_{tc}^{(i)} = \frac{1}{T_k - T_p} \int_{T_p}^{T_k} \left(\lambda_{t0}^{(i)} \left(1 + k_i (T - T_p) \right) \right) dT = \\ &= \lambda_{t0}^{(i)} \left(1 + \frac{k_i}{2} (T_k - T_p) \right), \quad i = \overline{1, n}, \\ \{v^{(i)}, \alpha_t^{(i)}, E^{(i)}\} &= \{v_c^{(i)}, \alpha_{tc}^{(i)}, E_c^{(i)}\} = \\ &= \frac{1}{T_k - T_p} \int_{T_p}^{T_k} \{v^{(i)}(T), \alpha_t^{(i)}(T), E^{(i)}(T)\} dT, \quad i = \overline{1, n}.\end{aligned}$$

При цьому у розподілі температури (2.170)

$$\begin{aligned}Bi_N^{(i)} &= Bi^{(i)} \cdot \lambda_{t0}^{(i)} / \lambda_{tc}^{(i)}, \quad Po_N^{(i)} = Po^{(i)} \cdot \lambda_{t0}^{(i)} / \lambda_{tc}^{(i)}, \\ Ki_N^{(i)} &= Ki^{(i)} \cdot \lambda_{t0}^{(i)} / \lambda_{tc}^{(i)}, \quad i = \overline{1, n}.\end{aligned}$$

Формули для визначення компонент напружено-деформованого стану циліндра матимуть вигляд (2.92)-(2.97), у яких опорні значення механічних характеристик слід замінити на середньоінтегральні.

2.5. Висновки до розділу

Сформульовано нелінійні математичні моделі розподілів температур багатошарових за осьовою координатою скінченних та багатошарових за радіальною координатою порожнистих безмежних термочутливих та нетермочутливих циліндрів. Всередині різних за товщиною шарів, виготовлених з різних матеріалів, (коефіцієнти теплопровідності залежать від температури), таких циліндрів наявні джерела тепла, розподілені за певним законом, а на межах їх дотику – тепловиділення, що спричиняють сталі потоки тепла. На обмежувальних поверхнях циліндрів можуть бути задані всеможливі комбінації умов теплообміну (сталі температури та потоки, конвективний, променевий чи конвективно-променевий теплообмін).

Для розв'язування таких нелінійних задач теплопровідності використано методику, яка передбачає обезрозмірення математичних моделей, застосування пе-

ретворення Кірхгофа, апроксимацію експериментально заданих залежностей коефіцієнтів теплопровідності від температури, розв'язання отриманої задачі на змінні Кірхгофа та здійснення оберненого перетворення Кірхгофа. Дана методика цікава тим, що дозволяє отримати аналітичний розв'язок задачі визначення температурного поля, який містить одну невідому сталу, яка визначається з відповідного алгебричного рівняння.

Вищевказану методику застосовано до розв'язування задач теплопровідності у випадках задання на обмежувальних поверхнях циліндрів умов тепловідведення шляхом кипіння (коли температура на поверхні перевищує критичну, а утворений шар рідини має набагато меншу товщину, ніж товщина циліндра) чи випаровування (коли температура на поверхні перевищує критичну, але не є достатньою для того, щоб почалось кипіння) рідини з поверхонь.

Показано, що вищеописана методика знаходження температурного поля не вимагає додаткової лінеаризації умови кипіння чи випаровування, що дозволяє отримати точний розв'язок задачі теплопровідності.

Сформульовано математичні моделі та наведено методику аналітичного визначення компонент напружено-деформованого стану (напруження, деформації та переміщення) у вищеописаних багатошарових циліндрах за врахування залежностей механічних характеристик (коефіцієнтів Пуассона, модулів Юнга та температурних коефіцієнтів лінійного розширення) від температури.

РОЗДІЛ 3. МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОВОГО ТА ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ ШАРУВАТИХ ЗА ОСЬОВОЮ КООРДИНАТОЮ ТЕРМОЧУТЛИВИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ТІЛ ЗА СКЛАДНОГО ТЕПЛООБМІНУ

У третьому розділі [49, 77, 78, 91–95, 97, 98, 176] визначено температурні поля шаруватих за осьовою координатою термочутливих та нетермочутливих циліндричних тіл за різних умов теплообміну на обмежувальних поверхнях, які були наведені у другому розділі, та наявності тепловиділень всередині шарів. Визначено температурні напруження, спричинені знайденим нерівномірним розподілом температури. Здійснено порівняльний аналіз отриманих результатів та досліджено вплив термочутливості матеріалів шарів, значень безрозмірних критеріїв та інтенсивності тепловідведення кипінням та випаровуванням рідини на характер та рівень розподілів температур та напружень.

3.1. Вхідні дані, що використовуються для визначення розподілів температур та напружень шаруватих за осьовою координатою термочутливих та нетермочутливих циліндричних тіл

Вхідними даними, які необхідні для отримання розподілів температур та напружень n -шарового по осі циліндра, є:

- значення теплових (коефіцієнтів теплопровідності $\lambda_i^{(i)}$) та механічних (коефіцієнтів Пуассона $\nu^{(i)}$, температурних коефіцієнтів лінійного розширення $\alpha_i^{(i)}$ та модулів пружності $E^{(i)}$) характеристик матеріалів шарів циліндра, $i = \overline{1, n}$;
- безрозмірні координати меж шарів циліндра $z_i, i = \overline{1, n}$;
- безрозмірні початкова T_p та кінцева T_k температури із діапазону задання температур;
- безрозмірні температури середовищ T_{c1}, T_{cn} , якщо умовами теплообміну на обмежувальних поверхнях є стала температура, конвективно-променевий тепло-

обмін, або тепловідведення шляхом кипіння чи випаровування рідини з поверхні;

- безрозмірні критерії Померанцева $Po^{(i)}$ ($i = \overline{1, n}$) для кожного шару циліндра, в якому наявні джерела тепла. Як відомо, критерій Померанцева виражає відношення кількості тепла, що виділяється джерелом за одиницю часу в об'ємі R , до максимальної кількості тепла, що передається теплопровідністю;
- безрозмірні критерії Кірпічова $Ki^{(i)}$ ($i = \overline{1, n}$), якщо на обмежувальних поверхнях циліндра задано умови сталого теплового потоку. За означенням, критерій Кірпічова характеризує інтенсивність теплообміну між твердим тілом і зовнішнім середовищем;
- безрозмірні критерії Біо $Bi^{(i)}$ ($i = \overline{1, n}$), якщо на обмежувальних поверхнях циліндра задано конвективний чи конвективно-променевиий теплообмін, а також умови тепловідведення шляхом кипіння чи випаровування рідини з поверхонь. Цей критерій виражає відношення потоку тепла, підведеного до тіла, до потоку тепла відведеного всередину тіла;
- безрозмірні критерії Старка $Sk^{(i)}$ ($i = \overline{1, n}$), якщо на обмежувальних поверхнях циліндра виконуються умови конвективно-променевого теплообміну;
- стала кипіння $M_{\text{boil}}^{(i)}$ ($i = \overline{1, n}$), якщо тепловідведення в циліндрі відбувається шляхом кипіння рідини на обмежувальних поверхнях;
- стала випаровування $M_{\text{evap}}^{(i)}$ ($i = \overline{1, n}$), якщо тепловідведення в циліндрі відбувається шляхом випаровування рідини із зовнішніх обмежувальних поверхонь.

При проведенні числових досліджень припустили, що матеріалами шарів циліндра є кераміка ZrO_2 та титановий сплав $Ti - 6Al - 4V$ у різних їх комбінаціях. Експериментально знайдені для різних температур значення коефіцієнтів теплопровідності та термомеханічних характеристик (коефіцієнтів Пуассона, температурних коефіцієнтів лінійного розширення та модулів пружності) цих матеріалів проапроксимували з використанням методу найменших квадратів многочленами у

діапазоні температур $[t_p, t_k]$, $t_p = 300 \text{ K}$, $t_k = 1100 \text{ K}$. При цьому отримали, що для кераміки [187]

$$\begin{aligned}\lambda_i^{(i)} &= 1.915(1 + 0.24664(T_i - T_p)) \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}} \right], \quad v^{(i)} = 0.333, \\ \alpha_i^{(i)} &= 8.783 \cdot 10^{-6} \left(1 - 1.4128(T_i - T_p) + 1.7496(T_i - T_p)^2 \right) \left[\frac{1}{\text{К}} \right], \\ E^{(i)} &= 116.381 \left(1 - 0.521357(T_i - T_p) - 0.084215(T_i - T_p)^2 \right) [\text{ГПа}],\end{aligned}\quad (3.1)$$

а для титанового сплаву [187]

$$\begin{aligned}\lambda_i^{(i)} &= 6.2(1 + 3.016(T_i - T_p)) \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}} \right], \quad v^{(i)} = 0.2984(1 + 0.118(T_i - T_p)), \\ \alpha_i^{(i)} &= 8.8559 \cdot 10^{-6} \left(1 + 0.49014(T_i - T_p) - 0.36754(T_i - T_p)^2 \right) \left[\frac{1}{\text{К}} \right], \\ E^{(i)} &= 105.05(1 - 0.5916(T_i - T_p)) [\text{ГПа}], \quad i = \overline{1, n}.\end{aligned}\quad (3.2)$$

Зазначимо, що для вищезгаданих матеріалів безрозмірні початкова та кінцева температури $T_p = 3/11$, $T_k = 1$.

В якості рідин, що подаються на обмежувальні поверхні циліндра для зниження рівня температури в ньому, взяли FC-72 [128]

$$\begin{aligned}h_{fg} &= 88000 \left[\frac{\text{Дж}}{\text{кг}} \right], \quad M_A = 0.338 \left[\frac{\text{кг}}{\text{моль}} \right], \quad \rho_l = 1680, \quad \rho_v = 13.55 \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right], \\ \sigma &= 0.01, \quad c_{p,l} = 1100 \left[\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \right], \quad C_{s,f} = 0.0055, \quad n = 1.7, \quad Pr_l = 12.35, \\ T_{\text{boil}} &= 329^\circ \text{ K}, \quad p_{A,\text{cn}} = 0, \quad p_{A,\text{sat}} = 30.9 \cdot 10^3 [\text{Па}], \quad D_{AB} = 1 \cdot 10^{-5} \left[\frac{\text{м}^2}{\text{с}} \right],\end{aligned}\quad (3.3)$$

та FC-87 [129]

$$\begin{aligned}h_{fg} &= 103000 \left[\frac{\text{Дж}}{\text{кг}} \right], \quad M_A = 0.288 \left[\frac{\text{кг}}{\text{моль}} \right], \quad \rho_l = 1650, \quad \rho_v = 11.55 \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right], \\ \sigma &= 0.009, \quad c_{p,l} = 1100 \left[\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \right], \quad C_{s,f} = 0.0055, \quad n = 1.7, \quad Pr_l = 8.84, \\ T_{\text{boil}} &= 303^\circ \text{ K}, \quad p_{A,\text{cn}} = 0, \quad p_{A,\text{sat}} = 81.1 \cdot 10^3 [\text{Па}], \quad D_{AB} = 1 \cdot 10^{-5} \left[\frac{\text{м}^2}{\text{с}} \right],\end{aligned}\quad (3.4)$$

які спеціально розроблені для використання в мікроелектроніці. Їх перевагами є термічна та хімічна стабільність, відсутність атомів хлору та водню, нетоксичність, відсутність запаху, негорючість, вони є діелектриками.

При моделюванні із використанням лінеаризованої моделі використано такі значення констант [60] для вказаних рідин (табл.3.1):

Таблиця 3.1. Значення констант для лінійної апроксимації

| Рідина | FC-72 | FC-87 |
|---------|-------------|------------|
| ξ_1 | 8.562930299 | 14.3884302 |
| ξ_2 | -2427.41821 | -3974 |

У разі задання у якомусь із шарів джерел тепла, вважається, що вони розподілені за параболічним законом

$$W^{(i)}(r) = -\frac{4W_0^{(i)}}{(r_{i+1} - r_i)^2}(r - r_i)(r - r_{i+1}), \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.5)$$

причому для термочутливого тіла

$$\begin{aligned} \tilde{W}^{(i)}(z) &= -\frac{4Po^{(i)}}{(z_{i+1} - z_i)^2} \left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2}(z_{i+1} + z_i) + z_{i+1}z_i z - \frac{z_i^2}{6}(3z_{i+1} - z_i) \right), \\ \bar{W}^{(i)}(z) &= -\frac{4Po^{(i)}}{(z_{i+1} - z_i)^2} \left(\frac{z^4}{12} - \frac{z^3}{6}(z_{i+1} + z_i) + \frac{z^2}{2}z_{i+1}z_i + \frac{z}{6}(z_i^3 - 3z_i^2z_{i+1}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{z_i^3}{12}(z_i - 2z_{i+1}) \right), \end{aligned}$$

а для нетермочутливого

$$\begin{aligned} \tilde{W}_N^{(i)}(z) &= -\frac{4Po_N^{(i)}}{(z_{i+1} - z_i)^2} \left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2}(z_{i+1} + z_i) + z_{i+1}z_i z - \frac{z_i^2}{6}(3z_{i+1} - z_i) \right), \\ \bar{W}_N^{(i)}(z) &= -\frac{4Po_N^{(i)}}{(z_{i+1} - z_i)^2} \left(\frac{z^4}{12} - \frac{z^3}{6}(z_{i+1} + z_i) + \frac{z^2}{2}z_{i+1}z_i + \frac{z}{6}(z_i^3 - 3z_i^2z_{i+1}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{z_i^3}{12}(z_i - 2z_{i+1}) \right). \end{aligned}$$

Безрозмірний розподіл напружень багат шарового по осі термочутливого циліндра обчислювали за формулою (2.88), а нетермочутливого – (2.89).

На рисунках розподіли температур чи напружень термочутливого циліндра зображено за допомогою суцільних ліній, нетермочутливого за опорних значень термомеханічних характеристик – використовуючи штрихові лінії, за середньо-інтегральних – штрих-пунктирні.

3.2. Моделювання термопружного стану двошарового циліндра за задання на плоских обмежувальних поверхнях сталого потоку тепла та конвективного теплообміну

3.2.1. Формулювання задачі

Розглядається скінченний термочутливий циліндр [77, 98], зображений на рис.3.1, який складається із двох шарів різної товщини, виготовлених із різних матеріалів. На одній із плоских обмежувальних поверхонь $\tilde{z} = \tilde{z}_1$ заданий потік тепла $q^{(1)}$, а через іншу плоску поверхню $\tilde{z} = \tilde{z}_3$ циліндр конвективно обмінюється теплом із зовнішнім середовищем сталої температури t_{cn} . Коефіцієнт теплообміну через цю поверхню сталий і рівний $\alpha^{(2)}$. У площині контакту циліндрів $\tilde{z} = \tilde{z}_2$ рівномірно розподілені джерела тепла, які створюють потік тепла $q^{(2)}$. Через теплоізоляцію циліндричної поверхні температурне поле змінюється лише у напрямку осьової координати циліндра. Вісь абсцис вибрана так, що її початок знаходиться під першою складовою.

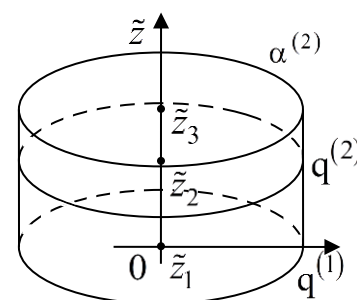


Рис.3.1. Циліндр двошаровий за осьовою координатою

3.2.2. Математична модель для розподілу температури та її розв'язок

Термочутливий циліндр. Математична модель для визначення розподілу температури термочутливого циліндра у безрозмірному вигляді містить

- рівняння теплопровідності для складових

$$\frac{d}{dz} \left(\lambda_*^{(i)}(T_i) \frac{dT_i}{dz} \right) = 0, \quad z_i < z < z_{i+1}, \quad i = 1, 2,$$

- крайові умови на обмежувальних плоских поверхнях

$$\lambda_*^{(1)}(T_1) \frac{dT_1}{dz} \Big|_{z=z_1} = -\text{Ki}^{(1)}, \quad \left[\lambda_*^{(2)}(T_2) \frac{dT_2}{dz} + \text{Bi}^{(2)}(T_2 - T_{\text{cn}}) \right] \Big|_{z=z_3} = 0,$$

- умови контакту на поверхні дотику складових циліндра

$$T_1|_{z=z_2} = T_2|_{z=z_2}, \quad \frac{\lambda_{t0}^{(1)}}{\lambda_{t0}^{(2)}} \lambda_*^{(1)} (T_1) \frac{dT_1}{dz} \Big|_{z=z_2} = \lambda_*^{(2)} (T_2) \frac{dT_2}{dz} \Big|_{z=z_2} + \text{Ki}^{(2)},$$

Для побудови розв'язку сформульованої математичної моделі використано метод, викладений у другому розділі роботи. У результаті здійснення передбаченого нею інтегрального перетворення Кірхгофа з неї отримано простішу нелінійну задачу на змінні Кірхгофа. Інтегруючи лінійні рівняння, отримані з рівнянь теплопровідності, знаходимо змінні Кірхгофа, які мають вигляд

$$\theta_i = C_{i1} (z - z_i) + C_{i2}, \quad i = 1, 2,$$

де невідомі сталі інтегрування C_{ij} , визначені за методикою, обчислюються за формулами

$$C_{11} = -\text{Ki}^{(1)}, \quad C_{21} = -\left(\frac{\lambda_{t0}^{(1)}}{\lambda_{t0}^{(2)}} \text{Ki}^{(1)} + \text{Ki}^{(2)} \right),$$

$$C_{22} = C_{12} - \text{Ki}^{(1)} (z_2 - z_1) + \frac{k_2 - k_1}{2} \left(\frac{\sqrt{1 + 2k_1 (C_{12} - \text{Ki}^{(1)} (z_2 - z_1))} - 1}{k_1} \right)^2,$$

причому C_{12} визначається з рівняння

$$-\frac{\lambda_{t0}^{(1)}}{\lambda_{t0}^{(2)}} \text{Ki}^{(1)} - \text{Ki}^{(2)} + \text{Bi}^{(2)} \left(\frac{1}{k_2} \left(\left(1 + 2k_2 \left(\left(-\frac{\lambda_{t0}^{(1)}}{\lambda_{t0}^{(2)}} \text{Ki}^{(1)} - \text{Ki}^{(2)} \right) (z_3 - z_2) + C_{22} \right) \right)^{1/2} - 1 \right) + T_p - T_{\text{cn}} \right) = 0,$$

розв'язки якого не наводимо через його громіздкість. Їх отримано з допомогою програми аналітичних перетворень. Під час числових досліджень використовуємо той із них, який забезпечує фізично коректний розподіл температури, який обчислюємо за формулою (2.13).

Нетермочутливий циліндр. Математична модель у безрозмірному вигляді для визначення розподілу температури нетермочутливого циліндра має вигляд

$$\frac{d^2 T_{iN}}{dz^2} = 0, \quad z_i < z < z_{i+1}, \quad i = 1, 2,$$

$$\left. \frac{dT_{1N}}{dz} \right|_{z=z_1} = -\text{Ki}^{(1)}, \quad \left[\frac{dT_{2N}}{dz} + \text{Bi}^{(2)} (T_{2N} - T_{\text{cn}}) \right]_{z=z_3} = 0,$$

$$T_{1N} \Big|_{z=z_2} = T_{2N} \Big|_{z=z_2}, \quad \frac{\lambda_{t0}^{(1)}}{\lambda_{t0}^{(2)}} \left. \frac{dT_{1N}}{dz} \right|_{z=z_2} = \left. \frac{dT_{2N}}{dz} \right|_{z=z_2} + \text{Ki}^{(2)}.$$

Рівняння для визначення розподілу температури нетермочутливого циліндра мають вигляд

$$T_N^{(i)} = \bar{C}_{i1} (z - z_i) + \bar{C}_{i2}, \quad i = 1, 2,$$

де сталі інтегрування мають вигляд:

$$\bar{C}_{11} = -\text{Ki}_N^{(1)}, \quad \bar{C}_{21} = -\frac{\lambda_{tN}^{(1)}}{\lambda_{tN}^{(2)}} \text{Ki}_N^{(1)} - \text{Ki}_N^{(2)},$$

$$\bar{C}_{12} = \left(\frac{\lambda_{tN}^{(1)}}{\lambda_{tN}^{(2)}} \text{Ki}_N^{(1)} + \text{Ki}_N^{(2)} \right) \left(\frac{1}{\text{Bi}_N^{(2)}} + z_3 - z_2 \right) + \text{Ki}_N^{(1)} (z_2 - z_1) + T_{\text{cn}},$$

$$\bar{C}_{22} = \left(\frac{\lambda_{tN}^{(1)}}{\lambda_{tN}^{(2)}} \text{Ki}_N^{(1)} + \text{Ki}_N^{(2)} \right) \left(\frac{1}{\text{Bi}_N^{(2)}} + z_3 - z_2 \right) + T_{\text{cn}}.$$

3.2.3. Числові дослідження

Нехай матеріалом першого шару циліндра є кераміка (3.1), а другого – титановий сплав (3.2). Для дослідження впливу безрозмірного критерію Біо $\text{Bi}^{(2)}$ координати меж шарів циліндра прийняли рівними: $z_1 = 0$, $z_2 = 0.3$, $z_3 = 1$, причому за характерний розмір взяли значення $l_0 = z_3$. Значення безрозмірних температур: $T_p = 3/11$, $T_k = 1$, $T_{\text{cn}} = 1/2$, а критеріїв Біо та Кірпічова – $\text{Bi}^{(2)} = \{1, 2, 3\}$, $\text{Ki}^{(1)} = 0.4$. На рис.3.2 червоні лінії відповідають значенню $\text{Bi}^{(2)} = 1$, сині – 2, зелені – 3.

Під час дослідження впливу значень безрозмірного критерію Кірпічова $\text{Ki}^{(1)}$ на розподіли температур та напружень в циліндрі, вхідні параметри задачі задали таким чином: $\text{Bi}^{(2)} = 2$, $\text{Ki}^{(1)} = \{0.1, 0.3, 0.5\}$, $\text{Ki}^{(2)} = 0$, а значення інших параметрів залишили незмінними. На рис.3.3 подано графіки розподілів температури та напружень двошарового циліндра за заданих вхідних даних, причому лінії червоного кольору відповідають значенню $\text{Ki}^{(1)} = 0.1$, синього – 0.3, зеленого – 0.5.

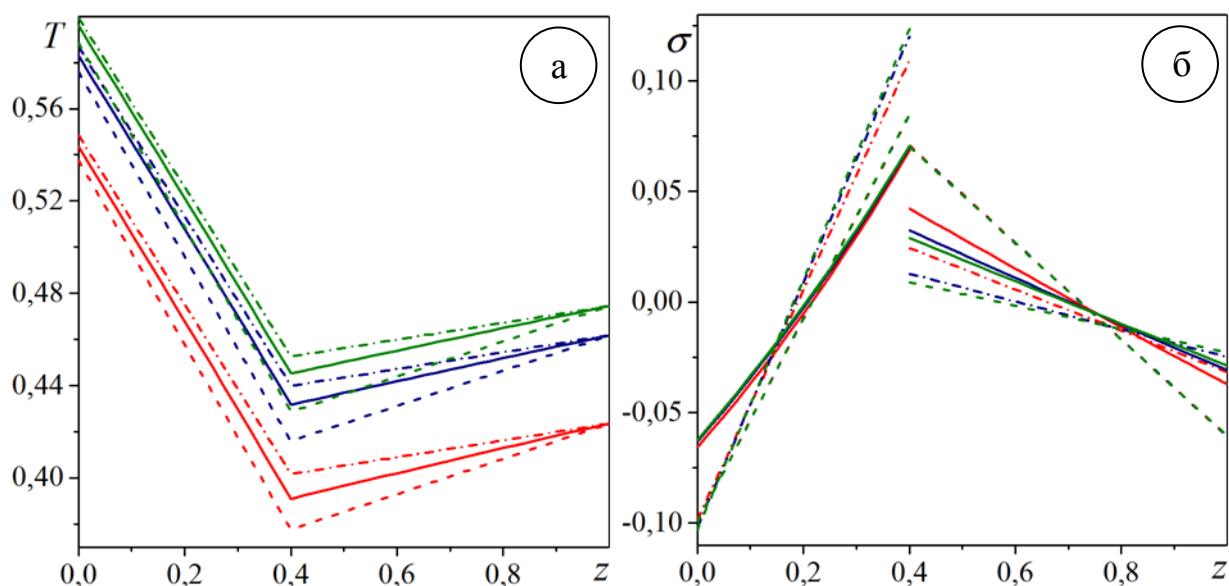


Рис.3.2. Залежність розподілів температур (а) та напружень (б) від критерію Біо $Bi^{(2)}$

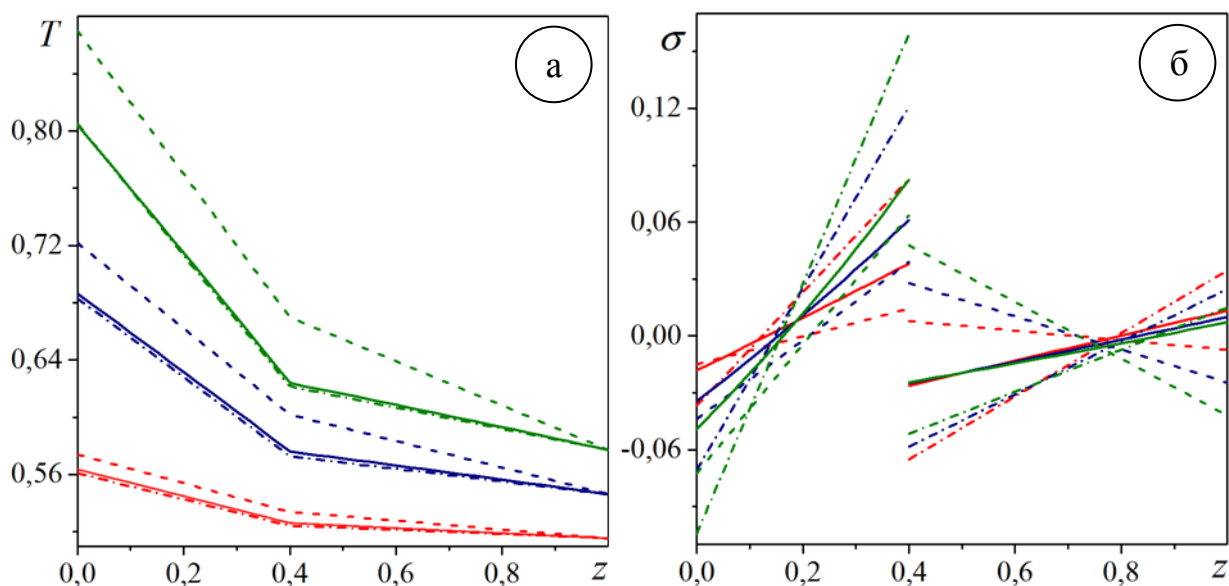


Рис.3.3. Залежність розподілів температур (а) та напружень (б) від критерію Кірпічова $Ki^{(1)}$

Вплив значень безрозмірного критерію Кірпічова $Ki^{(2)}$ на розподіли температур та напружень в циліндрі досліджували, задавши так вхідні параметри задачі: $T_{cn} = 3/11$, $Bi^{(2)} = 3$, $Ki^{(1)} = 0.5$, $Ki^{(2)} = \{0, 0.1, 0.2\}$. Значення інших параметрів залишили незмінними. На рис.3.3 подано графіки розподілів температури та напружень двошарового циліндра за заданих вхідних даних, причому лінії червоного кольору відповідають значенню $Ki^{(2)} = 0$, синього – 0.1, зеленого – 0.2.

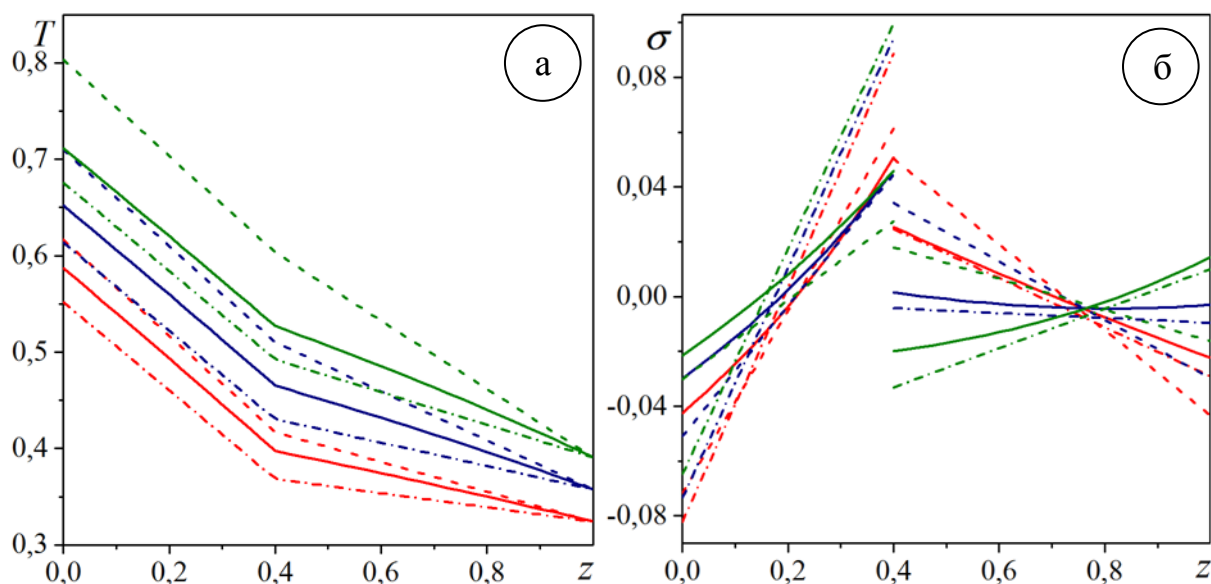


Рис.3.4. Залежність розподілів температур (а) та напружень (б) від критерію Кірпічова $Ki^{(2)}$

З рис. 3.3–3.4 видно, що розподіли температур та напружень термочутливого циліндра найкраще наближаються такими розподілами аналогічного нетермочутливого циліндра за використання середньоінтегральних значень коефіцієнтів теплопровідності. При цьому, максимальні розбіжності між розподілами температур термочутливого і нетермочутливого циліндрів сягають 15%. Однак, мають місце досить великі кількісні (більше 50%) та якісні (розтяг в термочутливому і стиск у нетермочутливому циліндрі, чи навпаки) розбіжності між розподілами напружень, а, отже, не варто нехтувати термочутливістю матеріалів шарів.

3.3. Моделювання термопружного стану двошарового циліндра за задання на плоских обмежувальних поверхнях сталої температури та конвективно-променевого теплообміну

3.3.1. Формулювання задачі

Нехай скінченний термочутливий циліндр [91, 93], зображений на рис.3.5 складається із двох різної висоти шарів, виготовлених із різних матеріалів. На одній із плоских обмежувальних поверхонь $\tilde{z} = \tilde{z}_1$ задано сталу температуру t_{c1} , а через іншу плоску поверхню $\tilde{z} = \tilde{z}_3$ відбувається конвективно-променевий теплообмін із зовнішнім середовищем сталої температури t_{cn} . Коефіцієнт теплообміну

через цю поверхню та ступінь чорноти сталі та рівні $\alpha^{(2)}$ та $\varepsilon^{(2)}$ ($0 < \varepsilon^{(2)} \leq 1$) відповідно. В площині контакту шарів циліндра $\tilde{z} = \tilde{z}_2$ наявні рівномірно розподілені джерела тепла (3.5), які створюють потік тепла $q^{(2)}$. Через теплоізоляцію циліндричної поверхні потік тепла проходить лише в одному напрямі – вздовж осі циліндра, то вісь абсцис вибрана так, що її початок знаходиться під першим шаром.

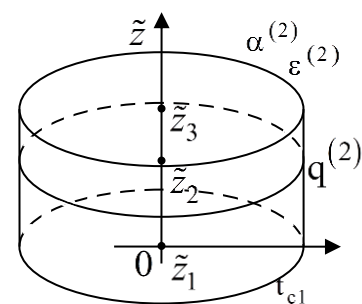


Рис.3.5. Циліндр двошаровий за осью координатою

3.3.2. Математична модель для розподілу температури та її розв'язок

Термочутливий циліндр. Математична модель для визначення розподілу температури термочутливого циліндра у безрозмірному вигляді містить

- рівняння теплопровідності для складових

$$\frac{d}{dz} \left(\lambda_*^{(i)}(T_i) \frac{dT_i}{dz} \right) = 0, \quad z_i < z < z_{i+1}, \quad i = 1, 2,$$

- крайові умови на обмежувальних плоских поверхнях

$$T_1|_{z=z_1} = T_{c1}, \quad \left[\lambda_*^{(2)}(T_2) \frac{dT_2}{dz} + \text{Bi}_N^{(2)}(T_2 - T_{cn}) + \text{Sk}_N^{(2)}(T_{2N}^4 - T_{cn}^4) \right]_{z=z_3} = 0,$$

- умови контакту на поверхні дотику складових циліндра

$$T_1|_{z=z_2} = T_2|_{z=z_2}, \quad \frac{\lambda_{i0}^{(1)}}{\lambda_{i0}^{(2)}} \lambda_*^{(1)}(T_1) \frac{dT_1}{dz} \Big|_{z=z_2} = \lambda_*^{(2)}(T_2) \frac{dT_2}{dz} \Big|_{z=z_2} + \text{Ki}^{(2)},$$

Представлений у другому розділі метод передбачає застосування перетворення Кірхгофа при розв'язуванні сформульованої задачі. У результаті початково нелінійна задача значно спрощується до такої задачі у змінних Кірхгофа. Інтегрування лінійних рівнянь, отриманих із рівнянь теплопровідності, дає можливість знайти змінні Кірхгофа, які мають вигляд

$$\theta_i = C_{i1}(z - z_i) + C_{i2}, \quad i = 1, 2,$$

де невідомі сталі інтегрування визначаються так

$$C_{11} = \frac{\lambda_{t0}^{(2)}}{\lambda_{t0}^{(1)}} (C_{21} + \text{Ki}^{(2)}), \quad C_{12} = (T_{c1} - T_p) + \frac{k_1}{2} (T_{c1} - T_p)^2,$$

$$C_{22} = (T_{c1} - T_p) + \frac{k_1}{2} (T_{c1} - T_p)^2 + \frac{\lambda_{t0}^{(2)}}{\lambda_{t0}^{(1)}} (C_{21} + \text{Ki}^{(2)}) (z_2 - z_1) +$$

$$+ \frac{k_2 - k_1}{2k_1^2} \left(\left(1 + 2k_1 \left((T_{c1} - T_p) + (T_{c1} - T_p)^2 k_1 / 2 \right) \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\lambda_{t0}^{(2)}}{\lambda_{t0}^{(1)}} (C_{21} + \text{Ki}^{(2)}) (z_2 - z_1) \right)^{1/2} - 1 \right)^2,$$

причому для визначення сталої C_{21} необхідно розв'язати рівняння

$$C_{21} + \text{Bi}^{(2)} \left(\frac{1}{k_2} \left(\sqrt{1 + 2k_2 (C_{21} (z_3 - z_2) + C_{22})} - 1 \right) + T_p - T_{cn} \right) +$$

$$+ \text{Sk}^{(2)} \left(\left(\frac{1}{k_2} \left(\sqrt{1 + 2k_2 (C_{21} (z_3 - z_2) + C_{22})} - 1 \right) + T_p \right)^4 - T_{cn}^4 \right) = 0,$$

корені якого отримано з допомогою програми аналітичних перетворень. Під час числових досліджень використовуємо той із них, який забезпечує фізично коректний розподіл температури.

Нетермочутливий циліндр. Математична модель у безрозмірних величинах для визначення розподілу температури нетермочутливого циліндра має вигляд

$$\frac{d^2 T_{iN}}{dz^2} = 0, \quad z_i < z < z_{i+1}, \quad i = 1, 2,$$

$$T_{1N} \Big|_{z=z_1} = T_{c1}, \quad \left[\frac{dT_{2N}}{dz} + \text{Bi}_N^{(2)} (T_{2N} - T_{cn}) + \text{Sk}_N^{(2)} (T_{2N}^4 - T_{cn}^4) \right]_{z=z_3} = 0,$$

$$T_{1N} \Big|_{z=z_2} = T_{2N} \Big|_{z=z_2}, \quad \frac{\lambda_{t0}^{(1)}}{\lambda_{t0}^{(2)}} \frac{dT_{1N}}{dz} \Big|_{z=z_2} = \frac{dT_{2N}}{dz} \Big|_{z=z_2} + \text{Ki}^{(2)}.$$

Рівняння для визначення розподілу температури термочутливого циліндра мають вигляд

$$T_N^{(i)} = \bar{C}_{i1} (z - z_i) + \bar{C}_{i2}, \quad i = 1, 2,$$

де сталі інтегрування визначаються таким чином:

$$\bar{C}_{11} = \frac{\lambda_{tN}^{(2)}}{\lambda_{tN}^{(1)}} (\bar{C}_{21} + \text{Ki}_N^{(2)}), \quad \bar{C}_{12} = T_{c1}, \quad \bar{C}_{22} = \frac{\lambda_{tN}^{(2)}}{\lambda_{tN}^{(1)}} (\bar{C}_{21} + \text{Ki}_N^{(2)}) (z_2 - z_1) + T_{c1},$$

а \bar{C}_{21} визначається з рівняння

$$\begin{aligned} & \bar{C}_{21} + \text{Bi}_N^{(2)} \left(\bar{C}_{21} (z_3 - z_2) + \frac{\lambda_{tN}^{(2)}}{\lambda_{tN}^{(1)}} (\bar{C}_{21} + \text{Ki}_N^{(2)}) (z_2 - z_1) + T_{c1} - T_{cn} \right) + \\ & + \text{Sk}_N^{(2)} \left(\left(\bar{C}_{21} (z_3 - z_2) + \frac{\lambda_{tN}^{(2)}}{\lambda_{tN}^{(1)}} (\bar{C}_{21} + \text{Ki}_N^{(2)}) (z_2 - z_1) + \right. \right. \\ & \left. \left. + T_{c1} + T_{cn} \right)^4 - T_{cn}^4 \right) = 0. \end{aligned}$$

3.3.3. Числові дослідження

Нехай матеріалом першого шару циліндра є кераміка (3.1), а другого – титановий сплав (3.2). Вхідні дані задали таким чином: $z_1 = 0$, $z_2 = 0.4$, $z_3 = 1$, $T_p = 3/11$, $T_k = 1$, $T_{c1} = 4/11$, $T_{cn} = 3/11$, $\text{Bi}^{(2)} = \{0, 3\}$, $\text{Sk}^{(2)} = \{0, 3\}$, $\text{Ki}^{(2)} = 1$. Графіки розподілів температур та напружень циліндрів зображено на рис.3.6. Зазначимо, що тут лінії червоного кольору відповідають значенням $\text{Bi}^{(2)} = 0$, $\text{Sk}^{(2)} = 3$, синього – $\text{Bi}^{(2)} = 3$, $\text{Sk}^{(2)} = 3$, зеленого – $\text{Bi}^{(2)} = 3$, $\text{Sk}^{(2)} = 0$.

З рис.3.6. видно, що розподіли температур та напружень у термочутливому циліндрі краще наближаються такими розподілами в аналогічному нетермочутливому за середньоінтегральних значень механічних характеристик. При цьому максимальні розбіжності між розподілами температур сягають 3%, а між розподілами напружень вони можуть перевищувати 50%. Зазначимо також, що за заданих вхідних даних променевий теплообмін спрямований на охолодження тіла.

Вхідні дані для дослідження залежності розподілів температур і напружень в циліндрі від критерію Кірпічова $\text{Ki}^{(2)}$ вибрали таким чином: $\text{Bi}^{(2)} = 3$, $\text{Sk}^{(2)} = 3$, $\text{Ki}^{(2)} = \{0, 0.5, 1\}$, а решту параметрів залишили незмінними.

Графіки залежностей розподілів температур і напружень від критерію Кірпічова представлено на рис. 3.7, з якого видно, що збільшення значення цього критерію призводить до підвищення температури в циліндрі, причому, якщо при $\text{Ki}^{(2)} = 0$, краще наближення до розподілу термочутливого циліндра дає такий розподіл за використання опорних значень коефіцієнта теплопровідності, то для

$Ki^{(2)} > 0$ – за середньоінтегральних. Подібна ситуація спостерігається і для напружень. Однак, в даному випадку нехтування термочутливістю призводить до великих кількісних розбіжностей (більше 50%).

