

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

РАКОЧА ІРИНА ІГОРІВНА

УДК 539.3

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ
ШАРУВАТИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ТІЛ ЗА УМОВ СКЛАДНОГО
ВИСОКОТЕМПЕРАТУРНОГО НАГРІВАННЯ**

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук

Львів – 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Національному університеті «Львівська політехніка» МОН України та Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, м. Львів.

Науковий керівник: доктор технічних наук, професор
Попович Василь Степанович,
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
заступник директора з наукової роботи

Офіційні опоненти: доктор технічних наук, професор
Гера Богдан Васильович,
Дніпропетровський національний університет
залізничного транспорту ім. акад. В. Лазаряна,
завідувач кафедри транспортних технологій

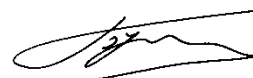
доктор технічних наук, професор
Шваб'юк Василь Іванович,
Луцький національний технічний університет,
професор кафедри технічної механіки

Захист відбудеться « ____ » _____ 2016 року о ____ год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.052.05 у Національному університеті «Львівська політехніка» (79013, м. Львів, вул. С. Бандери, 12).

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Національного університету «Львівська політехніка» (79013, м. Львів, вул. Професорська, 1).

Автореферат розісланий « ____ » _____ 2016 р.

Учений секретар спеціалізованої вченої ради,
доктор технічних наук, професор



Р. А. Бунь

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Характерною особливістю розвитку сучасної космічної, авіаційної, енергетичної, нафтогазової, хімічної, електронної та інших галузей промисловості є створення та застосування для їх потреб нових конструкційних матеріалів на заміну традиційним. Серед найперспективніших виділяються композити, до яких відносяться, так звані, шаруваті. В основі розрахунків на міцність і надійність шаруватих конструкцій за дії на них інтенсивних експлуатаційних температурних і силових факторів лежать знання про їх термопружний стан.

Багато елементів сучасної техніки є багатошаровими конструкціями циліндричної форми, зокрема інтегральні схеми мікроелектронних пристроїв, композитні труби та корпуси ядерних реакторів тощо. Під час експлуатації вони одночасно зазнають впливу високих чи низьких температур та силових навантажень. Через перевищення допустимого рівня термопружного стану конструкції виходять з ладу і часто не піддаються відновленню, а їх заміна на нові передбачає подекуди значні фінансові витрати. Їх міцність і надійність при дії інтенсивних експлуатаційних температурних і силових факторів залежить від рівня термопружного стану цих конструкцій. Для адекватного його визначення за експлуатації в умовах низьких чи високих температур слід виходити з моделі термочутливого тіла, в якій враховується залежність теплових та механічних характеристик, а також параметрів теплообміну (коефіцієнтів теплообміну, ступенів чорноти поверхонь) від температури.

З огляду на сказане, достовірне визначення компонент термопружного стану багатошарових циліндричних конструкцій, які працюють в умовах низьких чи високих температур, спричинених внутрішніми тепловиділеннями та складним теплообміном з довкіллям за одночасного силового навантаження є актуальною і важливою проблемою. Вона тісно пов'язана з побудовою адекватних математичних моделей та розробкою ефективних методів знаходження їх розв'язків.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана у межах держбюджетних науково-дослідних тем кафедри прикладної математики Інституту прикладної математики та фундаментальних наук Національного університету «Львівська політехніка» МОН України «Побудова і дослідження методів розв'язування задач прикладної математики та інформатики» (№ держреєстрації 0113U005296) та Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України «Аналітично-чисельні методи в математичних моделях механіки зв'язаних полів стосовно окремих технічних і медичних проблем» (№ держреєстрації РК №0111U009687), «Дослідження проблем керування тепловими і термопружними полями в композитних конструкціях» (№ держреєстрації РК №0115U002935), «Математичне моделювання та аналітико-чисельне визначення теплового і напруженого станів з урахуванням неоднорідностей їх структури» (№ держреєстрації РК № 0110U004821).

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є: формулювання математичних моделей для визначення усталених розподілів температури та компонент спричиненого нею напружено-деформованого стану в шаруватих по осьовій та радіальній координатах циліндричних тілах, в яких враховуються залежності теплових та механічних характеристик від температури, а також тепловиділення у шарах та на межах їх контакту; проведення досліджень, на базі запропонованих моделей, розподілів температури та компонент напружено-деформованого стану для конкретних випадків теплового та силового навантажень на основі побудованих розв'язків та створеного про-

грамного забезпечення. При цьому на обмежувальних поверхнях можуть мати місце різні умови теплообміну (задання температури, теплового потоку, конвективного, променевого чи конвективно-променевого теплообмінів, тепловідведення шляхом кипіння чи випаровування рідини) та умови ідеального теплового та механічного контакту між сусідніми шарами.

Для досягнення мети розв'язано такі задачі:

- здійснено огляд літератури стосовно моделювання та методів визначення теплового та напружено-деформованого станів кусково-однорідних термочутливих та нетермочутливих шаруватих тіл за складного теплообміну з довкіллям;
- сформульовано математичні моделі для визначення усталених температурних полів в шаруватих за осьовою та радіальною координатами термочутливих циліндричних тілах, які враховують залежність теплових характеристик матеріалів шарів від температури, різноманітні умови взаємодії з навколишнім середовищем та внутрішні тепловиділення, а також аналогічні математичні моделі для нетермочутливих циліндричних тіл;
- сформульовано математичні моделі та визначено компоненти напружено-деформованого стану, спричиненого знайденим розподілом температури, шаруватих за осьовою та радіальною координатами термочутливих циліндричних тіл, які враховують залежності механічних характеристик матеріалів шарів від температури, та аналогічних нетермочутливих циліндричних тіл;
- створено програмне забезпечення, для проведення числових досліджень розподілів температури та компонент напружено-деформованого стану шаруватих за осьовою та радіальною координатами циліндрів.

Об'єкт дослідження – шаруваті за осьовою чи радіальною координатами циліндричні тіла, теплові та механічні характеристики яких залежать від температури.

Предмет дослідження – математичні моделі теплопровідності та термопружності термочутливих та нетермочутливих циліндричних багатошарових за осьовою чи радіальною координатами циліндричних тіл.

Методи досліджень. При формулюванні моделей використано теорію теплопровідності і термопружності термочутливих тіл. При побудові розв'язків нелінійних задач теплопровідності використано інтегральне перетворення Кірхгофа, теорію звичайних диференціальних рівнянь, методи розв'язання нелінійних алгебричних рівнянь. Задачі термопружності зведені до розв'язання систем інтегральних рівнянь Вольтерра II роду з відповідними інтегральними умовами, при побудові аналітичних розв'язків яких використано формулу трапецій. Апроксимація таблично заданих функцій здійснюється за допомогою методу найменших квадратів.

Наукова новизна одержаних результатів полягає у наступному:

1. Узагальнено математичні моделі теплопровідності та термопружності багатошарових за осьовою та радіальною координатами циліндричних тіл за різних класичних умов теплообміну з довкіллям, які на відміну від відомих результатів враховують залежності усіх теплових та механічних характеристик матеріалів від температури та тепловиділення в шарах і на межах їх контакту, що дало можливість визначити розподіли температур та компонент напружено-деформованого стану шаруватих елементів конструкцій.
2. Отримав подальший розвиток та пройшов належну апробацію метод розв'язування задач термопружності багатошарових циліндричних тіл за використання перетво-

рення Кірхгофа та прямого інтегрування, який поширено та практично використано для тіл з термочутливих матеріалів за різних умов теплообміну з довкіллям, що уможливило знаходження розв'язків відповідних нових нелінійних математичних моделей у явному вигляді.

3. Вперше розроблено математичні моделі теплопровідності та термопружності багатосарових циліндричних тіл із термочутливих матеріалів, які враховують процеси відведення тепла з обмежувальних поверхонь шляхом кипіння чи випаровування рідини, що дозволило у явному вигляді отримати розв'язки нових нелінійних задач та показати ефективність такого тепловідведення.
4. Отримано та проаналізовано залежності розподілів температур та компонент напружено-деформованого стану у багатосарових термочутливих циліндричних тілах від вхідних параметрів та термочутливості термомеханічних характеристик матеріалів.

Практичне значення одержаних результатів. Наукові та практичні результати дисертаційної роботи використані у відділі фізичних основ руйнування та міцності матеріалів в агресивних середовищах Фізико-механічного інституту ім. Г. В. Карпенка Національної академії наук України при вирішенні науково-технічних задач оцінювання працездатності та ризику руйнування трубопроводів теплоенергетичного призначення та прогнозування можливих експлуатаційних пошкоджень у трисаровому металевому матеріалі, який застосовується при виготовленні корпусів енергетичних та хімічних реакторів.

Отримані результати можуть бути використані для аналізу та розрахунку розподілів температур та компонент напружено-деформованого стану багатосарових циліндричних елементів конструкцій, які використовуються у багатьох галузях промисловості та працюють в умовах високих чи низьких температур, коли істотними є залежності їх характеристик від температури. Допоміжним засобом при цьому можуть слугувати розроблені та зареєстровані програмні продукти «StressCalc_axes» та «StressCalc_rad». Отримані аналітичні розв'язки нелінійних задач теплопровідності можуть бути використані у якості тестових прикладів при розробленні суто числових методів розв'язування таких задач.

Особистий внесок здобувача. Усі наукові результати дисертаційної роботи отримані автором самостійно. У друкованих працях, опублікованих у співавторстві, здобувачеві належать математичні моделі теплопровідності та термопружності багатосарових за осьовою та радіальною координатами термочутливих циліндрів, на обмежувальних поверхнях яких задано умови теплообміну з довкіллям (сталі температури [5, 11, 18], сталі теплові потоки [6, 12, 13], конвективний [3, 7, 15, 16], променевий чи конвективно-променевий [5, 7, 14, 17] теплообміни, умови тепловідведення шляхом кипіння [2] чи випаровування [1, 13] рідини у будь-яких їх комбінаціях), побудова їх розв'язку, реалізація обчислювальних експериментів та аналіз отриманих результатів [10].

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертаційного дослідження доповідались на міжнародних та вітчизняних конференціях, зокрема на: VI Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації» (м. Кам'янець-Подільський, 2014); IX Міжнародній науковій конференції «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур» (м. Львів, 2014); 4-й Міжнародній науково-технічній конференції «Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення та експлуатації машинобудівних конструкцій» (м. Львів, 2014); 4th International Scientific Conference of Students and Young Scientists

«Theoretical and Applied Aspects of Cybernetics» (м. Київ, 2014); Міжнародній науково-методичній конференції «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі» (м. Київ, 2015); Науково-технічній конференції «Мікро- та нанонеоднорідні матеріали: моделі та експеримент» (INTERPOR'15) (м. Львів, 2015); II Всеукраїнській науково-практичній конференції молодих учених і студентів «Інформаційні технології в освіті, техніці та промисловості» (м. Івано-Франківськ, 2015); VIII Міжнародній науковій конференції ім. ак. І. І. Ляшка «Обчислювальна та прикладна математика» (м. Київ, 2015); XII Міжнародній конференції «Фізичні явища в твердих тілах» (м. Харків, 2015); Конференції молодих учених «Підстригачівські читання – 2016» (Львів, 2016); Міжнародній науково-практичній конференції «Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання» (м. Івано-Франківськ, 2016).

У повному обсязі робота доповідалася на науковому семінарі кафедри прикладної математики Інституту прикладної математики та фундаментальних наук Національного університету «Львівська політехніка», на розширеному науковому семінарі відділу термомеханіки Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, на об'єднаному семінарі кафедри технічної механіки і вищої математики Луцького національного технічного університету, розширеному науковому семінарі кафедри транспортних технологій Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту ім. В. Лазаряна.

Публікації. За результатами досліджень опубліковано 18 наукових праць (2 з яких одноосібні), у тому числі 7 статей у фахових наукових виданнях України [1-7], причому 2 з них включено до наукометричної бази Scopus [1,2], 9 публікацій в матеріалах та тезах доповідей на міжнародних та вітчизняних конференціях [10-18], 2 свідоцтва про реєстрацію авторського права на твір [8,9].

Структура та обсяг роботи Дисертація складається зі вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел із 198 найменувань на 21 сторінках та додатку. Робота викладена на 198 сторінках, містить 149 сторінок основного тексту, 65 рисунків та 8 таблиць.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи; сформульовано мету та задачі дослідження; охарактеризовано наукову новизну та практичне значення отриманих результатів; наведено дані про їх апробацію; вказано публікації, структуру та обсяг роботи.

У **першому розділі** проаналізовано потреби моделювання температурних полів та напружень однорідних та кусково-однорідних тіл на основі моделі термочутливого тіла та викладено огляд наукових праць, що стосуються цієї тематики.

Багато елементів сучасної техніки (мікроелектронні пристрої, зносостійке, теплозахисне, корозієстійке покриття машин та енергетичного обладнання, композитні труби та корпуси теплових реакторів тощо) є багат шаровими конструкціями циліндричної форми. Дослідження їх термомпружного стану відіграє важливу роль будівельній індустрії, тепловій та атомній енергетиці, машино- та приладобудуванні, космічній та авіаційній техніці, а також при проектуванні та експлуатації елементів мікроелектроніки. Використання багат шарових (композитних) матеріалів в інженерії має ряд переваг. Такі сполуки отримують штучно, причому матеріали суттєво відрізняються один від одного своїми тепловими і механічними властивостями, а отже матеріал, з якого виго-

товлений елемент конструкції має цілком передбачувані функціональні властивості або нові покращені термомеханічні характеристики.

Використання моделі нетермочутливого тіла, що передбачає нехтування залежністю від температури теплових та механічних характеристик матеріалів, часто не може задовольнити сучасні вимоги інженерії стосовно якнайточнішого визначення теплового та термопружного станів елементів конструкцій, оскільки дає достатньо великі кількісні, а іноді і якісні похибки.

Лінійні моделі теплопровідності і термопружності при високих температурах не здатні описати реальні властивості матеріалів, що призводить не тільки до великих кількісних, але і якісних похибок. Більш реальну картину теплового і термопружного станів тіл дають відповідні нелінійні термочутливі моделі, однак їх розв'язування істотно ускладнюється.

Дослідження з цього приводу знаходимо у працях Я. Й. Бурака, В. М. Вігака, О. Р. Гачкевича, Б. В. Гери, Я. М. Григоренка, Б. Д. Дробенка, Д. Егера, О. О. Євтушенка, Я. О. Жука, Л. М. Журавчак, Б. М. Калиняка, В. Г. Карнахова, Г. Карслоу, Ю. М. Коляна, М. В. Кутніва, Р. М. Кушніра, А. В. Ликова, Л. М. Лобанова, Я. С. Підстригача, В. С. Поповича, Ю. С. Постольника, Б. В. Процюка, Я. Д. П'янила, І. К. Сенченкова, І. В. Сергієнка, П. О. Стеблянка, Г. Т. Сулима, Д. В. Федасюка, В. І. Шваб'юка, N. Noda, J. Nowinski, T. Koizumi, T. Suhara, T. Taniwaki, R. Trostel та ін.