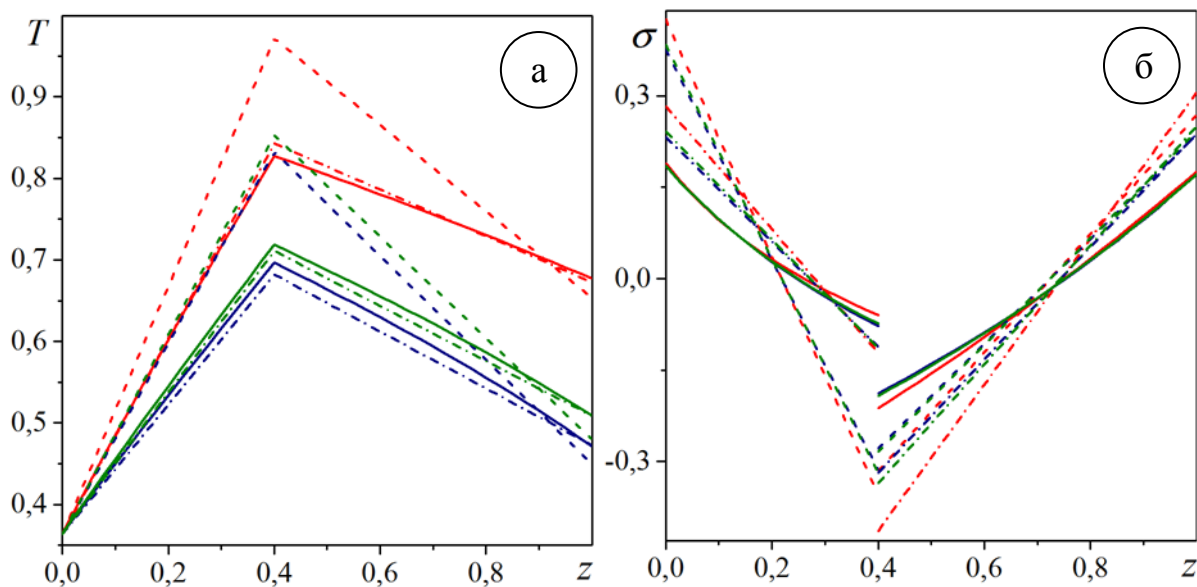


Рис.3.6. Залежність розподілів температур (а) та напружень (б) від критеріїв Біо $Bi^{(2)}$ та Старка $Sk^{(2)}$

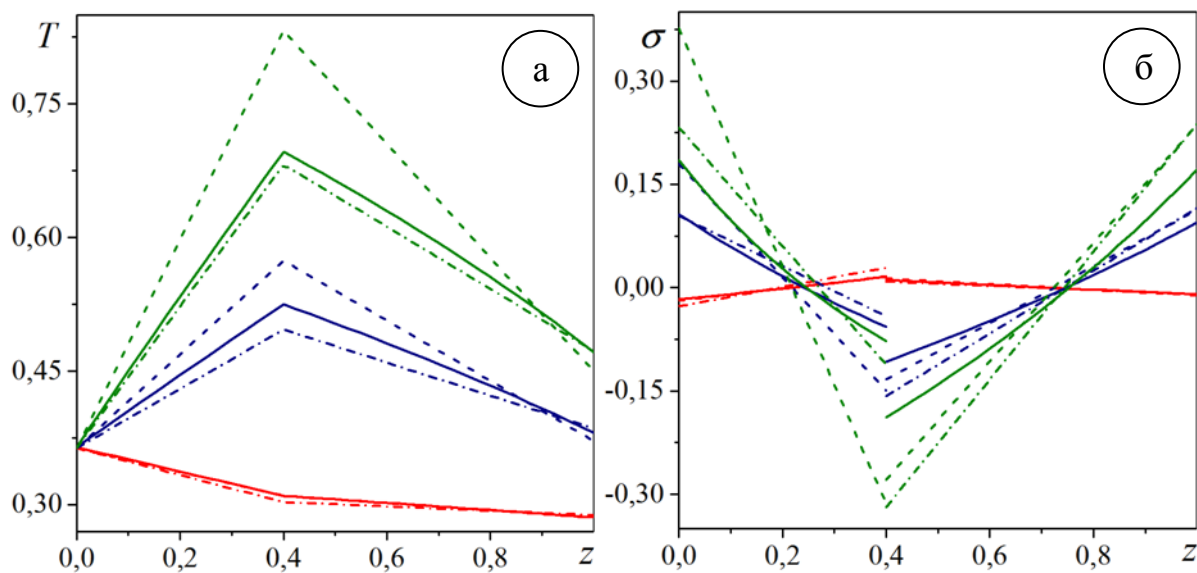


Рис.3.7. Залежність розподілів температур (а) та напружень (б) від критерію Кірпічова $Ki^{(2)}$

3.4. Моделювання термопружного стану тришарового циліндра за підтримання сталих температур на плоских обмежувальних поверхнях

3.4.1. Формулювання задачі

Розглядається скінченної висоти термочутливий циліндр [94, 176] (рис. 3.8.), який складається з трьох різної висоти шарів, виготовлених із різних матеріалів. Циліндр нагрівається розташованими в другому шарі джерелами тепла (3.5), причому $i = 2$. На плоских обмежувальних поверхнях складників циліндра $\tilde{z} = \{\tilde{z}_1, \tilde{z}_4\}$ підтримуються сталі температури $t = \{t_{c1}, t_{cn}\}$, а їх зовнішні поверхні теплоізовані. На поверхнях дотику сусідніх складників $\tilde{z} = \{\tilde{z}_2, \tilde{z}_3\}$ виконуються умови ідеального теплового контакту. За заданих теплових дій і теплової ізоляції циліндричної поверхні потік тепла у радіальному напрямі відсутній, а, отже, розподіл температури в циліндрі буде залежати від осової координати.

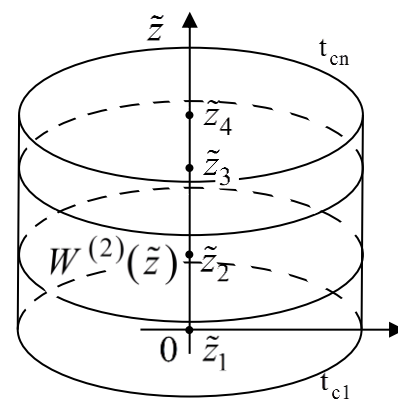


Рис.3.8. Циліндр тришаровий за осовою координатою

3.4.2. Математична модель для розподілу температури та її розв'язок

Термочутливий циліндр. Математична модель для визначення розподілу температури термочутливого циліндра у безрозмірному вигляді містить

- рівняння теплопровідності для складових

$$\frac{d}{dz} \left(\lambda_*^{(i)}(T_i) \frac{dT_i}{dz} \right) = W^{(i)}(z) \delta_{i2}, \quad z_i < z < z_{i+1}, \quad i = \overline{1,3},$$

- крайові умови на обмежувальних плоских поверхнях

$$T_1|_{z=z_1} = T_{c1}, \quad T_3|_{z=z_4} = T_{cn}$$

- умови контакту на поверхні дотику складових циліндра

$$T_{i-1}|_{z=z_i} = T_i|_{z=z_i}, \quad \frac{\lambda_{i0}^{(i-1)}}{\lambda_{i0}^{(i)}} \lambda_*^{(i-1)}(T_{i-1}) \frac{dT_{i-1}}{dz} \Big|_{z=z_i} = \lambda_*^{(i)}(T_i) \frac{dT_i}{dz} \Big|_{z=z_i}, \quad i = 2, 3.$$

Представлений у другому розділі метод передбачає застосування перетворення Кірхгофа при розв'язуванні сформульованої задачі. Отримана задача у змінних Кірхгофа є простішою у порівнянні із вихідною нелінійною. Змінні Кірхгофа знаходяться із рівнянь

$$\theta_i = C_{i1} (z - z_i) + C_{i2} + \bar{W}^{(i)}(z) \delta_{i2}, \quad i = \overline{1, 3},$$

що є результатом інтегрування рівнянь теплопровідності, де $\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k \end{cases}$ –

символ Кронекера. Невідомі сталі C_{ij} ($i = \overline{1, 3}, j = 1, 2$) інтегрування визначаються

так:

$$C_{21} = \frac{\lambda_{t0}^{(1)}}{\lambda_{t0}^{(2)}} C_{11}, \quad C_{12} = (T_{c1} - T_p) + \frac{k_1}{2} (T_{c1} - T_p)^2,$$

$$C_{31} = \frac{\lambda_{t0}^{(1)}}{\lambda_{t0}^{(3)}} C_{11} + \frac{\lambda_{t0}^{(2)}}{\lambda_{t0}^{(3)}} \tilde{W}^{(2)}(z_3),$$

$$C_{22} = C_{11} (z_2 - z_1) + C_{12} + \frac{k_2 - k_1}{2} \left(\frac{\sqrt{1 + 2k_1 (C_{11} (z_2 - z_1) + C_{12})} - 1}{k_1} \right)^2,$$

$$C_{32} = (T_{cn} - T_p) + \frac{k_3}{2} (T_{cn} - T_p)^2 - \left(\frac{\lambda_{t0}^{(1)}}{\lambda_{t0}^{(3)}} C_{11} + \frac{\lambda_{t0}^{(2)}}{\lambda_{t0}^{(3)}} \tilde{W}^{(2)}(z_3) \right) (z_4 - z_3),$$

причому C_{11} визначається з рівняння

$$C_{32} + W^{(2)}(z_3) - C_{21} (z_3 - z_2) - C_{22} - \frac{k_3 - k_2}{2} \left(\frac{\sqrt{1 + 2k_2 (C_{21} (z_2 - z_1) + C_{22} - W^{(2)}(z_3))} - 1}{k_2} \right)^2 = 0.$$

розв'язки якого отримано з допомогою програми аналітичних перетворень. Їх не наводимо через громіздкість. Під час числових досліджень використовуємо той із них, який забезпечує фізично коректний розподіл температури.

Нетермочутливий циліндр. Математична модель у безрозмірних величинах для визначення розподілу температури нетермочутливого циліндра має вигляд

$$\frac{d^2 T_{iN}}{dz^2} = W_N^{(i)}(z) \delta_{i2}, \quad z_i < z < z_{i+1}, \quad i = 1, 2,$$

$$T_{1N}|_{z=z_1} = T_{c1}, \quad T_{3N}|_{z=z_4} = T_{cn},$$

$$T_{i-1N}|_{z=z_i} = T_{iN}|_{z=z_i}, \quad \frac{\lambda_{t0}^{(i-1)}}{\lambda_{t0}^{(i)}} \frac{dT_{i-1N}}{dz} \Big|_{z=z_i} = \frac{dT_{iN}}{dz} \Big|_{z=z_i}, \quad i = 2, 3.$$

Рівняння для визначення розподілу температури термочутливого циліндра мають вигляд

$$T_N^{(i)} = \bar{C}_{i1} (z - z_i) + \bar{C}_{i2}, \quad i = 1, 2,$$

де сталі інтегрування визначаються таким чином

$$\bar{C}_{12} = T_{c1}, \quad \bar{C}_{21} = \frac{\lambda_{tN}^{(1)}}{\lambda_{tN}^{(2)}} \bar{C}_{11}, \quad \bar{C}_{22} = T_{c1} + \bar{C}_{11} (z_2 - z_1),$$

$$\bar{C}_{31} = \frac{\lambda_{tN}^{(2)}}{\lambda_{tN}^{(3)}} \left(\frac{\lambda_{tN}^{(1)}}{\lambda_{tN}^{(2)}} \bar{C}_{11} + \tilde{W}_N^{(2)}(z_3) \right),$$

$$\bar{C}_{32} = T_{cn} - \frac{\lambda_{tN}^{(2)}}{\lambda_{tN}^{(3)}} \left(\frac{\lambda_{tN}^{(1)}}{\lambda_{tN}^{(2)}} \bar{C}_{11} + \tilde{W}_N^{(2)}(z_3) \right) (z_4 - z_3),$$

$$\bar{C}_{11} = \frac{T_{cn} - T_{c1} - \bar{W}_N^{(2)}(z_3) - (z_4 - z_3) \tilde{W}_N^{(2)}(z_3)}{(z_4 - z_3) \lambda_{tN}^{(1)} / \lambda_{tN}^{(3)} + (z_3 - z_2) \lambda_{tN}^{(1)} / \lambda_{tN}^{(2)} + (z_2 - z_1)}.$$

3.4.3. Числові дослідження

Нехай матеріалом першого та третього шарів циліндра є кераміка (3.1), а другого – титановий сплав (3.2). Для дослідження впливу безрозмірного критерію Померанцева на розподіли температур та напружень циліндра вхідні дані задали таким чином: $z_1 = 0$, $z_2 = 0.2$, $z_3 = 0.8$, $z_4 = 1$, $T_p = 3/11$, $T_k = 1$, $T_{c1} = 3/11$, $T_{cn} = 4/11$, $Po^{(2)} = \{-0.1, -1, -3\}$. Графіки розподілів температур і напружень подано на рис.3.9, причому червоні лінії відповідають значенню $Po^{(2)} = -0.1$, сині – -1 , зелені – -3 .

З рис.3.9 видно, що збільшення абсолютного значення безрозмірного критерію Померанцева призводить до більшого нагрівання циліндра, а результатом цього є збільшення напружень у кожному шарі. Як і в попередньому прикладі, краще наближення до розподілу температури термочутливого циліндра дають такі розподіли нетермочутливого за використання середньоінтегральних значень кое-

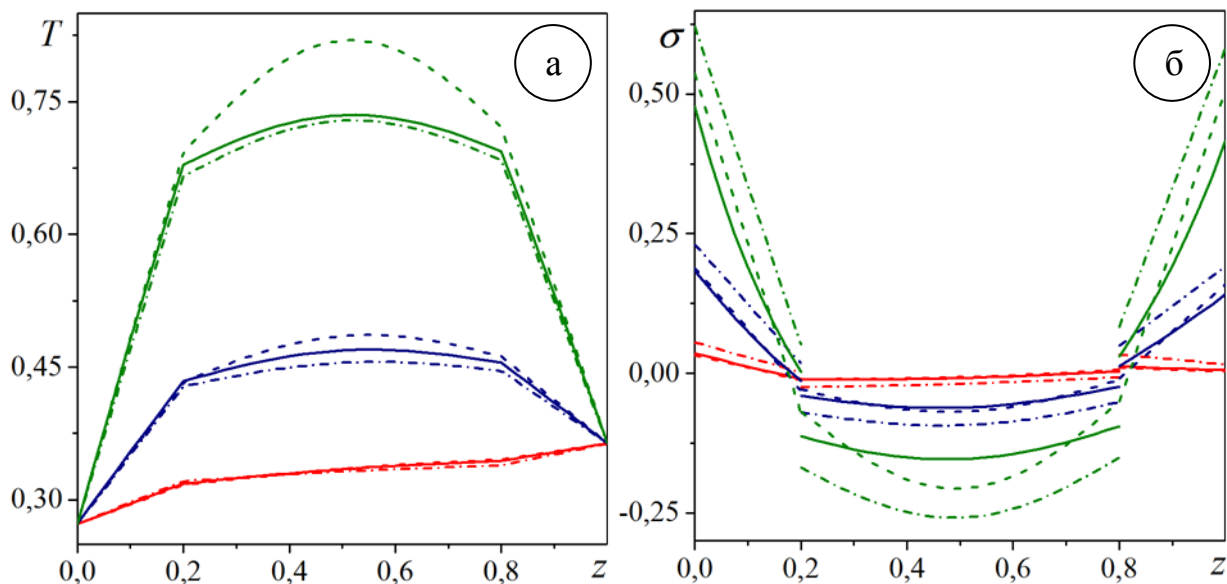


Рис.3.9. Залежність розподілів температур (а) та напружень (б) від критерію Померанцева $Po^{(2)}$

фіцієнта теплопровідності (максимальні різниці – не більше 4%), а напружень – за використання опорних значень механічних характеристик матеріалів. Однак, при експрес-оцінці напруженого стану циліндра не варто нехтувати термочутливістю матеріалів, оскільки це може призвести до досить великих кількісних (а в деяких випадках і якісних) розбіжностей (максимальних різниць). Зокрема вони можуть перевищувати 50%.

3.5. Моделювання термопружного стану тришарового циліндра за задання на плоских обмежувальних поверхнях сталого потоку тепла та тепловідведення кипінням рідини

3.5.1. Формулювання задачі

Розглядається скінченний термочутливий циліндр [81, 97] (рис.3.10), який складається із трьох циліндрів різної висоти, виготовлених із різних матеріалів. На одній із плоских обмежувальних поверхонь $\tilde{z} = \tilde{z}_1$ заданий сталий потік тепла $q^{(1)}$, а через іншу плоску поверхню $\tilde{z} = \tilde{z}_4$ відбувається відведення тепла шляхом кипіння рідини. Коефіцієнт теплообміну через цю поверхню сталий і рівний $\alpha^{(3)}$, а температура середовища, з яким відбувається теплообмін – t_{cn} . Циліндр нагрі-

вається наявними у внутрішньому шарі джерелами тепла (3.5). В інших складових циліндра джерела тепла відсутні. На межі дотику сусідніх складових $\tilde{z} = \{\tilde{z}_2, \tilde{z}_3\}$ виконуються умови ідеального теплового контакту. Циліндричні поверхні кожного із складових є теплоізованими, тобто потік тепла через них відсутній. Через теплову ізоляцію циліндричних поверхонь складових розподіл температури в циліндрі буде залежати лише від осьової координати.

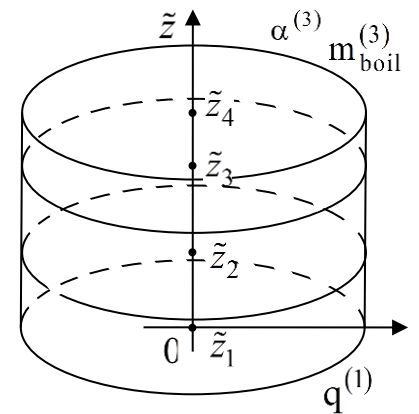


Рис.3.10. Циліндр тришаровий за осью координатою

3.5.2. Математична модель для розподілу температури та її розв'язок

Термочутливий циліндр. Математична модель у безрозмірному вигляді для визначення розподілу температури термочутливого циліндра включає

- рівняння теплопровідності для складових

$$\frac{d}{dz} \left(\lambda_*^{(i)}(T_i) \frac{dT_i}{dz} \right) = W^{(i)}(z) \delta_{i2}, \quad z_i < z < z_{i+1}, \quad i = \overline{1,3},$$

- крайові умови на обмежувальних плоских поверхнях

$$\lambda_*^{(1)}(T_1) \frac{dT_1}{dz} \Big|_{z=z_1} = -\text{Ki}^{(1)},$$

$$\left[\lambda_*^{(3)}(T_3) \frac{dT_3}{dz} + \text{Bi}^{(3)}(T_3 - T_{\text{cn}}) + \text{M}_{\text{boil}}^{(3)}(T_3 - T_{\text{boil}}^{(3)})^3 \right]_{z=z_4} = 0;$$

- умови контакту на поверхні дотику складових циліндра

$$T_{i-1} \Big|_{z=z_i} = T_i \Big|_{z=z_i}, \quad \frac{\lambda_{i0}^{(i-1)}}{\lambda_{i0}^{(i)}} \lambda_*^{(i-1)}(T_{i-1}) \frac{dT_{i-1}}{dz} \Big|_{z=z_i} = \lambda_*^{(i)}(T_i) \frac{dT_i}{dz} \Big|_{z=z_i}, \quad i = 2,3.$$

За допомогою запропонованої у другому розділі методики визначення теплового стану багат шарових циліндрів отримано розв'язок сформульованої задачі теплопровідності. Перетворення Кірхгофа дозволяє значно спростити сформульовану задачу теплопровідності. Інтегруючи лінійні рівняння, отримані з рівнянь теплопровідності, знаходимо змінні Кірхгофа, які мають вигляд

$$\theta_i = C_{i1}(z - z_i) + C_{i2} + \bar{W}^{(i)}(z) \delta_{i2}, \quad i = 1,2.$$

При цьому сталі інтегрування визначаються так

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= -\text{Ki}^{(1)}, \quad C_{21} = -\frac{\lambda_t^{(1)}}{\lambda_t^{(2)}} \text{Ki}^{(1)}, \quad C_{31} = \frac{\lambda_t^{(2)}}{\lambda_t^{(3)}} \left(-\frac{\lambda_t^{(1)}}{\lambda_t^{(2)}} \text{Ki}^{(1)} + \tilde{W}^{(2)}(z_3) \right), \\
 C_{22} &= -\text{Ki}^{(1)}(z_2 - z_1) + C_{12} + \\
 &\quad + \frac{k_2 - k_1}{2} \left(\frac{\sqrt{1 + 2k_1(-\text{Ki}^{(1)}(z_2 - z_1) + C_{12})} - 1}{k_1} \right)^2, \\
 C_{32} &= \theta_2|_{z=z_3} + \frac{k_3 - k_2}{2} \left(\frac{\sqrt{1 + 2k_2 \theta_2|_{z=z_3}} - 1}{k_2} \right)^2, \\
 \theta_2|_{z=z_3} &= -\text{Ki}^{(1)} \left(\frac{\lambda_t^{(1)}}{\lambda_t^{(2)}}(z_3 - z_2) + (z_2 - z_1) \right) + C_{12} + \\
 &\quad + \frac{k_2 - k_1}{2} \left(\frac{\sqrt{1 + 2k_1(-\text{Ki}^{(1)}(z_2 - z_1) + C_{12})} - 1}{k_1} \right)^2.
 \end{aligned}$$

а C_{12} визначається з рівняння

$$\begin{aligned}
 &\frac{\lambda_t^{(2)}}{\lambda_t^{(3)}} \left(-\frac{\lambda_t^{(1)}}{\lambda_t^{(2)}} \text{Ki}^{(1)} + \tilde{W}^{(2)}(z_3) \right) (z_4 - z_3) + \\
 &\quad + \text{Bi}^{(3)} \left(\frac{\sqrt{1 + 2k_3 \theta_3|_{\rho=\rho_4}} - 1}{k_3} + T_p - T_{\text{cn}} \right) + \\
 &\quad + \text{M}_{\text{boil}}^{(3)} \left(\frac{\sqrt{1 + 2k_3 \theta_3|_{\rho=\rho_4}} - 1}{k_3} + T_p - T_{\text{cn}} \right)^3 = 0,
 \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
 \theta_3|_{z=z_4} &= C_{21}(z_3 - z_2) + C_{22} + \\
 &\quad + \frac{k_3 - k_2}{2} \left(\frac{\sqrt{1 + 2k_1(C_{21}(z_3 - z_2) + C_{22})} - 1}{k_1} \right)^2 + \bar{W}^{(2)}(z_3).
 \end{aligned}$$

розв'язки якого не наводимо через їх громіздкість. Їх отримано з допомогою програми аналітичних перетворень. Під час числових досліджень використовуємо той із них, який забезпечує фізично коректний розподіл температури.

Нетермочутливий циліндр. Математична модель у безрозмірних величинах для визначення розподілу температури нетермочутливого циліндра має вигляд

$$\frac{d^2 T_{iN}}{dz^2} = W_N^{(i)}(z) \delta_{i2}, \quad z_i < z < z_{i+1}, \quad i = \overline{1, 3},$$

$$\left. \frac{dT_{1N}}{dz} \right|_{z=z_1} = -\mathbf{Ki}_N^{(1)},$$

$$\left[\frac{dT_{3N}}{dz} + \mathbf{Bi}_N^{(3)} (T_{3N} - T_{\text{cn}}) + \mathbf{M}_{\text{Nboil}}^{(3)} (T_{3N} - T_{\text{Nboil}}^{(3)})^3 \right]_{z=z_4} = 0,$$

$$T_{i-1N} \Big|_{z=z_i} = T_{iN} \Big|_{z=z_i}, \quad \left. \frac{\lambda_{i0}^{(i-1)}}{\lambda_{i0}^{(i)}} \frac{dT_{i-1N}}{dz} \right|_{z=z_i} = \left. \frac{dT_{iN}}{dz} \right|_{z=z_i}, \quad i = 2, 3.$$

Рівняння для визначення розподілу температури термочутливого циліндра мають вигляд

$$T_N^{(i)} = \bar{C}_{i1} (z - z_i) + \bar{C}_{i2} + \bar{W}_N^{(i)}, \quad i = 1, 2,$$

Сталі інтегрування мають вигляд

$$\bar{C}_{11} = -\mathbf{Ki}_N^{(1)}, \quad \bar{C}_{21} = -\frac{\lambda_{iN}^{(1)}}{\lambda_{iN}^{(2)}} \mathbf{Ki}_N^{(1)}, \quad \bar{C}_{22} = -\mathbf{Ki}_N^{(1)} (z_2 - z_1) + \bar{C}_{12},$$

$$\bar{C}_{31} = \frac{\lambda_{iN}^{(2)}}{\lambda_{iN}^{(3)}} \left(-\frac{\lambda_{iN}^{(1)}}{\lambda_{iN}^{(2)}} \mathbf{Ki}_N^{(1)} + \tilde{W}_N^{(2)}(z_3) \right),$$

$$\bar{C}_{32} = -\frac{\lambda_{iN}^{(1)}}{\lambda_{iN}^{(2)}} \mathbf{Ki}_N^{(1)} (z_3 - z_2) - \mathbf{Ki}_N^{(1)} (z_2 - z_1) + \bar{C}_{12} + \bar{W}_N^{(2)}(z_3),$$

а \bar{C}_{12} визначається з рівняння

$$\bar{C}_{31} (z_4 - z_3) + \mathbf{Bi}_N^{(3)} (\bar{C}_{31} (z_4 - z_3) + \bar{C}_{32} - T_{\text{cn}}) + \mathbf{M}_{\text{Nboil}}^{(3)} (\bar{C}_{31} (z_4 - z_3) + \bar{C}_{32} - T_{\text{cn}})^3 = 0.$$

3.5.3. Числові дослідження

Для проведення числових досліджень припустили, що матеріалом першого і третього шарів є кераміка (3.1), а другого – титановий сплав (3.2), за координати меж складових циліндра взяли $z_1 = 0$, $z_2 = 0.3$, $z_3 = 0.9$, $z_4 = 1$, за характерний розмір – $l_0 = \tilde{z}_4$. Значення безрозмірних температур прийняли такими: $T_p = 3/11$, $T_k = 1$, $T_{\text{cn}} = 3/11$, $T_{\text{boil}}^{(3)} = 3/11$, безрозмірних критеріїв – $\text{Po}^{(2)} = -0.5$, $\text{Bi}^{(3)} = 2$, $\text{Ki}^{(1)} = 0.2$. Для дослідження ефективності відведення тепла з обмежувальної поверхні $z = z_4$ за рахунок кипіння рідини величину $\mathbf{M}_{\text{boil}}^{(3)}$ приймали рівною 0, 1, 3, 5, 7.

На рис. 3.11 зображено розподіли температур в термочутливому циліндрі, причому лінія 1 відповідає значенню $M_{\text{boil}}^{(3)} = 0$, 2 – $M_{\text{boil}}^{(3)} = 1$, 3 – $M_{\text{boil}}^{(3)} = 3$, 4 –

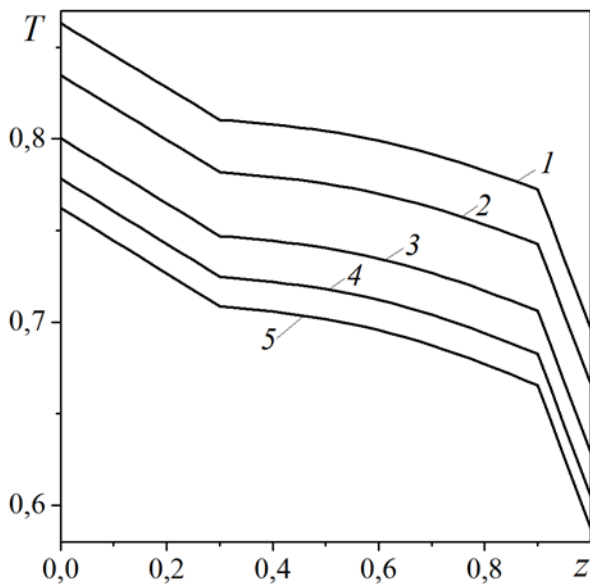


Рис.3.11. Залежність розподілу температури термочутливого циліндра від сталої кипіння

$M_{\text{boil}}^{(3)} = 5$, 5 – $M_{\text{boil}}^{(3)} = 7$. Як бачимо, збільшення значення $M_{\text{boil}}^{(3)}$ суттєво впливає на розподіл температури, а саме веде до її зниження в кожному шарі циліндра. Зокрема, при $M_{\text{boil}}^{(3)} = 7$ температура в точці $z = 0$ зменшилася на 11.7%, в точці $z = 0.3$ – на 12.6%, в точці $z = 0.9$ – на 13.9%, в точці $z = 1$ – на 15.7% в порівнянні з суто конвективним теплообміном ($M_{\text{boil}}^{(3)} = 0$).

Для дослідження впливу термочутливості матеріалів на розподіли температур та

напружень побудували ці розподіли за осовою координатою (рис. 3.12) для значень $M_{\text{boil}}^{(3)} = \{0, 3, 5\}$, при цьому інші вхідні параметри задачі залишили незмінними.

Як бачимо, розподіли температур та напружень у термочутливому циліндрі найкраще наближаються такими розподілами в аналогічному нетермочутливому циліндрі за середньоінтегральних значень термомеханічних характеристик його складових. Однак, якщо максимальні розбіжності для розподілів температур сягають 1.5%, то для розподілів напружень вони можуть навіть перевищувати 50%, а тому нехтування термочутливістю матеріалів складових циліндра при визначенні його напруженого стану дасть хибні результати. Зазначимо також, що зміна M_{boil} мало впливає на кількісну зміну розподілу напружень нетермочутливого циліндра за опорних значень механічних характеристик.

Досліджували вплив інтенсивності джерела тепла (безрозмірного критерію Померанцева) на розподіли температур та напружень у циліндрі. Вхідні параметри задали таким чином: взяли $z_1 = 0$, $z_2 = 0.3$, $z_3 = 0.8$, $z_4 = 1$, $T_{cn} = 5/11$, $T_{boil}^{(3)} = 5/11$, $Ro^{(2)} = \{-0.3, 0, 0.3\}$, $Vi^{(3)} = 2$, $Ki^{(1)} = 0.1$, $M_{boil}^{(3)} = 2$. Графіки розподілів температур і напружень подано на рис. 3.12, причому червоні лінії відповідають значенню $Ro^{(2)} = -0.3$ (джерело тепла), сині – $Ro^{(2)} = 0.3$ (стік тепла), зелені – $Ro^{(2)} = 0$ (відсутність джерела чи стоку).

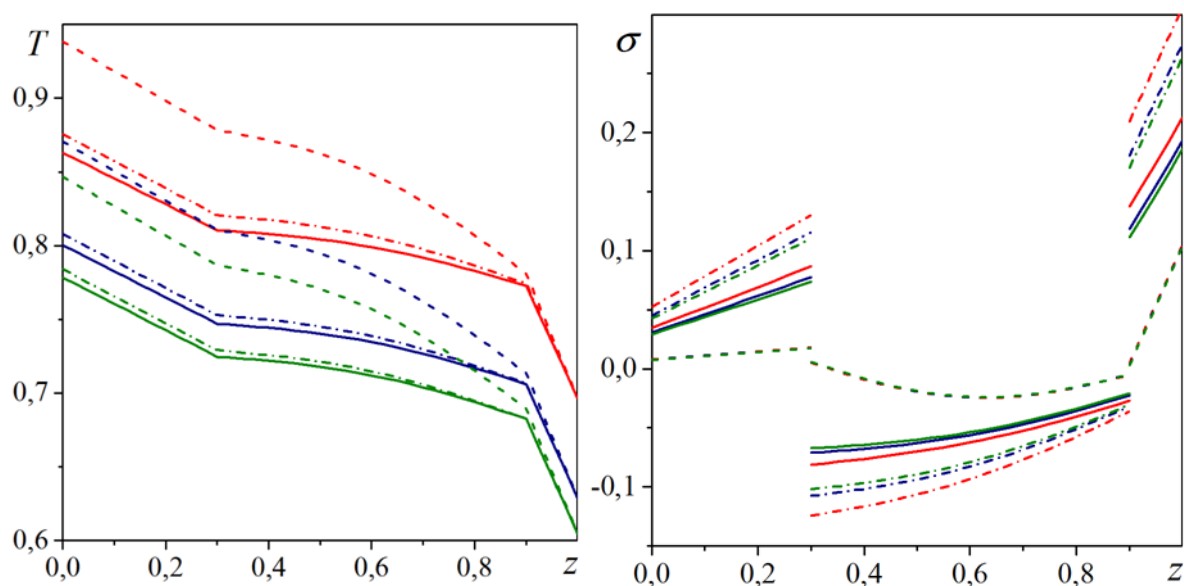


Рис.3.12. Залежність розподілів температур (а) та напружень (б) від сталої кипіння $M_{boil}^{(3)}$

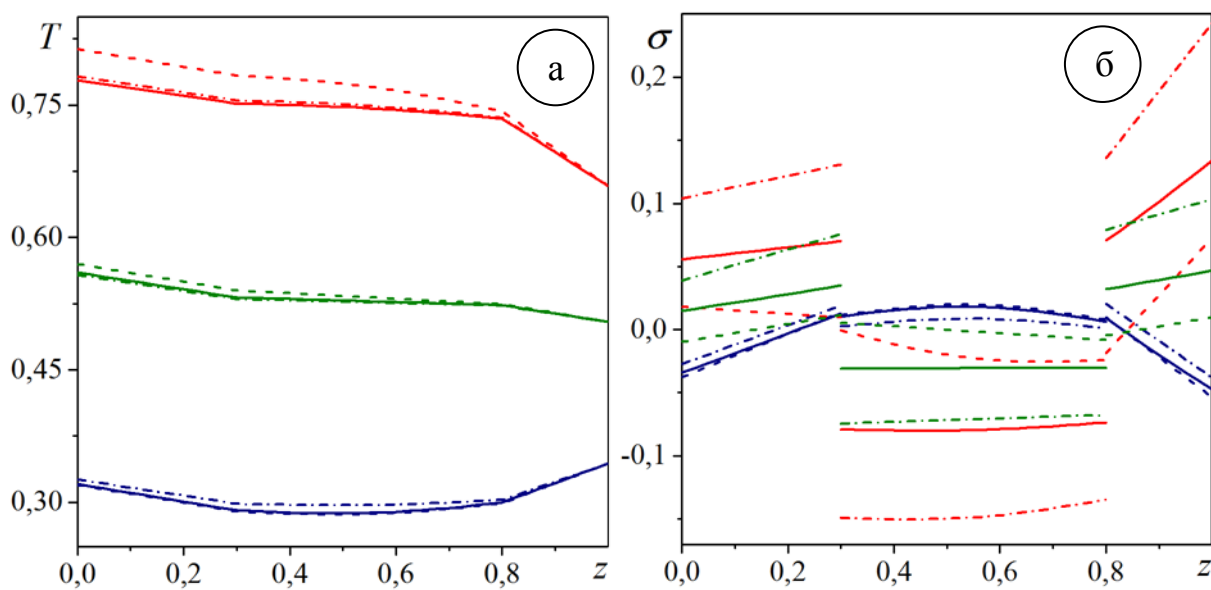


Рис.3.13. Залежність розподілів температур (а) та напружень (б) від критерію Померанцева $Ro^{(2)}$

З рис. 3.13а видно, що розподіли температур термочутливого циліндра краще наближаються такими розподілами аналогічного нетермочутливого циліндра за опорних значень коефіцієнта теплопровідності, якщо всередині другого шару присутній стік тепла, а у інших випадках – за середньоінтегральних значень коефіцієнта теплопровідності. Максимальні розбіжності між розподілами температури термочутливого і нетермочутливого циліндрів не перевищують 5%. При цьому, якщо у циліндрі присутній стік тепла, використання опорних значень механічних характеристик для побудови розподілів напружень (рис.3.9б) у циліндрі дає доволі хороше наближення до розподілу напружень в аналогічному термочутливому циліндрі. Однак, нехтування термочутливістю матеріалів, якщо у циліндрі присутні джерела тепла, призводить до великих кількісних (більше 50%) і якісних (стиск у термочутливому і розтяг у нетермочутливому чи навпаки) розбіжностей.

3.6. Моделювання термопружного стану тришарового циліндра за задання на плоских обмежувальних поверхнях сталого потоку тепла та тепловідведення випаровуванням рідини

3.6.1. Формулювання задачі

Розглядається скінченний термочутливий циліндр [80, 92] (рис.3.14), який складається із трьох шарів різної довжини, виготовлених із різних матеріалів. На одній із плоских обмежувальних поверхонь $\tilde{z} = \tilde{z}_1$ заданий сталий потік тепла $q^{(1)}$, а через іншу плоску поверхню $\tilde{z} = \tilde{z}_4$ відбувається відведення тепла шляхом випаровування рідини. Коефіцієнт теплообміну через цю поверхню сталий і рівний $\alpha^{(3)}$, а температура середовища, з яким відбувається теплообмін – $t_{\text{сн}}$. Циліндр нагрівається наявними у внутрішньому шарі джерелами тепла (3.5), де $i = 2$. В інших складових циліндра джерела тепла відсутні. На межі дотику сусідніх складових $\tilde{z} = \{\tilde{z}_2, \tilde{z}_3\}$ виконуються умови ідеального теплового

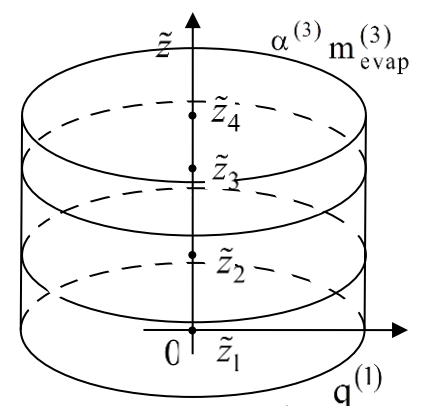


Рис.3.14. Циліндр тришаровий за осью координатою

контакту. Циліндричні поверхні кожного із складових є теплоізованими, а отже потік тепла через них відсутній. Через теплову ізоляцію циліндричних поверхонь складових розподіл температури в циліндрі залежатиме лише від осової координати.

3.6.2. Математична модель розподілу температури та її розв'язок

Термочутливий циліндр. Математична модель у безрозмірному вигляді для визначення розподілу температури термочутливого циліндра включає

- рівняння теплопровідності для складових

$$\frac{d}{dz} \left(\lambda_*^{(i)}(T_i) \frac{dT_i}{dz} \right) = W^{(i)}(z) \delta_{i2}, \quad z_i < z < z_{i+1}, \quad i = \overline{1,3},$$

- крайові умови на обмежувальних плоских поверхнях

$$\lambda_*^{(1)}(T_1) \frac{dT_1}{dz} \Big|_{z=z_1} = -\text{Ki}^{(1)},$$

$$\left[\lambda_*^{(3)}(T_3) \frac{dT_3}{dz} + \text{Bi}^{(3)} \left((T_3 - T_{\text{cn}}) + \text{M}_{\text{evap}}^{(3)} \left(\frac{p_{\text{A,sat}}}{T_3} - \frac{p_{\text{A,c}}}{T_{\text{cn}}} \right) \right) \right]_{z=z_4} = 0;$$

- умови контакту на поверхні дотику складових циліндра

$$T_{i-1} \Big|_{z=z_i} = T_i \Big|_{z=z_i}, \quad \frac{\lambda_{t0}^{(i-1)}}{\lambda_{t0}^{(i)}} \lambda_*^{(i-1)}(T_{i-1}) \frac{dT_{i-1}}{dz} \Big|_{z=z_i} = \lambda_*^{(i)}(T_i) \frac{dT_i}{dz} \Big|_{z=z_i}, \quad i = 2,3.$$

Лінеаризована модель відрізняється від даної лише крайовою умовою на обмежувальній поверхні $z = z_4$. Вона є такою:

$$\left[\lambda_*^{(3)}(T_3) \frac{dT_3}{dz} + \text{Bi}^{(3)} \left((T_3 - T_{\text{cn}}) + \text{M}_{\text{evap}}^{(3)} (\xi_1 T_3 + \tau^{(3)}) \right) \right]_{z=z_4} = 0.$$

Для побудови розв'язку сформульованої математичної моделі здійснено передбачене представленою у другому розділі методикою інтегральне перетворення Кірхгофа. У результаті отримано простішу нелінійну задачу на змінні Кірхгофа. Інтегруючи лінійні рівняння, отримані з рівнянь теплопровідності, знаходимо змінні Кірхгофа, які мають вигляд

$$\theta_i = C_{i1} (z - z_i) + C_{i2} + \bar{W}^{(i)}(z) \delta_{i2}, \quad i = 1,2,$$

$$\begin{aligned}
C_{11} &= -\mathbf{Ki}^{(1)}, \quad C_{21} = -\frac{\lambda_t^{(1)}}{\lambda_t^{(2)}} \mathbf{Ki}^{(1)}, \quad C_{31} = \frac{\lambda_t^{(2)}}{\lambda_t^{(3)}} \left(-\frac{\lambda_t^{(1)}}{\lambda_t^{(2)}} \mathbf{Ki}^{(1)} + \tilde{W}^{(2)}(z_3) \right), \\
C_{22} &= -\mathbf{Ki}^{(1)}(z_2 - z_1) + C_{12} + \\
&\quad + \frac{k_2 - k_1}{2} \left(\frac{\sqrt{1 + 2k_1(-\mathbf{Ki}^{(1)}(z_2 - z_1) + C_{12})} - 1}{k_1} \right)^2, \\
C_{32} &= \theta_2|_{z=z_3} + \frac{k_3 - k_2}{2} \left(\frac{\sqrt{1 + 2k_2 \theta_2|_{z=z_3}} - 1}{k_2} \right)^2, \\
\theta_2|_{z=z_3} &= -\mathbf{Ki}^{(1)} \left(\frac{\lambda_t^{(1)}}{\lambda_t^{(2)}} (z_3 - z_2) + (z_2 - z_1) \right) + C_{12} + \\
&\quad + \frac{k_2 - k_1}{2} \left(\frac{\sqrt{1 + 2k_1(-\mathbf{Ki}^{(1)}(z_2 - z_1) + C_{12})} - 1}{k_1} \right)^2,
\end{aligned}$$

а C_{12} , якщо використовується лінеаризована модель, визначається з рівняння

$$\begin{aligned}
C_{31}(z_4 - z_3) + \mathbf{Bi}^{(3)} &\left(\left(\frac{\sqrt{1 + 2k_3 \theta_3|_{\rho=\rho_4}} - 1}{k_3} + T_p - T_{cn} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{M}_{\text{evap}}^{(3)} \left(p_{A,\text{sat}} \left(\frac{\sqrt{1 + 2k_3 \theta_3|_{\rho=\rho_4}} - 1}{k_3} + T_p \right)^{-1} - \frac{p_{A,c}}{T_{cn}} \right) \right) = 0,
\end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned}
C_{31}(z_4 - z_3) + \mathbf{Bi}^{(3)} &\left(\left(\frac{\sqrt{1 + 2k_3 \theta_3|_{\rho=\rho_4}} - 1}{k_3} + T_p - T_{cn} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{M}_{\text{evap}}^{(3)} \left(\xi_1 \left(\frac{\sqrt{1 + 2k_3 \theta_3|_{\rho=\rho_4}} - 1}{k_3} + T_p \right) + \tau^{(n)} \right) \right) = 0,
\end{aligned}$$

для нелінеаризованої моделі. Розв'язки наведених рівнянь не наводимо через громіздкість. Їх отримано за допомогою програми аналітичних перетворень. Під час числових досліджень використовуємо той із них, який забезпечує фізично коректний розподіл температури.

Нетермочутливий циліндр. Математична модель у безрозмірних величинах для визначення розподілу температури нетермочутливого циліндра має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T_{iN}}{dz^2} &= W_N^{(i)}(z) \delta_{i2}, \quad z_i < z < z_{i+1}, \quad i = \overline{1,3}, \\ \left. \frac{dT_{1N}}{dz} \right|_{z=z_1} &= -\mathbf{Ki}_N^{(1)}, \\ \left[\frac{dT_{3N}}{dz} + \mathbf{Bi}_N^{(3)} \left((T_{3N} - T_{\text{cn}}) + M_{\text{N boil}}^{(3)} \left(\frac{P_{\text{A,sat}}}{T_{3N}} - \frac{P_{\text{A,c}}}{T_{\text{cn}}} \right) \right) \right]_{z=z_4} &= 0, \\ T_{i-1N} \Big|_{z=z_i} = T_{iN} \Big|_{z=z_i}, \quad \frac{\lambda_{t0}^{(i-1)}}{\lambda_{t0}^{(i)}} \left. \frac{dT_{i-1N}}{dz} \right|_{z=z_i} &= \left. \frac{dT_{iN}}{dz} \right|_{z=z_i}, \quad i = 2, 3. \end{aligned}$$

У лінеаризованій моделі умова на поверхні $z = z_4$ матиме вигляд

$$\left[\frac{dT_{3N}}{dz} + \mathbf{Bi}_N^{(3)} \left((T_{3N} - T_{\text{cn}}) + M_{\text{N boil}}^{(3)} \left(\xi_1 T_{3N} - \tau^{(n)} \right) \right) \right]_{z=z_4} = 0.$$

Рівняння для визначення розподілу температури термочутливого циліндра мають вигляд

$$T_N^{(i)} = \bar{C}_{i1} (z - z_i) + \bar{C}_{i2} + \bar{W}_N^{(i)}, \quad i = 1, 2,$$

причому сталі інтегрування обчислюються таким чином

$$\begin{aligned} \bar{C}_{11} &= -\mathbf{Ki}_N^{(1)}, \quad \bar{C}_{21} = -\frac{\lambda_{tN}^{(1)}}{\lambda_{tN}^{(2)}} \mathbf{Ki}_N^{(1)}, \quad \bar{C}_{22} = -\mathbf{Ki}_N^{(1)} (z_2 - z_1) + \bar{C}_{12}, \\ \bar{C}_{31} &= \frac{\lambda_{tN}^{(2)}}{\lambda_{tN}^{(3)}} \left(-\frac{\lambda_{tN}^{(1)}}{\lambda_{tN}^{(2)}} \mathbf{Ki}_N^{(1)} + \bar{W}_N^{(2)}(z_3) \right), \\ \bar{C}_{32} &= -\frac{\lambda_{tN}^{(1)}}{\lambda_{tN}^{(2)}} \mathbf{Ki}_N^{(1)} (z_3 - z_2) - \mathbf{Ki}_N^{(1)} (z_2 - z_1) + \bar{C}_{12} + \bar{W}_N^{(2)}(z_3), \end{aligned}$$

причому \bar{C}_{12} визначається з рівняння

$$\begin{aligned} \bar{C}_{31} (z_4 - z_3) + \mathbf{Bi}_N^{(3)} \left((\bar{C}_{31} (z_4 - z_3) + \bar{C}_{32} - T_{\text{cn}}) + \right. \\ \left. + M_{\text{N evap}}^{(3)} \left(\frac{P_{\text{A,sat}}}{\bar{C}_{31} (z_4 - z_3) + \bar{C}_{32}} - \frac{P_{\text{A,c}}}{T_{\text{cn}}} \right) \right) = 0, \end{aligned}$$

якщо використовується нелінеаризована модель і

$$\begin{aligned} \bar{C}_{31} (z_4 - z_3) + \mathbf{Bi}_N^{(3)} \left((\bar{C}_{31} (z_4 - z_3) + \bar{C}_{32} - T_{\text{cn}}) + \right. \\ \left. + M_{\text{N evap}}^{(3)} \left(\xi_1 (\bar{C}_{31} (z_4 - z_3) + \bar{C}_{32}) - \tau^{(n)} \right) \right) = 0, \end{aligned}$$

3.6.3. Числові дослідження

Нехай матеріалом першого і третього шарів є кераміка (3.1), а другого – титановий сплав (3.2). За координати меж шарів циліндра взяли $z_1 = 0$, $z_2 = 0.3$, $z_3 = 0.7$, $z_4 = 1$, за характерний розмір – $l_0 = z_4$. Значення безрозмірних температур прийняли такими: $T_p = T_{cn} = 3/11$, $T_k = 1$, безрозмірних критеріїв – $Po^{(2)} = -0.5$, $Vi^{(3)} = 0.5$, $Ki^{(1)} = -0.2$.

Результати моделювання процесу випаровування рідини з поверхні із застосуванням лінеаризованої та нелінійної моделей зображено на рис. 3.15. Тут червоними лініями позначено розподіли температур та напружень за використання рідини FC-72 (3.3), а синіми – FC-87 (3.4), причому пунктирні лінії описують відповідні розподіли лінеаризованої моделі.

Обрахунки показали, що розподіли температур та напружень лінеаризованої та нелінійної моделей мають досить великі кількісні (більше 50%), а іноді і якісні, розбіжності.

Для дослідження впливу залежності термомеханічних характеристик матеріалів шарів циліндра від температури на рівень і характер розподілів температур і напружень, побудували графіки розподілів температур і напружень (рис.3.16) для термочутливого та нетермочутливого циліндрів. Вхідні дані залишили такими ж, як у попередньому дослідженні. Червоні криві описують термопружний стан циліндра без охолодження його шляхом випаровування (конвективний теплообмін), сині відповідають випадку використання у якості охолоджуючої рідини FC-72, зелені – рідини FC-87.

З рис. 3.16 видно, що тепловідведення з обмежувальних поверхонь багат шарових структур шляхом випаровування рідини є досить ефективним, а найкраще охолодження дає рідина FC-87, причому значення розподілів температур і напружень в шарах зменшують свої значення на більш, ніж на 30%. Також, розподіли температур у термочутливому циліндрі краще наближаються такими розподілами в аналогічному нетермочутливому циліндрі за середньоінтегральних значень

коефіцієнті теплопровідності матеріалів його шарів, що може бути корисним при їх експрес-оцінці.

Однак, використання моделі нетермочутливого тіла для визначення температурних напружень дає погане наближення до такого розподілу термочутливого циліндра, зокрема, максимальні різниці можуть перевищити 50% .

Досліджували вплив інтенсивності джерела тепла (безрозмірного критерію Померанцева) на розподіли температур та напружень у циліндрі. Вхідні парамет-

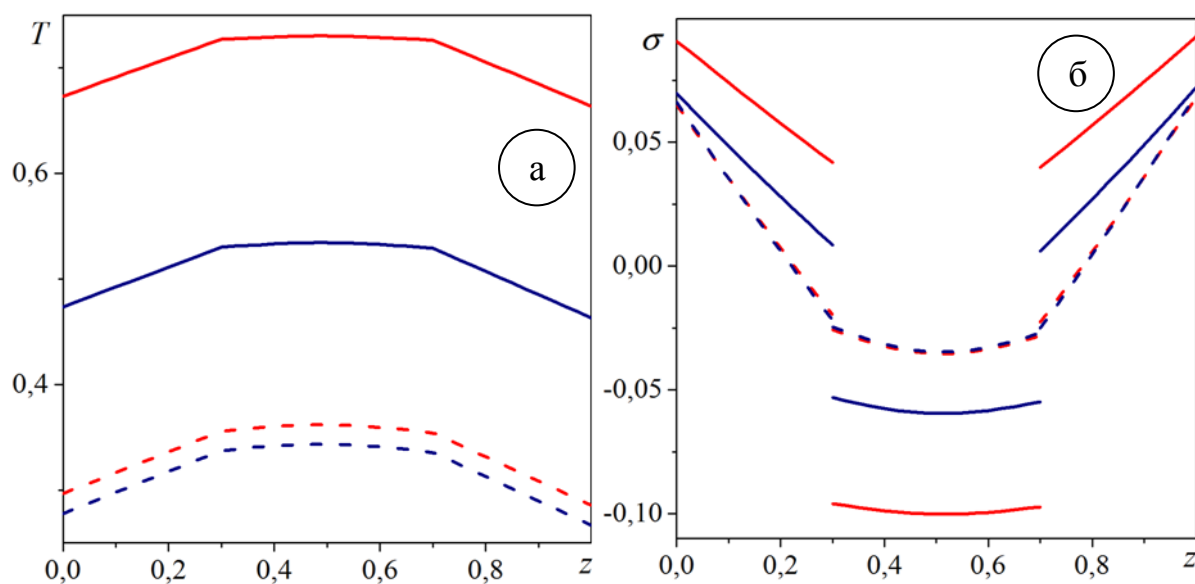


Рис.3.15. Розподіли температур (а) та напружень (б) за використання нелінійної та лінеаризованої моделей

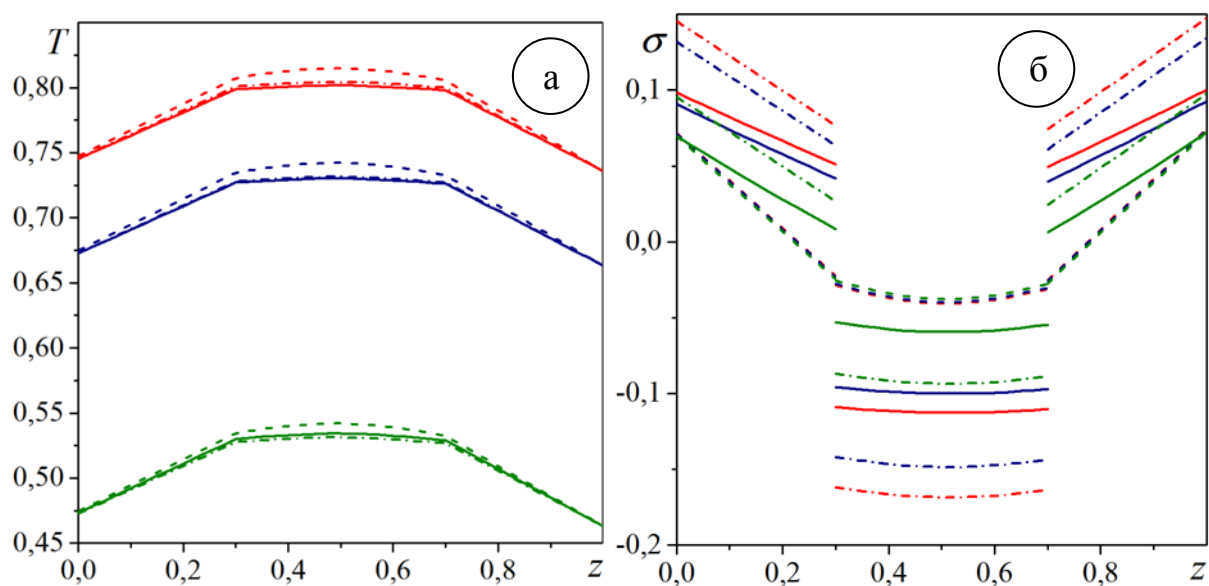


Рис.3.16. Розподіли температур (а) та напружень (б) в залежності від використаної рідини для охолодження циліндра

ри задали таким чином: взяли $z_1 = 0$, $z_2 = 0.2$, $z_3 = 0.8$, $z_4 = 1$, $T_{\text{cn}} = 3/11$, $Ro^{(2)} = \{-0.15, 0, 0.15\}$, $Bi^{(3)} = 1$, $Ki^{(1)} = 0.3$. Графіки розподілів температур і напружень подано на рис. 3.17, причому червоні лінії відповідають значенню $Ro^{(2)} = -0.15$ (джерело тепла), сині – $Ro^{(2)} = 0.15$ (стік тепла), зелені – $Ro^{(2)} = 0$ (відсутність нагрівального елемента в циліндрі).

З рис. 3.17а видно, що, якщо всередині другого шару присутній стік тепла, розподіли температур термочутливого циліндра краще наближаються такими розподілами аналогічного нетермочутливого циліндра за середньоінтегральних значень коефіцієнта теплопровідності. Однак, нехтування термочутливістю матеріалів призводить до достатньо великих (більше 50%) кількісних і якісних (стиск у термочутливому і розтяг у нетермочутливому чи навпаки) розбіжностей у розподілах напружень.

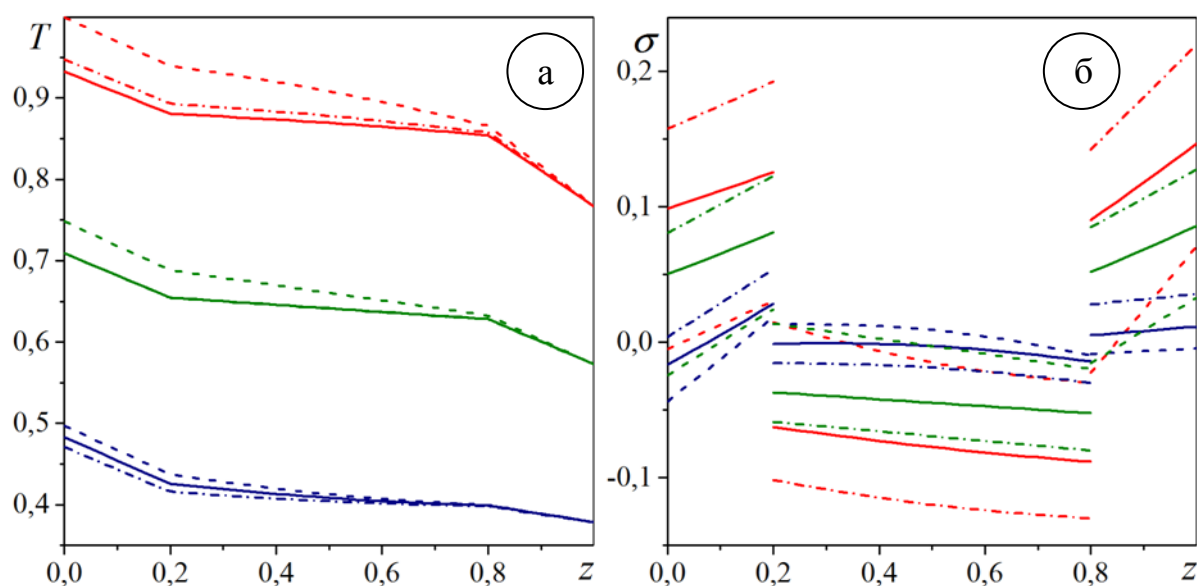


Рис.3.17. Залежність розподілів температур (а) та напружень (б) від критерію Померанцева $Ro^{(2)}$

3.7. Порівняння розподілів температури та напружень за тепловідведення шляхом кипіння і випаровування рідини з плоских обмежувальних поверхонь

Розглянемо задачі теплопровідності, представлені у пунктах 3.5 та 3.6. Як бачимо, моделі розподілів температур циліндрів відрізнятимуться лише умовами на обмежувальній поверхні $z = z_4$. Дослідимо ефективність кожного з методів тепловідводу: випаровування та кипіння рідин на поверхнях.

Нехай матеріалом першого і третього шарів є кераміка (3.1), а другого – титановий сплав (3.2). За координати меж шарів циліндра взяли $z_1 = 0$, $z_2 = 0.3$, $z_3 = 0.9$, $z_4 = 1$, за характерний розмір – $l_0 = z_4$. Значення безрозмірних температур прийняли такими: $T_p = T_{cn} = 3/11$, $T_k = 1$, безрозмірних критеріїв – $Ro^{(2)} = -0.5$, $Vi^{(3)} = 1.6$, $Ki^{(1)} = 0.2$. В якості охолоджуючих рідин використаємо FC-72 (3.3) та FC-87 (3.4) з температурами кипіння $T_{boil}^{(3)} = 329/1100$ та $T_{boil}^{(3)} = 303/1100$ відповідно.

Графіки розподілів температур подано на рис. 4.18. Зазначимо, що червоними лініями зображено розподіли температур циліндра без тепловідведення з зов-

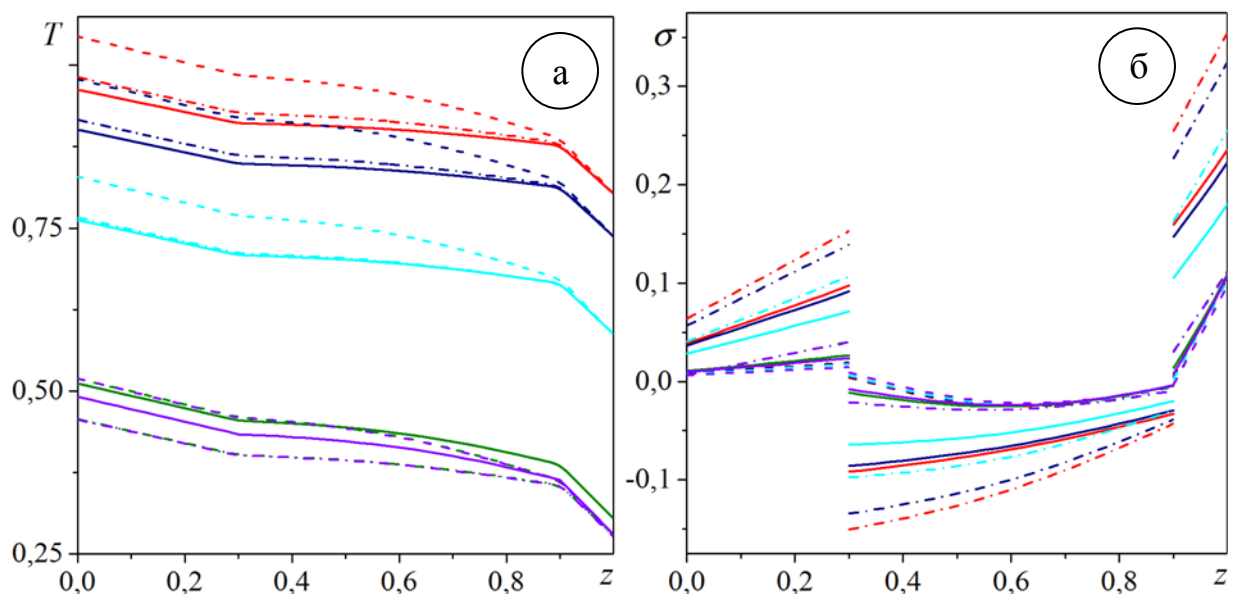


Рис.3.18. Залежність розподілів температур (а) та напружень (б) від критерію Померанцева $Ro^{(2)}$

нішньої поверхні $z = z_4$ (суто конвективний теплообмін), синіми – при випаровуванні рідини FC-72, а блакитними – FC-87, зеленими – при кипінні рідини FC-72, а фіолетовими – FC-87.

Бачимо, що кращий тепловідвід здійснюється за використання рідини FC-87. Більше того, інтенсивніше зменшуватиметься рівень температури та напружень, якщо на поверхні відбуватиметься кипіння рідини, ніж її випаровування. Що стосується врахування термочутливості матеріалів шарів циліндра, то температури краще наближаються такими розподілами аналогічного нетермочутливого циліндра за середньоінтегральних значень коефіцієнта теплопровідності при випаровуванні рідини і опорних – при кипінні. Для розподілів напружень навпаки – за середньоінтегральних при кипінні та опорних при випаровуванні рідини. Однак, якщо для розподілів температур максимальні розбіжності між термочутливим і нетермочутливим циліндрами складає 12% , то для напружень кількісні розбіжності перевищують 50% .

3.8. Висновки до розділу

Отримано розв'язки задач теплопровідності та термопружності для термочутливих та аналогічних їм нетермочутливих шаруватих за осьовою координатою циліндричних тіл. При цьому брались до уваги різні крайові умови теплообміну між циліндром та зовнішнім середовищем: стала температура чи тепловий потік, конвективний, променевий чи конвективно-променевий теплообміни, відведення тепла шляхом кипіння чи випаровування рідини з поверхні. У якості матеріалів шарів тіла вибрано кераміку ZrO_2 та титановий сплав Ti-6Al-4V, а охолоджуючих рідин – FC-72 та FC-87, що спеціально розроблені для використання в мікроелектроніці.

Здійснено порівняльний аналіз отриманих результатів та досліджено вплив термочутливості матеріалів шарів циліндричних тіл, а також значень безрозмірних критеріїв Біо, Кірпічова, Старка та Померанцева на характер та рівень розподілів температур та напружень.

Встановлено, що нехтування термочутливістю матеріалів при визначенні розподілів температур циліндра цілком допустиме, оскільки максимальні розбіжності між розподілами термочутливого та нетермочутливого циліндрів є достатньо малими. Це, однак, не має місця при визначенні розподілів напружень. Так, при дослідженнях спостерігались великі кількісні (більше 50%) та якісні (розтяг в термочутливому та стиск у нетермочутливому чи навпаки) розбіжності між розподілами напружень.

Досліджено методи тепловідведення шляхом кипіння та випаровування рідини з обмежувальних поверхонь. Ці методи є досить ефективними, оскільки достатньо добре контролюють тепловий стан тіла – температура може знизитися до 30%. Показано, що використання лінеаризованої крайової умови відведення тепла шляхом випаровування рідини, не дає точного розв'язку математичної моделі.

РОЗДІЛ 4. МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОВОГО ТА ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ ШАРУВАТИХ ЗА РАДІАЛЬНОЮ КООРДИНАТОЮ ТЕРМОЧУТЛИВИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ТІЛ ЗА СКЛАДНОГО ТЕПЛООБМІНУ

У четвертому розділі [49, 76, 80, 81, 96, 158] визначено температурні поля радіально-шаруватих термочутливих та нетермочутливих порожнистих циліндричних тіл за різних умов теплообміну на обмежувальних поверхнях, які були наведені у другому розділі, та наявності тепловиділень всередині шарів. Визначено компоненти напружено-деформованого стану. Здійснено порівняльний аналіз отриманих результатів та досліджено вплив термочутливості матеріалів шарів, а також значень безрозмірних критеріїв на характер та рівень розподілів температур та компонент напружено-деформованого стану.

4.1. Вхідні дані, що використовуються для визначення розподілів температур та компонент напружено-деформованого стану радіально-шаруватих термочутливих та нетермочутливих циліндрів

Вхідними даними, які необхідні для отримання розподілів температур та напружень n -шарового за радіальною координатою порожнистого циліндра, є:

- значення теплових (коефіцієнтів теплопровідності $\lambda_i^{(i)}$) та механічних (коефіцієнтів Пуассона $\nu^{(i)}$, температурних коефіцієнтів лінійного розширення $\alpha_i^{(i)}$ та модулів пружності $E^{(i)}$) характеристик матеріалів шарів циліндра, $i = \overline{1, n}$;
- безрозмірні координати меж шарів циліндра $\rho_i, i = \overline{1, n}, \rho_i \neq 0$;
- безрозмірні початкова T_p та кінцева T_k температури із діапазону задання температур;
- безрозмірні температури середовищ T_{c1}, T_{cn} , якщо умовами теплообміну на обмежувальних поверхнях є стала температура, конвективно-променевий теплообмін, або тепловідведення шляхом кипіння чи випаровування рідини з поверхні;

- безрозмірні критерії Померанцева $Po^{(i)}$ ($i = \overline{1, n}$) для кожного шару циліндра, в якому наявні джерела тепла. Як відомо, критерій Померанцева виражає відношення кількості тепла, що виділяється джерелом за одиницю часу в об'ємі R , до максимальної кількості тепла, що передається теплопровідністю;
- безрозмірні критерії Кірпічова $Ki^{(i)}$ ($i = \overline{1, n}$), якщо на обмежувальних поверхнях циліндра задано умови сталого теплового потоку. За означенням, критерій Біо характеризує теплообмін між твердим тілом і зовнішнім середовищем;
- безрозмірні критерії Біо $Bi^{(i)}$ ($i = \overline{1, n}$), якщо на обмежувальних поверхнях циліндра задано конвективний чи конвективно-променевиий теплообмін, а також умови тепловідведення шляхом кипіння чи випаровування рідини з поверхонь. Цей критерій виражає відношення потоку тепла, підведеного до тіла, до потоку тепла відведеного всередину тіла;
- безрозмірні критерії Старка $Sk^{(i)}$ ($i = \overline{1, n}$), якщо на обмежувальних поверхнях циліндра виконуються умови конвективно-променевого теплообміну;
- стала кипіння $M_{boil}^{(i)}$ ($i = \overline{1, n}$), якщо тепловідведення в циліндрі відбувається шляхом кипіння рідини на обмежувальних поверхнях;
- стала випаровування $M_{boil}^{(i)}$ ($i = \overline{1, n}$), якщо тепловідведення в циліндрі відбувається шляхом випаровування рідини із зовнішніх обмежувальних поверхонь.

При проведенні числових досліджень припустили, що матеріалами шарів циліндра є кераміка ZrO_2 (3.1) та титановий сплав $Ti - 6Al - 4V$ (3.2) у різних їх комбінаціях, а у якості охолоджуючих рідин взяли FC-72 (3.3) та FC-87 (3.4).

У разі задання у якомусь із шарів джерел тепла, вважається, що вони розподілені за параболічним законом (3.5), причому для термочутливого тіла

$$\tilde{W}^{(i)}(\rho) = -\frac{4Po^{(2)}}{(\rho_{i+1} - \rho_i)^2} \left(\frac{\rho^3}{4} - \frac{\rho^2}{3}(\rho_{i+1} + \rho_i) + \frac{\rho}{2}\rho_{i+1}\rho_i - \frac{\rho_i^3}{6\rho} \left(\rho_{i+1} - \frac{\rho_i}{2} \right) \right),$$

$$\bar{W}^{(i)}(\rho) = -\frac{4P_0^{(i)}}{(\rho_{i+1} - \rho_i)^2} \left(\rho^2 \left(\frac{\rho^2}{16} - \frac{\rho}{9}(\rho_{i+1} + \rho_i) + \frac{\rho_{i+1}\rho_i}{4} \right) - \rho_i^3 \left(\frac{\rho_i}{16} - \frac{\rho_{i+1} + \rho_i}{9} + \frac{\rho_{i+1}}{4} \right) - \frac{\rho_i^3}{6} \ln \frac{\rho}{\rho_i} \left(\rho_{i+1} - \frac{\rho_i}{2} \right) \right),$$

а для нетермочутливого

$$\begin{aligned} \tilde{W}_N^{(i)}(\rho) &= -\frac{4P_0_N^{(i)}}{(\rho_{i+1} - \rho_i)^2} \left(\frac{\rho^3}{4} - \frac{\rho^2}{3}(\rho_{i+1} + \rho_i) + \frac{\rho}{2}\rho_{i+1}\rho_i - \frac{\rho_i^3}{6\rho} \left(\rho_{i+1} - \frac{\rho_i}{2} \right) \right), \\ \bar{W}_N^{(i)}(\rho) &= -\frac{4P_0_N^{(i)}}{(\rho_{i+1} - \rho_i)^2} \left(\rho^2 \left(\frac{\rho^2}{16} - \frac{\rho}{9}(\rho_{i+1} + \rho_i) + \frac{\rho_{i+1}\rho_i}{4} \right) - \rho_i^3 \left(\frac{\rho_i}{16} - \frac{\rho_{i+1} + \rho_i}{9} + \frac{\rho_{i+1}}{4} \right) - \frac{\rho_i^3}{6} \ln \frac{\rho}{\rho_i} \left(\rho_{i+1} - \frac{\rho_i}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

Розподіли компонент напружено-деформованого стану багат шарового за радіальною координатою термочутливого порожнистого циліндра обчислювали за формулами [79] (2.95)-(2.101). Оскільки вони справедливі тільки для тонких шарів, то розрахунки проводимо відповідно до такого алгоритму:

1. Проводимо обчислення за формулами (2.95)-(2.101) коли кожен з шарів циліндра не поділений на тонкі.
2. Перевіряємо виконання інтегральної умови (2.94).
3. Якщо умова (2.94) не виконується, то збільшуємо розбиття шарів на складові і повертаємося до п.2. В протилежному випадку обчислення закінчуємо.

Розподіли компонент напружено-деформованого стану багат шарового за радіальною координатою нетермочутливого порожнистого циліндра обчислювали за формулами (2.102)-(2.108).

4.2. Моделювання термопружного стану тришарового порожнистого циліндра за задання на циліндричних поверхнях сталої температури та конвективного теплообміну

4.2.1. Формулювання задачі

Розглядається безмежний порожнистий циліндр [76], зображений на рис.4.1, який складається із трьох шарів різної товщини, виготовлених із різних матеріалів. Циліндр нагрівається наявним у внутрішньому шарі джерелами тепла (3.7). На внутрішній обмежувальній поверхні $r = r_1$ підтримується стала температура $t = t_{cl}$, а через зовнішню – $r = r_4$ циліндр конвективно обмінюється теплом із середовищем, температура якого $t = t_{cn}$. Коефіцієнт теплообміну через цю поверхню сталий і рівний α . На межі дотику сусідніх шарів $r = \{r_2, r_3\}$ виконуються умови ідеального теплового контакту.

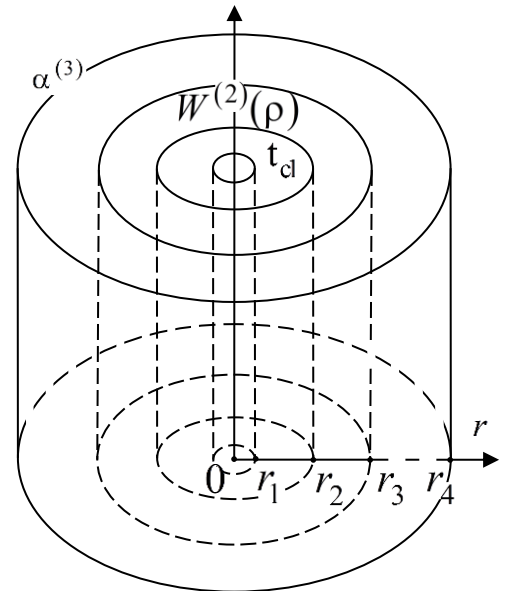


Рис.4.1. Циліндр n -шаровий за радіальною координатою

4.2.2. Математична модель для розподілу температури та її розв'язок

Термочутливий циліндр. Обезрозмірена математична модель термочутливого циліндра для визначення розподілу температури містить:

- рівняння теплопровідності для складових

$$\frac{d}{d\rho} \left(\rho \lambda_*^{(i)}(T_i) \frac{dT_i}{d\rho} \right) = W^{(i)}(\rho) \delta_{i2}, \quad \rho_i < \rho < \rho_{i+1}, \quad i = \overline{1,3};$$

- крайові умови на обмежувальних плоских поверхнях

$$T_1|_{\rho=\rho_1} = T_{cl}, \quad \left[\lambda_*^{(3)}(T_3) \frac{dT_3}{d\rho} + \text{Bi}^{(3)}(T_3 - T_{cn}) \right]_{\rho=\rho_4} = 0;$$

- умови контакту на поверхнях дотику складових циліндра

$$T_{i-1}|_{\rho=\rho_i} = T_i|_{\rho=\rho_i}, \quad \frac{\lambda_{t0}^{(i-1)}}{\lambda_{t0}^{(i)}} \lambda_*^{(i-1)} (T_{i-1}) \frac{dT_{i-1}}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_i} = \lambda_*^{(i)} (T_i) \frac{dT_i}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_i}, \quad i = 2, 3.$$

Для побудови розв'язку сформульованої математичної моделі використано методику, викладену у другому розділі роботи. Перетворення Кірхгофа, що передбачене у цій методиці, дозволяє отримати простішу нелінійну задачу на змінні Кірхгофа. Інтегруючи лінійні рівняння, отримані з рівнянь теплопровідності, знаходимо змінні Кірхгофа, які мають вигляд

$$\theta_i = C_{i1} \ln \frac{\rho}{\rho_i} + C_{i2} + \bar{W}^{(i)}(\rho) \delta_{i2}, \quad i = \overline{1, 3},$$

а невідомі сталі інтегрування визначаються так:

$$C_{12} = (T_{c1} - T_p) + \frac{k_1}{2} (T_{c1} - T_p)^2, \quad C_{21} = \frac{\lambda_{t0}^{(1)}}{\lambda_{t0}^{(2)}} C_{11},$$

$$C_{31} = \frac{\lambda_{t0}^{(2)}}{\lambda_{t0}^{(3)}} \left(\frac{\lambda_{t0}^{(1)}}{\lambda_{t0}^{(2)}} C_{11} + \rho_3 \tilde{W}^{(2)}(\rho_3) \right),$$

$$C_{22} = C_{11} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} + (T_{c1} - T_p) + \frac{k_1}{2} (T_{c1} - T_p)^2 + \frac{k_2 - k_1}{2k_1^2} \left(\sqrt{1 + 2k_1 \left(C_{11} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} + (T_{c1} - T_p) + \frac{k_1}{2} (T_{c1} - T_p)^2 \right)} - 1 \right)^2,$$

$$C_{32} = \theta_2|_{\rho=\rho_3} + \frac{k_3 - k_2}{2k_2^2} \left(\sqrt{1 + 2k_2 \theta_2|_{\rho=\rho_3}} - 1 \right)^2,$$

$$\theta_2|_{\rho=\rho_3} = C_{11} \left(\frac{\lambda_{t0}^{(1)}}{\lambda_{t0}^{(2)}} \ln \frac{\rho_3}{\rho_2} + \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) + (T_{c1} - T_p) + \frac{k_1}{2} (T_{c1} - T_p)^2 + \bar{W}^{(2)}(\rho_3) + \frac{k_2 - k_1}{2k_1^2} \left(\sqrt{1 + 2k_1 \left(C_{11} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} + (T_{c1} - T_p) + \frac{k_1}{2} (T_{c1} - T_p)^2 \right)} - 1 \right)^2,$$

причому сталу C_{11} отримано з рівняння

$$\frac{C_{31}}{\rho_4} + \text{Bi}^{(3)} \left(\frac{\sqrt{1 + 2k_3 \theta_3|_{\rho=\rho_4}} - 1}{k_3} + T_p - T_{cn} \right) = 0,$$

де

$$\theta_3|_{\rho=\rho_4} = \frac{\lambda_{t0}^{(2)}}{\lambda_{t0}^{(3)}} \ln \frac{\rho_4}{\rho_3} \left(\frac{\lambda_{t0}^{(1)}}{\lambda_{t0}^{(2)}} C_{11} + \rho_3 \tilde{W}^{(2)}(\rho_3) \right) + \theta_2|_{\rho=\rho_3} + \frac{k_3 - k_2}{2} \left(\frac{\sqrt{1 + 2k_2 \theta_2|_{\rho=\rho_3}} - 1}{k_2} \right)^2,$$

розв'язки якого не наводимо через його громіздкість. Їх отримано з допомогою програми аналітичних перетворень. Під час числових досліджень використовуємо той із них, який забезпечує фізично коректний розподіл температури.

Нетермочутливий циліндр. Математична модель у безрозмірних величинах для визначення розподілу температури нетермочутливого циліндра має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dT_{iN}}{d\rho} \right) &= W_N^{(i)}(\rho) \delta_{i2}, \quad \rho_i < \rho < \rho_{i+1}, \quad i = \overline{1,3}, \\ T_{1N}|_{\rho=\rho_1} &= T_{c1}, \quad \left[\frac{dT_{3N}}{d\rho} + \text{Bi}^{(3)}(T_{3N} - T_{cn}) \right]_{-\rho=\rho_4} = 0, \\ T_{i-1N}|_{\rho=\rho_i} &= T_{iN}|_{\rho=\rho_i}, \quad \frac{\lambda_{t0}^{(i-1)}}{\lambda_{t0}^{(i)}} \frac{dT_{i-1N}}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_i} = \frac{dT_{iN}}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_i}. \end{aligned}$$

Рівняння для визначення розподілу температури нетермочутливого циліндра мають вигляд

$$T_N^{(i)} = \bar{C}_{i1} \ln \frac{\rho}{\rho_i} + \bar{C}_{i2} + \bar{W}_N^{(i)}(\delta_{i2}), \quad i = \overline{1,3},$$

а сталі інтегрування мають вигляд

$$\begin{aligned} \bar{C}_{12} &= T_{c1}, \\ \bar{C}_{11} &= \frac{1}{\Delta} \left(T_{cn} - T_{c1} - \bar{W}_N^{(2)}(\rho_3) - \tilde{W}_N^{(2)}(\rho_3) \frac{\lambda_{tN}^{(2)}}{\lambda_{tN}^{(3)}} \left(\frac{1}{\text{Bi}_N^{(3)} \rho_4} + \ln \frac{\rho_4}{\rho_3} \right) \right), \\ \bar{C}_{21} &= \frac{1}{\Delta \cdot \rho_2} \frac{\lambda_{tN}^{(1)}}{\lambda_{tN}^{(3)}} \left(T_{cn} - T_{c1} - \bar{W}_N^{(2)}(\rho_3) - \tilde{W}_N^{(2)}(\rho_3) \frac{\lambda_{tN}^{(2)}}{\lambda_{tN}^{(3)}} \left(\frac{1}{\text{Bi}_N^{(3)} \rho_4} + \ln \frac{\rho_4}{\rho_3} \right) \right) + \frac{\lambda_{tN}^{(2)}}{\lambda_{tN}^{(3)}} \tilde{W}_N^{(2)}(\rho_3), \\ \bar{C}_{22} &= \frac{1}{\Delta} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \left(T_{cn} - T_{c1} - \bar{W}_N^{(2)}(\rho_3) - \tilde{W}_N^{(2)}(\rho_3) \frac{\lambda_{tN}^{(2)}}{\lambda_{tN}^{(3)}} \left(\frac{1}{\text{Bi}_N^{(3)} \rho_4} + \ln \frac{\rho_4}{\rho_3} \right) \right) + T_{c1}, \end{aligned}$$

$$\bar{C}_{32} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\lambda_{tN}^{(1)}}{\lambda_{tN}^{(2)}} \ln \frac{\rho_3}{\rho_2} + \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \left(T_{cn} - T_{c1} - \bar{W}_N^{(2)}(\rho_3) - \right. \\ \left. - \tilde{W}_N^{(2)}(\rho_3) \frac{\lambda_{tN}^{(2)}}{\lambda_{tN}^{(3)}} \left(\frac{1}{Bi_N^{(3)} \rho_4} + \ln \frac{\rho_4}{\rho_3} \right) \right) + \bar{W}_N^{(2)}(\rho_3) + T_{c1},$$

де

$$\Delta = \frac{\lambda_{tN}^{(1)}}{\lambda_{tN}^{(3)}} \frac{1}{\rho_3} \left(\frac{1}{Bi_N^{(3)} \rho_4} + \ln \frac{\rho_4}{\rho_3} \right) + \frac{\lambda_{tN}^{(2)}}{\lambda_{tN}^{(3)}} \ln \frac{\rho_3}{\rho_2} + \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}.$$

4.2.3. Числові дослідження.

Дослідимо залежність розподілів температури і компонент напружено-де-

формованого стану від безрозмірного

критерію Померанцева. Нехай матеріалами

першого і третього шарів циліндра є

кераміка (3.1), а другого – титановий сплав

(3.2). За координати меж складових

циліндра взяли $\rho_1 = 0.6$, $\rho_2 = 0.75$,

$\rho_3 = 0.95$, $\rho_4 = 1$, за характерний розмір –

$l_0 = r_4$. Значення без розмірних температур

прийняли такими: $T_{c1} = 1/3$, $T_{cn} = 1/2$, без-

розмірних критеріїв – $Po^{(2)} = \{0, -2, -5\}$,

$Bi^{(3)} = 2$, а сталі тиски на внутрішній та

зовнішній поверхнях циліндра і зусилля на

торцях – $p_1 = p_2 = p = 0$.

Графіки розподілів температур подано на рис.4.2.,

причому червоні лінії відповідають значенню $Po^{(2)} = -5$, сині – -2 , зелені – 0 .

Максимальні розбіжності між температурами в термочутливому і нетермо-

чутливих за опорних і середньоінтегральних значень коефіцієнтів

теплопровідності не перевищують 5%.

У табл.1 подано дані, отримані при знаходженні достатнього розбиття шарів

циліндра на складові для досягнення точності $\varepsilon = 10^{-4}$ при $Po^{(2)} = -5$.

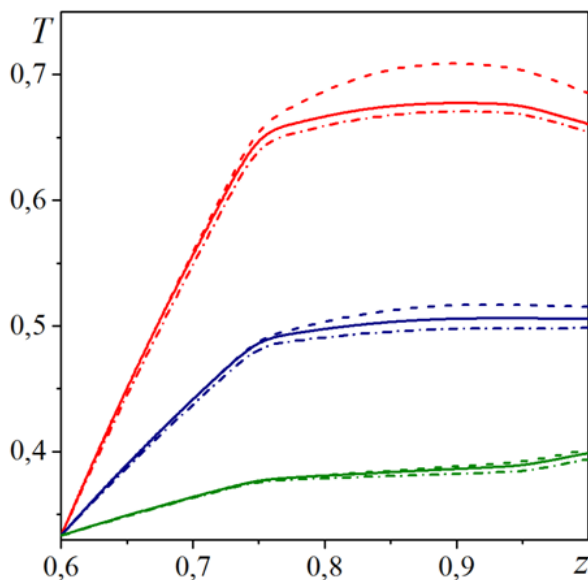


Рис.4.2. Графіки розподілу температури

Як бачимо, подання циліндра шістьма складовими забезпечує виконання інтегральної умови із наперед заданою точністю. В результаті отримали такі розподіли напружень, деформацій та переміщення, зображені на рис. 4.3-4.5. Зазначимо, що стала осьова деформація $e_z = 0.003156$.

Таблиця 1. Результат розбиття шарів циліндра на складові

| Загальна к-сть шарів | Кількість розбиттів в кожному шарі | | | Виконання інтегральної умови |
|----------------------|------------------------------------|--------|---------|------------------------------|
| | I шар | II шар | III шар | |
| 3 | 1 | 1 | 1 | -0.002772 |
| 4 | 1 | 2 | 1 | -0.001841 |
| 5 | 2 | 2 | 1 | -0.000670 |
| 6 | 2 | 3 | 1 | -0.000524 |

Видно, що зі збільшенням інтенсивності виділення тепла з джерела краще наближаються до розподілів температури і компонент напружено-деформованого стану термочутливого циліндра такі розподіли нетермочутливого за використання середньоінтегральних значень термомеханічних характеристик матеріалів шарів. Однак, якщо максимальні різниці між розподілами температур термочутливого і нетермочутливого циліндрів сягають 5%, то для решти розподілів вони можуть

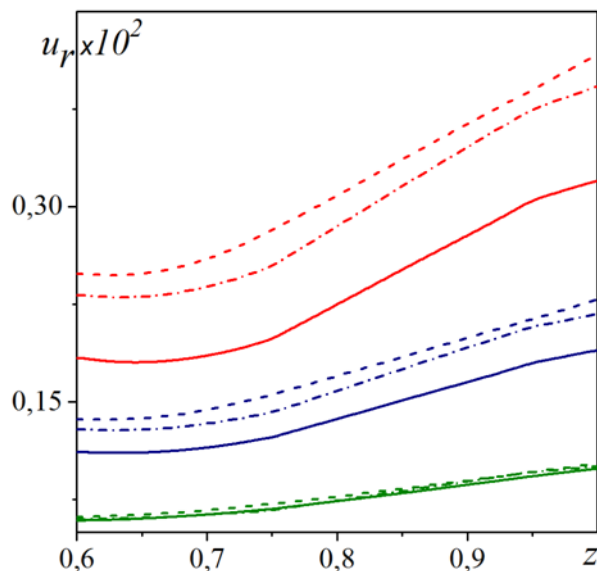


Рис.4.3. Залежність радіальних переміщень від критерію Померанцева $\rho^{(2)}$

перевищувати 50%. Також присутні якісні (розтяг в термочутливому і стиск у нетермочутливому циліндрі, чи навпаки) розбіжності, а, отже, не варто нехтувати термочутливістю матеріалів шарів.