Із проведеного аналізу літературних джерел випливає, що дослідження теплового та термопружного станів багат шарових термочутливих циліндрів за задання різних умов теплообміну на їх обмежувальних поверхнях, наявності внутрішніх джерел тепла в шарах та тепловиділень на межах контакту сусідніх шарів потребує детальнішого вивчення і є актуальним.

У **другому розділі** сформульовано математичні моделі одновимірних усталених температурних полів шаруватих по осі чи радіусу термочутливих та нетермочутливих циліндричних тіл за різних умов їх взаємодії з довкіллям через обмежувальні поверхні (на них можуть задаватися температури, теплові потоки, умови конвективного, променевого чи конвективно-променевого теплообміну, тепловідведення шляхом кипіння рідини чи її випаровування з поверхні), наявності внутрішніх джерел тепла в шарах та тепловиділень на межах контакту сусідніх шарів та наводиться методика їх розв'язування. Викладено методики визначення компонент напружено-деформованого стану таких циліндрів спричинених температурними полями та прикладеними силовими навантаженнями.

Розглядаються n -шарові за осью (рис.1) та радіальною (рис.2) координатами циліндри, на кожній із обмежувальних поверхонь яких задані сталі температури, теплові потоки, умови конвективного, променевого чи конвективно-променевого теплообміну із зовнішніми середовищами сталих температур, умови тепловідведення шляхом кипіння рідини чи її випаровування з поверхні. У площинах контакту сусідніх шарів, коефіцієнти теплопровідності яких є різні, наявні рівномірно розподілені джерела тепла, що створюють сталі потоки $q^{(i+1)} (i = \overline{1, n-1})$. У кожному із шарів містяться рівномірно розподілені (по нормальних до осі у шаруватому за осью координатою циліндрі та до радіальної координати – за радіальною) джерела тепла. У шаруватому за осью координатою циліндрі обмежувальні циліндричні поверхні теплоізовані, через що потік тепла у радіальному напрямі відсутній.

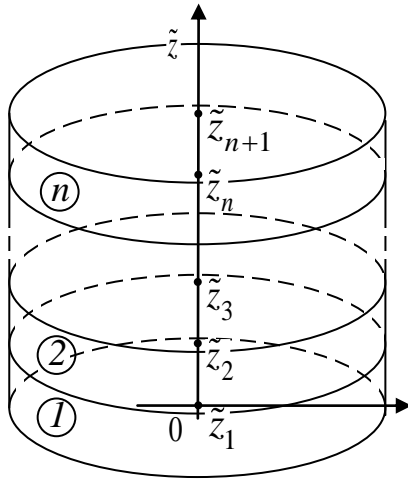


Рис.1. Циліндр n -шаровий за осью координату

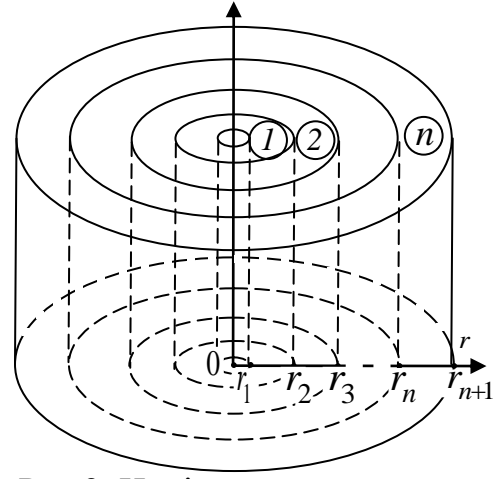


Рис.2. Циліндр n -шаровий за радіальною координатою

Стаціонарне температурне поле багат шарового по осевій чи радіальній координатах термочутливих циліндрів описує система рівнянь теплопровідності (у безрозмірному вигляді)

$$\frac{1}{\zeta^m} \frac{d}{d\zeta} \left(\zeta^m \lambda_*^{(i)}(T_i) \frac{dT_i}{d\zeta} \right) = -\text{Po}^{(i)} w_*^{(i)}(\zeta), \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

умови контакту сусідніх складових

$$T_i|_{\zeta=\zeta_{i+1}} = T_{i+1}|_{\zeta=\zeta_{i+1}}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (2)$$

$$\frac{\lambda_{r0}^{(i)}}{\lambda_{r0}^{(i+1)}} \lambda_*^{(i)}(T_i) \frac{dT_i}{d\zeta} \Big|_{\zeta=\zeta_{i+1}} = \lambda_*^{(i+1)}(T_{i+1}) \frac{dT_{i+1}}{d\zeta} \Big|_{\zeta=\zeta_{i+1}} + \text{Ki}^{(i+1)}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (3)$$

а також дві з можливих умов на обмежувальних поверхнях (табл.1). Тут $m=0$ для $\zeta=z$ та $m=1$ для $\zeta=\rho$, $\{T_i, T_p, T_k\} = \{t_i, t_p, t_k\} / t_k$, t_p та t_k – початкова та кінцева температури з діапазону задання характеристик $[t_p, t_k]$, $\zeta = \{z, \rho\} = \{\tilde{z}, r\} / l_0$, l_0 – вибраний характерний розмір, $\lambda_t^{(i)}(t_i)$ – залежний від температури коефіцієнт теплопровідності i -го шару циліндра, подана у вигляді $\lambda_t^{(i)}(t_i) = \lambda_{t0}^{(i)} (1 + k_i (T_i - T_p))$, де $\lambda_{t0}^{(i)}$ – значення коефіцієнтів теплопровідності матеріалів складових при мінімальній температурі T_p з діапазону їх задання, $W^{(i)}(\zeta)$ – густина джерел тепла i -ї складової, поданого у вигляді $W^{(i)} = w_0^{(i)} w_*^{(i)}(\zeta)$, де $w_0^{(i)}$ – розмірні величини, а $w_*^{(i)}(\{z, \rho\})$ – безрозмірні функції, що описують їх просторовий розподіл, $\text{Po}^{(i)} = w_0^{(i)} l_0^2 / (t_k \lambda_{t0}^{(i)})$, $\text{Ki}^{(i+1)} = q^{(i+1)} l_0 / (t_k \lambda_{t0}^{(i+1)})$, $\text{Bi}^{(i)} = \alpha^{(i)} l_0 / \lambda_{t0}^{(i)}$, $\text{Sk}^{(i)} = \sigma \varepsilon^{(i)} l_0^3 / \lambda_{t0}^{(i)}$ – опорні критерії Померанцева (характеризує інтенсивність тепловиділень в об'ємах шарів), Кірпічова (характеризує інтенсивність тепловиділень на межах контакту шарів, чи на обмежувальних поверхнях), Біо та Старка (характеризують інтенсивності конвективного та променевого теплообмінів), відповідно, σ – стала Стефана-Больцмана, $\alpha^{(n)}$, $\varepsilon^{(n)}$ – коефіцієнт теплообміну та ступінь чорноти обмежувальної поверхні, відповідно, $M_{\text{boil}}^{(n)} = (l_0 t_k^2 \mu_1 h_{fg} / \lambda_{t0}^{(n)}) (g(\hat{\rho}_l - \hat{\rho}_v) / \sigma)^{1/2} \times$