Варто також зазначити, що при визначенні осьових напружень взагалі не варто нехтувати термочутливістю матеріалів складових, оскільки використання як опорних, так і середньоінтегральних значень термомеханічних характеристик не дають реальної картини розподілу σ_z .

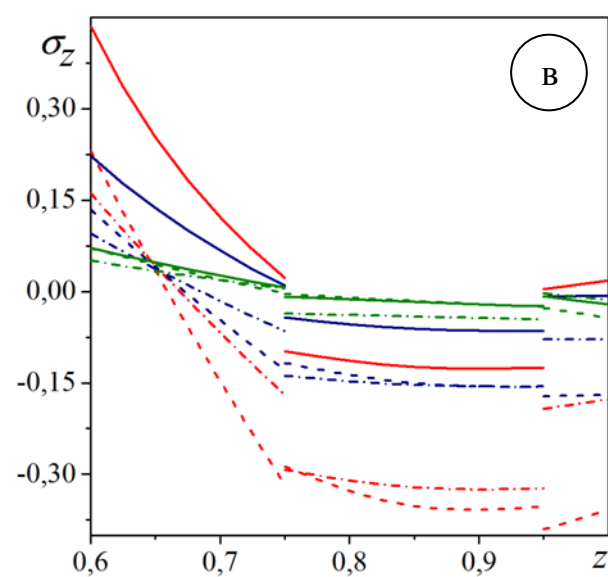
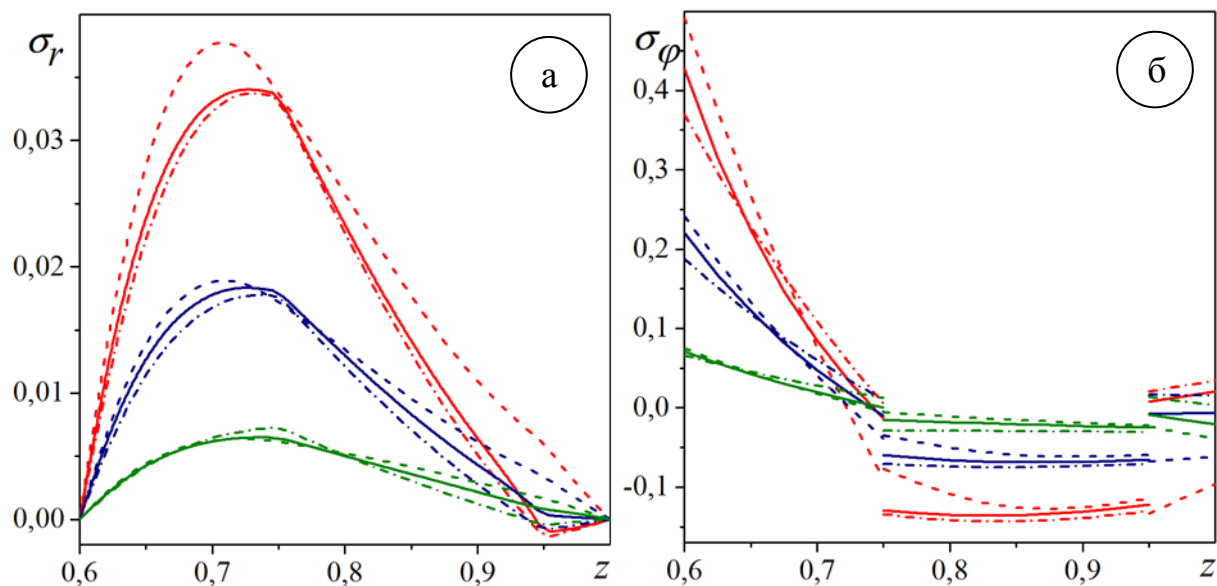


Рис.4.4. Залежність
радіальних (а), колових(б) та
осьових (в) напружень від
критерію Померанцева $\rho_o^{(2)}$

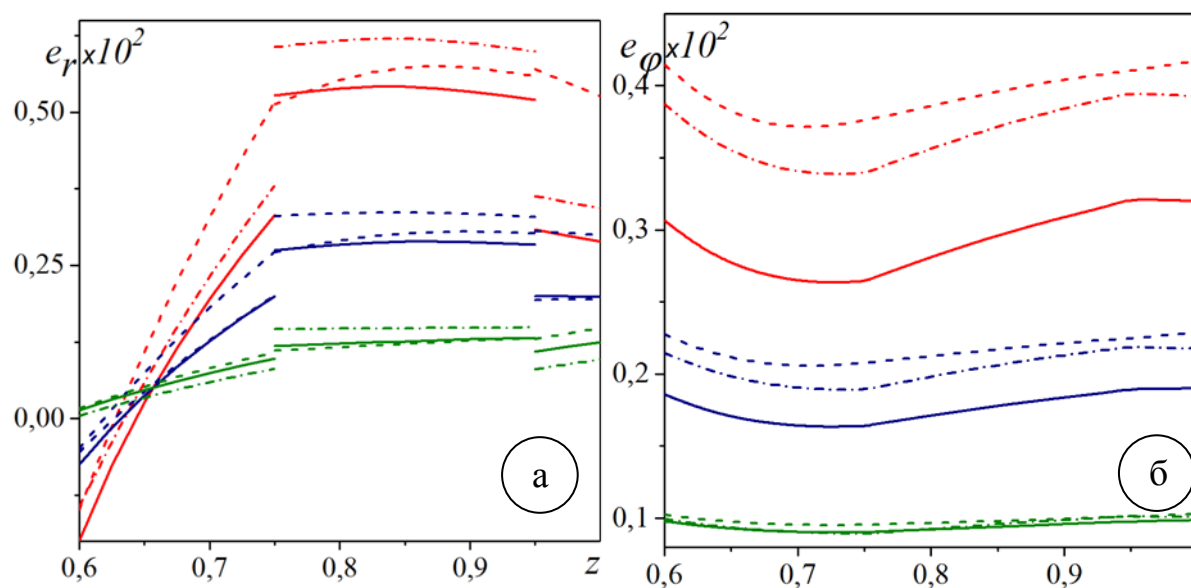


Рис.4.5. Залежність радіальних (а) та колових(б) деформацій
від критерію Померанцева $\rho_o^{(2)}$

4.3. Моделювання термомеханічного стану п'ятишарового порожнистого циліндра за задання на циліндричних поверхнях сталого потоку тепла та конвективного теплообміну

4.3.1. Формулювання задачі

Розглядається безмежний за радіальною координатою термочутливий порожнистий циліндр [78, 96] (рис.4.6.), який складається із п'яти шарів, виготовлених із різних матеріалів. Циліндр нагрівається наявними у другому та четвертому шарах джерелами тепла (3.3). На внутрішній обмежувальній поверхні $r = r_1$ заданий сталий потік тепла $q^{(1)}$, а через зовнішню $r = r_6$ циліндр конвективно обмінюється теплом із середовищем, температура якого $t = t_{cn}$. Коефіцієнт теплообміну через цю поверхню сталий і рівний $\alpha^{(5)}$. На межі дотику сусідніх шарів $r = \{r_2, r_3, r_4, r_5\}$ виконуються умови ідеального теплового контакту.

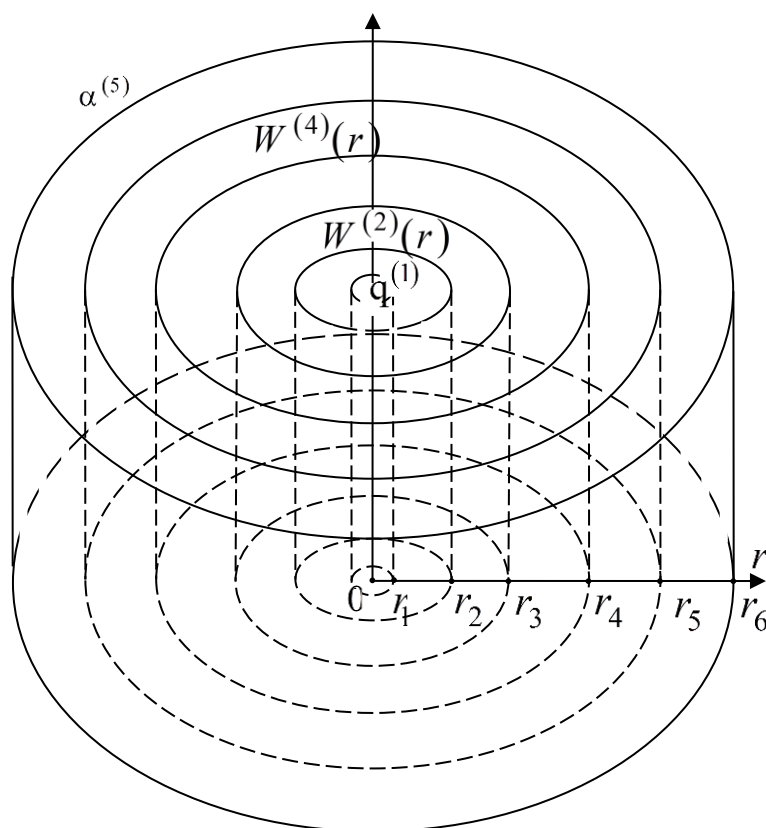


Рис.4.6. Циліндр 5-шаровий за радіальною координатою

4.3.2. Математична модель для розподілу температури та її розв'язок

Термочутливий циліндр. Математична модель для визначення розподілу температури термочутливого циліндра у результаті обезрозмірення містить

- рівняння теплопровідності для складових

$$\frac{d}{d\rho} \left(\rho \lambda_*^{(i)}(T_i) \frac{dT_i}{d\rho} \right) = W^{(i)}(\rho) (\delta_{i2} + \delta_{i4}), \quad \rho_i < \rho < \rho_{i+1}, \quad i = \overline{1,5};$$

- крайові умови на обмежувальних плоских поверхнях

$$\lambda_*^{(1)}(T_1) \frac{dT_1}{dr} \Big|_{\rho=\rho_1} = -\text{Ki}^{(1)}, \quad \left[\lambda_*^{(3)}(T_3) \frac{dT_3}{d\rho} + \text{Bi}^{(3)}(T_3 - T_{\text{cn}}) \right]_{\rho=\rho_4} = 0;$$

- умови контакту на поверхнях дотику складових циліндра

$$T_{i-1} \Big|_{\rho=\rho_i} = T_i \Big|_{\rho=\rho_i}, \quad \frac{\lambda_{t0}^{(i-1)}}{\lambda_{t0}^{(i)}} \lambda_*^{(i-1)}(T_{i-1}) \frac{dT_{i-1}}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_i} = \lambda_*^{(i)}(T_i) \frac{dT_i}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_i}, \quad i = \overline{2,5}.$$

Застосування інтегрального перетворення Кірхгофа, що передбачає представлений у другому розділі метод, дозволяє частково спростити сформульовану задачу – звести її до такої задачі у змінних Кірхгофа. Інтегрування лінійних рівнянь, отриманих із рівнянь теплопровідності, дає можливість знайти змінні Кірхгофа, які мають вигляд

$$\theta_i = C_{i1} \ln \frac{\rho}{\rho_i} + C_{i2} + \bar{W}^{(i)}(\rho) \delta_{i2}, \quad i = \overline{1,5},$$

а сталі інтегрування мають вигляд

$$C_{11} = -\rho_1 \text{Ki}^{(1)}, \quad C_{21} = -\frac{\lambda_{t0}^{(1)}}{\lambda_{t0}^{(2)}} \rho_1 \text{Ki}^{(1)}, \quad C_{31} = \frac{\lambda_{t0}^{(2)}}{\lambda_{t0}^{(3)}} \left(-\frac{\lambda_{t0}^{(1)}}{\lambda_{t0}^{(2)}} \rho_1 \text{Ki}^{(1)} + \rho_3 \tilde{W}^{(2)}(\rho_3) \right),$$

$$C_{41} = \frac{\lambda_{t0}^{(2)}}{\lambda_{t0}^{(4)}} \left(-\frac{\lambda_{t0}^{(1)}}{\lambda_{t0}^{(2)}} \rho_1 \text{Ki}^{(1)} + \rho_3 \tilde{W}^{(2)}(\rho_3) \right),$$

$$C_{51} = \frac{\lambda_{t0}^{(4)}}{\lambda_{t0}^{(5)}} \left(\frac{\lambda_{t0}^{(2)}}{\lambda_{t0}^{(4)}} \left(-\frac{\lambda_{t0}^{(1)}}{\lambda_{t0}^{(2)}} \rho_1 \text{Ki}^{(1)} + \rho_3 \tilde{W}^{(2)}(\rho_3) \right) + \rho_5 \tilde{W}^{(4)}(\rho_5) \right),$$

$$C_{22} = -\rho_1 \text{Ki}^{(1)} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} + C_{12} + \frac{k_2 - k_1}{2k_1^2} \left(\sqrt{1 + 2k_1 \left(-\rho_1 \text{Ki}^{(1)} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} + C_{12} \right)} - 1 \right)^2,$$

$$\begin{aligned}
C_{32} &= -\frac{\lambda_{t0}^{(1)}}{\lambda_{t0}^{(2)}} \ln \frac{\rho_3}{\rho_2} \rho_1 \text{Ki}^{(1)} + C_{22} + \bar{W}^{(2)}(\rho_3) + \\
&+ \frac{k_3 - k_2}{2k_2^2} \left(\sqrt{1 + 2k_2 \left(-\frac{\lambda_{t0}^{(1)}}{\lambda_{t0}^{(2)}} \ln \frac{\rho_3}{\rho_2} \rho_1 \text{Ki}^{(1)} + C_{22} + \bar{W}^{(2)}(\rho_3) \right)} - 1 \right)^2, \\
C_{42} &= C_{32} + \frac{\lambda_{t0}^{(2)}}{\lambda_{t0}^{(3)}} \left(-\frac{\lambda_{t0}^{(1)}}{\lambda_{t0}^{(2)}} \rho_1 \text{Ki}^{(1)} + \rho_3 \tilde{W}^{(2)}(\rho_3) \right) \ln \frac{\rho_4}{\rho_3} + \\
&+ \frac{k_3 - k_2}{2k_2^2} \left(\sqrt{1 + 2k_2 \left(C_{32} + \frac{\lambda_{t0}^{(2)}}{\lambda_{t0}^{(3)}} \left(-\frac{\lambda_{t0}^{(1)}}{\lambda_{t0}^{(2)}} \rho_1 \text{Ki}^{(1)} + \rho_3 \tilde{W}^{(2)}(\rho_3) \right) \ln \frac{\rho_4}{\rho_3}} - 1 \right)^2, \\
C_{52} &= C_{42} + \frac{\lambda_{t0}^{(2)}}{\lambda_{t0}^{(4)}} \left(-\frac{\lambda_{t0}^{(1)}}{\lambda_{t0}^{(2)}} \rho_1 \text{Ki}^{(1)} + \rho_3 \tilde{W}^{(2)}(\rho_3) \right) \ln \frac{\rho_4}{\rho_3} + \bar{W}^{(4)}(\rho_5) + \frac{k_3 - k_2}{2k_2^2} \times \\
&\times \left(\sqrt{1 + 2k_2 \left(C_{42} + \frac{\rho_3}{\lambda_{t0}^{(4)}} \left(-\frac{\lambda_{t0}^{(1)}}{\lambda_{t0}^{(2)}} \rho_1 \text{Ki}^{(1)} + \rho_3 \tilde{W}^{(2)}(\rho_3) \right) + \bar{W}^{(4)}(\rho_5) \right)} - 1 \right)^2,
\end{aligned}$$

причому стала C_{12} визначається з рівняння

$$\frac{C_{51}}{\rho_6} + \text{Bi}^{(5)} \left(\frac{\sqrt{1 + 2k_5 \left(C_{51} \ln \frac{\rho_6}{\rho_5} + C_{52} \right)} - 1}{k_5} + T_p - T_{\text{cn}} \right) = 0,$$

розв'язки якого не наводимо через його громіздкість. Їх отримано з допомогою програми аналітичних перетворень. Під час числових досліджень використовуємо той із них, який забезпечує фізично коректний розподіл температури.

Нетермочутливий циліндр. Математична модель у безрозмірних величинах для визначення розподілу температури нетермочутливого циліндра має вигляд

$$\frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dT_{iN}}{d\rho} \right) = W_N^{(i)}(\rho) (\delta_{i2} + \delta_{i4}), \quad \rho_i < \rho < \rho_{i+1}, \quad i = \overline{1,5},$$

$$T_{1N} \Big|_{\rho=\rho_1} = T_{c1}, \quad \left[\frac{dT_{3N}}{d\rho} + \text{Bi}^{(3)} (T_{3N} - T_{\text{cn}}) \right]_{\rho=\rho_4} = 0,$$

$$T_{i-1N} \Big|_{\rho=\rho_i} = T_{iN} \Big|_{\rho=\rho_i}, \quad i = \overline{2,5},$$

$$\frac{\lambda_{t0}^{(i-1)}}{\lambda_{t0}^{(i)}} \frac{dT_{i-1N}}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_i} = \frac{dT_{iN}}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_i}, \quad i = \overline{2,5}.$$

Рівняння для визначення розподілу температури нетермочутливого циліндра буде

$$T_N^{(i)} = \bar{C}_{i1} \ln \frac{\rho}{\rho_i} + \bar{C}_{i2} + \bar{W}_N^{(i)}(\delta_{i2}), \quad i = \overline{1,5},$$

а сталі інтегрування обчислюються за такими формулами

$$\bar{C}_{11} = -\rho_1 \text{Ki}_N^{(1)}, \quad \bar{C}_{21} = -\frac{\lambda_{tN}^{(1)}}{\lambda_{tN}^{(2)}} \rho_1 \text{Ki}_N^{(1)}, \quad \bar{C}_{31} = \frac{\lambda_{tN}^{(2)}}{\lambda_{tN}^{(3)}} \left(-\frac{\lambda_{tN}^{(1)}}{\lambda_{tN}^{(2)}} \rho_1 \text{Ki}_N^{(1)} + \rho_3 \tilde{W}_N^{(2)}(\rho_3) \right),$$

$$\bar{C}_{41} = \frac{\lambda_{tN}^{(2)}}{\lambda_{tN}^{(4)}} \left(-\frac{\lambda_{tN}^{(1)}}{\lambda_{tN}^{(2)}} \rho_1 \text{Ki}_N^{(1)} + \rho_3 \tilde{W}_N^{(2)}(\rho_3) \right),$$

$$\bar{C}_{51} = \frac{\lambda_{tN}^{(4)}}{\lambda_{tN}^{(5)}} \left(\frac{\lambda_{tN}^{(2)}}{\lambda_{tN}^{(4)}} \left(-\frac{\lambda_{tN}^{(1)}}{\lambda_{tN}^{(2)}} \rho_1 \text{Ki}_N^{(1)} + \rho_3 \tilde{W}_N^{(2)}(\rho_3) \right) + \rho_5 \tilde{W}_N^{(4)}(\rho_5) \right),$$

$$\bar{C}_{22} = -\rho_1 \text{Ki}_N^{(1)} \frac{\lambda_{tN}^{(1)}}{\lambda_{tN}^{(2)}} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} + \bar{C}_{12},$$

$$\bar{C}_{32} = \bar{C}_{12} - \rho_1 \text{Ki}_N^{(1)} \frac{\lambda_{tN}^{(1)}}{\lambda_{tN}^{(2)}} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} - \rho_1 \text{Ki}_N^{(1)} \frac{\lambda_{tN}^{(1)}}{\lambda_{tN}^{(2)}} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} + \tilde{W}_N^{(2)}(\rho_3),$$

$$\begin{aligned} \bar{C}_{42} = & \bar{C}_{12} + \frac{\lambda_{tN}^{(2)}}{\lambda_{tN}^{(3)}} \left(-\frac{\lambda_{tN}^{(1)}}{\lambda_{tN}^{(2)}} \rho_1 \text{Ki}_N^{(1)} + \rho_3 \tilde{W}_N^{(2)}(\rho_3) \right) \ln \frac{\rho_3}{\rho_2} - \rho_1 \text{Ki}_N^{(1)} \frac{\lambda_{tN}^{(1)}}{\lambda_{tN}^{(2)}} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} - \\ & - \rho_1 \text{Ki}_N^{(1)} \frac{\lambda_{tN}^{(1)}}{\lambda_{tN}^{(2)}} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} + \tilde{W}_N^{(2)}(\rho_3) + \frac{1}{\lambda_{tN}^{(3)}} \left(-\lambda_{tN}^{(1)} \rho_1 \text{Ki}_N^{(1)} + \rho_3 \tilde{W}_N^{(2)}(\rho_3) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{C}_{52} = & \bar{C}_{12} + \frac{\lambda_{tN}^{(2)}}{\lambda_{tN}^{(4)}} \ln \frac{\rho_5}{\rho_4} \left(-\frac{\lambda_{tN}^{(1)}}{\lambda_{tN}^{(2)}} \rho_1 \text{Ki}_N^{(1)} + \rho_3 \tilde{W}_N^{(2)}(\rho_3) \right) - \rho_1 \text{Ki}_N^{(1)} \frac{\lambda_{tN}^{(1)}}{\lambda_{tN}^{(2)}} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} + \\ & + \frac{\lambda_{tN}^{(2)}}{\lambda_{tN}^{(3)}} \left(-\frac{\lambda_{tN}^{(1)}}{\lambda_{tN}^{(2)}} \rho_1 \text{Ki}_N^{(1)} + \rho_3 \tilde{W}_N^{(2)}(\rho_3) \right) \ln \frac{\rho_3}{\rho_2} - \rho_1 \text{Ki}_N^{(1)} \frac{\lambda_{tN}^{(1)}}{\lambda_{tN}^{(2)}} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} + \\ & + \frac{1}{\lambda_{tN}^{(3)}} \left(-\lambda_{tN}^{(1)} \rho_1 \text{Ki}_N^{(1)} + \rho_3 \tilde{W}_N^{(2)}(\rho_3) \right) + \tilde{W}_N^{(4)}(\rho_5) + \tilde{W}_N^{(2)}(\rho_3), \end{aligned}$$

а \bar{C}_{12} визначається з рівняння

$$\frac{\bar{C}_{51}}{\rho_6} + \text{Bi}_N^{(5)} \left(\bar{C}_{51} \ln \frac{\rho_6}{\rho_5} + \bar{C}_{52} + T_{\text{cn}} \right) = 0.$$

4.3.3. Числові дослідження

Досліджували вплив тиску на внутрішній поверхні циліндра на розподіли компонент напружено-деформованого стану. Нехай матеріалом першого, третього і п'ятого шарів є кераміка (3.1), а другого і четвертого – титановий сплав (3.2). За координати меж складових циліндра взяли $\rho_1 = 0.75$, $\rho_2 = 0.77$, $\rho_3 = 0.86$, $\rho_4 = 0.89$, $\rho_5 = 0.98$, $\rho_6 = 1$, за характерний розмір – $l_0 = r_6$. Значення безрозмірних температур прийняли такими: $T_p = 3/11$, $T_k = 1$, $T_{cn} = 1/2$, безрозмірних критеріїв – $Po^{(2,4)} = -2$, $Bi^{(5)} = 2$, $Ki^{(1)} = -0.3$, а сталі тиски на внутрішній та зовнішній поверхнях циліндра і зусилля на торцях – $p_1 = \{0, 0.1, 0.3\}$, $p_2 = p_3 = 0$.

Зазначимо, що шари циліндра є достатньо тонкими, а, отже, не потрібно розбивати їх на тонші підшари.

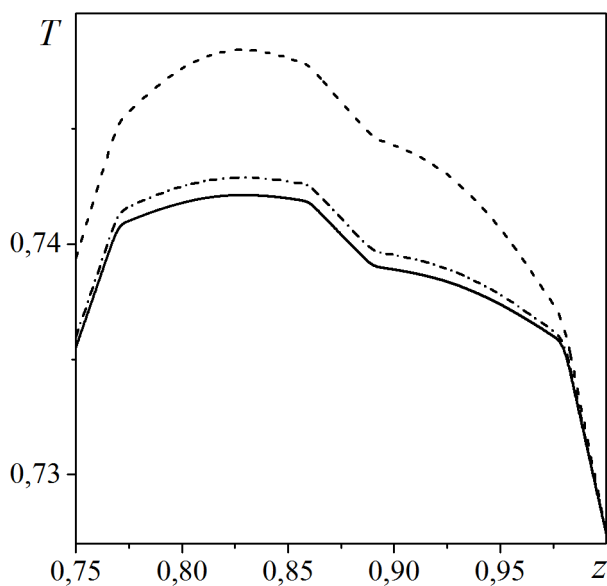


Рис.4.7. Графіки розподілу температур

Графіки розподілів температур подано на рис. 4.7, звідки видно, що у термочутливому порожнистому циліндрі вони краще наближаються таким розподілом за середньоінтегральних значень коефіцієнтів теплопровідності. Максимальні розбіжності між температурами в термочутливому і нетермочутливих (за опорних і середньоінтегральних значень коефіцієнтів теплопровідності) циліндрах не перевищують 1.5%.

Графіки розподілів компонент напружено-деформованого стану зображено на рис. 4.8.-4.10. Зазначимо, що тут червоні лінії відповідають значенню $p_1 = 0$, сині – 0.1, зелені – 0.3.

Встановлено, що збільшення тиску на внутрішній поверхні істотно впливає на розподіли компонент напружено-деформованого стану циліндра. Зокрема, на межі контакту сусідніх шарів зростають стрибки між розподілами колових та

осьових напружень, а також радіальних деформацій. Це призводить до зростання розбіжності між розподілами компонент напружено-деформованого стану термочутливого і нетермочутливих циліндрів.

В той же час важко сказати, яка з моделей нетермочутливого тіла є найбільш наближеною до моделі термочутливого. Так, з рис. 4.9(б) видно, що розподіл колових деформацій термочутливого циліндра при $p_1 = 0$ краще наближається та-

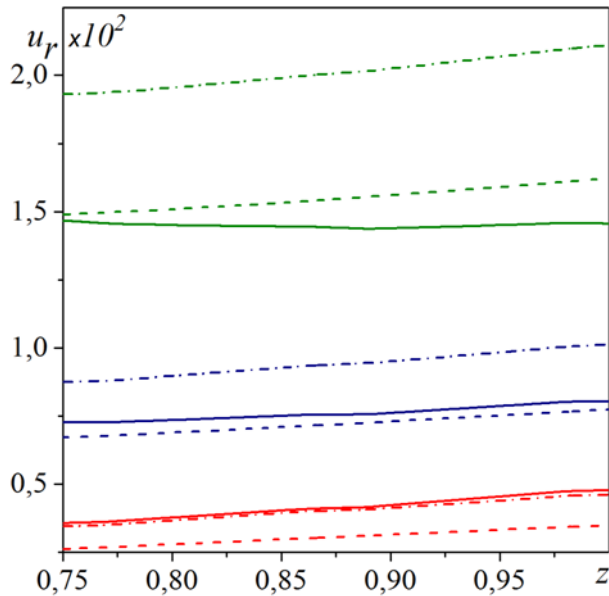


Рис.4.8. Залежність розподілів радіальних переміщень від тиску на внутрішній поверхні p_1

ким розподілом відповідного нетермочутливого за середньоінтегральних значень термомеханічних характеристик, однак, при $p_1 > 0$ – за опорних.

Тим не менше, максимальні різниці між розподілами відповідних компонент термочутливого і нетермочутливого циліндрів не тільки можуть перевищувати 50% (зокрема, в осьових напруженнях та колових деформаціях), але і давати якісно іншу картину (стиск у термочутливому і розтяг у нетермочутливому циліндрах або навпаки).

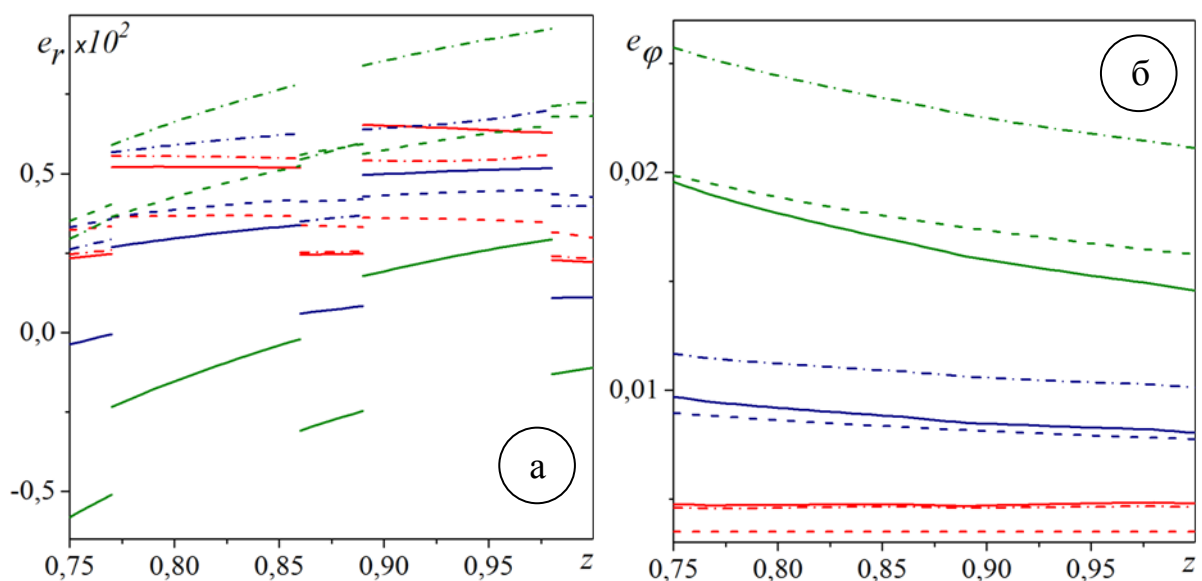


Рис.4.9. Залежність радіальних (а) та колових(б) деформацій від критерію Померанцева $\nu_0^{(2)}$

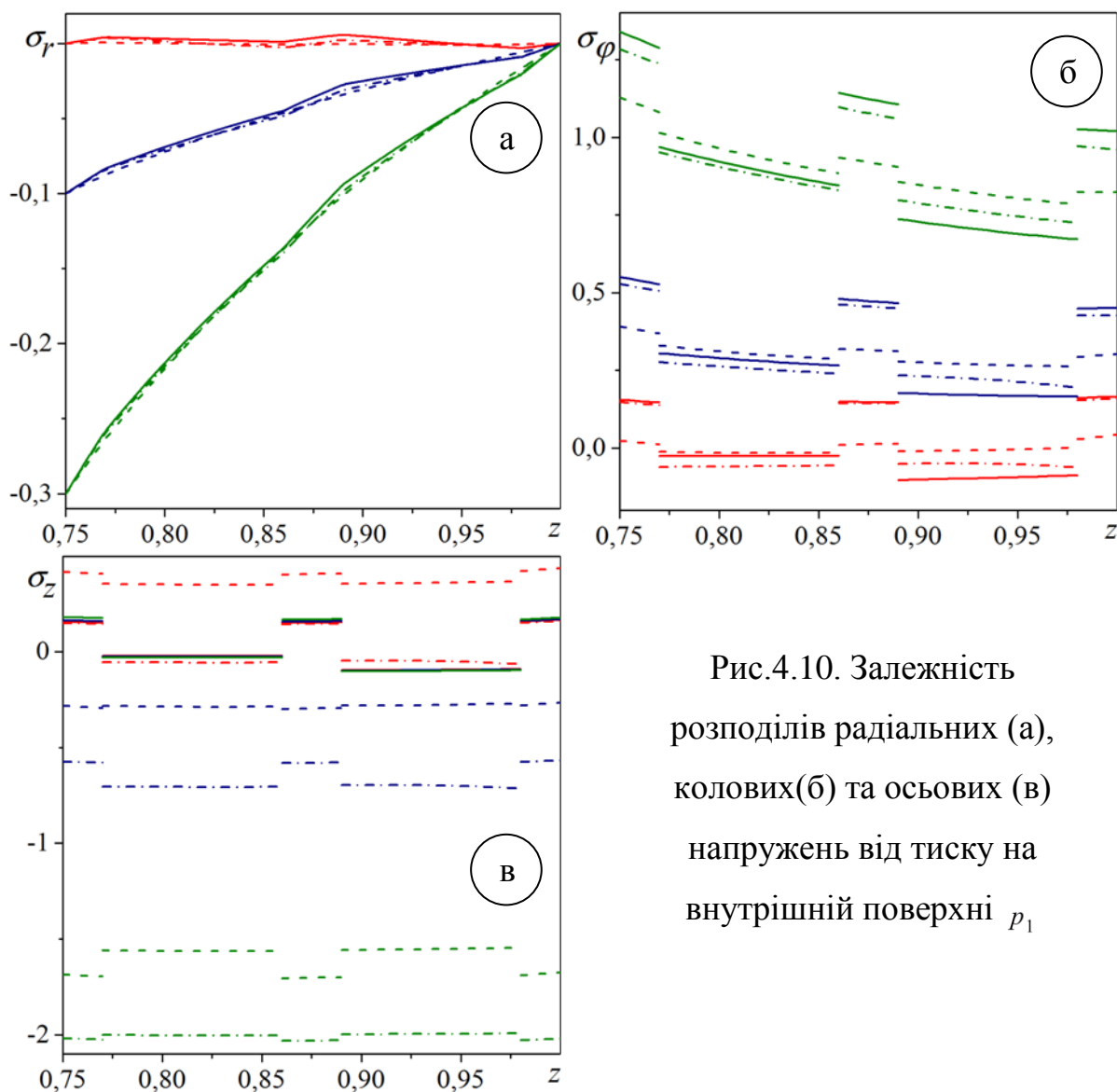


Рис.4.10. Залежність розподілів радіальних (а), колових(б) та осьових (в) напружень від тиску на внутрішній поверхні p_1

4.4. Моделювання термопружного стану тришарового порожнистого циліндра за задання на циліндричних поверхнях конвективного та конвективно-променевого теплообмінів

4.4.1. Формулювання задачі

Розглядається тришаровий безмежний термочутливий порожнистий циліндр [158]. Він складається із трьох циліндрів, виготовлених із різних матеріалів. Циліндр нагрівається наявним у внутрішньому шарі джерелами тепла (3.5). Через внутрішню обмежувальну поверхню $r = r_1$ відбувається конвективно-променевий, а через зовнішню $r = r_4$ – конвективний теплообміни теплом із зовнішнім та внут-

рішнім середовищами, температури яких $t = t_{c1}$ та $t = t_{cn}$ відповідно. Коефіцієнти теплообміну через ці поверхні сталі і рівні $\alpha^{(1)}$ та $\alpha^{(2)}$ відповідно. На межах дотику сусідніх шарів $r = \{r_2, r_3\}$ виконуються умови ідеального теплового контакту.

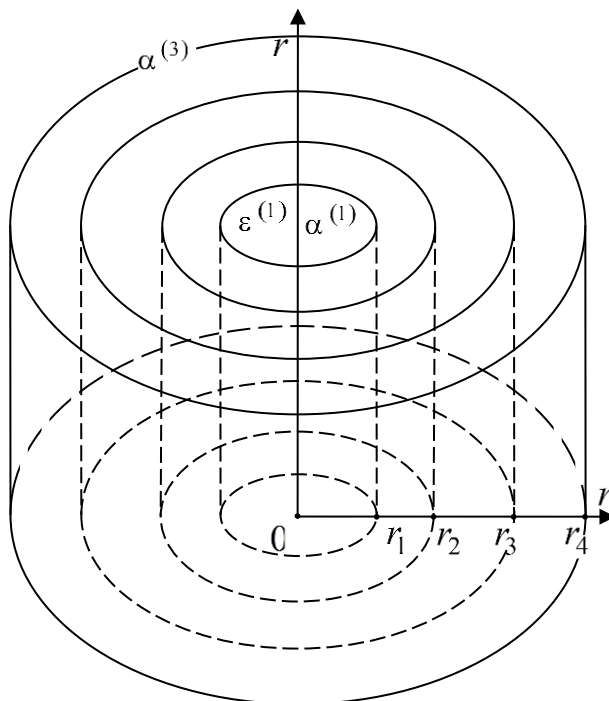


Рис.4.11. Циліндр 3-шаровий за радіальною координатою

4.4.2. Математична модель для розподілу температури та її розв'язок

Термочутливий циліндр. Обезрозмірена математична модель для визначення розподілу температури включає

- рівняння теплопровідності для складових

$$\frac{d}{d\rho} \left(\rho \lambda_*^{(i)}(T_i) \frac{dT_i}{d\rho} \right) = W^{(i)}(\rho) \delta_{i2}, \quad \rho_i < \rho < \rho_{i+1}, \quad i = \overline{1,3};$$

- крайові умови на обмежувальних плоских поверхнях

$$\left[\lambda_*^{(1)}(T_1) \frac{dT_1}{d\rho} - \text{Bi}^{(1)}(T_1 - T_{c1}) - \text{Sk}^{(1)}(T_1^4 - T_{c1}^4) \right]_{\rho=\rho_1} = 0,$$

$$\left[\lambda_*^{(3)}(T_3) \frac{dT_3}{d\rho} + \text{Bi}^{(3)}(T_3 - T_{cn}) \right]_{\rho=\rho_4} = 0;$$

- умови контакту на поверхнях дотику складових циліндра

$$T_{i-1}|_{\rho=\rho_i} = T_i|_{\rho=\rho_i}, \quad \frac{\lambda_{t0}^{(i-1)}}{\lambda_{t0}^{(i)}} \lambda_*^{(i-1)}(T_{i-1}) \frac{dT_{i-1}}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_i} = \lambda_*^{(i)}(T_i) \frac{dT_i}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_i}, \quad i = 2,3.$$

Представлений у другому розділі метод передбачає застосування перетворення Кірхгофа при розв'язуванні сформульованої задачі. Отримана задача у змінних Кірхгофа є простішою у порівнянні із вихідною нелінійною. Змінні Кірхгофа знаходяться із рівнянь

$$\theta_i = C_{i1} \ln \frac{\rho}{\rho_i} + C_{i2} + \bar{W}^{(i)}(\rho) \delta_{i2}, \quad i = \overline{1,3},$$

а сталі інтегрування мають вигляд

$$\begin{aligned} C_{11} &= \rho_1 \left(\text{Bi}^{(1)} \left(\frac{\sqrt{1 + 2k_1 C_{12}} - 1}{k_1} + T_p - T_{c1} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \text{Sk}^{(1)} \left(\left(\frac{\sqrt{1 + 2k_1 C_{12}} - 1}{k_1} + T_p \right)^4 - T_{c1}^4 \right) \right), \\ C_{21} &= \frac{\lambda_{t0}^{(1)}}{\lambda_{t0}^{(2)}} C_{11}, \quad C_{31} = \frac{\lambda_{t0}^{(1)}}{\lambda_{t0}^{(2)}} (C_{21} + \rho_3 \tilde{W}^{(2)}(\rho_3)), \\ C_{22} &= C_{11} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} + C_{12} + \frac{k_2 - k_1}{2} \left(\frac{\sqrt{1 + 2k_1 \left(C_{11} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} + C_{12} \right)} - 1}{k_1} \right)^2, \\ C_{32} &= C_{21} \ln \frac{\rho_3}{\rho_2} + C_{22} + \bar{W}^{(2)}(\rho_3) + \\ &\quad + \frac{k_3 - k_2}{2} \left(\frac{\sqrt{1 + 2k_2 \left(C_{21} \ln \frac{\rho_3}{\rho_2} + C_{22} + \bar{W}^{(2)}(\rho_3) \right)} - 1}{k_2} \right)^2, \end{aligned}$$

а C_{12} визначається з рівняння

$$\frac{C_{31}}{\rho_4} + \text{Bi}^{(3)} \left(\frac{\sqrt{1 + 2k_3 \left(C_{31} \ln \frac{\rho_4}{\rho_3} \right)} - 1}{k_3} + T_p - T_{cn} \right) = 0,$$

яке не має аналітичного розв'язку рівнянь. Для його розв'язання при конкретних значеннях вхідних параметрів використовуємо пакет програм аналітичних перетворень. Знайшовши значення C_{12} , автоматично отримуємо значення і для решти сталих інтегрування.

Нетермочутливий циліндр. Математична модель у безрозмірних величинах для визначення розподілу температури нетермочутливого циліндра має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dT_{iN}}{d\rho} \right) &= W_N^{(i)}(\rho) \delta_{i2}, \quad \rho_i < \rho < \rho_{i+1}, \quad i = \overline{1,5}, \\ \left[\frac{dT_{1N}}{d\rho} - \text{Bi}_N^{(1)}(T_{1N} - T_{c1}) - \text{Sk}_N^{(1)}(T_{1N}^4 - T_{c1}^4) \right]_{\rho=\rho_1} &= 0, \\ \left[\frac{dT_{3N}}{d\rho} + \text{Bi}_N^{(3)}(T_{3N} - T_{cn}) \right]_{\rho=\rho_4} &= 0, \\ T_{i-1N} \Big|_{\rho=\rho_i} &= T_{iN} \Big|_{\rho=\rho_i}, \quad \frac{\lambda_{t0}^{(i-1)}}{\lambda_{t0}^{(i)}} \frac{dT_{i-1N}}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_i} = \frac{dT_{iN}}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_i} \quad i = 2,3. \end{aligned}$$

Рівняння для визначення розподілу температури нетермочутливого циліндра мають вигляд

$$T_N^{(i)} = \bar{C}_{i1} \ln \frac{\rho}{\rho_i} + \bar{C}_{i2} + \bar{W}_N^{(i)}(\delta_{i2}), \quad i = \overline{1,3},$$

Сталі інтегрування обчислюються за формулами

$$\begin{aligned} \bar{C}_{11} &= \rho_1 \left(\text{Bi}_N^{(1)}(\bar{C}_{12} - T_{c1}) + \text{Sk}_N^{(1)}(\bar{C}_{12}^4 - T_{c1}^4) \right), \\ \bar{C}_{21} &= \frac{\lambda_{t0}^{(1)}}{\lambda_{t0}^{(2)}} \rho_1 \left(\text{Bi}_N^{(1)}(\bar{C}_{12} - T_{c1}) + \text{Sk}_N^{(1)}(\bar{C}_{12}^4 - T_{c1}^4) \right), \\ \bar{C}_{22} &= \bar{C}_{12} + \rho_1 \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \left(\text{Bi}_N^{(1)}(\bar{C}_{12} - T_{c1}) + \text{Sk}_N^{(1)}(\bar{C}_{12}^4 - T_{c1}^4) \right), \\ \bar{C}_{31} &= \frac{\lambda_{t0}^{(2)}}{\lambda_{t0}^{(3)}} \left(\rho_1 \left(\text{Bi}_N^{(1)}(\bar{C}_{12} - T_{c1}) + \text{Sk}_N^{(1)}(\bar{C}_{12}^4 - T_{c1}^4) \right) + \rho_3 \tilde{W}^{(2)}(\rho_3) \right), \\ \bar{C}_{32} &= \bar{C}_{12} + \frac{\lambda_{t0}^{(2)}}{\lambda_{t0}^{(3)}} \ln \frac{\rho_3}{\rho_2} \left(\rho_1 \left(\text{Bi}_N^{(1)}(\bar{C}_{12} - T_{c1}) + \text{Sk}_N^{(1)}(\bar{C}_{12}^4 - T_{c1}^4) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \rho_3 \tilde{W}^{(2)}(\rho_3) \right) + \rho_1 \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \left(\text{Bi}_N^{(1)}(\bar{C}_{12} - T_{c1}) + \right. \\ &\quad \left. + \text{Sk}_N^{(1)}(\bar{C}_{12}^4 - T_{c1}^4) \right) + \bar{W}^{(2)}(\rho_3). \end{aligned}$$

а стала \bar{C}_{12} визначається з рівняння

$$\frac{\bar{C}_{31}}{\rho_4} + \text{Bi}_N^{(3)} \left(\bar{C}_{31} \ln \frac{\rho_4}{\rho_3} + \bar{C}_{32} - T_{cn} \right) = 0.$$

4.4.3. Числові дослідження.

Досліджували вплив інтенсивності променевого теплообміну на розподіли температур та компонент напружено-деформованого стану термочутливого порожнистого циліндра. Нехай матеріалом першого і третього шарів циліндра є кераміка (3.1), а другого – титановий сплав (3.2). За координати меж складових циліндра взяли $\rho_1 = 0.7$, $\rho_2 = 0.75$, $\rho_3 = 0.95$, $\rho_4 = 1$, за характерний розмір – $l_0 = r_4$. Значення безрозмірних температур прийняли такими: $T_{c1} = 1$, $T_{cn} = 5/11$, без розмірних критеріїв – $Po^{(2)} = -2$, $Vi^{(1)} = 7$, $Vi^{(3)} = 5$, $Sk^{(1)} = \{0,1,2\}$, а сталі

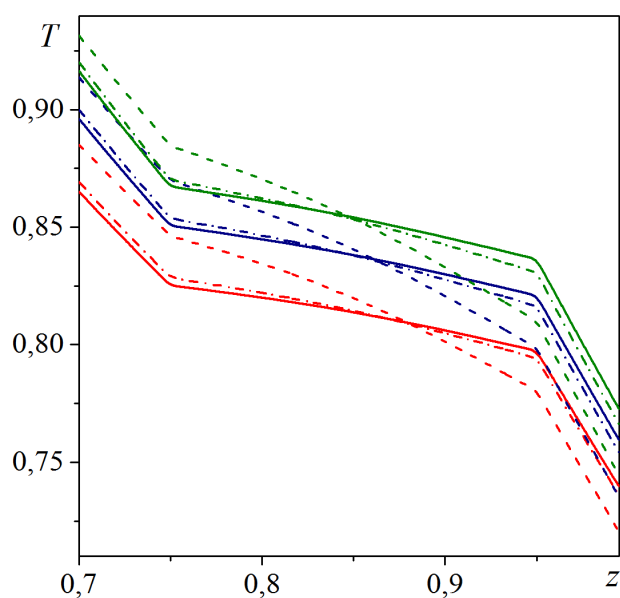


Рис.4.12. Графіки розподілу температур

тиски на внутрішній та зовнішній поверхнях циліндра і зусилля на торцях – $p_1 = p_2 = p = 0$. Графіки розподілів температур подано на рис. 4.12, максимальні розбіжності між якими в термочутливому і нетермочутливому (за опорних і середньоінтегральних значень коефіцієнтів теплопровідності) циліндрах не перевищують 1%. Тут червоними лініями зображено розподіли при $Sk^{(1)} = 0$, синіми – $Sk^{(1)} = 1$, зеленими – $Sk^{(1)} = 2$.

У табл.2 подано такі дані, отримані при знаходженні достатнього розбиття шарів циліндра на складові для досягнення точності $\varepsilon = 10^{-4}$ при $Sk^{(1)} = 2$.

Таблиця 2. Результат розбиття шарів циліндра на складові

| Загальна к-сть шарів | Кількість розбиттів в кожному шарі | | | Виконання інтегральної умови |
|----------------------|------------------------------------|--------|---------|------------------------------|
| | I шар | II шар | III шар | |
| 3 | 1 | 1 | 1 | -0.000714 |
| 4 | 1 | 2 | 1 | -0.000166 |
| 5 | 1 | 3 | 1 | -0.000078 |
| 6 | 1 | 4 | 1 | -0.000048 |

Як бачимо, подання циліндра шістьма складовими забезпечує виконання інтегральної умови із наперед заданою точністю. У результаті отримали такі розпо-

діли напружень, деформацій та переміщення, зображені на рис. 4.13-4.15. Зазначимо, що при $Sk^{(1)} = 2$ стала осьова деформація дорівнює 0.0044256.

З рис. 4.13-4.15 видно, що розподіли компонент напружено-деформованого стану у термочутливому порожнистому циліндрі краще наближаються такими розподілами в аналогічному нетермочутливому за середньоінтегральних значень механічних характеристик його складових. Зокрема, при $Sk^{(1)} = 2$ максимальні розбіжності між відповідними розподілами компонент напружено-деформованого стану термочутливого та нетермочутливого циліндрів можуть сягати 50%.

Встановлено, що за заданих вхідних даних збільшення значення критерію Старка на одиницю призводить до збільшення значень температури та компонент

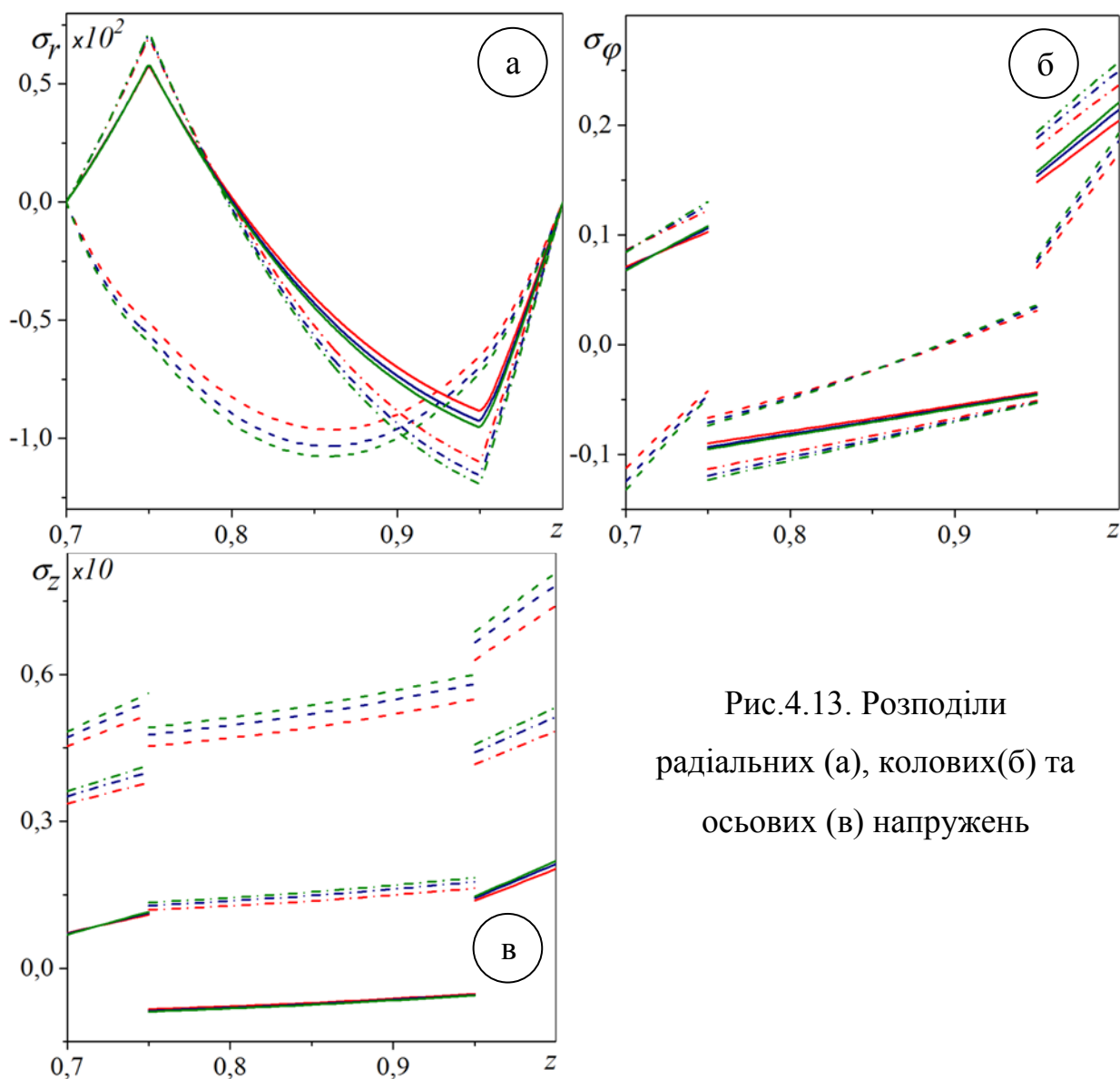


Рис.4.13. Розподіли
радіальних (а), колових(б) та
осьових (в) напружень

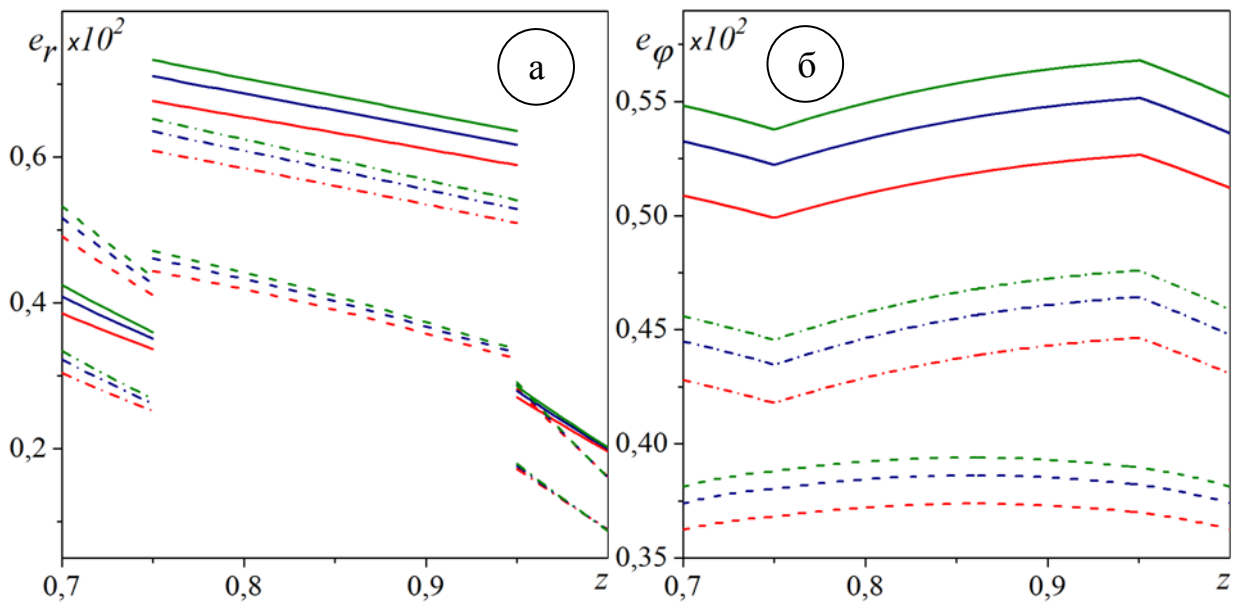


Рисунок 4.14. Розподіли радіальних (а) та колових(б) деформацій

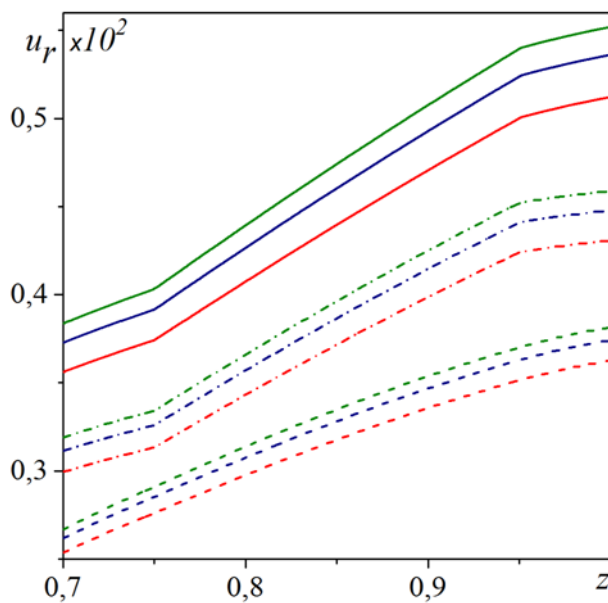


Рис.4.15. Розподіли радіальних переміщень

напружено-деформованого стану більше, ніж на 6%. Однак, якщо температури, радіальні переміщення, а також радіальні та осьові деформації зі зміною $Sk^{(1)}$ майже рівномірно збільшуються у кожній точці циліндра, то радіальні, колові та осьові напруження змінюються переважно на межах контакту сусідніх шарів.

Використання моделі нетермочутливого тіла для визначення компонент напружено-деформованого стану іноді не тільки не дає доброго наближення розпо-

ділів відповідних компонент термочутливого циліндра, але в деяких випадках отримуємо якісно іншу картину. Так, з рис.4.13в видно, що осьові напруження в 2-му шарі нетермочутливого циліндра (за опорних та середньоінтегральних значень термомеханічних характеристик) змінюється не лише кількісно, але і якісно (стиск в термочутливому і розтяг у нетермочутливому). Тому при визначенні осьових напружень взагалі не варто нехтувати термочутливістю матеріалів складових.

4.5. Моделювання термопружного стану тришарового порожнистого циліндра за задання на циліндричних поверхнях конвективного теплообміну та тепловідведення кипінням рідини

4.5.1. Формулювання задачі

Розглядається тришаровий безмежний термочутливий порожнистий циліндр (рис.4.16), який складається із трьох циліндрів, виготовлених із різних матеріалів. Циліндр нагрівається наявним у першому та третьому шарах джерелами тепла (3.5). Через внутрішню обмежувальну поверхню $r = r_1$ відбувається конвективний теплообмін із середовищем, температура якого $t = t_{c1}$, а на зовнішній $r = r_4$ – тепловідведення шляхом кипіння рідини за температури середовища $t = t_{cn}$ та кипіння рідини $t = t_{boil}^{(3)}$. Коефіцієнти теплообмінів через ці поверхні сталі і рівні α_1 та α_3 відповідно. На межах дотику сусідніх шарів $r = \{r_2, r_3\}$ виконуються умови ідеального теплового контакту.

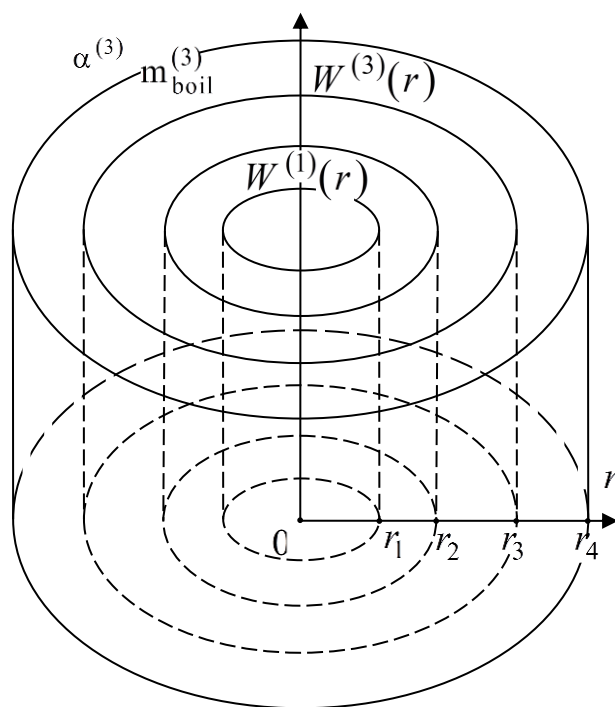


Рис.4.16. Циліндр 3-шаровий за радіальною координатою

4.5.2. Математична модель для розподілу температури та її розв'язок

Термочутливий циліндр. Обезрозмірена математична модель для визначення розподілу температури містить

- рівняння теплопровідності для складових

$$\frac{d}{d\rho} \left(\rho \lambda_*^{(i)}(T_i) \frac{dT_i}{d\rho} \right) = W^{(i)}(\rho) (\delta_{i1} + \delta_{i3}), \quad \rho_i < \rho < \rho_{i+1}, \quad i = \overline{1,3};$$

- крайові умови на обмежувальних плоских поверхнях

$$\left[\lambda_*^{(1)}(T_1) \frac{dT_1}{d\rho} - \text{Bi}^{(1)}(T_1 - T_{c1}) \right]_{\rho=\rho_1} = 0,$$

$$\left[\lambda_*^{(3)}(T_3) \frac{dT_3}{d\rho} + \text{Bi}^{(3)}(T_3 - T_{cn}) + M_{\text{boil}}^{(3)}(T_3 - T_{\text{boil}})^3 \right]_{\rho=\rho_4} = 0;$$

- умови контакту на поверхнях дотику складових циліндра

$$T_{i-1}|_{\rho=\rho_i} = T_i|_{\rho=\rho_i}, \quad \frac{\lambda_{t0}^{(i-1)}}{\lambda_{t0}^{(i)}} \lambda_*^{(i-1)}(T_{i-1}) \frac{dT_{i-1}}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_i} = \lambda_*^{(i)}(T_i) \frac{dT_i}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_i}, \quad i = 2, 3.$$

Застосувавши перетворення Кірхгофа, що є одним із кроків методики, представленої у другому розділі дисертації, отримуємо значно спрощену у порівнянні із вихідною задачу теплопровідності. Інтегруючи лінійні рівняння, отримані з рівнянь теплопровідності, знаходимо змінні Кірхгофа, які мають вигляд

$$\theta_i = C_{i1} \ln \frac{\rho}{\rho_i} + C_{i2} + \bar{W}^{(i)}(\rho)(\delta_{i1} + \delta_{i3}), \quad i = \overline{1, 3},$$

а невідомі сталі інтегрування визначаються так:

$$C_{11} = \rho_1 \text{Bi}^{(1)} \left(\frac{\sqrt{1 + 2k_1 C_{12}} - 1}{k_1} + T_p - T_{c1} \right),$$

$$C_{21} = \frac{\lambda_{t0}^{(1)}}{\lambda_{t0}^{(2)}} (C_{11} + \rho_2 \tilde{W}^{(1)}(\rho_2)), \quad C_{31} = \frac{\lambda_{t0}^{(1)}}{\lambda_{t0}^{(2)}} C_{21},$$

$$C_{22} = C_{11} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} + C_{12} + \bar{W}^{(1)}(\rho_2) +$$

$$+ \frac{k_2 - k_1}{2} \left(\frac{\sqrt{1 + 2k_1 \left(C_{11} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} + C_{12} + \bar{W}^{(1)}(\rho_2) \right)} - 1}{k_1} \right)^2,$$

$$C_{32} = C_{21} \ln \frac{\rho_3}{\rho_2} + C_{22} + \frac{k_3 - k_2}{2} \left(\frac{\sqrt{1 + 2k_2 \left(C_{21} \ln \frac{\rho_3}{\rho_2} + C_{22} \right)} - 1}{k_2} \right)^2,$$

а C_{12} визначається з рівняння

$$\frac{C_{31}}{\rho_4} + \text{Bi}^{(3)} \left(\frac{\sqrt{1 + 2k_3 \left(C_{31} \ln \frac{\rho_4}{\rho_3} + C_{32} + \bar{W}^{(3)}(\rho_4) \right)} - 1}{k_3} + T_p - T_{\text{cn}} \right) +$$

$$+ M_{\text{boil}}^{(3)} \left(\frac{\sqrt{1 + 2k_3 \left(C_{31} \ln \frac{\rho_4}{\rho_3} + C_{32} + \bar{W}^{(3)}(\rho_4) \right)} - 1}{k_3} + T_p - T_{\text{boil}}^{(3)} \right)^3 = 0,$$

яке не має аналітичного розв'язку рівнянь. Для його розв'язання при конкретних значеннях вхідних параметрів використовуємо пакет програм аналітичних перетворень. Знайшовши значення C_{12} , автоматично отримуємо значення і для решти сталіх інтегрування.

Нетермочутливий циліндр. Обезрозмірена математична модель розподілу температури нетермочутливого циліндра має вигляд

$$\frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dT_{iN}}{d\rho} \right) = W_N^{(i)}(\rho) (\delta_{i1} + \delta_{i3}), \quad \rho_i < \rho < \rho_{i+1}, \quad i = \overline{1,3},$$

$$\left[\frac{dT_{1N}}{d\rho} - \text{Bi}_N^{(1)} (T_{1N} - T_{c1}) \right]_{\rho=\rho_1} = 0,$$

$$\left[\frac{dT_{3N}}{d\rho} + \text{Bi}_N^{(3)} (T_{3N} - T_{\text{cn}}) + M_{\text{boil}}^{(3)} (T_{3N} - T_{\text{boil}}^{(3)})^3 \right]_{\rho=\rho_4} = 0,$$

$$T_{i-1N} \Big|_{\rho=\rho_i} = T_{iN} \Big|_{\rho=\rho_i}, \quad \frac{\lambda_{t0}^{(i-1)}}{\lambda_{t0}^{(i)}} \frac{dT_{i-1N}}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_i} = \frac{dT_{iN}}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_i} \quad i = 2, 3.$$

Рівняння для визначення розподілу температури нетермочутливого циліндра мають вигляд

$$T_N^{(i)} = \bar{C}_{i1} \ln \frac{\rho}{\rho_i} + \bar{C}_{i2} + \bar{W}_N^{(i)} (\delta_{i1} + \delta_{i3}), \quad i = \overline{1,3}.$$

Сталі інтегрування мають вигляд

$$\bar{C}_{11} = \rho_1 \text{Bi}_N^{(1)} (\bar{C}_{12} - T_{c1}), \quad \bar{C}_{21} = \frac{\lambda_{t0}^{(1)}}{\lambda_{t0}^{(2)}} \left(\rho_1 \text{Bi}_N^{(1)} (\bar{C}_{12} - T_{c1}) + \rho_2 \tilde{W}_N^{(1)}(\rho_2) \right),$$

$$\bar{C}_{22} = \bar{C}_{12} + \rho_1 \text{Bi}_N^{(1)} (\bar{C}_{12} - T_{c1}) \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} + \bar{W}_N^{(1)}(\rho_2),$$

$$\bar{C}_{31} = \frac{\lambda_{t0}^{(1)}}{\lambda_{t0}^{(3)}} \left(\rho_1 \text{Bi}_N^{(1)} (\bar{C}_{12} - T_{c1}) + \rho_2 \tilde{W}_N^{(1)}(\rho_2) \right),$$

$$\bar{C}_{32} = \bar{C}_{12} + \frac{\lambda_{t0}^{(1)}}{\lambda_{t0}^{(2)}} \left(\rho_1 \text{Bi}_N^{(1)} (\bar{C}_{12} - T_{c1}) + \rho_2 \tilde{W}_N^{(1)}(\rho_2) \right) \ln \frac{\rho_3}{\rho_2} + \rho_1 \text{Bi}_N^{(1)} (\bar{C}_{12} - T_{c1}) \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} + \bar{W}_N^{(1)}(\rho_2),$$

а стала \bar{C}_{12} визначається з рівняння

$$\frac{\bar{C}_{31}}{\rho_4} + \text{Bi}_N^{(3)} \left(\bar{C}_{31} \ln \frac{\rho_4}{\rho_3} + \bar{C}_{32} + \bar{W}_N^{(3)}(\rho_4) - T_{cn} \right) + M_{N \text{ boil}}^{(3)} \left(\bar{C}_{31} \ln \frac{\rho_4}{\rho_3} + \bar{C}_{32} + \bar{W}_N^{(3)}(\rho_4) - T_{\text{boil}}^{(3)} \right)^3 = 0.$$

4.5.3. Числові дослідження

Нехай матеріалом першого і третього шарів циліндра є кераміка (3.1), а другого – титановий сплав (3.2). За координати меж складових циліндра взяли $\rho_1 = 0.7$, $\rho_2 = 0.85$, $\rho_3 = 0.9$, $\rho_4 = 1$, за характерний розмір – $l_0 = r_4$. Значення безрозмірних температур прийняли такими: $T_{c1} = 1/2$, $T_{cn} = 7/11$, безрозмірних критеріїв – $Po^{(1)} = -2$, $Po^{(3)} = -3$, $Bi^{(3)} = 1$, стала кипіння – $M_{\text{boil}}^{(3)} = \{0, 1, 2\}$, а сталі тиски на внутрішній та зовнішній поверхнях циліндра і зусилля на торцях – $p_1 = p_2 = p = 0$.

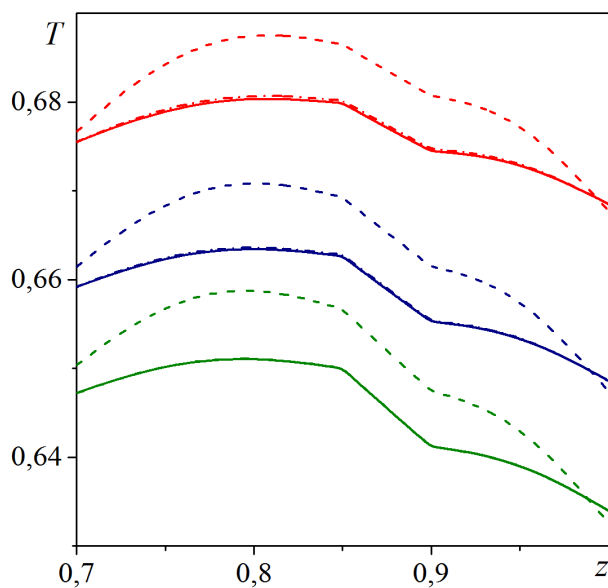


Рис.4.17. Графіки розподілу температур

Графіки розподілів температур подано на рис. 4.17, максимальні розбіжності між якими в термочутливому і нетермочутливому (за опорних і середньоінтегральних значень коефіцієнтів теплопровідності) циліндрах не перевищують 2%.

У табл.3 подано такі дані, отримані при знаходженні достатнього розбиття шарів циліндра на складові для досягнення точності $\varepsilon = 10^{-4}$ при $M_{\text{boil}}^{(3)} = 0$.

Таблиця 3. Результат розбиття шарів циліндра на складові

| Загальна к-сть шарів | Кількість розбиттів в кожному шарі | | | Виконання інтегральної умови |
|----------------------|------------------------------------|--------|---------|------------------------------|
| | I шар | II шар | III шар | |
| 3 | 1 | 1 | 1 | -0.000309 |
| 4 | 2 | 1 | 1 | -0.000161 |
| 5 | 2 | 1 | 2 | -0.000069 |

Як бачимо, подання циліндра п'ятьма складовими забезпечує виконання інтегральної умови із наперед заданою точністю. У результаті отримали такі розподіли напружень, деформацій та переміщення, зображені на рис. 4.18-4.20. Зазначимо, що стала осьова деформація дорівнює 0.00369579 при $M_{\text{boil}}^{(3)} = 2$.

З рис. 4.18-4.20 видно, що розподіли компонент напружено-деформованого

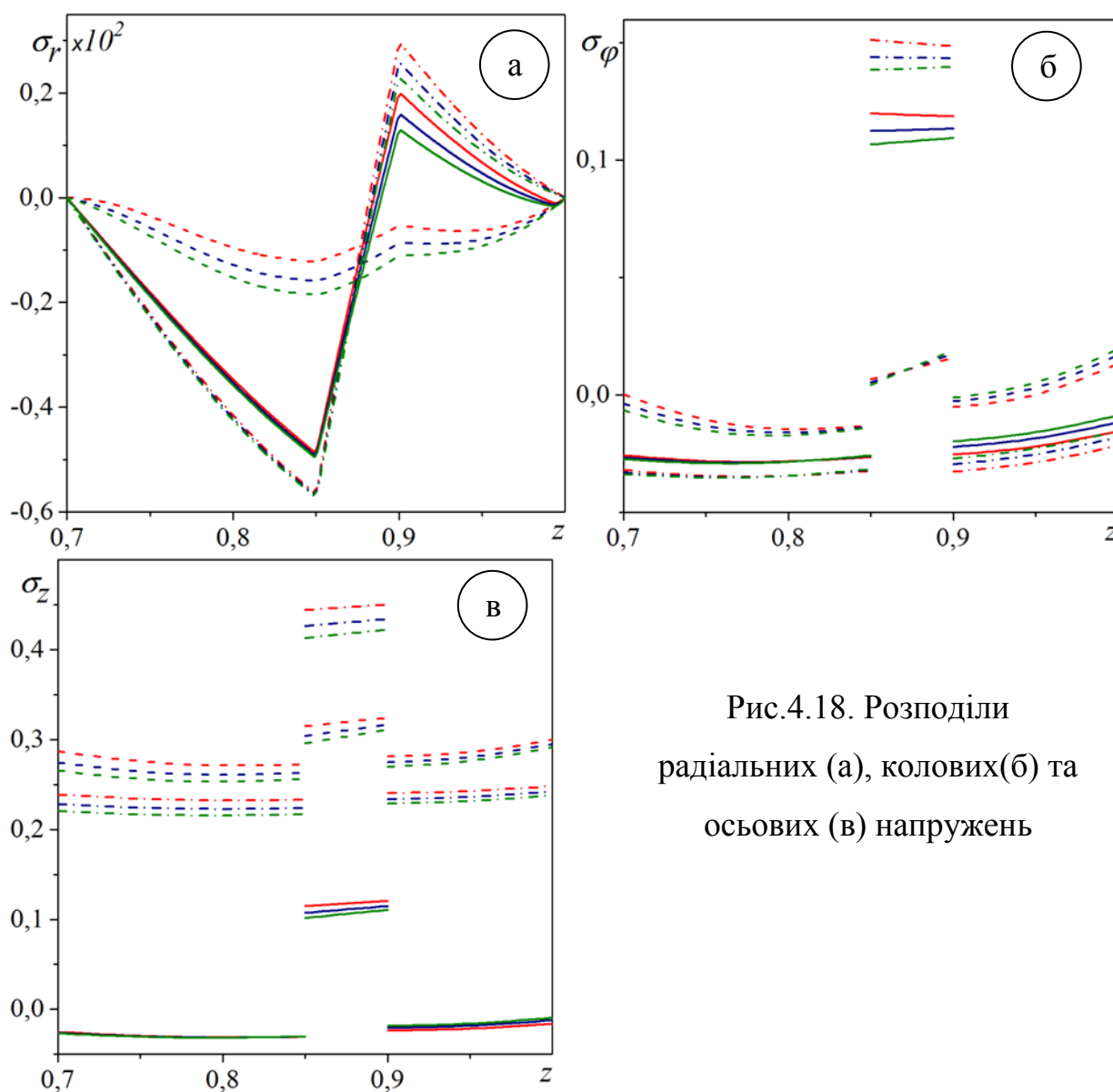


Рис.4.18. Розподіли радіальних (а), колових(б) та осьових (в) напружень

стану у термочутливому порожнистому циліндрі краще наближаються переважно такими розподілами в аналогічному нетермочутливому за середньоінтегральних значень механічних характеристик його складових. Зокрема, при $M_{\text{boil}}^{(3)} = 2$ максимальні розбіжності між відповідними коловими напруженнями – 40%, радіальними деформаціями – 31%, але за опорних значень термомеханічних характеристик, коловими деформаціями – 25%, радіальними переміщеннями – 25%.

Однак, використання моделі нетермочутливого тіла для визначення компонент напружено-деформованого стану не дає достатнього наближення розподілів

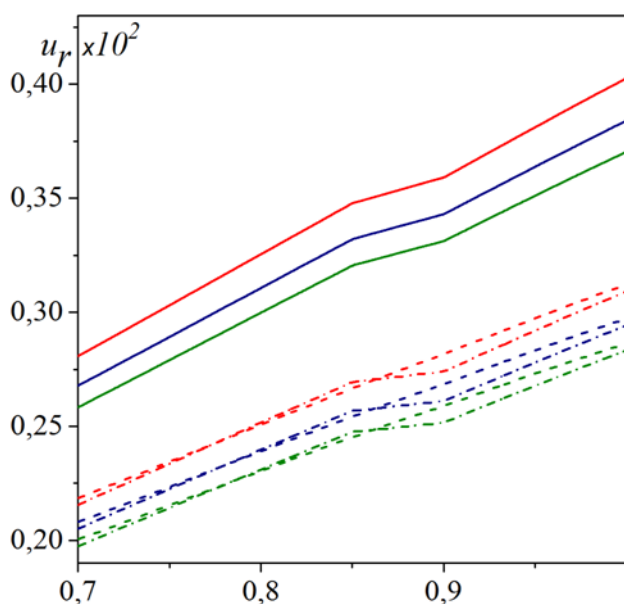


Рис.4.19. Розподіли радіальних переміщень

відповідних компонент до таких розподілів термочутливого циліндра. Так, при визначенні радіальних чи осьових напружень максимальні розбіжності між розподілами термочутливого і нетермочутливого тіл в деяких шарах перевищує 50%. При цьому відбувається якісна зміна розподілів нетермочутливих радіальних та осьових напружень змінюються якісно (стиск в термочутливому і розтяг у нетермочутливому).

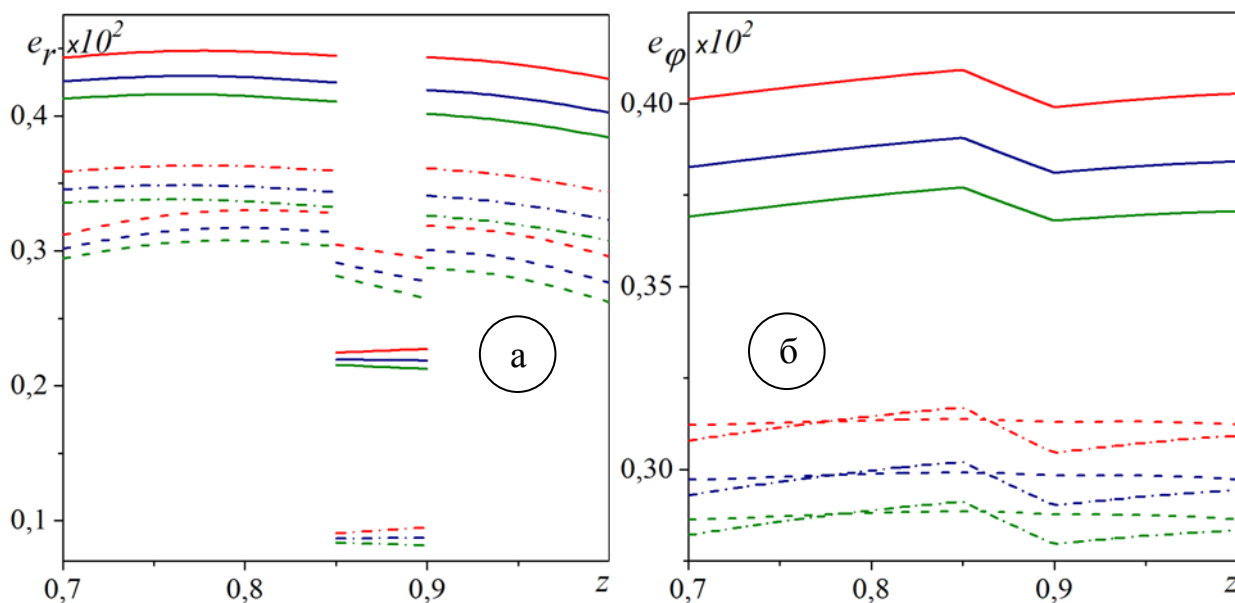


Рисунок 4.20. Розподіли радіальних (а) та колових(б) деформацій

4.6. Моделювання термопружного стану тришарового порожнистого циліндра за задання на циліндричних поверхнях конвективно-променевого теплообміну та тепловідведення випаровуванням рідини

4.6.1. Формулювання задачі

Розглядається тришаровий безмежний термочутливий порожнистий циліндр (рис.4.21), який складається із трьох циліндрів, виготовлених із різних матеріалів. Циліндр нагрівається наявним у першому та третьому шарах джерелами тепла (3.5). Через внутрішню обмежувальну поверхню $r = r_1$ відбувається конвективно-променевий теплообмін із середовищем, температура якого $t = t_{c1}$, а на зовнішній $r = r_4$ – тепловідведення шляхом випаровування рідини. Коефіцієнти теплообмінів через ці поверхні сталі і рівні α_1 та α_3 відповідно. На межах дотику сусідніх шарів $r = \{r_2, r_3\}$ виконуються умови ідеального теплового контакту.

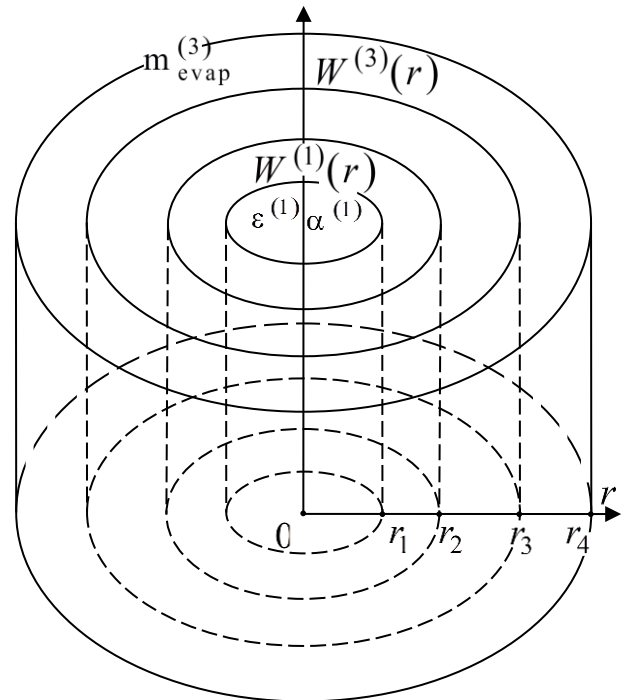


Рис. 4.21. Циліндр 3-шаровий за радіальною координатою

4.6.2. Математична модель для розподілу температури та її розв'язок

Термочутливий циліндр. Математична модель у безрозмірному вигляді містить:

- рівняння теплопровідності для складових

$$\frac{d}{d\rho} \left(\rho \lambda_*^{(i)}(T_i) \frac{dT_i}{d\rho} \right) = W^{(i)}(\rho) (\delta_{i1} + \delta_{i3}), \quad \rho_i < \rho < \rho_{i+1}, \quad i = \overline{1,3};$$

- крайові умови на обмежувальних плоских поверхнях

$$\left[\lambda_*^{(1)}(T_1) \frac{dT_1}{d\rho} - \text{Bi}^{(1)}(T_1 - T_{c1}) - \text{Sk}^{(1)}(T_1^{(4)} - T_{c1}^{(4)}) \right]_{\rho=\rho_1} = 0,$$

$$\left[\lambda_*^{(3)}(T_3) \frac{dT_3}{d\rho} + \text{Bi}^{(3)} \left((T_3 - T_{\text{cn}}) + \text{M}_{\text{evap}}^{(3)} \left(\frac{P_{\text{A,sat}}}{T_3} - \frac{P_{\text{A,c}}}{T_{\text{cn}}} \right) \right) \right]_{\rho=\rho_4} = 0;$$

- умови контакту на поверхнях дотику складових циліндра

$$T_{i-1}|_{\rho=\rho_i} = T_i|_{\rho=\rho_i}, \quad \frac{\lambda_{t0}^{(i-1)}}{\lambda_{t0}^{(i)}} \lambda_*^{(i-1)}(T_{i-1}) \frac{dT_{i-1}}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_i} = \lambda_*^{(i)}(T_i) \frac{dT_i}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_i}, \quad i = 2, 3.$$

У результаті застосування перетворення Кірхгофа згідно методики, представленій у другому розділі, отримано простішу нелінійну задачу на змінні Кірхгофа. Інтегруючи лінійні рівняння, отримані з рівнянь теплопровідності, знаходимо змінні Кірхгофа, які мають вигляд

$$\theta_i = C_{i1} \ln \frac{\rho}{\rho_i} + C_{i2} + \bar{W}^{(i)}(\rho)(\delta_{i1} + \delta_{i3}), \quad i = \overline{1,3},$$

а сталі інтегрування визначаються так

$$C_{11} = \rho_1 \left(\text{Bi}^{(1)} \left(\frac{\sqrt{1 + 2k_1 C_{12}} - 1}{k_1} + T_p - T_{c1} \right) + \text{Sk}^{(1)} \left(\left(\frac{\sqrt{1 + 2k_1 C_{12}} - 1}{k_1} + T_p \right)^4 - T_{c1}^4 \right) \right),$$

$$C_{21} = \frac{\lambda_{t0}^{(1)}}{\lambda_{t0}^{(2)}} (C_{11} + \rho_2 \tilde{W}^{(1)}(\rho_2)), \quad C_{31} = \frac{\lambda_{t0}^{(1)}}{\lambda_{t0}^{(2)}} C_{21},$$

$$C_{22} = C_{11} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} + C_{12} + \bar{W}^{(1)}(\rho_2) + \frac{k_2 - k_1}{2} \left(\frac{\sqrt{1 + 2k_1 \left(C_{11} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} + C_{12} + \bar{W}^{(1)}(\rho_2) \right)} - 1}{k_1} \right)^2,$$

$$C_{32} = C_{21} \ln \frac{\rho_3}{\rho_2} + C_{22} + \frac{k_3 - k_2}{2} \left(\frac{\sqrt{1 + 2k_2 \left(C_{21} \ln \frac{\rho_3}{\rho_2} + C_{22} \right)} - 1}{k_2} \right)^2,$$

а C_{12} визначається з рівняння

$$\frac{C_{31}}{\rho_4} + \text{Bi}^{(3)} \left(\frac{\sqrt{1 + 2k_3 \left(C_{31} \ln \frac{\rho_4}{\rho_3} + C_{32} + \bar{W}^{(3)}(\rho_4) \right)} - 1}{k_3} + T_p - T_{cn} + \right. \\ \left. + M_{\text{evap}}^{(3)} \frac{1}{t_k^2} \left(\frac{k_3 p_{A,\text{sat}}}{\sqrt{1 + 2k_3 \left(C_{31} \ln \frac{\rho_4}{\rho_3} + C_{32} + \bar{W}^{(3)}(\rho_4) \right)} - 1} + \bar{\tau}^{(n)} \right) \right) = 0,$$

яке не має аналітичного розв'язку рівнянь. Для його розв'язання при конкретних значеннях вхідних параметрів використовуємо пакет програм аналітичних перетворень. Знайшовши значення C_{12} , автоматично отримуємо значення і для решти сталих інтегрування.