$\times (C_{p,l} / (C_{s,f} h_{fg} Pr_1))^3$, μ_1 , h_{fg} , g , $\hat{\rho}_1$, $\hat{\rho}_v$, σ , $C_{p,l}$, $C_{s,f}$, n , Pr_1 , $t_{boil}^{(n)}$, $\bar{M}_{evap}^{(n)} = M_{evap}^{(n)} / t_k^2$, $\bar{\tau}^{(n)} = p_{A,cn} / T_{cn}$, $M_{evap}^{(n)} = h_{fg} M_A Le^{-2/3} / (R \rho_a c_a)$, $\tau^{(n)} = (\xi_2 - p_{A,cn} / t_{cn}) / t_k$, M_A , R , $p_{A,sat}(t_n)$, $p_{A,cn}$, ρ_a , c_a , $Le = \alpha_a / D_{AB}$, α_a , D_{AB} – відомі сталі в умовах тепловідведення кипінням чи випаровуванням рідини, ξ_1 , ξ_2 – коефіцієнти лінійної апроксимації $\xi_1 t_n + \xi_2$ функції $p_{A,sat}(t_n) / t_n$.

Таблиця 1. Варіанти задання умов на обмежувальних поверхнях

Поверхня $\zeta = \zeta_1$	Поверхня $\zeta = \zeta_{n+1}$
стала температура	
$T_1 _{\zeta=\zeta_1} = T_{c1}$	$T_n _{\zeta=\zeta_{n+1}} = T_{cn}$
сталий тепловий потік	
$\lambda_*^{(1)} \frac{dT_1}{d\zeta} \Big _{\zeta=\zeta_1} = Ki^{(1)}$	$\lambda_*^{(n)} \frac{dT_n}{d\zeta} \Big _{\zeta=\zeta_{n+1}} = Ki^{(n+1)}$
конвективний (при $Sk^{(i)} = 0$), променевий (при $Bi^{(i)} = 0$) чи конвективно-променевий теплообмін	
$\left[\lambda_*^{(1)}(T_1) \frac{dT_1}{d\zeta} + Bi^{(1)}(T_1 - T_{c1}) + Sk^{(1)}(T_1^4 - T_{c1}^4) \right]_{\zeta=\zeta_1} = 0$	$\left[\lambda_*^{(n)}(T_n) \frac{dT_n}{d\zeta} + Bi^{(n)}(T_n - T_{cn}) + Sk^{(n)}(T_n^4 - T_{cn}^4) \right]_{\zeta=\zeta_{n+1}} = 0$
умова тепловідведення шляхом кипіння рідини на поверхні	
$\left[\lambda_*^{(1)}(T_1) \frac{dT_1}{d\zeta} + Bi^{(1)}(T_1 - T_{c1}) + M_{boil}^{(1)}(T_1 - T_{boil}^{(1)})^3 \right]_{\zeta=\zeta_1} = 0$	$\left[\lambda_*^{(n)}(T_n) \frac{dT_n}{d\zeta} + Bi^{(n)}(T_n - T_{cn}) + M_{boil}^{(n)}(T_n - T_{boil}^{(n)})^3 \right]_{\zeta=\zeta_{n+1}} = 0$
умови тепловідведення шляхом випаровування рідини	
$\left[\lambda_*^{(1)}(T_1) \frac{dT_1}{d\zeta} + ((T_1 - T_{c1}) + Bi^{(1)} \left(\bar{M}_{evap}^{(1)} \left(\frac{p_{A,sat}}{T_1} + \bar{\tau}^{(1)} \right) \right) \right]_{\zeta=\zeta_1} = 0$	$\left[\lambda_*^{(n)}(T_n) \frac{dT_n}{d\zeta} + ((T_n - T_{cn}) + Bi^{(n)} \left(\bar{M}_{evap}^{(n)} \left(\frac{p_{A,sat}}{T_1} + \bar{\tau}^{(n)} \right) \right) \right]_{\zeta=\zeta_{n+1}} = 0$
лінеаризовані умови тепловідведення шляхом випаровування рідини	
$\left[\lambda_*^{(1)}(T_1) \frac{dT_1}{d\zeta} + Bi^{(1)} \times \left((T_1 - T_{c1}) + M_{evap}^{(1)} (\xi_1 T_1 + \tau^{(1)}) \right) \right]_{\zeta=\zeta_1} = 0$	$\left[\lambda_*^{(n)}(T_n) \frac{dT_n}{d\zeta} + Bi^{(n)} \times \left((T_n - T_{cn}) + M_{evap}^{(n)} (\xi_1 T_n + \tau^{(n)}) \right) \right]_{\zeta=\zeta_{n+1}} = 0$

Методика побудови розв'язку¹ нелінійної задачі теплопровідності передбачає:
1) апроксимацію експериментально заданих залежностей коефіцієнтів теплопровідності

¹ Кушнір Р. М. Про визначення усталеного термопружного стану багаточарових структур за високотемпературного нагрівання / Кушнір Р. М., Попович В. С. // Вісник КНУ ім. Тараса Шевченка. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2013. – №3. – С. 42–47.

від температури; 2) обезрозмірення математичної моделі; 3) використання перетворення Кірхгофа; 4) побудову розв'язку отриманої задачі на змінні Кірхгофа; 5) здійснення оберненого перетворення Кірхгофа.

Якщо термомеханічні характеристики складових подати у вигляді $\chi^{(i)}(t_i) = \chi_0^{(i)} \chi_i^*(T_i)$, де $\chi_0^{(i)}$ – розмірні величини, що дорівнюють значенню відповідної характеристики при температурі t_p (опорні значення), а величини $\chi_i^*(T_i)$ – безрозмірні функції від безрозмірних температур T_i , які описують залежність відповідних характеристик від температури, то

$$E^{(i)}(t_i) = E_0^{(i)} E_i^*(T_i), \quad v^{(i)}(t_i) = v_0^{(i)} v_i^*(T_i), \quad \alpha_t^{(i)}(t_i) = \alpha_{t0}^{(i)} \alpha_{ti}^*(T_i),$$

де $E^{(i)}(t_i)$, $v^{(i)}(t_i)$, $\alpha_t^{(i)}(t_i)$ – залежні від температури модулі пружності, коефіцієнти Пуассона та температурні коефіцієнти лінійного розширення складових циліндра.

Термопружний стан шаруватих за осьовою координатою циліндрів, віднесених до декартової системи координат, вільних від навантажень з ізотропними ідеально контактуючими шарами, температура яких змінюється лише по його товщині, визначають дві ненульові координати тензора напружень $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma(z)$, які обчислено згідно ².

Компоненти напружено-деформованого стану (радіальні $\sigma_r^{(i)}$, колові $\sigma_\phi^{(i)}$ та осьові $\sigma_z^{(i)}$ напруження, радіальні $e_r^{(i)}$ та колові $e_\phi^{(i)}$ деформації, радіальні переміщення $u_r^{(i)}$) шаруватих за радіальною координатою циліндрів з ідеальним механічним контактом між шарами і відомим радіальним розподілом температури, визначеним з відповідної задачі теплопровідності, що перебуває під дією заданих сталих нормальних навантажень на його зовнішніх поверхнях, обчислено за формулами³. Зазначимо, що на внутрішній та зовнішній поверхнях циліндра, а також на його торцях діють сталі тиски p_1, p_2 та p відповідно.

Математичні моделі для визначення теплового та напружено-деформованого станів аналогічних нетермочутливих багатошарових по осьовій та радіальній координатах циліндрів отримуємо з моделей термочутливих, знехтувавши в них залежністю теплових та механічних характеристик матеріалів шарів від температури, тобто, поклавши $\lambda_*^{(i)}(T_i) = E_i^*(T_i) = v_i^*(T_i) = \alpha_{ti}^*(T_i) = 1$ (характеристики дорівнюють опорним значенням). У випадку, коли термомеханічні характеристики дорівнюють середньо-інтегральним значенням відповідних коефіцієнтів термочутливого, у моделях температур та напружень нетермочутливого тіла опорні значення слід замінити на середньо-інтегральні

² Кушнір Р. М. Термопружність термочутливих тіл / Кушнір Р. М., Попович В. С. // Львів: Сполом, 2009. – 412 с. – Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В 5 т. – Т. 3.

³ Попович В. С. Математичне моделювання та методика визначення статичного термопружного стану багатошарових термочутливих циліндрів / Попович В. С., Калиняк Б. М. // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – Т. 57, №2. – С. 169-186.

$$\begin{aligned} \{\lambda_t^{(i)}, \nu^{(i)}, \alpha_t^{(i)}, E^{(i)}\} &= \{\alpha_t^{(i)}, \nu_c^{(i)}, \alpha_{tc}^{(i)}, E_c^{(i)}\} = \\ &= \frac{1}{T_k - T_p} \int_{T_p}^{T_k} \{\lambda_t^{(i)}(T), \nu^{(i)}(T), \alpha_t^{(i)}(T), E^{(i)}(T)\} dT, i = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

У третьому розділі визначено температурні поля та напруження шаруватих за осью координатою термочутливих та нетермочутливих циліндричних тіл за різних умов теплообміну на обмежувальних поверхнях. Досліджено вплив термочутливості матеріалів шарів, а також значень безрозмірних критеріїв на характер та рівень розподілів температур та напружень. Отримані результати було використано для прогнозування можливих експлуатаційних пошкоджень у тришаровому матеріалі, що використовується для виготовлення корпусів енергетичних та хімічних реакторів.

У ході досліджень було розв'язано ряд конкретних задач (табл.2) про знаходження теплового та термопружного станів шаруватих по осі термочутливих та аналогічних нетермочутливих циліндрів. Тут і у наступному розділі у разі задання у якомусь із шарів циліндра джерел тепла, вважається, що вони розподілені за параболічним законом $W^{(i)}(z) = 4W_0^{(i)}(z-z_i)(z-z_{i+1}) / (z_{i+1}-z_i)^2, i = \overline{1, n}$, а на рис. 3 – рис. 18 суцільними лініями зображено розподіли температур чи компонент напружено-деформованого стану термочутливих циліндрів, штриховою – нетермочутливих за опорних, штрих-пунктирною – за середньоінтегральних значень термомеханічних характеристик.

Таблиця 2. Коротке формулювання задач теплопровідності розділу 3

№ п/п	К-сть шарів	Матеріали шарів	Джерела тепла $W^{(i)}(z)$	Крайові умови
1	2	1 – ZrO ₂ , 2 – Ti-6Al-4V	–	$z = z_1$ – потік тепла $z = z_3$ – конвективний теплообмін
2	2	– // –	–	$z = z_1$ – температура $z = z_3$ – конв.-пром. теплообмін
3	3	1,3 – ZrO ₂ , 2 – Ti-6Al-4V	2-й шар	$z = z_1$ – температура $z = z_4$ – температура
4	3	– // –	– // –	$z = z_1$ – потік тепла $z = z_4$ – кипіння
5	3	– // –	– // –	$z = z_1$ – потік тепла $z = z_4$ – випаровування

При проведенні числових досліджень припустили, що матеріалами шарів циліндра у різних їх комбінаціях у діапазоні температур $[t_p, t_k] = [300\text{K}, 1100\text{K}]$ є кераміка ZrO₂ та титановий сплав Ti-6Al-4V⁴, а в якості рідин, що подаються на обмежувальні

⁴ Tanigawa Y., Akai T., Kawamura R., Oka N. Transient heat conduction and thermal stress problems of a nonhomogeneous plate with temperature-dependent material properties // J. Therm. Stresses. – 1996. – 19, No. 1. – P. 77 –102.

поверхні циліндра для зниження рівня температури в ньому, брали FC-72⁵ та FC-87⁶ з температурами кипіння $T_{\text{boil}}^{(3)} = 329/1000$ та $T_{\text{boil}}^{(3)} = 303/1000$ відповідно, які спеціально розроблені для використання в мікроелектроніці.

Побудова розв'язку кожної із розглянутих у цьому та наступному розділах задач термопружності розпадається на дві незалежні задачі: 1) визначення температурного поля циліндра за заданих теплових дій; 2) знаходження компонент термопружного стану спричиненого знайденим розподілом температури та прикладеними силовими факторами (при їх наявності це вказується окремо).

При числових дослідженнях розв'язку **задачі 1**, наприклад, досліджено вплив значень безрозмірного критерію Кірпічова $Ki^{(2)}$ (характеризує тепловідведення у площині контакту $z = z_2$) на рівень і характер розподілів температур і напружень двошарового циліндра. Вхідними параметрами є $z_1 = 0$, $z_2 = 0.3$, $z_3 = 1$, $l_0 = z_3$, $T_p = 3/11$, $T_k = 1$, $T_{\text{cn}} = 3/11$, $Bi^{(2)} = 3$, $Ki^{(1)} = 0.5$, $Ki^{(2)} = \{0, 0.1, 0.2\}$. На рис.3 лінії червоного кольору відповідають значенню $Ki^{(2)} = 0$, синього – 0.1, зеленого – 0.2.

У **задачі 2** вважали, що у площині контакту циліндрів $z = z_2$ наявні рівномірно розподілені джерела тепла, які створюють тепловий потік. Визначено вплив на розподіли температур і напружень безрозмірних критеріїв Біо та Старка. Вхідні дані задано так: $z_1 = 0$, $z_2 = 0.4$, $z_3 = 1$, $l_0 = z_3$, $T_p = 3/11$, $T_k = 1$, $T_{c1} = 4/11$, $T_{\text{cn}} = 3/11$, $Bi^{(2)} = \{0, 3\}$, $Sk^{(2)} = \{0, 3\}$. Графіки розподілів температур та напружень циліндрів зображено на рис.4, причому лінії червоного кольору відповідають значенням $Bi^{(2)} = 0$, $Sk^{(2)} = 3$, синього – $Bi^{(2)} = 3$, $Sk^{(2)} = 3$, зеленого – $Bi^{(2)} = 3$, $Sk^{(2)} = 0$.

У **задачі 3** вивчено вплив критерію Померанцева. При цьому вхідні дані задали таким чином $z_1 = 0$, $z_2 = 0.2$, $z_3 = 0.8$, $z_4 = 1$, $T_p = 3/11$, $T_k = 1$, $T_{c1} = 3/11$, $T_{\text{cn}} = 4/11$, $Po^{(2)} = \{-0.1, -1, -3\}$. Графіки розподілів температур і напружень подано на рис.5. Тут червоні лінії відповідають значенню $Po^{(2)} = -0.1$, сині – -1, зелені – -3.