Нетермочутливий циліндр. Математична модель у безрозмірних величинах для визначення розподілу температури нетермочутливого циліндра має вигляд

$$\frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dT_{iN}}{d\rho} \right) = W_N^{(i)}(\rho) (\delta_{i1} + \delta_{i3}), \quad \rho_i < \rho < \rho_{i+1}, \quad i = \overline{1,3}, \\ \left[\frac{dT_{1N}}{d\rho} - \text{Bi}_N^{(1)} (T_{1N} - T_{c1}) - \text{Sk}_N^{(1)} (T_{1N}^4 - T_{c1}^4) \right]_{\rho=\rho_1} = 0, \\ \left[\frac{dT_{3N}}{d\rho} + \text{Bi}_N^{(3)} \left((T_{3N} - T_{cn}) + M_{\text{evap}}^{(3)} \left(\frac{p_{A,\text{sat}}}{T_{3N}} - \frac{p_{A,c}}{T_{cn}} \right)^3 \right) \right]_{\rho=\rho_4} = 0, \\ T_{i-1N} \Big|_{\rho=\rho_i} = T_{iN} \Big|_{\rho=\rho_i}, \quad \frac{\lambda_{t0}^{(i-1)}}{\lambda_{t0}^{(i)}} \frac{dT_{i-1N}}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_i} = \frac{dT_{iN}}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_i} \quad i = 2, 3.$$

Рівняння для визначення розподілу температури нетермочутливого циліндра мають вигляд

$$T_N^{(i)} = \bar{C}_{i1} \ln \frac{\rho}{\rho_i} + \bar{C}_{i2} + \bar{W}_N^{(i)} (\delta_{i1} + \delta_{i3}), \quad i = \overline{1,3}.$$

Сталі інтегрування визначаються таким чином

$$\bar{C}_{11} = \rho_1 \left(\text{Bi}_N^{(1)} (\bar{C}_{12} - T_{c1}) + \text{Sk}_N^{(1)} (\bar{C}_{12}^4 - T_{c1}^4) \right), \\ \bar{C}_{21} = \frac{\lambda_{t0}^{(1)}}{\lambda_{t0}^{(2)}} \left(\rho_1 \text{Bi}_N^{(1)} (\bar{C}_{12} - T_{c1}) + \rho_2 \tilde{W}_N^{(1)}(\rho_2) \right), \\ \bar{C}_{22} = \bar{C}_{12} + \rho_1 \text{Bi}_N^{(1)} (\bar{C}_{12} - T_{c1}) \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} + \bar{W}_N^{(1)}(\rho_2),$$

$$\bar{C}_{31} = \frac{\lambda_{r0}^{(1)}}{\lambda_{r0}^{(3)}} \left(\rho_1 \text{Bi}_N^{(1)} (\bar{C}_{12} - T_{c1}) + \rho_2 \tilde{W}_N^{(1)} (\rho_2) \right),$$

$$\bar{C}_{32} = \bar{C}_{12} + \frac{\lambda_{r0}^{(1)}}{\lambda_{r0}^{(2)}} \left(\rho_1 \text{Bi}_N^{(1)} (\bar{C}_{12} - T_{c1}) + \rho_2 \tilde{W}_N^{(1)} (\rho_2) \right) \ln \frac{\rho_3}{\rho_2} +$$

$$+ \rho_1 \text{Bi}_N^{(1)} (\bar{C}_{12} - T_{c1}) \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} + \bar{W}_N^{(1)} (\rho_2),$$

а \bar{C}_{12} визначається з рівняння

$$\frac{\bar{C}_{31}}{\rho_4} + \text{Bi}_N^{(3)} \left(\bar{C}_{31} \ln \frac{\rho_4}{\rho_3} + \bar{C}_{32} + \bar{W}_N^{(3)} (\rho_4) + \right.$$

$$\left. + M_{\text{evap}}^{(3)} \frac{1}{t_k^2} \left(p_{A,\text{sat}} \left(\bar{C}_{31} \ln \frac{\rho_4}{\rho_3} + \bar{C}_{32} + \bar{W}_N^{(3)} (\rho_4) \right)^{-1} + \bar{\tau}^{(n)} \right) \right) = 0.$$

4.6.3. Числові дослідження

Нехай матеріалом першого і третього шарів циліндра є титановий сплав (3.2), а другого – кераміка (3.1). За координати меж складових циліндра взяли $\rho_1 = 0.7$, $\rho_2 = 0.85$, $\rho_3 = 0.9$, $\rho_4 = 1$, за характерний розмір – $l_0 = r_4$. Значення безрозмірних температур прийняли такими: $T_{c1} = 1/2$, $T_{cn} = 7/11$, безрозмірних критеріїв – $\text{Po}^{(1)} = -2$, $\text{Po}^{(3)} = -3$, $\text{Bi}^{(1)} = 1$, $\text{Bi}^{(3)} = 1$, $\text{Sk}^{(1)} = 1$, а сталі тиски на внутрішній та зовнішній поверхнях циліндра і зусилля на торцях – $p_1 = p_2 = p = 0$. В якості охолоджуючих рідин використовуємо FC-72 та FC-87.

Результати (рис. 4.22) моделювання процесу випаровування рідини FC-87 з поверхні із застосуванням лінеаризованої та нелінійної моделей, показали, що, для прикладу, розподіли температур та радіальних напружень лінеаризованої та нелінійної моделей мають досить великі кількісні (більше 50%), розбіжності.

Для дослідження впливу залежності термомеханічних характеристик матеріалів шарів циліндра від температури на характер і рівень розподілу температури побудували її графік (рис. 4.23) за вищевказаних вхідних даних. Тут червоними лініями зображено температури при $M_{\text{evap}}^{(3)} = 0$ (конвективний теплообмін), синіми – при використанні рідини FC-72, зеленими – рідини FC-87.

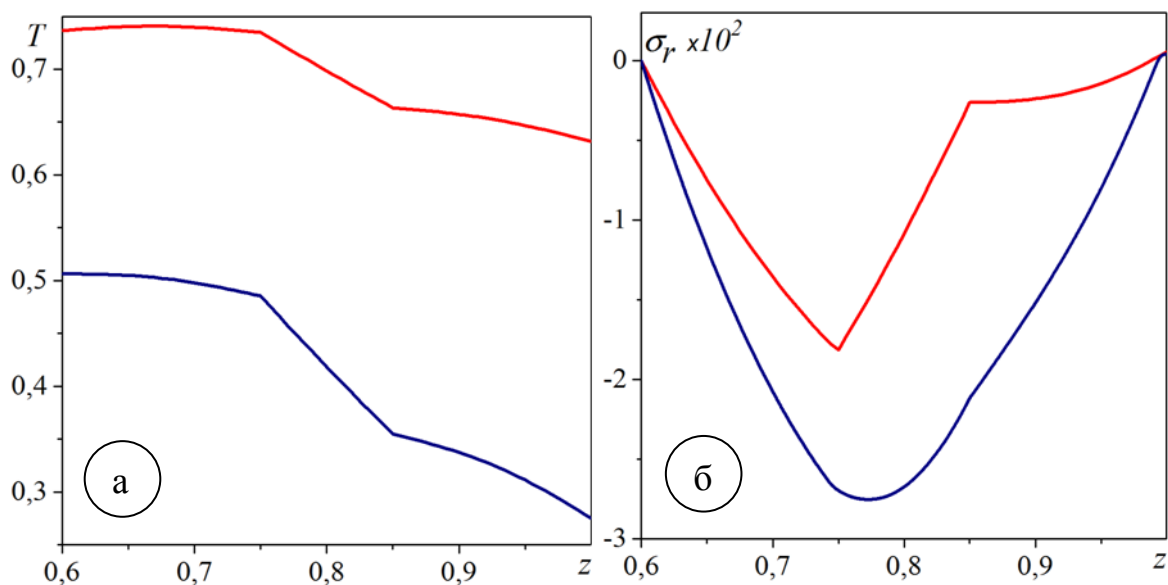


Рис.4.22. Розподіли температур (а) та напружень (б) за використання нелінійної та лінеаризованої моделей

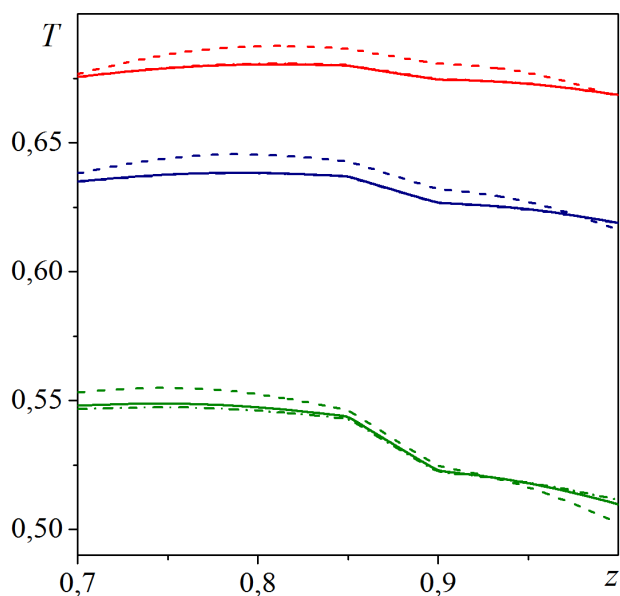


Рис.4.23. Графіки розподілу температур

Максимальні розбіжності між температурами в термочутливому і нетермочутливому (за опорних і середньоінтегральних значень коефіцієнтів теплопровідності) циліндрах не перевищують 2% .

У табл.3 подано такі дані, отримані при знаходженні достатнього розбиття шарів циліндра на складові для досягнення точності $\varepsilon = 10^{-4}$ при $M_{\text{evap}}^{(3)} = 0$.

Таблица 3. Результат розбиття шарів циліндра на складові

| Загальна к-сть шарів | Кількість розбиттів в кожному шарі | | | Виконання інтегральної умови |
|----------------------|------------------------------------|--------|---------|------------------------------|
| | I шар | II шар | III шар | |
| 3 | 1 | 1 | 1 | -0.000452 |
| 4 | 2 | 1 | 1 | -0.000161 |
| 5 | 2 | 1 | 2 | -0.000069 |

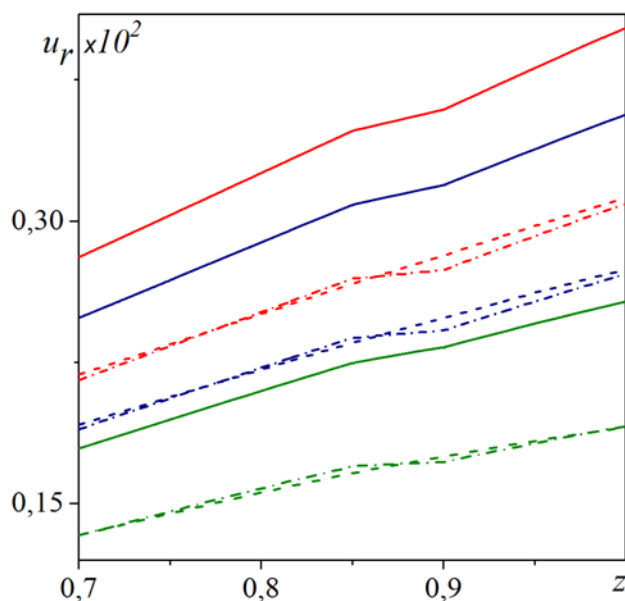


Рис. 4.24. Розподіли радіальних (а) та колових(б) деформацій

Як бачимо, подання циліндра п'ятьма складовими забезпечує виконання інтегральної умови із наперед заданою точністю. У результаті отримали такі розподіли напружень, деформацій та переміщення, зображені на рис. 4.24-4.26. Зазначимо, що стала осьова деформація дорівнює 0.0040220 при $M_{\text{evap}}^{(3)} = 0$.

З рис. 4.24-4.26 видно, що розподіли компонент напружено-деформованого стану у термочутливому порожнистому

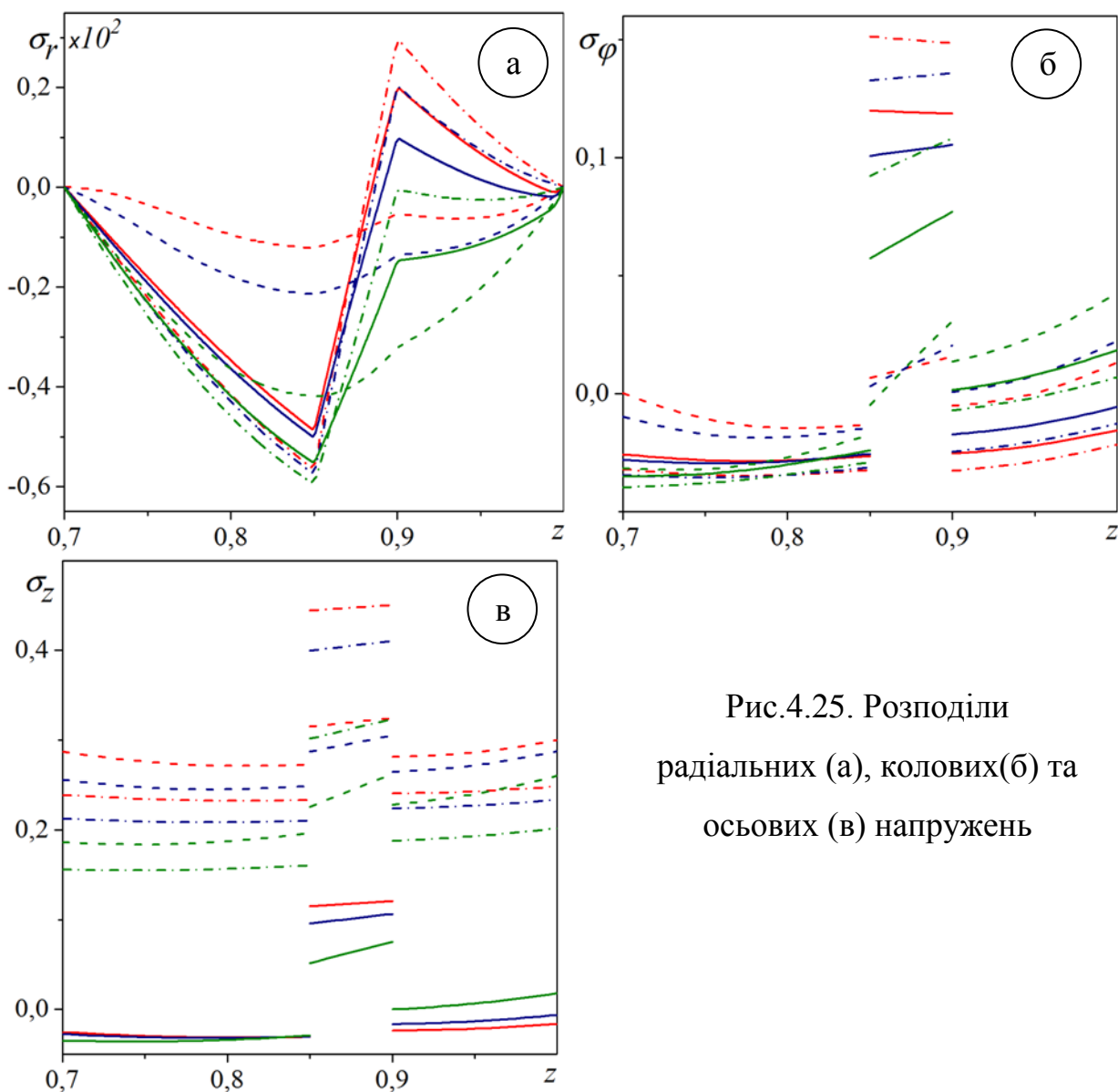


Рис.4.25. Розподіли радіальних (а), колових(б) та осьових (в) напружень

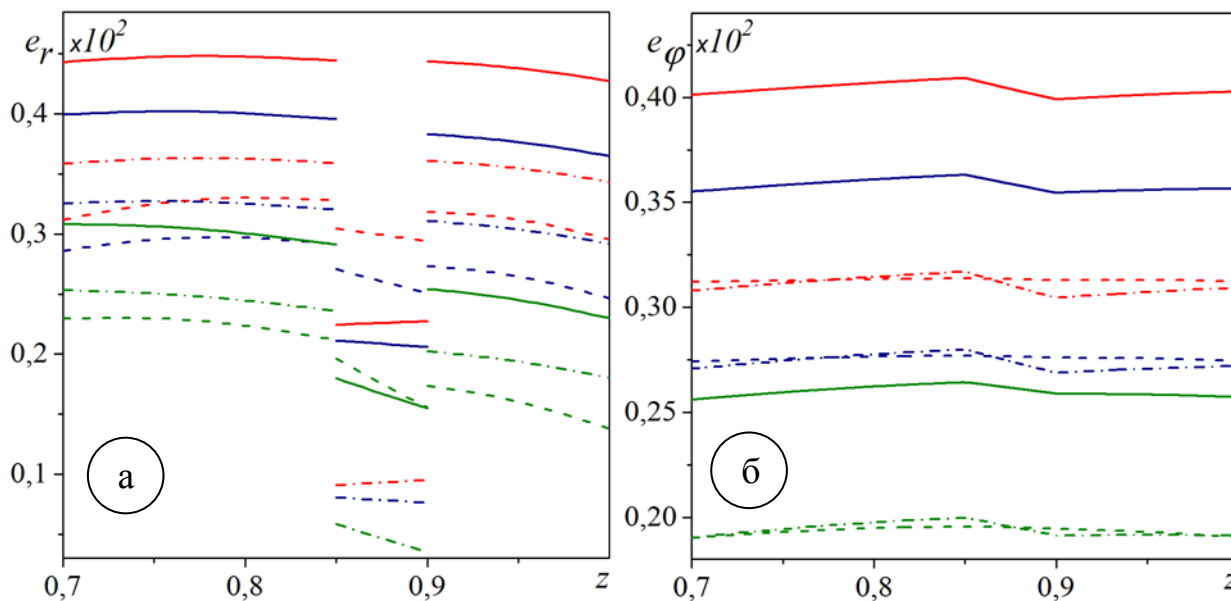


Рис.4.26. Розподіли радіальних (а) та колових(б) деформацій

циліндрі краще наближаються переважно такими розподілами в аналогічному нетермочутливому за середньоінтегральних значень механічних характеристик його складових. Зокрема, максимальні розбіжності між відповідними коловими напруженнями – 30%, радіальними деформаціями – 35%, але за опорних значень термомеханічних характеристик – 60%, коловими деформаціями – 25%, радіальними переміщеннями – 25%.

Однак, використання моделі нетермочутливого тіла для визначення компонент напружено-деформованого стану не дає достатнього наближення розподілів відповідних компонент до таких розподілів термочутливого циліндра. Так, при визначенні колових та осьових напружень максимальні розбіжності між розподілами термочутливого і нетермочутливого тіл перевищує 50%. При цьому відбувається якісна зміна розподілів нетермочутливих радіальних та осьових напружень змінюються якісно (стиск в термочутливому і розтяг у нетермочутливому).

4.7. Порівняння розподілів температури та компонент напружено-деформованого стану за тепловідведення шляхом кипіння і випаровування рідини з циліндричних поверхонь

Розглянемо задачі теплопровідності, представлені у пунктах 4.5 та 4.6. Як бачимо, якщо у другій задачі покласти $Sk^{(1)} = 0$, то моделі розподілів тепла шарува-

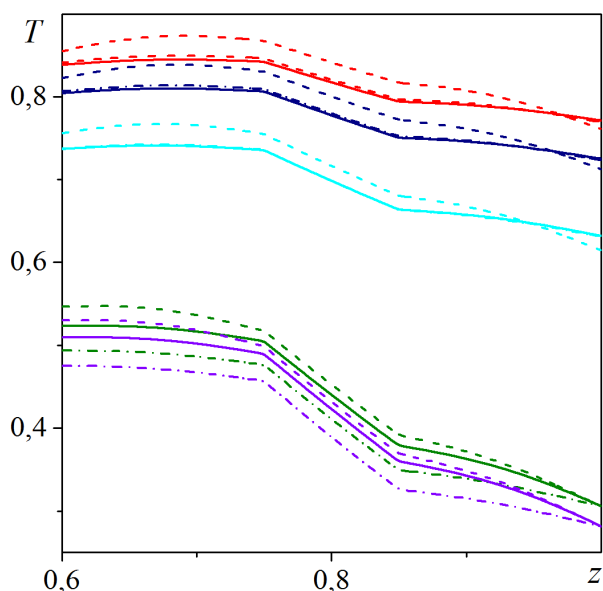


Рис.4.27. Графіки розподілу температур

температур прийняли такими: $T_{cl} = 1/2$, $T_{cn} = 7/11$, безрозмірних критеріїв – $Ro^{(1)} = -5$, $Ro^{(3)} = -5$, $Bi^{(1)} = 1$, $Bi^{(3)} = 1$, $Sk^{(1)} = 0$, а сталі тиски на внутрішній та зовнішній поверхнях циліндра і зусилля на торцях – $p_1 = p_2 = p = 0$. В якості охолоджуючих рідин використаємо FC72 та FC87 з температурами кипіння $T_{boil}^{(3)} = 329/1100$ та $T_{boil}^{(3)} = 303/1100$ відповідно.

Графіки розподілів температур подано на рис. 4.27. Зазначимо, що тут і далі в цьому підрозділі червоними лініями зображено розподіли температур циліндра без тепловідведення з зовнішньої поверхні $\rho = \rho_4$ (суто конвективний теплообмін), синіми – при випаровуванні рідини FC72, а блакитними – FC87, зеленими – при кипінні рідини FC72, а фіолетовими – FC87.

У табл.4 подано такі дані, отримані при знаходженні достатнього розбиття шарів циліндра на складові для досягнення точності $\varepsilon = 10^{-4}$ при використанні рідини FC72 для тепловідведення шляхом кипіння на поверхні циліндра.

Як бачимо, подання циліндра вісьма складовими забезпечує виконання інтегральної умови із наперед заданою точністю. У результаті отримали такі розподіли напружень, деформацій та переміщення, зображені на рис. 4.28-4.30. Зазначимо, що стала осьова деформація дорівнює 0.00143175.

тих циліндрів відрізнятимуться лише умовами на обмежувальній поверхні $\rho = \rho_4$. Дослідимо ефективність кожного з методів тепловідведення: випаровування та кипіння рідин на поверхнях.

Нехай матеріалом першого і третього шарів циліндра є титановий сплав (3.2), а другого – кераміка (3.1). За координати меж складових циліндра взяли $\rho_1 = 0.6$, $\rho_2 = 0.75$, $\rho_3 = 0.85$, $\rho_4 = 1$, за характерний розмір – $l_0 = r_4$. Значення без розмірних

Таблиця 4. Результат розбиття шарів циліндра на складові

| Загальна к-сть шарів | Кількість розбиттів в кожному шарі | | | Виконання інтегральної умови |
|----------------------|------------------------------------|--------|---------|------------------------------|
| | I шар | II шар | III шар | |
| 3 | 1 | 1 | 1 | -0.002854 |
| 4 | 1 | 1 | 2 | -0.001494 |
| 5 | 2 | 1 | 2 | -0.001001 |
| 6 | 2 | 2 | 2 | -0,000666 |
| 7 | 3 | 2 | 2 | -0,000568 |
| 8 | 3 | 2 | 3 | -0,000354 |

З рис. 4.28-4.30 видно, що, як і в п.4.5 та 4.6, краще тепловідведення здійснюється за використання рідини FC-87. Більше того, інтенсивніше зменшуватиметься рівень температури та компонент термопружного стану, якщо на поверхні відбуватиметься кипіння рідини.

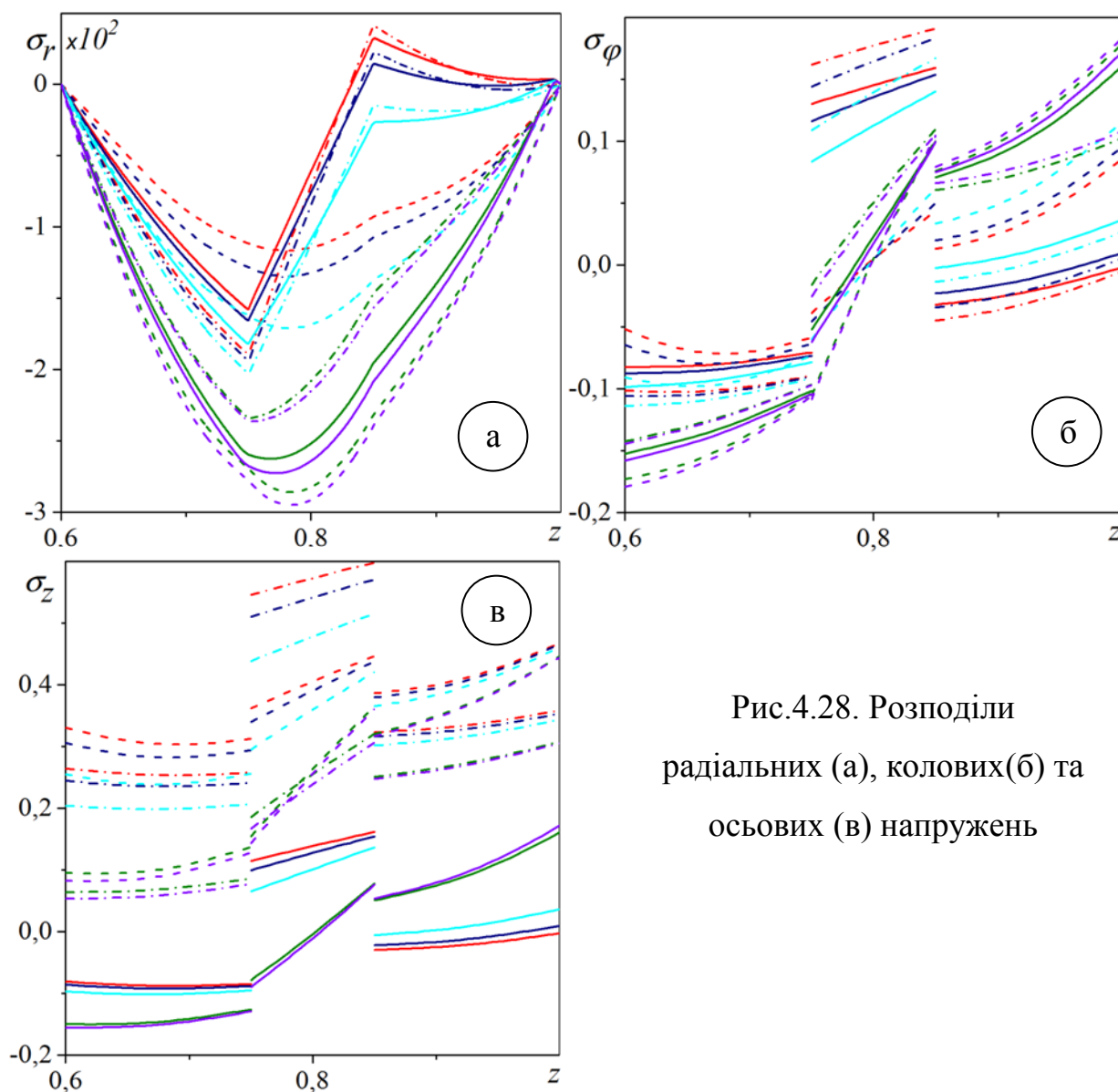


Рис.4.28. Розподіли радіальних (а), колових(б) та осьових (в) напружень

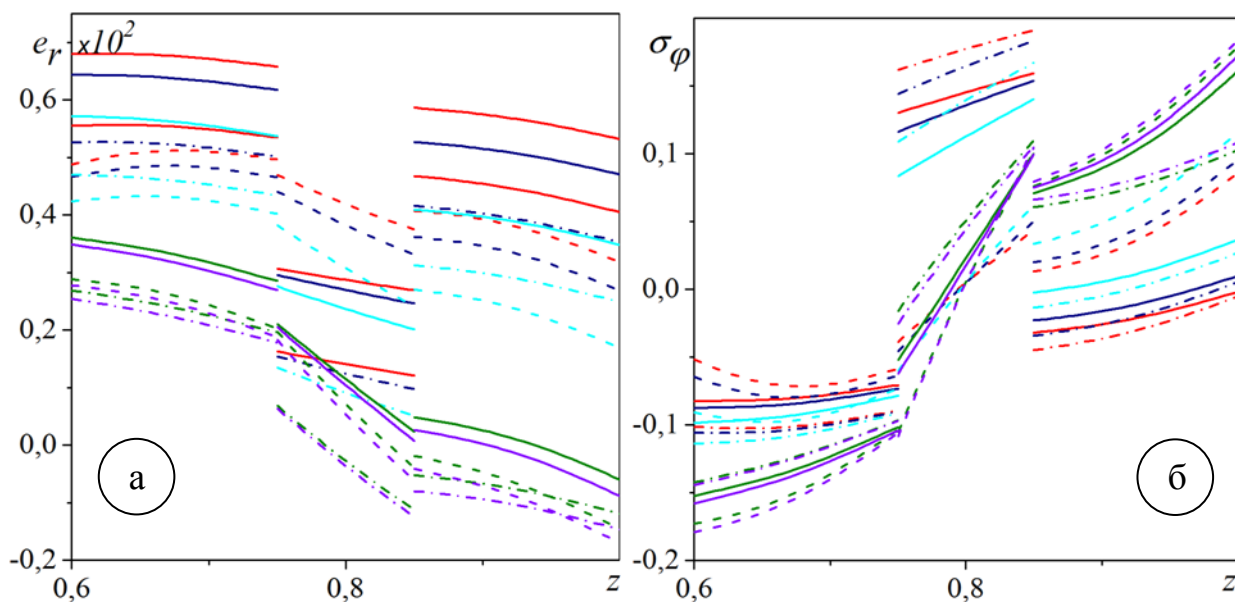


Рис.4.29. Розподіли радіальних (а) та колових(б) деформацій

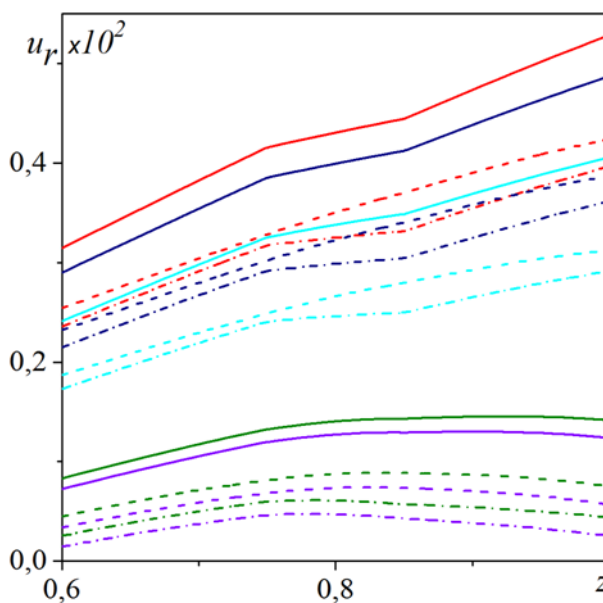


Рис.4.30. Розподіли радіальних переміщень

Що стосується термочутливості матеріалів, то ними не варто нехтувати. Так, якщо для розподілів температур максимальні розбіжності між розподілами термочутливого і нетермочутливого (за опорних та середньоінтегральних значень термомеханічних характеристик) циліндра сягають 10% , то для розподілів деяких компонент термопружного стану (колових та осьових напружень, радіальних та колових деформацій, радіальних переміщень) вони можуть перевищувати 50% .

4.8. Висновки до розділу

Визначено температурні поля та компоненти напружено-деформованого стану шаруватих за радіальною координатою безмежних порожнистих термочутливих та нетермочутливих циліндричних тіл за різних умов теплообміну на обмежувальних поверхнях (стала температура чи тепловий потік, конвективний, променевий чи конвективно-променевий теплообмін, відведення тепла шляхом кипіння чи випаровування рідини з поверхні) та наявності тепловиділень всередині шарів. У якості матеріалів тіла вибрано кераміку ZrO_2 та титановий сплав Ti-6Al-4V, а охолоджуючих рідин – FC-72 та FC-87, що спеціально розроблені для використання в мікроелектроніці.

Здійснено порівняльний аналіз отриманих результатів та досліджено вплив термочутливості матеріалів шарів, значень безрозмірних критеріїв Біо, Кірпічова та Померанцева, а також інтенсивності тепловідведення (граничні умови кипіння та випаровування рідин з поверхонь) на характер та рівень розподілів температур та напружень.

Дослідження впливу термочутливості показало, що важливу роль відіграє врахування залежності теплових і механічних характеристик матеріалів при визначенні при визначенні розподілів компонент напружено-деформованого стану. Так, у всіх дослідженнях спостерігались великі кількісні та якісні (розтяг в термочутливому та стиск у нетермочутливому чи навпаки) розбіжності між розподілами напружень. При цьому розподіли температур нетермочутливих тіл достатньо точно описували тепловий стан термочутливого циліндра, що може бути корисним при їх експрес-оцінці.

Виявлено, що процеси кипіння та випаровування рідин з поверхонь шаруватих порожнистих циліндрів суттєво інтенсифікують тепловідведення і є досить ефективними способами додаткового відведення тепла за критичних умов. При цьому встановлено, що використання лінеаризованої умови випаровування дає хибні розподіли температур та компонент напружено-деформованого стану.

РОЗДІЛ 5. ПРОГРАМНІ ЗАСОБИ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ ШАРУВАТИХ ПО ОСЬОВІЙ ТА РАДІАЛЬНІЙ КООРДИНАТАХ ЦИЛІНДРІВ

У п'ятому розділі описано прикладні програмні засоби: «Програму для розрахунку температурних напружень багат шарових по осі циліндрів» («StressCalc_axes») [75] та «Програму для розрахунку компонент напружено-деформованого стану багат шарових за радіальною координатою порожнистих циліндрів» («StressCalc_rad») [74], що розроблені для моделювання термопружного стану шаруватих по осьовій та радіальній координатах циліндрів. На дані програми зареєстровано авторські права на твір (№64105 та №64106) (73, 74) у Державній службі інтелектуальній власності.

Функціонування програм перевірене на стандартних конфігураціях персонального комп'ютера, на якому встановлене середовище Maple 7, або це ж середовище новішої версії.

Кожен із програмних засобів надається користувачу як окремий файл розширення *mw*, який необхідно відкрити за допомогою середовища Maple.

5.1. Програма для розрахунку температурних напружень багат шарових по осі циліндрів («StressCalc_axes»)

Програмний засіб «Програма для розрахунку температурних напружень багат шарових по осі циліндрів» («StressCalc_axes») орієнтований на обчислення термонапружень шаруватих по осі термочутливих та нетермочутливих (за опорних та середньоінтегральних значень термомеханічних характеристик термочутливих) циліндрів.

Температурні напруження термочутливого циліндра обчислюються за формулою (2.82), а нетермочутливого за опорних чи середньоінтегральних значень механічних характеристик – за формулою (2.83).

У програмі передбачено квадратичну апроксимацію механічних характеристик, а тому, якщо коефіцієнти Пуассона, модулі Юнга чи коефіцієнти лінійного розширення матеріалу якогось із шарів проапроксимовано виразом вищого степе-

ня, то код програми потрібно буде модифікувати, дописавши змінні, яких не вис-
тачає.

5.1.1. Підготовка та ввід даних, які використовуються під час виконання програми

У табл. 5.1 описано вхідні дані, які повинен ввести користувач.

Таблиця 5.1. Вхідні дані для виконання обчислень у програмі «StressCalc_axes»

| № | Змінна в програмі | Опис | Примітки |
|----|---|--|---|
| 1. | N | Кількість шарів циліндра n . | Значення змінної змінити, якщо кількість шарів більша за 2. |
| 2. | STEP | Крок розбиття (табулювання). | Використовується для подальшого обчислення максимальних різниць між розподілами напружень в термочутливому та нетермочутливому циліндрах. |
| 3. | z[i] | Координати меж шарів циліндра у безрозмірній формі $(i = \overline{1, n+1})$. | Кількість координат змінити, якщо кількість шарів більша за 2. |
| 4. | tp, tk | Початкова t_p та кінцева t_k температури [К]. | Температури із заданого діапазону $[t_p, t_k]$. |
| | Коефіцієнти Пуассона | | Кількість змінних збільшити, якщо кількість шарів більша за 2. |
| | $v^{(i)}(t_i) = v_0^{(i)} \left(1 + k_{v1}^{(i)} (T_i - T_p) + k_{v2}^{(i)} (T_i - T_p)^2 \right)$ | | |
| 5. | nuOp[i] | $v_0^{(i)}, (i = \overline{1, n})$. | |

| | | | |
|--|---|---|---|
| 6. | nuK1[i], nuK2[i] | $k_{vj}^{(i)}, (i = \overline{1, n}, j = 1, 2).$ | |
| Коефіцієнти лінійного розширення | | | |
| $\alpha_t^{(i)}(t_i) = \alpha_{t0}^{(i)} \left(1 + k_{\alpha 1}^{(i)}(T_i - T_p) + k_{\alpha 2}^{(i)}(T_i - T_p)^2 \right)$ | | | |
| 7. | alphaOp[i] | $\alpha_{t0}^{(i)}, (i = \overline{1, n}).$ | |
| 8. | alphaK1[i], | $k_{\alpha j}^{(i)}, (i = \overline{1, n}, j = 1, 2)$ | |
| | alphaK2[i], | | |
| Модулі Юнга | | | |
| $E^{(i)}(t_i) = E_0^{(i)} \left(1 + k_{E1}^{(i)}(T_i - T_p) + k_{E2}^{(i)}(T_i - T_p)^2 \right)$ | | | |
| 9. | eOp[i] | $E_0^{(i)}, (i = \overline{1, n}).$ | |
| 10. | eK1[i], eK2[i] | $k_{Ej}^{(i)}, (i = \overline{1, n}, j = 1, 2)$ | |
| Розподіли температур | | | |
| 11. | T[i], Tb[i], Tm[i] | Розподіли температур термочутливого, нетермочутливого за опорних та середньоінтег- ральных значень коефіцієнтів теплопровідності відповідно, $(i = \overline{1, n})$ | Використовується функ- ціональний оператор “->” (стрілка). Записується, як « var->result », де « var » – послідовність змінних (або одна змінна), « result » – результат виконання процедури відносно змінних. Користувачеві потрібно ввести тут вираз розподілу температури (« result »), залежний від змінної (« var »). |

| Розподіли напружень | | | |
|--|--|--|--|
| 12. | Sterm, Sbas, Smid | Графіки розподілів напружень | Використовується функція display(f[1], f[2],...) , де f[i] – розподіли певних напружень для кожного шару циліндра, $i = \overline{1, n}$. Якщо кількість шарів є більшою за 2, то перелік атрибутів функції display потрібно збільшити відповідно до кількості шарів |
| Результат виведення максимальних різниць | | | |
| 13. | <i>«word»</i> i, layer n, point m, point, | <i>«word»</i> – об'єкт, відсотки якого виводяться, i – номер шару циліндра, для якого обчислюються максимальні різниці, n – максимальна різниця між розподілами напружень в термочутливому і нетермочутливому циліндрах за опорних значень термомеханічних характеристик матеріалів шарів [%], m – максимальна різниця між розподілами напружень в термочутливому і нетермочутливому циліндрах за середньоінтегральних значень термомеханічних характеристик матеріалів шарів циліндра [%], point – точка, в якій спостерігаємо різницю. | |

5.1.2. Результат виконання програми

Результатом виконання програмного засобу «Програма для розрахунку температурних напружень багат шарових по осі циліндрів» є графіки розподілів напружень багат шарових термочутливого та нетермочутливого за опорних та середньоінтегральних значень термомеханічних характеристик матеріалів циліндрів, а також максимальні різниці між розподілами напружень в термочутливому і

нетермочутливому циліндрах за опорних та середньоінтегральних значень термомеханічних характеристик матеріалів шарів .

Вивід графіків здійснюється вкінці програмного коду. Графік розподілу напружень термочутливого циліндра буде зображений за допомогою червоної суцільної лінії, нетермочутливого за опорних значень термомеханічних характеристик матеріалів – синьої штрихової, нетермочутливого за середньоінтегральних значень термомеханічних характеристик матеріалів – зеленої штрих-пунктирної.

Приклад виводу графіків розподілу вищеописаних напружень та максимальних різниць між розподілами напружень подано на рис.5.1 та 5.2 відповідно.