Дослідження ефективності тепловідведення кипінням та випаровуванням рідини шляхом порівняння числових значень розв'язків **задач 4 та 5**. За вхідні параметри брали $z_1 = 0$, $z_2 = 0.3$, $z_3 = 0.9$, $z_4 = 1$, $l_0 = z_4$, $T_p = T_{\text{cn}} = 3/11$, $T_k = 1$, $Po^{(2)} = -0.5$, $Bi^{(3)} = 1.6$, $Ki^{(1)} = 0.2$. Графіки розподілів температур і напружень зображено на рис.6. Зазначимо, що червоні лінії відповідають розподілам температур циліндра без тепловідведення із $z = z_4$ (суто конвективний теплообмін), сині – при випаровуванні рідини FC-72, а блакитні – FC-87, зелені – при кипінні рідини FC-72, а фіолетові – FC-87.

⁵ Fluorinert Electronic Liquid FC-72. Product Information [Електронний ресурс] / 3М. – Режим доступу : <http://multimedia.3m.com/mws/mediawebserver?66666UuZjcFSLXTtnxTE5XF6EVuQEcuZgVs6EVs6E66666>—

⁶ Fluorinert Electronic Liquid FC-87. Product Information [Електронний ресурс] / 3М. – Режим доступу : http://multimedia.3m.com/mws/mediawebserver?mwsId=66666UuZjcFSLXTtnxTE5xF6EVuQEcuZgVs6EVs6E6666666--fn=prodinfo_FC87.pdf

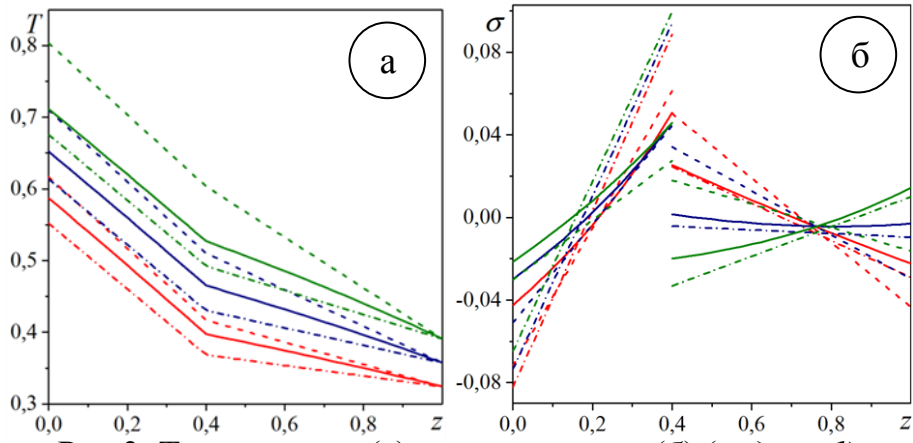


Рис.3. Температури (а) та напруження (б) (задача 1)

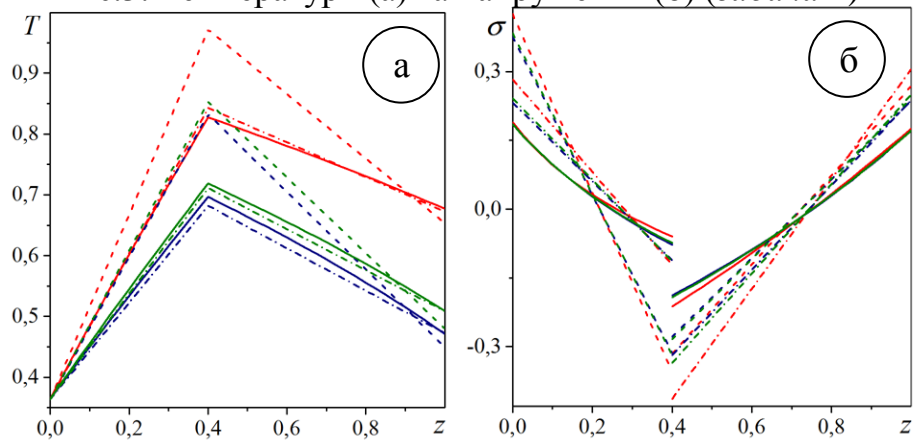


Рис.4. Температури (а) та напруження (б) (задача 2)

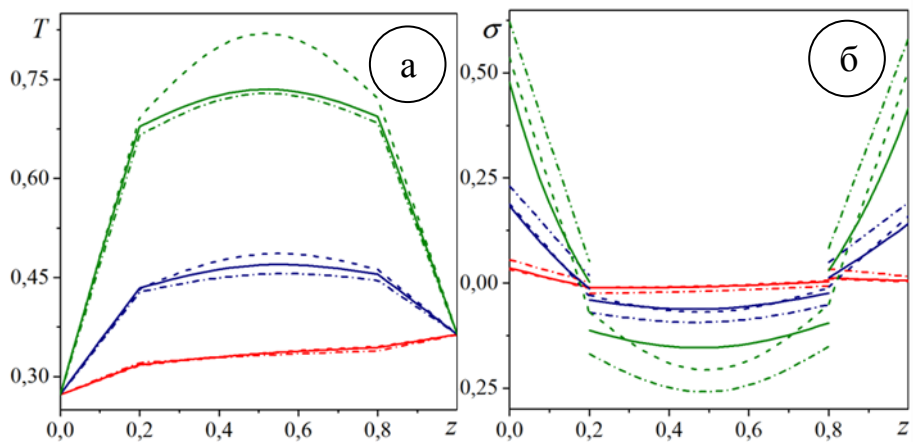


Рис.5. Температури (а) та напруження (б) (задача 3)

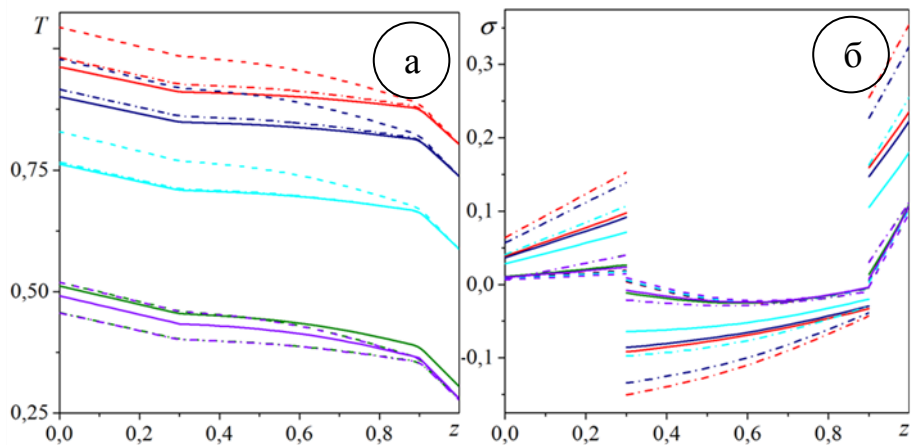


Рис.6. Температури (а) та напруження (б) (задачі 4, 5)

Дослідження теплового та напруженого станів шаруватих за осьовою координатою циліндрів показали, що нехтування термочутливістю матеріалів при визначенні розподілів температур циліндра цілком допустиме, оскільки максимальні розбіжності між розподілами термочутливого та нетермочутливого циліндрів є достатньо малими. Це, однак, не має місця при визначенні розподілів напружень. Так, при дослідженнях спостерігались великі кількісні (більше 50%) та якісні (розтяг в термочутливому та стиск у нетермочутливому чи навпаки) розбіжності між розподілами напружень. Встановлено, що методи тепловідведення кипінням чи випаровуванням рідини є досить ефективними, оскільки добре контролюють тепловий стан тіла – температура може знизитися до 30%.