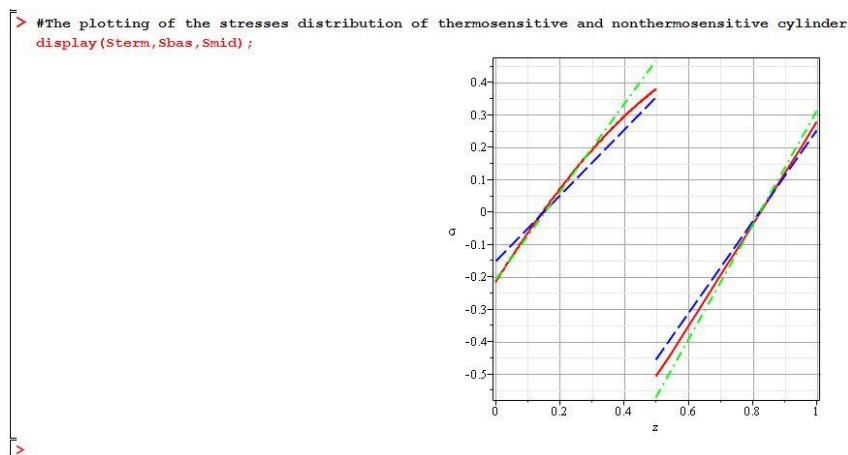


Рис. 5.1. Приклад виводу графіків розподілів напружень

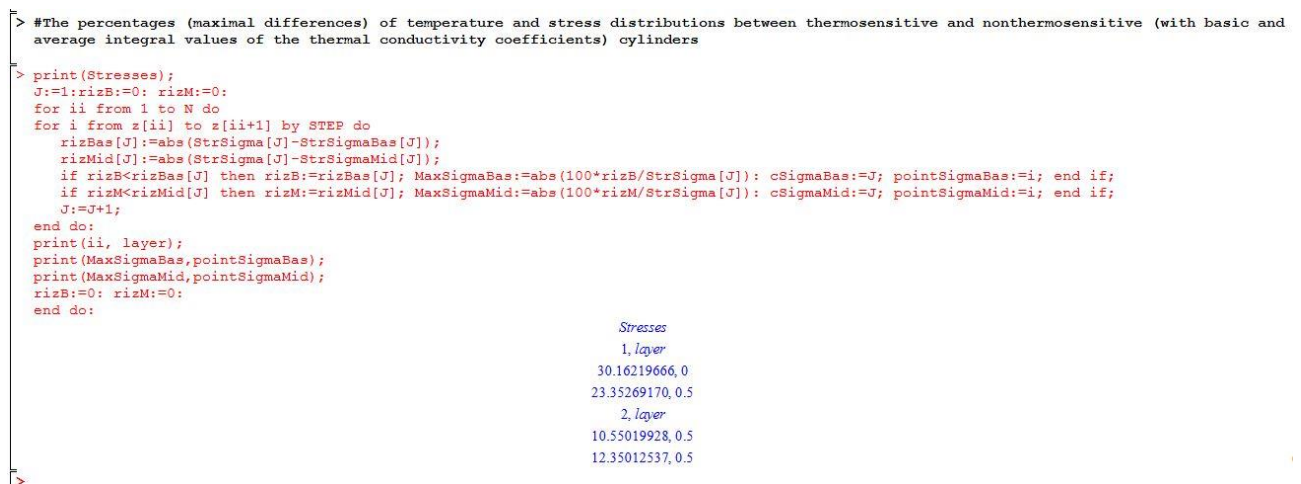


Рис. 5.2. Приклад виводу максимальних різниць між розподілами напружень

5.1.3. Розв’язування контрольного прикладу

Формулювання задачі. Нехай циліндр складається з двох шарів, координати меж яких у безрозмірній формі – $z_1 = 0, z_2 = 0.5, z_3 = 1$. Матеріалом першого шару є вольфрам з механічними характеристиками

$$\begin{aligned} \nu^{(1)} &= 0.29(1 + 0.05172(T_1 - T_p)), \\ \alpha_t^{(1)} &= 4.43 \cdot 10^{-6}(1 + 0.10457(T_1 - T_p)), \\ E^{(1)} &= 4.04 \cdot 10^{11}(1 - 0.2277(T_1 - T_p)), \end{aligned} \quad (5.1)$$

а другого – сталь марки 25X2M1Ф з механічними характеристиками

$$\begin{aligned} \nu^{(2)} &= 0.24(1 + 0.291(T_2 - T_p)), \\ \alpha_t^{(2)} &= 12.47 \cdot 10^{-6}(1 + 0.294(T_2 - T_p)), \\ E^{(2)} &= 2.197 \cdot 10^{11}(1 - 0.278(T_2 - T_p)). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Матеріали шарів циліндра взяті в діапазоні температур $300 \div 900$ К.

Розподіли температур в кожному шарі термочутливого циліндра описуються формулами

$$\begin{aligned} T_1(r) &= \frac{\sqrt{1 - 0.7968649703 \cdot r} - 1}{0.4066697136} + \frac{1}{3}, \\ T_2(r) &= \frac{\sqrt{0.6294170673 + 0.06731199304 \cdot r} - 1}{0.3365599652} + \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

нетермочутливого за опорних значень механічних характеристик —

$$\begin{aligned} Tb_1(r) &= 0.979744672 \cdot r + \frac{1}{3}, \\ Tb_2(r) &= -0.1 \cdot r + 0.8732056693, \end{aligned}$$

нетермочутливого за середньоінтегральних механічних характеристик —

$$\begin{aligned} Tm_1(r) &= 1.133382057 \cdot r + \frac{1}{3}, \\ Tm_2(r) &= -0.1126362884 \cdot r + 0.956342506. \end{aligned}$$

За таких умов ставиться завдання визначити розподіли напружень заданого циліндра.

Максимальні розбіжності між розподілами напружень термочутливого та нетермочутливого циліндрів рахувати з кроком 0.01.

Програмна імплементація вхідних даних.

Кількість шарів залишається незмінною, оскільки циліндр двошаровий (нагадаємо, що кількість шарів циліндра N за замовчуванням проініціалізовано двійкою).

```
> N:=2: #The amount of layers
```

Крок розбиття, координати меж шарів та діапазон температур матимуть вигляд

```
STEP:=0.01: #The step of tracing
> z[1]:=0: z[2]:=0.5: z[3]:=1: #The coordinates of layer boundaries
> tp:=300: tk:=900: #The temperature range
```

Механічні характеристики запишуться

```
> #The Poisson's ratio
nuOp[1]:=0.29: nuK1[1]:=-0.05172413793: nuK2[1]:=0:
nuOp[2]:=0.24: nuK1[2]:=0.291: nuK2[2]:=0:

#The coefficient of linear expansion
alphaOp[1]:=0.000004434576271: alphaK1[1]:=0.1045711665: alphaK2[1]:=0:
alphaOp[2]:=0.00001246666667: alphaK1[2]:=0.2941122994: alphaK2[2]:=0:

#The elastic moduli
eOp[1]:=4.04*10^11: eK1[1]:=-0.2277227723: eK2[1]:=0:
eOp[2]:=2.196666667*10^11: eK1[2]:=-0.2781942336: eK2[2]:=0:
```

а температури термочутливого і нетермочутливого за опорних та середньоінтегральних значень механічних характеристик

```
> #The temperature distribution of thermosensitive cylinder
T[1]:=(r)->(sqrt(1-2*0.4066697136*0.9797446720*r)-1)/(-0.4066697136)+1/3:
T[2]:=(r)->(sqrt(1+2*(-0.3365599652)*(-0.1*(r-0.5)+0.5005451792))-1)/(-0.3365599652)+1/3:
```

```
#The temperature distribution (with basic values of the thermal conductivity coefficients)
Tb[1]:=(r)->0.9797446720*r+1/3:
Tb[2]:=(r)->-0.1*(r-0.5)+0.8232056693:
```

```
#The temperature distribution (with average integral values of the thermal conductivity coefficients)
Tm[1]:=(r)->1.133382057*r+1/3:
Tm[2]:=(r)->-0.1126362884*(r-0.5)+0.9000243618:
```

Оскільки циліндр двошаровий, то виводи графіків розподілу напружень термочутливого та нетермочутливого за опорних та середньоінтегральних значень механічних характеристик циліндрів змінювати не потрібно, зокрема вони будуть

```
> Sterm:=display(sigmaT[1], sigmaT[2]):
> Sbas:=display(sigmaN[1], sigmaN[2]):
> Smid:=display(sigmaM[1], sigmaM[2]):
```

Якщо б циліндр складався з, наприклад, трьох шарів, виводи графіків розподілу напружень мали б вигляд

```
> Sterm:=display(sigmaT[1], sigmaT[2], sigmaT[3]):
> Sbas:=display(sigmaN[1], sigmaN[2], sigmaN[3]):
> Smid:=display(sigmaM[1], sigmaM[2], sigmaM[3]):
```

Якщо для досліджень необхідний лише один з графіків, то його слід вивести, дописавши у вільному полі робочої області `display(Sterm)`, `display(Sbas)` чи `display(Smid)`.

У результаті запуску програми отримано графіки розподілів напружень (рис.5.3) та значення максимальних різниць між розподілами (рис.5.4).

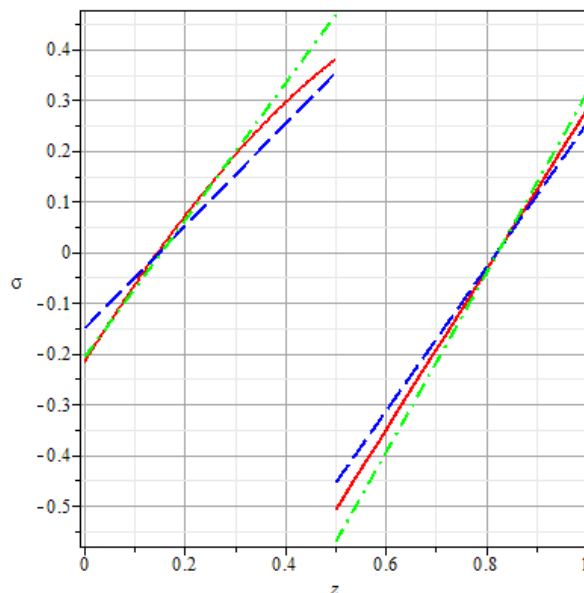


Рис. 5.3. Графік розподілів напружень

| | |
|-------------------|--|
| <i>Stresses</i> | |
| <i>1, layer</i> | |
| 30.16219666, 0 | |
| 23.35269200, 0.50 | |
| <i>2, layer</i> | |
| 10.55019935, 0.5 | |
| 12.35012528, 0.5 | |

Рис. 5.4. Максимальні різниці між розподілами напружень термочутливого та нетермочутливого циліндрів

Розглянемо детальніше вивід максимальних різниць (рис. 5.4). Максимальні різниці між розподілами напружень термочутливого і нетермочутливого за опорних значень механічних характеристик складають 30.16% в точці $z = 0$ першого шару та 10.55% в точці $z = 0.5$ другого шару циліндра.

Максимальні різниці між розподілами напружень термочутливого і нетермочутливого за середньоінтегральних значень механічних характеристик складають 23.35% в точці $z = 0.5$ першого шару та 12.35% в точці $z = 0.5$ другого шару циліндра.

5.2. Програма для розрахунку температурних напружень багат шарових за радіальною координатою порожнистих циліндрів

Програмний засіб «Програма для розрахунку температурних напружень багат шарових за радіальною координатою порожнистих циліндрів» («StressCalc_rad») орієнтований на обчислення компонент напружено-деформованого стану шаруватих за радіальною координатою термочутливих та нетермочутливих (за опорних та середньоінтегральних значень термомеханічних характеристик термочутливих) порожнистих циліндрів.

Компоненти напружено-деформованого стану термочутливого циліндра обчислюються за формулами (2.284)-(2.90), а нетермочутливого за опорних чи середньоінтегральних значень механічних характеристик – за формулою (2.92)-(2.98).

Програмний засіб надається користувачу як один файл розширення *mw*, який необхідно відкрити за допомогою середовища Maple.

Для отримання результату розв'язання задачі термопружності у табличному і графічному виглядах користувачу необхідно ввести вхідні дані задачі та натиснути кнопку запуску програми. Зазначимо, що майже всі вхідні дані попередньо проініціалізовано «нулем».

Результатами програми є графіки розподілів температур і компонент напружено-деформованого стану у термочутливому і нетермочутливому за опорних та середньоінтегральних значень термомеханічних характеристик циліндрах, максимальні різниці між розподілами температур і компонентами напружено-деформованого стану, а також перевіряється достатність розбиття товстих шарів циліндра на тонкі, які приводять до виконання інтегральної умови (2.225) з заданою користувачем точністю.

5.2.1. Підготовка та ввід даних, які використовуються під час виконання програми

У табл. 5.2 описано змінні, які використовуються в програмі.

Таблиця 5.2. Вхідні дані для виконання обчислень у програмі «StressCalc_rad»

| № | Змінна в програмі | Опис | Примітки |
|-----|-------------------|--------------------------------|---|
| 14. | N | Кількість шарів циліндра n . | Значення змінної змінити, якщо кількість шарів більша за 2. |
| 15. | STEP | Крок розбиття (табулювання). | Для подальшого обчислення максимальних різниць між розподілами компонент напружено-деформованого стану в циліндрах. |

| | | | |
|--|---|--|--|
| 16. | accuracy | Точність виконання інтегральної умови (12) | Задається як абсолютна величина відхилення по модулю інтегралу правої частини формули (17) від $\rho_1^2 p_1 - \rho_{n+1}^2 p_2$. |
| 17. | rho[i] | Координати меж шарів циліндра ($i = \overline{1, n+1}$). | Кількість змінних збільшити, якщо кількість шарів більша за 2. P[i]>0. |
| 18. | P[i] | Кількість розбиттів кожного з шарів циліндра на менші. | |
| 19. | tp, tk | Початкова t_p та кінцева t_k температури. | Температури із заданого діапазону $[t_p, t_k]$. |
| Коефіцієнти Пуассона | | | Кількість змінних збільшити, якщо кількість шарів більша за 2. |
| $v^{(i)}(t_i) = v_0^{(i)} \left(1 + k_{v1}^{(i)} (T_i - T_p) + k_{v2}^{(i)} (T_i - T_p)^2 \right)$ | | | |
| 20. | nuOp[i] | $v_0^{(i)}, (i = \overline{1, n})$. | |
| 21. | nuK1[i], nuK2[i] | $k_{vj}^{(i)}, (i = \overline{1, n}, j = 1, 2)$. | |
| Коефіцієнти лінійного розширення | | | |
| $\alpha_t^{(i)}(t_i) = \alpha_{t0}^{(i)} \left(1 + k_{\alpha1}^{(i)} (T_i - T_p) + k_{\alpha2}^{(i)} (T_i - T_p)^2 \right)$ | | | |
| 23. | alphaOp[i] | $\alpha_{t0}^{(i)}, (i = \overline{1, n})$. | |
| 24. | alphaK1[i], alphaK2[i], | $k_{\alpha j}^{(i)}, (i = \overline{1, n}, j = 1, 2)$ | |
| Модулі Юнга | | | |
| 25. | $E^{(i)}(t_i) = E_0^{(i)} \left(1 + k_{E1}^{(i)} (T_i - T_p) + k_{E2}^{(i)} (T_i - T_p)^2 \right)$ | | |

| | | | |
|-----|--|--|--|
| 26. | eOp[i] | $E_0^{(i)}, (i = \overline{1, n})$. | |
| 27. | eK1[i], eK2[i] | $k_{Ej}^{(i)}, (i = \overline{1, n}, j = 1, 2)$ | |
| 28. | Розподіли температур | | |
| 29. | T[i], Tb[i], Tm[i] | Розподіли температур термочутливого, нетермочутливого за опорних та середньоінтегральних значень коефіцієнтів теплопровідності відповідно, $(i = \overline{1, n})$ | Використовується функціональний оператор “->” (стрілка). Записується, як « var->result », де « var » – послідовність змінних (або одна змінна), « result » – результат виконання процедури відносно змінних. Користувачеві потрібно ввести тут вираз розподілу температури (« result »), залежний від змінної (« var »). |
| | Розподіли компонент напружено-деформованого стану | | |
| 30. | Phi[i] | Змінна, що позначає функцію $\Phi^{(i)}(T_i)$ i -го шару термочутливого циліндра $(i = \overline{1, n})$. | Функцію записано в циклі, де початкова та кінцева ітерації – номери «субшарів» складової циліндра. Якщо кількість шарів циліндра більша за 2, необхідно додати цикли для кожного з шарів. |

| | | | |
|---|--|---|--|
| 31. | PhiN[i], PhiM[i] | Змінна, що позначає функцію $\Phi_n^{(i)}(T_{in})$ i -го шару нетермочутливого (за опорних та середньоінтегральних значень термомеханічних характеристик відповідно) циліндра $i = (\overline{1, n})$. | Кількість змінних необхідно збільшити, якщо кількість шарів більша за 2. |
| 32. | ez, ezN, ezM | Осьові деформації термочутливого та нетермочутливого за опорних та середньоінтегральних значень термомеханічних характеристик циліндра відповідно. | |
| Результат виведення максимальних різниць | | | |
| 33. | «word» $i, layer$ $\delta w_N, \rho$ $\delta w_M, \rho$ | «word» – об'єкт, відсотки якого виводяться, приймає значення: Total_stresses, σ ; Radial_stresses, σ_ρ ; Circumferential_stresses, σ_φ ; Axial_stresses, σ_z ; Radial_deformation, e_ρ ; Circumferential_deformation, e_φ ; Radial_displacement, u_ρ ; i – номер шару циліндра, для якого обчислюються відносні відхилення, $\delta w_N, \delta w_M$ – відносні відхилення у відсотках між розподілами компонент напружено-деформованого стану термочутливого і нетермочутливого (за опорних та середньоінтегральних значень термомеханічних характеристик відповідно) циліндрів, ρ – точка, в якій обчислюється максимальна різниця. | |

Примітки.

1. Для побудови графіків розподілів компонент напружено-деформованого стану використовується вбудована функція plot, що фактично є аргументом функції display. Якщо кількість шарів циліндра є меншою за загальну кількість розбиттів шарів на менші частини, то до списку аргументів функції display слід додати необхідну к-сть аргументів (функцій), що відповідають за побудову графіків розподілу компонент напружено-деформованого стану термочутливого циліндра, тобто PlotSigma[i], PlotSigmaR[i], PlotSigmaPhi[i], PlotSigmaZ[i], PlotEr[i], PlotEPhi[i], PlotUr[i].
2. За замовчуванням, функції display розраховані на 2-шаровий циліндр, тому, у випадку якщо кількість шарів більша за 2, кількість аргументів нетермочутливого циліндра за опорних (PlotSigmaN[i], PlotSigmaRN[i], PlotSigmaPhiN[i], PlotSigmaZN[i], PlotErN[i], PlotEPhiN[i], PlotUrN[i]) та середньоінтегральних значень термомеханічних характеристик (PlotSigmaM[i], PlotSigmaRM[i], PlotSigmaPhiM[i], PlotSigmaZM[i], PlotErM[i], PlotEPhiM[i], PlotUrM[i]) необхідно збільшити.
3. Верифікація інтегральної умови (2.91) проводиться після обрахунку сумарних напружень в термочутливому циліндрі.
4. Вкінці програмного коду за необхідності можна вивести табличні значення компонент напружено-деформованого стану, прибравши знак коментаря (“#”).

5.2.2. Результат виконання програми

Результатом виконання програмного засобу «Програма для розрахунку компонент напружено-деформованого стану багатошарових за радіальною координатою порожнистих циліндрів» є графіки розподілів компонент напружено-деформованого стану багатошарових термочутливого та нетермочутливого (за опорних та середньоінтегральних значень термомеханічних характеристик матеріалів) порожнистих циліндрів, максимальні різниці між розподілами компонент напружено-деформованого стану в термочутливому і нетермочутливому (за опор-

них та середньоінтегральних значень термомеханічних характеристик матеріалів шарів) циліндрах, а також результат виконання інтегральної умови (2.91).

Вивід графіків здійснюється вкінці програмного коду. Графіки розподілів компонент напружено-деформованого стану термочутливого циліндра буде зображений за допомогою червоної суцільної лінії, нетермочутливого за опорних значень термомеханічних характеристик матеріалів – синьої штрихової, нетермочутливого за середньоінтегральних значень термомеханічних характеристик матеріалів – зеленої штрих-пунктирної.

Приклад виводу графіків розподілу, наприклад, колових напружень, максимальних різниць між розподілами колових напружень термочутливого та нетермочутливого (за опорних та середньоінтегральних значень механічних характеристик) циліндрів, а також результат виконання інтегральної умови (2.91) подано на рис.5.5 – 5.7 відповідно.

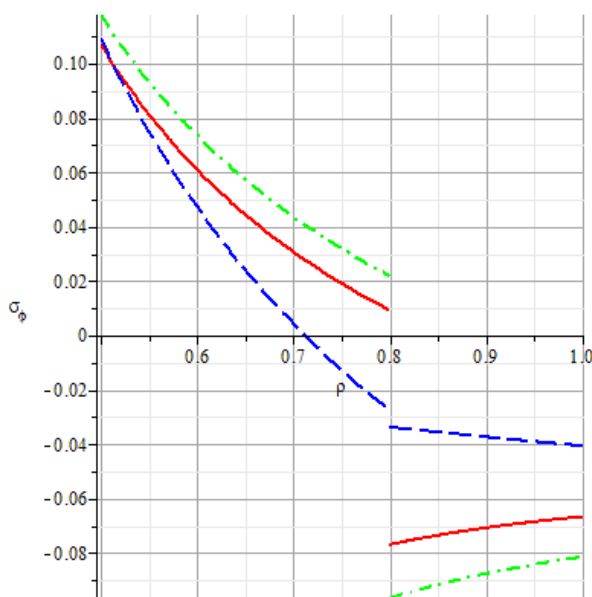


Рис.5.5. Приклад виводу графіків розподілів колових напружень

```

SIGMA_Phi
> print(Circumferential_stresses, sigma[phi]);
J:=1; rizB:=0; rizM:=0;
for ii from 1 to N do
  for i from rho[ii] to rho[ii+1] by STEP do
    rizBas[J]:=abs(StrSigmaPhi[J]-StrSigmaPhiBas[J]);
    rizMid[J]:=abs(StrSigmaPhi[J]-StrSigmaPhiMid[J]);
    if rizB<rizBas[J] then rizB:=rizBas[J]; MaxSigmaPhiBas:=abs(100*rizB/StrSigmaPhi[J]); cSigmaBas:=J; pointSigmaPhiBas:=i; end if;
    if rizM<rizMid[J] then rizM:=rizMid[J]; MaxSigmaPhiMid:=abs(100*rizM/StrSigmaPhi[J]); cSigmaMid:=J; pointSigmaPhiMid:=i; end if;
    J:=J+1;
  end do;
  print(ii, layer);
  print(MaxSigmaPhiBas, pointSigmaPhiBas);
  print(MaxSigmaPhiMid, pointSigmaPhiMid);
  rizB:=0; rizM:=0;
end do;

Circumferential_stresses,  $\sigma_\varphi$ 
1, layer
402.9317244, 0.8
42.06890358, 0.7
2, layer
56.12123122, 0.8
25.57210951, 0.8

```

Рис.5.6. Вивід максимальних різниць між розподілами колових напружень

```

#The verification of the integral condition
print(preset_accuracy, accuracy);
print(integral_condition, (add(int(eta*(sigma[k](k, eta)-eta*f[k](eta)), eta = Points[k] .. Points[k+1]), k = 1 .. p)
- (Points[1]^2*p1-Points[p+1]^2*p2));

preset_accuracy, 0.00001
integral_condition, 0.00042354543

```

Рис.5.7. Вивід результату виконання інтегральної умови

5.2.3. Розв'язування контрольного прикладу

Формулювання задачі. Нехай порожнистий циліндр складається з двох шарів, координати меж яких у безрозмірній формі – $\rho_1 = 0.5$, $\rho_2 = 0.8$, $\rho_3 = 1$. Шари циліндра на складові не розбиватимемо.

Матеріалом першого шару є кераміка ZrO_2 (5.1), а другого — титановий сплав $Ti-6Al-4V$ (5.2). Матеріали шарів циліндра взяті в діапазоні температур $300 \div 1100$ К.

Розподіли температур в кожному шарі термочутливого циліндра описуються формулами

$$T_1(r) = 4.054492378\sqrt{1.115251203 + 0.0078521149\ln(2 \cdot r)} - 3.781765105,$$

$$T_2(r) = 0.3315649867\sqrt{3.613596778 + 0.3016\ln(1.25 \cdot r)} - 0.058837714,$$

нетермочутливого за опорних значень механічних характеристик –

$$Tb_1(r) = 0.1618798956\ln(2 \cdot r) + \frac{1}{2},$$

$$Tb_2(r) = 0.05\ln(1.25 \cdot r) + 0.5760841384,$$

нетермочутливого за середньоінтегральних механічних характеристик –

$$Tm_1(r) = 0.1485562873 \ln(2 \cdot r) + \frac{1}{2},$$

$$Tm_2(r) = -0.023846687 \ln(1.25 \cdot r) + 0.5698219942.$$

Максимальні розбіжності між розподілами напружень термочутливого та нетермочутливого циліндрів рахувати з кроком 0.1, а точність виконання інтегральної умови (2.225) вибираємо 10^{-5} . Вважаємо, що зовнішні та внутрішні тиски, а також тиски на торцях циліндра відсутні.

За таких умов ставиться завдання визначити розподіли напружень заданого циліндра.

Програмна імплементація вхідних даних.

Кількість шарів залишається незмінною, оскільки циліндр двошаровий (нагадаємо, що кількість шарів циліндра N за замовчуванням проініціалізовано двійкою).

```
> N:=2: #The amount of \
```

Крок розбиття, точність виконання інтегральної умови, координати меж шарів циліндра, кількості розбиттів кожного шару та діапазон температур матимуть вигляд

```
> STEP:=0.1: #The step of tracing
  accuracy:=0.00001: # The accuracy of implementation of integral condition
> rho[1]:=0.5: rho[2]:=0.8: rho[3]:=1: #The coordinates of layer boundaries
P[1]:=1: P[2]:=1: #The amount of separation of each layer
tp:=300: tk:=1100: #The temperature range
```

Механічні характеристики запишуться

```
> #The Poisson's ratio
> nuOp[1]:=0.333: nuK1[1]:=0: nuK2[1]:=0:
  nuOp[2]:=0.2984: nuK1[2]:=0.118: nuK2[2]:=0:

#The coefficient of linear expansion
> alphaOp[1]:=8.738*10^(-6): alphaK1[1]:=-1.4128: alphaK2[1]:=1.7496:
  alphaOp[2]:=8.8559*10^(-6): alphaK1[2]:=0.49014: alphaK2[2]:=-0.36754:

#The elastic moduli
> eOp[1]:=116.381: eK1[1]:=-0.521357: eK2[1]:=-0.084215:
  eOp[2]:=105.05: eK1[2]:=-0.5916: eK2[2]:=0:
```

Температури термочутливого і нетермочутливого за опорних та середньоінтегральних значень механічних характеристик запишуться

```
> #The temperature distribution of thermosensitive cylinder
> T[1]:=r->4.054492378*sqrt(1.115251203 + 0.07985211490*ln(2.000000*r)) -
3.781765105;
T[2]:=r->0.3315649867*sqrt(3.613596778 + 0.30160*ln(1.250000*r)) -
0.0588377140;
```

```
#The temperature distribution (with basic values of the thermal conductivity
coefficients)
```

```
> Tb[1]:=r->0.1618798956*ln(2*r)+1/2;
Tb[2]:=r->0.05*ln(1.25*r)+0.5760841384;
```

```
#The temperature distribution (with average integral values of the thermal
conductivity coefficients)
```

```
> Tm[1]:=r->0.1485562873*ln(2*r)+1/2;
Tm[2]:=r->0.02384668748*ln(1.25*r)+0.5698219942;
```

Цикли з виразами функцій $\Phi^{(i)}(T_i)$ для термочутливого циліндра (у програмі вони позначені як Phi[i]) модифікацій не вимагають, оскільки циліндр двошаровий.

Якщо циліндр складається із більше, ніж двох шарів, то до вже існуючих циклів з виразами функцій $\Phi^{(i)}(T_i)$, потрібно додати такі цикли

```
> for i from pp[LAYER]+1 to pp[LAYER+1] do Phi[i]:= Rho -> tk *
alphaOp[LAYER] * ((T[LAYER](Rho) - Tp) + alphaK1[LAYER]/2 * (T[LAYER](Rho)
- Tp)^2 + alphaK2[LAYER]/3 * (T[LAYER](Rho) - Tp)^3); Phi[LAYER](Rho); end
do:
```

де LAYER — номер шару, для якого записується цикл.

Вирази функцій $\Phi^{(i)}(T_i)$ для нетермочутливого циліндра за опорних і середньоінтегральних значень (у програмі вони позначені як PhiN[i] та PhiM[i] відповідно) модифікацій не вимагають, оскільки циліндр двошаровий.

Якщо циліндр складається із більше, ніж двох шарів, то потрібно додати ще такі рядки

```
>PhiN[LAYER]:=Rho->tk*alphaOp[LAYER]*((Tb[LAYER](Rho)-Tp)):
```

для нетермочутливого циліндра за опорних значень механічних характеристик та

```
>PhiM[LAYER]:=Rho->tk*alphaMid[LAYER]*((Tm[LAYER](Rho)-Tp)):
```


для нетермочутливого циліндра за середньоінтегральних значень механічних характеристик, де LAYER — номер шару, для якого записується цикл.

Оскільки циліндр двошаровий і кожен з шарів на менші не розбивали, то виводи графіків розподілу компонент напружено-деформованого стану термочутливого та нетермочутливого за опорних та середньоінтегральних значень механічних характеристик циліндрів змінювати не потрібно, зокрема для сумарних напружень вони матимуть вигляд

```
> display(PlotSigma[1], PlotNSigma[1], PlotMSigma[1], PlotSigma[2],
PlotNSigma[2], PlotMSigma[2]);
```

де PlotSigma[LAYER] – розподіл сумарних напружень певного «субшару» термочутливого циліндра, PlotNSigma[LAYER] – розподіл сумарних напружень певного «субшару» нетермочутливого циліндра за опорних значень, PlotMSigma[LAYER] – розподіл сумарних напружень певного «субшару» нетермочутливого циліндра за середньоінтегральних значень механічних характеристик, причому LAYER номер «субшару».

Якщо б циліндр складався із, наприклад, трьох шарів, причому, шари були поділені сумарно, наприклад, на п'ять «субшарів», то вивід графіків розподілів компонент напружено-деформованого стану мав би такий вигляд

```
> display(PlotSigma[1], PlotNSigma[1], PlotMSigma[1], PlotSigma[2],
PlotNSigma[2], PlotMSigma[2], PlotSigma[3], PlotNSigma[3], PlotMSigma[3],
PlotSigma[4], PlotSigma[5]);
```

В результаті запуску програми отримано графіки розподілів, наприклад, радіальних напружень (рис.5.8) та їх значення максимальних різниць між розподілами радіальних напружень термочутливого та нетермочутливого (за опорних та середньоінтегральних значень механічних характеристик) (рис.5.9).

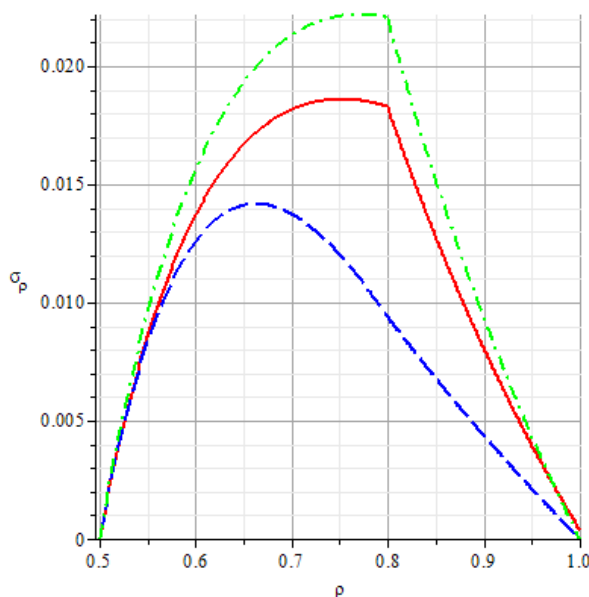


Рис.5.8. Графік розподілів радіальних напружень

| Radial_stresses, σ_p | |
|-----------------------------|-----|
| 1, layer | |
| 48.64502856 | 0.8 |
| 20.52241175 | 0.8 |
| 2, layer | |
| 48.64502858 | 0.8 |
| 20.52241169 | 0.8 |

Рис.5.9. Максимальні різниці між розподілами радіальних напружень термочутливого та нетермочутливого циліндрів

Розглянемо детальніше вивід максимальних різниць (рис.5.9).

Максимальні різниці між розподілами радіальних напружень термочутливого і нетермочутливого за опорних значень механічних характеристик складають 48.65% в точці $\rho = 0.8$ першого та другого шарів циліндра. Максимальні різниці між розподілами напружень термочутливого і нетермочутливого за середньоінтегральних значень механічних характеристик складають 20.52% в точці $\rho = 0.8$ першого та другого шарів циліндра.

5.3. Висновки до розділу

У розділі представлено розроблені прикладні програмні продукти «Програму для розрахунку температурних напружень багат шарових по осі циліндрів» («StressCalc_axes») та «Програму для розрахунку компонент напружено-деформованого стану багат шарових за радіальною координатою порожнистих циліндрів» («StressCalc_rad») для визначення термопружного стану багат шарових по осьовій та радіальній координатах циліндричних тіл. Перевагою програм є можливість проведення великої кількості числових експериментів по визначенню термопружного стану, що значно скорочує потребу у проведенні дороговартісних натурних експериментів.

Розроблені програми дозволяють представити отримані результати у зручному наглядному графічному вигляді.

На дані програми зареєстровано авторські права на твір (№64105 та №64106) у Державній службі інтелектуальній власності України.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота є завершеним науковим дослідженням, у якому вирішене актуальне наукове завдання з математичного моделювання температурних полів та компонент напружено-деформованого стану шаруватих за осью та радіальною координатами циліндричних тіл, у яких враховуються залежності теплових та механічних характеристик матеріалів шарів від температури за складних умов взаємодії із довкіллям та внутрішніх тепловиділень. При цьому отримано такі основні результати:

1. Сформульовано нелінійні математичні моделі теплового та напружено-деформованого станів термочутливих та нетермочутливих (за опорних та середньоінтегральних значень термомеханічних характеристик матеріалів) багатошарових за осью та радіальною координатами циліндричних тіл за різних умов теплообміну із довкіллям та знайдено їх числові розв'язки.
2. Здійснено порівняльний аналіз отриманих результатів та досліджено вплив термочутливості матеріалів шарів циліндрів, безрозмірних критеріїв Біо, Кірпічова, Старка та Померанцева, інтенсивності кипіння та випаровування рідини, використання лінеаризованої умови випаровування на характер та рівень розподілів температур та компонент напружено-деформованого стану.
3. Встановлено, що нехтування термочутливістю матеріалів шарів циліндрів при визначенні розподілів температур цілком допустиме, оскільки максимальні розбіжності між такими розподілами термочутливого та нетермочутливого (як за опорних, так і за середньоінтегральних значень термомеханічних характеристик матеріалів шарів) циліндрів є достатньо малими. Це може бути корисним при здійсненні експрес-оцінки теплового стану шаруватих циліндричних тіл.
4. При визначенні розподілів компонент напружено-деформованого стану з використанням моделі нетермочутливого тіла наявні великі кількісні (більше 50%) та іноді і якісні (розтяг у термочутливому тілі та стиск у нетермочутливому, чи навпаки) розбіжності. Таке недостовірне визначення

компонент термопружного стану не може бути використане при проектуванні багатошарових циліндричних конструкцій.

5. Дослідження тепловідведення шляхом кипіння та випаровування рідини з обмежувальних поверхонь показало їх ефективність, оскільки вони суттєво інтенсифікують відведення тепла – зниження температури може сягати 30% . Однак, використання лінеаризованої умови випаровування рідини з поверхні циліндра не дає адекватного розподілу температур і компонент напружено-деформованого стану.
6. Для числового аналізу та графічної ілюстрації розв'язків побудованих моделей розроблено програмні засоби для розрахунку температурних полів та компонент напружено-деформованого стану багатошарових за осьовою та радіальною координатами циліндричних тіл.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Беляев Н. М. Основы теплопередачи: Учебник / Н. М. Беляев. – К.: Высш. шк. Главное изд-во, 1989. – Ч. 2. – 343 с.
2. Беляев Н. М. Методы теории теплопроводности: Уч. пос. для вузов в 2-х ч. / Н. М. Беляев, А. А. Рядно. – М.: Высш. шк., 1982. – Ч. 2. – 304 с.
3. Бонилла Ч. Вопросы теплопередачи в ядерной технике. – М.: Госатомиздат, 1961. – 314 с.
4. Бурак Я. И. Вопросы оптимизации напряженно-деформированного состояния термоупругих оболочек / Бурак Я. И., Зозуляк Ю. Д. // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1988. – Вып. 27. – С. 11-18.
5. Бурак Я. И., Зозуляк Ю. Д., Гера Б. В. Оптимизация переходных процессов в термоупругих оболочках. – К.: Наук. думка, 1984. – 157 с.
6. Вайнман А. Б. Современное состояние проблемы коррозии металла пароводяного тракта энергоблоков СКД ТЭС Украины // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2002. – Спец. вип. № 3. – С. 44-50.
7. Вигак В. М. Корректные решения плоских задач теории упругости для полуплоскости // Прикл. механика. – 2004. – 40, № 9. – С. 55-62.
8. Вігак В.М. Дослідження напружень у термочутливих циліндричних тілах / В.М. Вігак, Б.М. Калиняк // Машинознавство. – 1999. – №9. – С. 10-14.
9. Вігак В.М. Зведення одновимірних задач пружності та термопружності для неоднорідних та термочутливих тіл до інтегральних рівнянь другого роду / В.М. Вігак, Б.М. Калиняк // Доп. НАН України. – 1998. – №11. – С. 60-67.
10. Вігак В.М. Метод прямого інтегрування рівнянь плоских задач пружності та термопружності для необмежених областей / Вігак В.М., Юзв'як М. Й. // Крайові задачі для диференціальних рівнянь. – 1999. – Вип. 4. – С. 9-33.
11. Вігак В.М. Розв'язок задач пружності та термопружності у напруженнях // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. – К.: Ін-т математики НАН України. – 1995. – Т. 9. – С. 34-131.

12. Вігак В.М. Розв'язування плоских задач пружності та термопружності для прямокутної області / Вігак В.М., Токовий Ю. В., Ригачівський А. В. // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1996. – 39, № 1. – С. 19-25.
13. Гамаюнов Н. И. Особенности переноса пара при испарении жидкостей из капилляров в неоднородном поле температур / Гамаюнов Н. И., Ланков А. А., Малышев В. Л. // Изв. ВУЗов. – 1984. – 5. – С. 65-70.
14. Гарматій Г.Ю., Кутнів М., Попович В.С. Числове розв'язування нестационарних задач теплопровідності термочутливих тіл при конвективному теплообміні // Машинознавство. — 2002. — № 1(55). — С. 21–25.
15. Гейтвуд Б. Температурные напряжения применительно к самолетам, снарядам, турбинам и ядерным реакторам. – М.: Изд-во иностр. лит. – 1959. – 349 с.
16. Гера Б.В. Математичне моделювання умов неідеального теплового контакту шарів через тонке включення з джерелами тепла. //Фізико-математ. моделювання та інформ. технології – 2013, вип. 18. с 61-72.
17. Гольденблат И. И., Николаенко Н. А. Расчет температурных напряжений в ядерных реакторах. – М.: Госатомиздат, 1962. – 159 с.
18. Готтер Г. Нагревание и охлаждение электрических машин. – М.; Л.: Госэнергоиздат, 1961. – 264 с.
19. Громовик В. И. Об учете теплоотдачи в локально-нагреваемых термоупругих пластинках из композитных материалов // Механика композ. материалов. – 1979. – № 6. – С. 54-57.
20. Губа В. М. Об оценке допускаемых параметров нагрева слитков простой формы / Губа В. М., Постольник Ю. С., Гаранчук В. А. // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – К.: Наук. думка, – 1978. – Вып. 12. – С. 70-79.
21. Губа В. М. Приближенный расчет упруго-пластических напряжений в нагреваемой плите с буфетом зависимости предела течения от температуры / Губа В. М., Постольник Ю. С., Гаранчук В. А. // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – К.: Наук. думка, – 1975. – Вып. 15. – С. 74-78.

22. Гудзь Р. В., Журавчак Л. М., Петльований А. Т. Розв'язування статичної задачі термопружності для локально-неоднорідного тіла поєднанням граничних, приграничних та скінченних елементів // *Мат. методи та фізико-механічні поля*, 2006. – 49, № 2. С. 148-156.
23. Гульчевский Л. С. Температурные напряжения в пространстве, обусловленные равномерно распределенными в конечном цилиндре источниками тепла // *Мат. методы в термомеханике.* – К.: Наук. думка, 1978. – С. 160-163.
24. Гульчевский Л. С. Двумерная задача теплопроводности для многослойных тел. // *Физ. и хим. обработки материалов.* – 1976. – № 3. – С. 33-38.
25. Евтушенко А. А. Осесимметричный контакт между термочувствительными телами с различными температурами / А. А. Евтушенко, Е. В. Коваленко, Р. Д. Кулчицкий-Жигайло. – *Изв. РАН. Механика твердого тела.* – 1999. – №1. – С. 70-77.
26. Журавчак Л.М., Грицько Є.Г. Метод приграничних елементів у прикладних задачах математичної фізики. – Львів: Карпатське відділення Інституту геофізики НАН України, 1996. – 220 с.
27. Залкинд Е. М. Тепловой расчет обмуровки парового котла. – М.; Л.: Энергия, 1965. – 71 с.
28. Зарубин В. С. Инженерные методы решения задач теплопроводности / В. С. Зарубин. – М.: Машиностроение, 1983. – 328 с.
29. Зарубин В. С. Прикладные задачи теплопрочности элементов конструкций / В. С. Зарубин. – М.: Машиностроение, 1985. – 296 с.
30. Зенкевич О. М. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 542 с.
31. Калиняк Б. М. Аналітичні вирази для напружень і термонапружень у довгому порожнистому неоднорідному термочутливому циліндрі // Б. М. Калиняк // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2007. – 50, № 2. – С. 79-86.
32. Калиняк Б. М. Визначення напружень і переміщень у неоднорідній порожнистій кулі зведенням відповідної задачі термопружності до інтегральних рівнянь / Б. М. Калиняк, І. І. Яцків // *Прикл. проблеми мех. і мат.* – 2009. – Вип. 7. – С. 142-150.

33. Калиняк Б. М. Напряженный стан багатощарового термочувливого цилиндра за умов асимптотичного теплового режиму / Б. Калиняк, В. Попович // *Машинознавство*. – 2005. – № 2. – С. 22-30.
34. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 487 с.
35. Коздоба Л. А. Методы решения нелинейных задач теплопроводности. / Л. А. Коздоба. – М.: Наука, 1975. – 226 с.
36. Коздоба Л. А. Решение нелинейных задач теплопроводности. – К.: Наук. думка, 1976. – 226 с.
37. Коздоба Л. А. Электрическое моделирование явлений тепло- и массо- переноса. – М.: Энергия, 1972. – 296 с.
38. Коляно Ю. М. Нелинейная задача теплопроводности для термочувствительного шара. / Ю. М. Коляно, Е. Г. Иваник, О. В. Сикора // *Ниж.-физ. журн.* – 1992. – 62, №1. – С. 126-129.
39. Коляно Ю. М. Температурные напряжения в нагреваемых источниками тепла пластинках с двусторонними покрытиями / Ю. М. Коляно, Р. М. Кушнир // *Мат. методы и физ.-мех. поля*. – 1980. – Вып. 11. – С. 72-75.
40. Коляно Ю. М. Термоупругость среды с цилиндрическим включением / Ю. М. Коляно, А. Н. Кулик, Л. С. Гульчевский // *Вопросы прикл. термомеханики*. – К.: Наук. думка, 1979. – С. 3-12.
41. Коляно Ю. М. Уравнения термоупругости неоднородных и кусочно-однородных пластин / Ю. М. Коляно, В. С. Попович // *Мат. методы в термомеханике*. – К.: Наук. думка, 1978. С. 50-63.
42. Комов А. Т. Физическая модель расчета критических тепловых нагрузок при кипении в закрученном недогретом потоке при неоднородном обогреве // *Теплофизика высоких температур*. – 2000. – 38, № 3. – С. 523–527.
43. Кочубей А. А., Рядно А. А. Метод конечных элементов в задачах тепло-массо-переноса. – Днепропетровск: Изд. Днепропетр. ун-та, 1986. – 87 с.
44. Крылов В. И., Скобля Н. С. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. – М.: Наука, 1974. – 223 с.

45. Кулик А. Н. Учет теплоотдачи при нагреве пластинки инородным сквозным цилиндрическим тепловыделяющим включением / А. Н. Кулик, Е. И. Приходская // Термомеханические процессы в кусочно-однородных элементах конструкций. – К.: Наук. думка, 1978. – С. 151-155.
46. Кушнір Р. М. Неустановившіся температурні напруження в составной бесконечной пластинке с круговым отверстием // Термомеханические процессы в кусочно-однородных элементах конструкций. – К.: Наук. думка, 1978. – С. 94-98.
47. Кушнір Р. М. Неустановившіся температурні напруження в армированной пластинке с круговым отверстием // Вопросы прикл. термомеханики. – К.: Наук. думка, 1979. – С. 142-149.
48. Кушнір Р. М. Квазістатичні температурні напруження в багатошаровому термочутливому циліндрі. / Р. М. Кушнір, Б. В. Процюк, В. М. Синюта // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – №4. – С. 7-16.
49. Кушнір Р. М. Математичне моделювання, визначення та дослідження термопружного стану шаруватих термочутливих циліндричних тіл / Кушнір Р. М., Попович В. С., Ракоча І. І. // Матеріали науково-технічної конференції «Мікро- та нанонеоднорідні матеріали: моделі та експеримент» (INTERPOR'15). – м. Львів, 2015. – С. 22-23.
50. Кушнір Р. М. Про визначення усталеного термопружного стану багатошарових структур за високотемпературного нагрівання / Р. М. Кушнір, В. С. Попович // Вісн. Київ. нац. ун-ту імені Тараса Шевченка. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2013. – № 3. – С. 42–47.
51. Кушнір Р. М., Попович В. С. Термопружність термочутливих тіл. – Львів: Сполом, 2009. – 412 с. – Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В 5 т. – Т. 3.
52. Лыков А.В. Теория теплопроводности / А.В. Лыков. – Высшая школа, 1967. – 599 с.
53. Лобанов Л. М. Методика определения остаточных напряжений в сварных соединениях и элементах конструкций с использованием электронной

- спекл-интерферометрии / Лобанов Л. М., Пивторак В. А., Савицкий В. В., Ткачук Г. И. // Автоматическая сварка, 2006 – № 1. – С. 10-13.
54. Ломакин В. А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. М.: Наука, 1970. – С. 23-43.
55. Ломакин В. А. Теория упругости неоднородных тел. / В. А. Ломакин. – М. : Изд-во МГУ, 1977. – 416 с.
56. Малкиель Б. С. Двухмерные температурные напряжения в кусочно-однородном слое, обусловленные одномерным температурным полем / Б. С. Малкиель, В. С. Попович, В. С. Лисак // Обобщенные функции в термоупругости. – К.: Наук. думка, 1980. – С. 46-53.
57. Махоркін І. Визначення напружено-деформованого стану термочутливого циліндра при плоскій деформації / І. Махоркін // Системні технології. Математичні проблеми технічної механіки. Зб. наук. праць – Вип. 4, №21. – Дніпропетровськ, 2002. – С. 73-77.
58. Митчелл Э., Уэйт Р. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными. – М.: Мир, 1981. – 216 с.
59. Мотовиловец И. А. Термоупругость / И. А. Мотовиловец, В. И. Козлов // Механика связанных полей в элементах конструкций: В. 5 т. – К.: Наук. думка. – 1987. – Т. 1. – 264 с.
60. Муха Т. О. Прикладні програмні засоби моделювання процесу тепловідведення кипінням і випаровуванням в електронних пристроях: дис. ... канд. техн. наук: 01.05.02 / Муха Тарас Орестович. — Л., 2012. — 142 с.
61. Мучник Д. А., Постольник Ю. С. Теория и техника охлаждения кокса. – К.: Донецк: Вищ. шк. – 1979. – 160 с.
62. Найфэ А. Введение в методы возмущений. – М.: Мир, 1984. – 535 с.
63. Неміш Ю.М. Аналітичний метод розв'язування тривимірних фізично нелінійних задач статички шаруватих циліндрів / Ю.М. Неміш, О.І. Левчук // Мат. методи і фіз.-мех. поля. –1998.– 41, № 3. С. 52-59.
64. Онанов Г. Г. Уравнения с сингулярными коэффициентами типа дельта-функции и ее производных // Докл. АН СССР. – 1970. – 191, № 5. – С. 997-1000.

65. Плевако В. П. Общие решения в задачах теории упругости неоднородных сред. – Харьков: Основа, 1997. – 160 с.
66. Подстригач Я. С. Коляно Ю. М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. – К.: Наук. думка, 1972. – 308 с.
67. Подстригач Я. С. Коляно Ю. М., Семерак М. М. Температурные поля и напряжения в элементах электровакуумных приборов. – К.: Наук. думка, 1981. – 342 с.
68. Подстригач Я. С. Термоупругость тел. неоднородной структуры / Я. С. Подстригач, В. А. Ломакин, Ю. М. Коляно. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. – 368 с.
69. Подстригач Я. С. Уравнения обобщенной термоупругости для тел с тонкими включениями / Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. // Докл. АН СССР. – 1975. – 224 № 4. – С. 794-797.
70. Подстригач Я. С. Учет теплоотдачи при локальном нагреве тонкостенных элементов конструкций / Я. С. Подстригач, Ю. М. Коляно // Докл. АН СССР. – 1975. – 225, № 4. – С. 778-781.
71. Пол Ф. Процесс распространения тепла в конструкциях летательных аппаратов // Проблемы высоких температур в авиационных конструкциях. – М.: Изд-во иностр. лит., 1961. – С. 49-72.
72. Попович В. Аналіз методів розв'язування задач теплопровідності термочутливих тіл при конвективному теплообміні / В. Попович, Г. Гарматій // Мат. методи механіки неоднорідних структур: в 2-х т. – Львів. – 2000. – 1. – С. 205-211.
73. Попович В. Двухмерные напряжения в кусочно-однородных бесконечной пластине и пространстве, обусловленные плоским источником тепла // Термомеханические процессы в кусочно-однородных элементах конструкций. – К.: Наук. думка, 1978. – С. 50-65.
74. Попович В. С. Комп'ютерна програма «Програма для розрахунку компонент напружено-деформованого стану багатопарових за радіальною координатою порожнистих циліндрів (Програма «StressCalc_rad»)» / В. С. Попо-

вич, І. І. Ракоча // Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 64105 від 16.02.2016 р.

75. Попович В. С. Комп'ютерна програма «Програма для розрахунку температурних напружень багат шарових по осі циліндрів (Програма «StressCalc_axes»)» / В. С. Попович, І. І. Ракоча // Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 64106 від 16.02.2016 р.
76. Попович В. Математичне моделювання та дослідження термопружного стану шарового термочутливого порожнистого циліндра / Попович. В, Ракоча І. // Матеріали Міжнародної науково-методичної конференції «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі». – м. Київ, 2015. – С. 27-29.
77. Попович В. С. Математичне моделювання та визначення термопружного стану двошарової термочутливої пластини за складного нагріву / В. С. Попович, І. І. Ракоча // Тези доповідей VI Міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації». – м. Кам'янець-Подільський: КПНУ ім. Івана Огієнка, 2014. – С.125-127.
78. Попович В. С. Математичне моделювання та дослідження термопружного стану п'ятишарового термочутливого порожнистого циліндра / В. С. Попович, І. І. Ракоча // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2015. – Вип. 13. – С. 88-100.
79. Попович В.С. Математичне моделювання та методика визначення статичного термопружного стану багат шарових термочутливих циліндрів / Попович В.С., Калиняк Б.М. // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – **57**, №2. – С. 169-186.
80. Попович В. С. Моделювання термопружного стану шаруватого по осі термочутливого циліндра за тепловиділення шляхом випаровування рідини / В. С. Попович, І. І. Ракоча // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – **58**, №3. – С. 7-14.

81. Попович В. С. Напружено-деформований стан кусково-однорідного термочутливого циліндра за тепловиділення кипінням рідини / В. С. Попович, І. І. Ракоча // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – 58, №2. – С. 89-97.
82. Попович В. С. Про розв'язування задач теплопровідності термочутливих тіл / В. С. Попович, І. М. Махоркін // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1997. – 40, № 1. С. 36-44.
83. Постольник Ю. С. Вплив врахування температурної залежності фізико-механічних характеристик на точність розрахунку термопружного стану тіла // Крайові задачі термомеханіки. Ч. VI. – К.: Вид-во Ін-ту математики НАНУ, 1996. – С. 84-88.
84. Постольник Ю. С. Нелінійна прикладна термомеханіка / Ю. С. Постольник, А. П. Огурцов. – К.: НМЦ ВО МОНЦ, 2000. – 280 с.
85. Постольник Ю. С. Приближенные методы исследований в термомеханике / Ю. С. Постольник. – Донецк: Вищ. шк. – 1984. – 158 с.
86. Постольник Ю. С. Расчет термоупругих напряжений в цилиндре с учетом температурной зависимости физико-механических свойств материала / Постольник Ю. С., Гаранчук В. А., Губа В. М. // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – К.: Наук. думка, 1980. – 20. – С. 57-63.
87. Постольник Ю. С. Термоупруго-пластическое состояние плиты с зависящими от температуры свойствами при температурном ударе / Постольник Ю. С., Манько В. М. // Изв. вузов. Черная металлургия. – 1986. – № 2. – С. 98-101.
88. Процюк Б. В. Визначення одновимірного термопружного стану шаруватих термочутливих тіл обертання з однаковими сталими коефіцієнтами Пуассона // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур / під заг. ред. І. О. Луковського, Г. С. Кіта, Р. М. Кушніра. – Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2010. – С. 295-296
89. Процюк Б. В. О решении задач теплопроводности и термоупругости для многослойных тел // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1980. № 1. – С. 30-32.

90. П'янило Я. Д. Ітераційна схема розв'язування нелінійних крайових задач типу нестационарної теплопровідності / П'янило Я. Д., Попович В. С., П'янило А. Я. // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2004. – 47, № 2. – С. 163-167.
91. Ракоча І. Математичне моделювання та визначення термопружного стану двоскладового термочутливого циліндра за конвективно-променевого нагрівання / І. Ракоча, В. Валяшек // *Вісник ТНТУ.* – 2015. – 1 (77). – С. 87-97.
92. Ракоча. І. Математичне моделювання процесу тепловідведення шляхом випаровування рідини з обмежувальної поверхні багатошарового термочутливого циліндра // *Матеріали XII Міжнародної конференції Фізичні явища в твердих тілах:*. – м. Харків, 2015. – С.57.
93. Ракоча І. Математичне моделювання та визначення термопружного стану двоскладового за осьовою координатою термочутливого циліндра за складного нагрівання / Ракоча І., Попович В. // *Тези доповідей 4-ї Міжнародної науково-технічної конференції «Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення та експлуатації машинобудівних конструкцій».* – Львів: КІНПАТРИ ЛТД. – 2014. – С. 47-48.
94. Ракоча І. Математичне моделювання, визначення та дослідження термопружного стану трискладового термочутливого циліндра / Ракоча І., Попович В. // *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології.* – 2015. – Вип. 21. – С. 186-197.
95. Ракоча І. Математичне моделювання та визначення термопружного стану кусково-однорідного за осьовою координатою термочутливого циліндра за складного нагрівання / Ракоча І., Попович В. // *Наукові праці IX Міжнародної наукової конференції «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур».* – м. Львів: ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2014. – С.153-156.
96. Ракоча І. І. Математичне моделювання та дослідження термопружного стану шаруватого за радіальною координатою термочутливого порожнистого циліндра / Ракоча І. І., Попович В. С. // *Матеріали II Всеукраїнської науково-практичної конференції молодих учених і студентів Інформаційні тех-*

- нології в освіті, техніці та промисловості. – м. Івано-Франківськ, 2015. – С. 178-179.
97. Ракоча І. І. Моделювання процесу тепловідведення шляхом кипіння рідини в трискладовому термочутливому циліндрі / Ракоча І. І., Попович В. С. // Матеріали VIII Міжнародної наукової конференції ім. ак. І. І. Ляшка Обчислювальна та прикладна математика. – м. Київ, 2015. – С.73-74.
98. Ракоча І. І., Попович В. С. Математичне моделювання та визначення термомпружного стану двоскладового термочутливого циліндра за складного нагрівання / Ракоча І. І., Попович В. С. // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2014. – Вип. 12. – С. 69-77.
99. Рыкалин Н. Н., Углов А. А., Корора А. Н. Лазерная обработка материалов. – М.: Машиностроение, 1975. – 296 с.
100. Савула Я. Г. Метод скінченних елементів. – Львів: Вид-во Львів. ун-ту, 1993. – 98 с.
101. Самарский А. А. Режимы с обострением для квазилинейных параболических уравнений. – М.: Наука, 1987. – 476 с.
102. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 329 с.
103. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / Сергиенко И.В., Скопецкий В. С., Дейнека В. С. // АН УССР, Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова. – Киев: Наук. думка, 1991. – 431 с.
104. Федасюк Д. В. Дослідження впливу випаровування і конвекції на процес відведення тепла з поверхні пластини / Д. В. Федасюк, Т. О. Муха // Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Комп'ютерні науки та інформаційні технології. – 2010. – № 686. – С. 255-264.
105. Федасюк Д. В. Знаходження розв'язку нелінійної задачі теплопровідності з використанням випаровування для інтенсифікації тепловідведення / Д. В. Федасюк, Т. О. Муха // Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Комп'ютерні система проектування. Теорія і практика. – 2011. – № 711. – С. 38-47.

106. Федасюк Д. В. Методи та засоби теплового проектування мікроелектронних пристроїв. – Львів: Вид-во держ. ун-ту «Львів. політехніка», 1999. – 228 с.
107. Федасюк Д. В. Моделювання теплообміну з урахуванням випаровування на поверхні пластини / Д. В. Федасюк, Т. О. Муха // Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Комп'ютерні науки та інформаційні технології. – 2009. – № 650. – С. 151-158.
108. Федасюк Д. В. Моделювання процесу охолодження при критичних умовах за рахунок випаровування рідини / Д. В. Федасюк, Т. О. Муха // Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Комп'ютерні науки та інформаційні технології. – 2011. – № 710. – С. 18-26.
109. Федик И. И., Колесов В. С., Михайлов В. Н. Температурные поля и термонапряжения в ядерных реакторах. – М. Энергоатомиздат, 1985. – 280 с.
110. Феодосьев В. И. Прочность теплонапряженных узлов жидкостных ракетных двигателей. – М.: Оборонгиз, 1963. – 209 с.
111. Шваб'юк В.І. Лінійне деформування, міцність і стійкість композитних оболонок середньої товщини: монографія / В. І. Шваб'юк, С. В. Ротко. – Луцьк: РВВ ЛНТУ, 2015. – 264 с.
112. Шевченко Ю. Н., Савченко В. Г. Термовязкопластичность // Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5-ти т. / Под ред. А. Н. Гузя. – К.: Наук. думка, 1987. – т. 2. – 263 с.
113. Argeso H, Eraslan A. N. On use of temperature-dependent physical properties in thermomechanical calculations for solid and hollow cylinders // International Journal of thermal sciences. – 2008. – Vol. 47, Issue 2. – P. 136-146.
114. Ayappa K. G. Analysis of microwave heating of materials with temperature-dependent properties / Ayappa K. G., Davis H. T., Davis E. A., Gordon J. // AIChE Journal.– 1991. – Vol. 37, Issue 3. – P. 313-322.
115. Aziz A., Torabi M. Thermal stresses in a hollow Cylinder with convective boundary conditions on the inside and outside surfaces // Journal of thermal stresses. – 2013. – Vol. 36, Issue 10. – P. 1096-1111.
116. Baummer T. B. A Self-Contained Cold Plate Utilizing Force-Fed Evaporation for Cooling of High-Flux Electronics: Thesis submitted to the Faculty of the

Graduate School of the University of Maryland 2007 / Baummer, Thomas Buchanan; University of Maryland (College Park, Md.) // Mechanical Engineering Theses and Dissertations. – 11.12.2007. – Режим доступа:

<http://drum.lib.umd.edu/bitstream/1903/7795/1/umi-umd-5078.pdf>

117. Bazarenko N. The contact problem for hollow and solid cylinders with stress-free faces // *Journal of applied mathematics and mechanics*. – 2008. – **72**, Issue 2. – P. 214-225.
118. Benjamin R. J. Nucleation Site Density in Pool Boiling of Saturated Pure Liquids: Effect of surface microroughness and surface and liquid physical properties / R. J. Benjamin, A. R. Balakrishnan // *Exp. Therm. Fluid Sci.* – New York: Elsevier, 1997. – 15, No. 1. – P. 32–42.
119. Bialecki R. A., Bulinski Zb. Green's Functions in transient heat conduction // In: R. B. Hetnarski (ed.). *Encyclopedia of Thermal Stresses*. – Springer, 2014. – Vol. 4. – P. 2070–2096.
120. Bogy D. B., Wang K. C. Stress singularities at interface corners in bonded dissimilar isotropic materials // *International Journal of Solids and Structures*. – 1971. – 7(8). – P. 993–1005.
121. Carslaw H. S., Jaeger J. C. *Conduction of heat in solids*, 2nd ed. – Oxford: Clarendon Press.
122. Chang C.C., Chu W. H. Stresses in a Metal Tube under Both-High Radial temperature Variation and Internal Pressure // *J. Appl. Mech.* – 1954 – 21. – P. 101-108.
123. Chen L.-W., Chen L. Y. Thermal postbuckling behaviors of laminated composite plates with temperature-dependent properties // *Composite structures*. – 1991. – Vol 19, Issue 3. – P. 267-283.
124. Crafton E. F. Heat transfer and evaporation rates of small liquid droplets on heated horizontal surfaces / E. F. Crafton, W. Z. Black // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. – 2004. – 47. – P. 1187-1200.
125. Dowkind K. J. Estimating Temperature-Dependent Thermal Properties / K. J. Dowkind, J. V. Beck, B. F. Blackwell // *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*. – 1999. – 13, № 3. – P. 328-336.

126. Elhagary M. A. Asymptotic Expansion in Coupled and Generalized Thermoelasticity // In: R. B. Hetnarski (ed.). Encyclopedia of Thermal Stresses. – Springer, 2014. – Vol. 1. – P. 257-263.
127. Fazeli H. Analysis of transient heat conduction in a hollow cylinder using Duhamel theorem / Fazeli H., Abdous A., Karabi H., Moallemi N., Esmaeili M. // International Journal of Thermophysics. –2013. – Vol. 34, Issue 2. – P. 350-365.
128. Fluorinert Electronic Liquid FC-72. Product Information [Электронный ресурс] / 3М. – Режим доступа : <http://multimedia.3m.com/mws/mediawebserver?66666UuZjcFSLXTtnxTE5XF6EVuQEcuZgVs6EVs6E666666>—
129. Fluorinert Electronic Liquid FC-87. Product Information [Электронный ресурс] / 3М. – Режим доступа : http://multimedia.3m.com/mws/mediawebserver?mwsId=66666UuZjcFSLXTtnxTE5x6EVuQEcuZgVs6EVs6E666666--fn=prodinfo_FC87.pdf
130. Frackowiak A., Green's functions in steady-state heat conduction // In: R. B. Hetnarski (ed.). Encyclopedia of Thermal Stresses. – Springer, 2014. – Vol. 4. – P. 2053–2060.
131. Ganguly B. K. Thermal-Stress Analysis of Flat Plate with Temperature-Dependent Thermal Conductivity / Ganguly B. K., Mckinney K. R., Hasselman D. P. H. // J. Amer. Ceramic Soc. – 1975. – 58. – P. 455-456.
132. Gera B.V., Dmytruk V.A. Obtaining and the study of the conditions of heat transfer through inhomogeneous inclusion with presence of heat sources // Mathematical modelling and computing. Vol 2. No. 1 pp. 33-47 (2015)
133. Gnutek Zb. Temperature // In: R. B. Hetnarski (ed.). Encyclopedia of Thermal Stresses. – Springer, 2014. – Vol. 9. – P. 4785–4787.
134. Goodman T. R. Integral method in solution of heat conduction problems // Journal of Aerospace Science. – 1959. – 26. – P. 187-195.
135. Goto T., Suzuki M. A boundary integral equation method for nonlinear heat conduction problems with temperature-dependent material properties // International journal of heat and mass transfer. – 1996. – Vol. 39, Issue 4. – P. 823-830.

136. Grashchenkov S. I. Droplet Evaporation Near a Flat Wall / S. I. Grashchenkov // Colloid Journal. – Pleiades Publishing, 2007. – Vol. 69, No. 6. – P. 685-690.
137. Grinchenko V. T. Finite Elastic Solids // In: R. B. Hetnarski (ed.). Encyclopedia of Thermal Stresses. – Springer, 2014. – Vol. 4. – P. 1600-1604.
138. Grzes P. Influence of thermosensitivity of materials on the temperature of a PAD/DISC system // Acta mechanica et automatica. – 2011. Vol. 5, No.4. – P. 46-53
139. Hasebe N. Green's Functions of Heat Source for Mixed Boundary Value Problem // In: R. B. Hetnarski (ed.). Encyclopedia of Thermal Stresses. – Springer, 2014. – Vol. 4. – P. 2053–2060.
140. Hata T. Transient Thermoelastic Problem for a Transversely Anisotropic Hollow Cylinder with Temperature-Dependent Properties / Hata T., Atsumi A. // Bull. Japan Soc. Mech. Engrs. – 1968. – 11-45. – P. 404-412.
141. Hetnarski R. B. Coupled Problem of Thermoelasticity: Solution in a Series of Functions Form // In: R. B. Hetnarski (ed.). Encyclopedia of Thermal Stresses. – Springer, 2014. – Vol. 2. – P. 762–766.
142. Hilton H. H. Thermal Stresses in Bodies Exhibiting Temperature-Dependent Elastic Properties // J. Appl. Mech. – 1952. – 19. – P. 350-354.
143. Honda H. Theoretical study of evaporation heat transfer in horizontal microfin tubes: stratified flow model // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2001. – 47. – P. 3971-3983.
144. Hutchison J. E. Effect of Nongray Gas Radiation on Thermal Stability in Carbon Dioxide / J. E. Hutchison, R. F. Richardst // Journal of Thermaphysics and Heat Transfer. – 1999. – 13, № 1. – P. 25-32.
145. Incropera F. P. Fundamentals of heat and mass transfer / F. P. Incropera, D. P. DeWitt, T. L. Bergman, A. S. Lavine; 6th ed. – New York^ John Wiley & Sons, 2007. – 925 p.
146. Ishihara M., Noda N. One-Dimensional Thermal Stresses in Cylinders // In: R. B. Hetnarski (ed.). Encyclopedia of Thermal Stresses. – Springer, 2014. – Vol. 7. – P. 3452–3464.

147. Itou Sh. Plane Strain and Plane Stress Problems on Thermoelasticity // In: R. B. Hetnarski (ed.). Encyclopedia of Thermal Stresses. – Springer, 2014. – Vol. 7. – P. 3921–3930.
148. Jabbari M., Moradi A. Exact Solution for Classic Coupled Thermoelasticity in Cylindrical Coordinates // In: R. B. Hetnarski (ed.). Encyclopedia of Thermal Stresses. – Springer, 2014. – Vol. 3. – P. 1337–1353.
149. Jin Z. H. Thermal Fracture of Ceramics with Temperature-Dependent Properties / Jin Z. H., Barta R. C. // J. of Thermal Stresses. – 1998. – 21. – P. 157-176.
150. Kamiuto K. Combined Conduction and Nongray Radiation Heat Transfer in Carbon Dioxide // Journal of Thermaphysics. Technical Notes. – 1998. – 10, № 4. – P. 701-704.
151. Koizumi T. Thermal Stresses in a Solid Circular Cylinder Exhibiting Temperature-Dependent Properties / T. Koizumi and T. Taniwaki // Trans. Japan Soc. Mech. Engrs. – 1965. – 31. – 221. – P. 9-15.
152. Kolodziej J. A., Mierzwiczak M. Green's Function for Inverse Heat Conduction Problems // In: R. B. Hetnarski (ed.). Encyclopedia of Thermal Stresses. – Springer, 2014. – Vol. 4. – P. 2047–2053.
153. Koniorczyk P., Zmywaczyk J. Two-Dimensional, Steady-State Conduction // In: R. B. Hetnarski (ed.). Encyclopedia of Thermal Stresses. – Springer, 2014. – Vol. 11. – P. 6260–6277.
154. Kushnir R. Determination of the Thermal Fields and Stresses in Multilayer Solids by Means of the Constructed Green Functions / R. Kushnir, B. Protsiuk // In: R. B. Hetnarski (ed.). Encyclopedia of Thermal Stresses. – Springer, 2014. – Vol. 2. – P. 924–931.
155. Kushnir R. Method of the Green's Functions for Quasistatic Thermoelasticity Problems in Layered Thermosensitive Bodies under Complex Heat Exchange / R. Kushnir, B. Protsiuk // Operator Theory: Advances and Applications. – 2009. – Vol. 191. – P. 143-154.
156. Kushnir R. M. Application of the Generalized Functions Method for Analysis of Thermal Stresses in Piecewise-Homogeneous Solids / R. M. Kushnir,

- V. S. Popovych // In: R. B. Hetnarski (ed.). *Encyclopedia of Thermal Stresses*. – Springer, 2014. – Vol. 1. – P. 224–230.
157. Kushnir R. M. Heat conduction problems of thermosensitive solids under complex heat exchange / R. M. Kushnir, V. S. Popovych // In: *Heat conduction – Basic research* / V. S. Vikhrenko (ed.). – Rijeka: InTech (Croatia), 2011. – 350 p. – (Chap. 6. – P. 131–154.)
158. Kushnir R.M. Mathematical modelling, definition and investigation of the thermostressed state of the thermosensitive three-layer hollow cylinder under convective-radiative heating / R. M. Kushnir, V. S. Popovych, I. I. Rakocha // *Math. modeling and computing*. – 2015. – 2, No.2. – P. 160-175.
159. Kushnir R. M. The thermoelastic state of a thermosensitive sphere and space with a spherical cavity subject to complex heat exchange / R. M. Kushnir, V. S. Popovych, O. M. Vovk // *J. of Eng. Mathematics*, 2008. – Vol. 61, nos. 2-4. – P. 357-369.
160. Lee H.-J. The effect of temperature dependent material properties on the response of piezoelectric composite materials // *Journal of intelligent material systems and structures*. – 1998. – Vol. 9, No.7. – P. 503-508.
161. Liu B. C. Study of heat and moisture transfer in soil with dry surface layer / B. C. Liu, W. Liu, S. W. Peng // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. – Elsevier, 2005. – 48. – P. 4579-4589.
162. Muki R., Stenberg E. On transient thermal stresses in viscoelastic materials with temperature-dependent properties // *Journal of Applied Mechanics*. – 1961. – 28(2). – P.193-207.
163. Nappa L. Thermal Stresses in Elastic Cylinders and Circular Shells // In: R. B. Hetnarski (ed.). *Encyclopedia of Thermal Stresses*. – Springer, 2014. – Vol. 10. – P. 5333–5344.
164. Noda N. Thermal Stresses in Bodies with Temperature-Dependent Properties // In: R. B. Hetnarski (ed.). *Encyclopedia of Thermal Stresses*. – Springer, 2014. – Vol. 10. – P. 5318–5323.

165. Noda N. Thermal stresses in materials with temperature-dependent properties // In: Thermal Stresses I / R. B. Hetnarski (ed.). – Amsterdam: Elsevier Sci. Publ., 1986. – P. 391–483.
166. Noda N. Thermal stresses in materials with temperature-dependent properties / N. Noda // Appl. Mech. Rev. – 1991. – 44. – P. 383-397.
167. Noda N. Three-Dimensional Thermal Stresses in Cylinders // In: R. B. Hetnarski (ed.). Encyclopedia of Thermal Stresses. – Springer, 2014. – Vol. 11. – P. 6132–6140.
168. Nowinski J. Axisymmetric Problem of the Steady-State Thermal Stresses in Elastic Medium with Temperature-Dependent Properties / J. Nowinski // Appl. Set. Res. – 1964. – A12. – P. 349-377.
169. Nyuko H. Stationary Thermal Stress for a Composite Hollow Sphere Exhibiting Temperature Dependent Properties / Nyuko H., Takeuti Y., Noda N. // Trans. Japan Soc. Mech. Engrs. – 1978. – 44-381. – P. 1454-1460.
170. Och E. Frictional heating during sliding of two semi-spaces with arbitrary thermal nonlinearity // Acta mechanica et automatica. – 2015. – Vol. 8, Issue 4. – P. 204-208.
171. Och E. Frictional heating of sliding semi-spaces with simple thermal nonlinearities // Acta mechanica et automatica. – 2014. – Vol. 7, Issue 4. – P. 236-240.
172. Pandey D. K. Combined Conduction and Radiation Heat Transfer in Concentric cylindrical Media / D. K. Pandey // Journal of Thermophysics. – 1998. – 3, № 1. – P. 75-82.
173. Polit O., D'Ottavio M., Vidal Ph. Thermal Stress Analysis of Homogeneous and Laminated Shells by Finite Element Method // In: R. B. Hetnarski (ed.). Encyclopedia of Thermal Stresses. – Springer, 2014. – Vol. 9. – P. 5174–5190.
174. Popovych V. Methods for determination of the thermo-stressed state of thermo-sensitive solids under complex heat exchange conditions // In: R. B. Hetnarski (ed.). Encyclopedia of Thermal Stresses. – Springer, 2014. – Vol. 6. – P. 2997–3008.

175. Protsyuk Yu. B. Static Thermoelasticity Problems for Layered Thermosensitive Plates with Cubic Dependence of the Coefficients of Heat Conductivity on Temperature // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2012. – Vol. 181, No. 4. – P. 481-496.
176. Rakocha I.I. The definition and mathematical modeling of the thermosensitive condition of a three-component thermosensitive cylinder under complex heating / Rakocha I.I. // *Proceedings of the 4th International Scientific Conference of Students and Young Scientists «Theoretical and Applied Aspects of Cybernetics»*. – Kyiv, 2014. – P. 188-198.
177. Reis N.C. Investigation of the evaporation of embedded liquid droplets from porous surfaces using magnetic resonance imaging / N. C. Reis Jr., R. F. Griffiths, M. D. Mantle, et al. // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. – Elsevier, 2006. – 46. – P. 12791-1292.
178. Reis N.C. MRI investigation of the evaporation of embedded liquid droplets from porous surfaces under different drying regimes / N. C. Reis Jr., R. F. Griffiths, M. D. Mantle, et al. // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. – Elsevier, 2006. – 49. – P. 951-961.
179. Shariyat M. Thermal buckling analysis of rectangular composite plates with temperature dependent properties based on a layerwise theory // *Thin-Walled Structures*. – 2007. – Vol.45, Issue 4. – P. 439-452.
180. Shvabjuk V. Stress State of Plates with Incisions under the Action of Oscillating Concentrated Forces / Shvabjuk V., Sulym G., Mikulich O // *Acta mechanica et automatica*. – 2015. – Vol. 9, No. 3. – P. 140-144.
181. Shevchenko A. Y. Thermally stressed state of rigidly fastened half-strips of the same width // *International Applied Mechanics*. – 1977. – 13(9). – P. 903–909.
182. Shen H.-S. Thermal postbuckling behavior of imperfect shear deformable laminated plates with temperature-dependent properties // *Computer methods in Appl. Mech. and Eng.* – 2001. – Vol. 190, Issues 40-41. – P. 5377-5390.
183. Shih M. H. A study of liquid evaporation on forced convection in porous media with non-Darcy effects / M. H. Shih, M. J. Huang // *Acta Mechanica*. – Springer-Verlag, 2002. – 154. – P. 215-231.

184. Siegel R. Internal Radiation Effects in Zirconia Thermal Barrier Coating / R. Siegel // Journal of Thermophysics. Technical Notes. – 1996. – 10, № 4. – P. 707-709.
185. Spuckler C. M. Refractive Index and Scattering Effects on Radiation in a Semitransparent Laminated Layer / C. M. Spuckler, R. Siegel // Journal of Thermophysics and Heat Transfer. – 1994. – 8, № 2. – P. 193-201.
186. Sugano Y. On a stress function method of a thermoelastic problem expressed in cylindrical coordinates in a multiply-connected region exhibiting temperature-dependent properties / Y. Sugano // Eng. Archiv. – 1984. – 54. – P. 301-308.
187. Suhara T. Elasticity of Steel Strained by Unequal Heating // J. Japan Soc. Mech. Engrs. 1918. – 21-50. – P. 25-63.
188. Tanigawa Y., Akai T., Kawamura R., Oka N. Transient heat conduction and thermal stress problems of a nonhomogeneous plate with temperature-dependent material properties // J. Therm. Stresses. – 1996. – 19, No. 1. – P. 77–102.
189. Tauchert T. R. Plates with Temperature-Dependent Properties // In: R. B. Hetnarski (ed.). Encyclopedia of Thermal Stresses. – Springer, 2014. – Vol. 2. – P. 3953–3957.
190. Timoshenko S. Theory of Elasticity. – McGraw-Hill Book Company, 2nd ed. 1951. – 506 p.
191. Trojan M. One-dimensional, Steady-State Heat Conduction // In: R. B. Hetnarski (ed.). Encyclopedia of Thermal Stresses. – Springer, 2014. – Vol. 7. – P. 3483–3498.
192. Trostel R. Stationäre Warmepannungen mit Temperaturabhängigen Stoffwerten // Ing. Archiv. – 1958. – 26. – P. 134-142.
193. Wais P. Explicit Finite-Difference Method for Solving Transient Heat Conduction Problems // In: R. B. Hetnarski (ed.). Encyclopedia of Thermal Stresses. – Springer, 2014. – Vol. 3. – P. 1510–1524.
194. Wisniewski S., Nowak W. Transient Heat Conduction Semi-infinite Solid with Specified Surface Temperature // In: R. B. Hetnarski (ed.). Encyclopedia of Thermal Stresses. – Springer, 2014. – Vol. 11. – P. 6171–6181.

195. Xiang H. Elastic analyses of heterogeneous hollow cylinders / Xiang H., Shi Zh., Zhang T. // *Mechanics Research Communications*. – 2006. – Vol.33, Issue 5. – P. 681-691.
196. Yasinsky A. Determination and Optimization of Stress of Bodies on the Basis of Inverse Thermoelasticity Problems // In: R. B. Hetnarski (ed.). *Encyclopedia of Thermal Stresses*. – Springer, 2014. – Vol. 2. – P. 916–924.
197. Yevtushenko A. A., Kuciej M., Och E. Influence of thermal sensitivity of the pad and disk materials on the temperature during braking *International Communications in Heat and Mass Transfer*, vol. 55, 2014, pp. 84-92.
198. Zhu X. K., Chao Y. U. Effect of temperature-dependent material properties on welding simulation // *Computers & Structures*. – 2002. – Vol.80, Issue 11. – P. 967-976.

ДОДАТОК

Довідки про використання результатів



«Затверджую»

Професор з наукової роботи
Національного університету
«Львівська політехніка»

Н.І. Чухрай
2016 р.

АКТ

Про використання результатів дисертаційної роботи Ракочої Ірини Ігорівни «Математичне моделювання термопружного стану шаруватих циліндричних тіл за умов складного високотемпературного нагрівання», представленої на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук, при виконанні НДР «Побудова і дослідження методів розв'язування задач прикладної математики та інформатики» (номер держреєстрації 0113U005296) Національного університету «Львівська політехніка»

Комісія в складі голови – начальника НДЧ к.т.н. Жук Л.В. та членів: завідувача кафедри прикладної математики д.ф.-м.н., проф. Костробія П.П., зав. відділом науково-організаційного супроводу наукових досліджень к.т.н. Лазько Г.В. та заст. нач. планово-фінансового відділу Чулой Т.М. цим актом підтверджують, що результати дисертаційного дослідження аспіранта кафедри прикладної математики Ракочої Ірини Ігорівни щодо моделювання теплового та напруженого стану термочутливих багатошарових по осьовій та циліндричній координатах елементів конструкцій використані при виконанні НДР «Побудова і дослідження методів розв'язування задач прикладної математики та інформатики» (номер держреєстрації 0113U005296).

Зокрема, Ракоча І.І. апробувала методіку побудови розв'язків математичних моделей визначення теплового та напруженого стану багатошарових по осьовій та радіальній координаті елементів конструкцій із термочутливого матеріалу, а також поширила її на випадки їх охолодження шляхом кипіння та випаровування рідини з обмежувальних поверхонь, що є істотними в мікроелектроніці.

Голова комісії:

Начальник НДЧ

к.т.н.

Л.В. Жук

Члени комісії:

Зав. кафедри ПМ, д.ф.-м.н., проф.

Зав. відділом НОСНД

/ Заст. нач. ПФВ

П.П. Костробій

Г.В. Лазько

Т.М. Чулой

Затверджую



Директор Інституту прикладних проблем
механіки і математики ім. Я. С. Підстригача
НАН України, член-кореспондент НАН України,
доктор фіз.-мат. наук, проф.

Р. М. Кушнір

15 травня 2016 р.

АКТ ПРО ВИКОРИСТАННЯ

наукових результатів дисертаційної роботи

Ракочої Ірини Ігорівни,

представленої до захисту на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук

укладений у тому, що методологія і програмне забезпечення для визначення та дослідження термопружного стану шаруватих циліндричних тіл за умов складного високотемпературного нагрівання використано у відділі термомеханіки Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України при виконанні завдань держбюджетних тем:

- «Аналітично-чисельні методи в математичних моделях механіки зв'язаних полів стосовно окремих технічних і медичних проблем» (№ держреєстрації РК №0111U009687);
- «Дослідження проблем керування тепловими і термопружними полями в композитних конструкціях» (№ держреєстрації РК №0115U002935);
- «Математичне моделювання та аналітико-чисельне визначення теплового і напруженого станів з урахуванням неоднорідностей їх структури» (№ держреєстрації РК №0110U004821)

Дослідження дисертаційної роботи значною мірою сприяли успішному проходженню курсу науково-технічним проектом «Математичне моделювання та розробка комплексу програм для дослідження термопружного стану багат шарових циліндричних конструкцій за низько- чи високотемпературного нагрівання», який буде виконуватися в 2016 р. в інтересах КБ «Південне».

Ракоча І. І. була виконавцем перелічених тем.

Заступник завідувача відділу термомеханіки,
канд. фіз.-мат. наук,
старший науковий співробітник

І. М. Махоркін

Вчений секретар ІППММ
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
канд. фіз.-мат. наук,
старший науковий співробітник

В. О. Міщенко

ЗАТВЕРДЖУЮ

Директор Фізико-механічного інституту
ім. Г.В. Карпенка НАН України
академік НАН України



[Signature]
З.Т. Назарчук
„12” травня 2016 р.

ДОВІДКА

про використання наукових результатів дисертаційної роботи
РАКОЧОЇ Ірини Ігорівни

**„ Математичне моделювання термопружного стану шаруватих циліндричних тіл
за умов складного високотемпературного нагрівання ”,**
поданої на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук
зі спеціальності 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

Запропоновані у роботі математичні моделі взаємодії полів температури, напружень, деформацій та переміщень в шаруватих циліндричних тілах із урахуванням реальних умов теплообміну із робочим середовищем та розроблені на цій основі відповідні аналітико-чисельні методи визначення напруженого стану у таких тілах використано у відділі фізичних основ руйнування та міцності матеріалів в агресивних середовищах ФМІ НАН України при вирішенні наступних науково-технічних задач:

- оцінювання роботоздатності та ризику руйнування трубопроводів теплоенергетичного призначення з тріщиноподібними дефектами в умовах дії корозивних та воденьвмісних середовищ;
- прогнозування можливих експлуатаційних пошкоджень у тришаровому металевому матеріалі типу “антикорозійні наплавки – корпусна сталь”, який застосовується при виготовленні корпусів енергетичних та хімічних реакторів.

При цьому важливе практичне значення мають розроблені у роботі програмні засоби багатопараметричного числового аналізу температурних та силових полів.

Завідувач відділу фізичних основ руйнування та міцності матеріалів
в агресивних середовищах ФМІ НАН України,
член-кореспондент НАН України,
доктор технічних наук, професор

[Signature]

І. М. ДМИТРАХ

Старший науковий співробітник відділу фізичних основ руйнування
та міцності матеріалів в агресивних середовищах,
доктор технічних наук, старший науковий співробітник

[Signature]

А.М. СИРОТЮК

[Signature]