З усіх розглянутих випадків видно, що розподіли температур та напружень термочутливого циліндра найкраще наближаються такими розподілами аналогічного нетермочутливого циліндра за використання середньоінтегральних значень коефіцієнтів теплопровідності, що може бути корисним при експрес-оцінці їх теплового та термопружного станів.

У **четвертому розділі** визначено температурні поля та компоненти напружено-деформованого стану шаруватих за радіальною координатою термочутливих та нетермочутливих циліндричних тіл за різних умов теплообміну на обмежувальних поверхнях. Здійснено порівняльний аналіз отриманих результатів та досліджено вплив термочутливості матеріалів шарів, а також значень безрозмірних критеріїв на характер та рівень розподілів температур та компонент напружено-деформованого стану. Отримані результати було використано для оцінювання працездатності та ризику руйнування трубопроводів теплоенергетичного призначення.

Таблиця 3. Коротке формулювання задач теплопровідності розділу 4

№ п/п	К-сть шарів	Матеріали шарів	Джерела тепла $W^{(i)}(z)$	Крайові умови
1	3	1, 3 – ZrO_2 , 2 – Ti-6Al-4V	2-й шар	$z = z_1$ – температура $z = z_4$ – конвективний теплообмін
2	5	1, 3, 5 – ZrO_2 , 2, 4 – Ti-6Al-4V	2-й, 4-й шари	$z = z_1$ – потік $z = z_6$ – конвективний теплообмін
3	3	1,3 – ZrO_2 , 2 – Ti-6Al-4V	2-й шар	$z = z_1$ – конв.-пром. теплообмін $z = z_4$ – конвективний теплообмін
4	3	2 – ZrO_2 , 1, 3 – Ti-6Al-4V	1-й, 3-й шари	$z = z_1$ – конвективний теплообмін $z = z_4$ – кипіння
5	3	– // –	– // –	$z = z_1$ – конвективний теплообмін $z = z_4$ – випаровування

У ході досліджень було розв’язано ряд конкретних задач (табл.3) про знаходження теплового та термопружного станів шаруватих за радіальною координатою термочувливих та аналогічних нетермочувливих циліндрів.

Вплив безрозмірного критерію Померанцева на розподіли температур і компонент напружено-деформованого стану досліджено у задачі **задачі 1**. Вхідні параметри є таки-

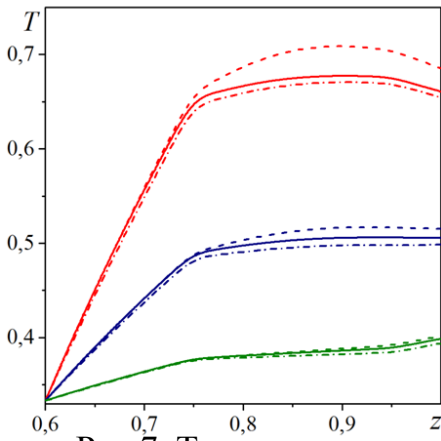


Рис.7. Температури
(задача 1)

ми: $\rho_1=0.6$, $\rho_2=0.75$, $\rho_3=0.95$, $\rho_4=1$, $l_0=r_4$, $T_{c1}=1/3$, $T_{cn}=1/2$, $Po^{(2)}=\{0,-2,-5\}$, $Bi^{(3)}=2$, $p_1=p_2=p=0$. Графіки розподілів температур та компонент напружено-деформованого стану подано на рис.7–9, причому червоні лінії відповідають $Po^{(2)}=-5$, сині – -2 , зелені – 0 .

У *задачі 2* вивчено вплив на розподіли температур та компонент напружено-деформованого стану прикладених на внутрішній поверхні силових навантажень. Вхідні параметри вибрано так: $\rho_1=0.75$, $\rho_2=0.77$, $\rho_3=0.86$, $\rho_4=0.89$, $\rho_5=0.98$, $\rho_6=1$, $l_0=r_6$, $T_{cn}=1/2$, $Po^{(2,4)}=-2$, $Bi^{(5)}=2$, $Ki^{(1)}=-0.3$, $p_1=\{0,0.1,0.3\}$, $p_2=p=0$. Графіки роз-

поділів температур подано на рис.10., а компонент напружено-деформованого стану – на рис.13 та рис. 14 (тут червоні лінії відповідають значенню $p_1=0$, сині – 0.1 , зелені – 0.3).

У *задачі 3* досліджено вплив безрозмірного критерію Старка. Вхідні параметри задано так: $\rho_1=0.7$, $\rho_2=0.75$, $\rho_3=0.95$, $\rho_4=1$, $l_0=r_4$, $T_{c1}=1$, $T_{c1}=5/11$, $Po^{(2)}=-2$, $Bi^{(1)}=7$, $Bi^{(3)}=5$, $Sk^{(1)}=\{0,1,2\}$, $p_1=p_2=p=0$. На рис. 11, рис. 15 та рис. 16 зображено розподіли температур та компонент напружено-деформованого стану (червоними лініями зо-

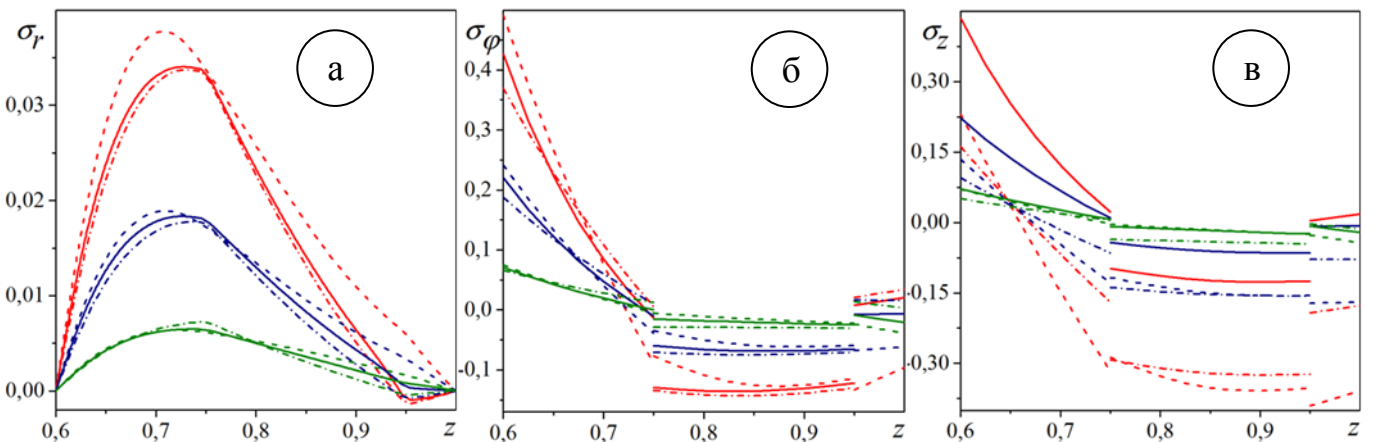


Рис. 8. Радіальні (а), колові (б) та осьові (в) напруження

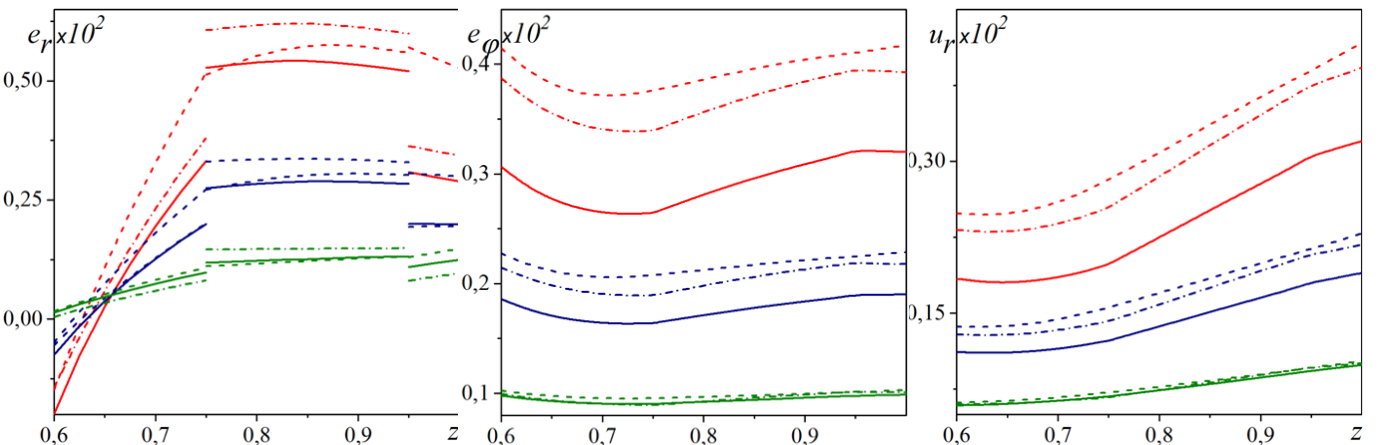


Рис. 9. Радіальні (а) та колові (б) деформації, радіальні переміщення (в)

бражено розподіли при $Sk^{(1)}=0$, синіми – 1, зеленими – 2).

Проведено дослідження ефективності тепловідведення кипінням та випаровуванням рідини шляхом порівняння числових результатів розв'язків *задач 4 та 5*. Вхідними параметрами є $\rho_1=0.6$, $\rho_2=0.75$, $\rho_3=0.85$, $\rho_4=1$, $l_0=r_4$, $T_{c1}=1/2$, $T_{cn}=7/11$, $Ro^{(1)}=-5$, $Ro^{(3)}=-5$, $Bi^{(1)}=1$, $Bi^{(3)}=1$, $Sk^{(1)}=0$, $p_1=p_2=p=0$. Графіки розподілів температур та компонент напружено-деформованого стану подано на рис. 12, рис. 17 та рис. 18 (тут червоними

Графіки розподілів температур та компонент напружено-деформованого стану подано на рис. 12, рис. 17 та рис. 18 (тут червоними лініями зображено розподіли тем-

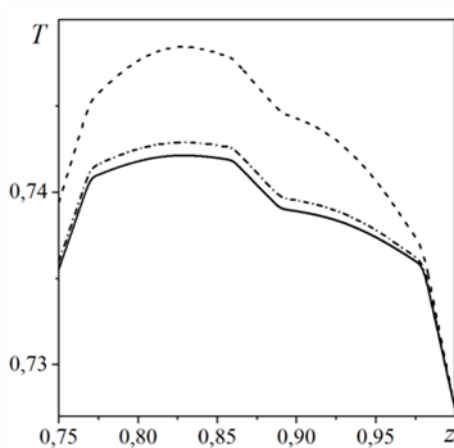


Рис.10. Температури (задача 2)

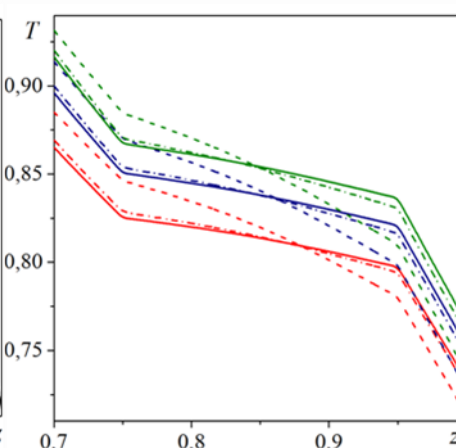


Рис.11. Температури (задача 3)

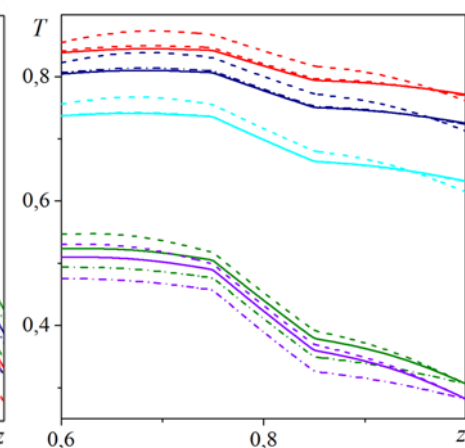


Рис.12. Температури (задачі 4, 5)

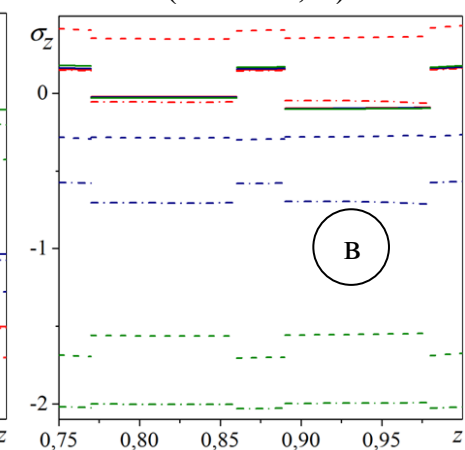
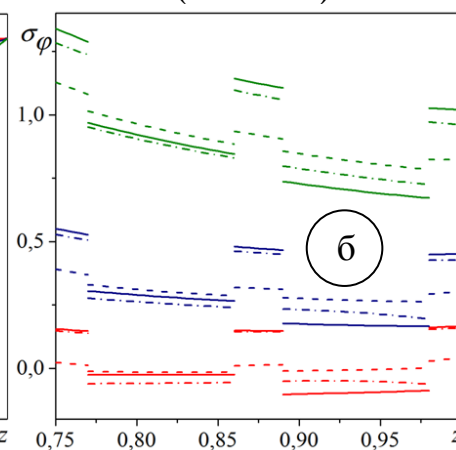
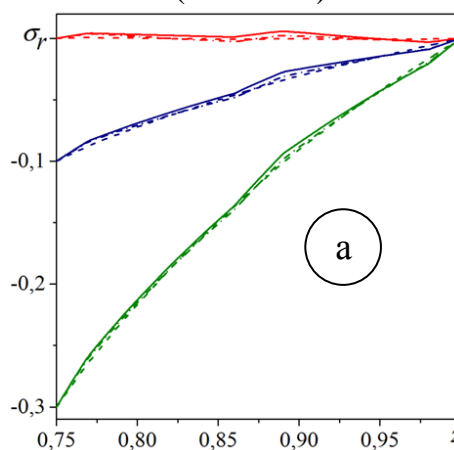


Рис. 13. Радіальні (а), колові (б) та осьові (в) напруження (задача 2)

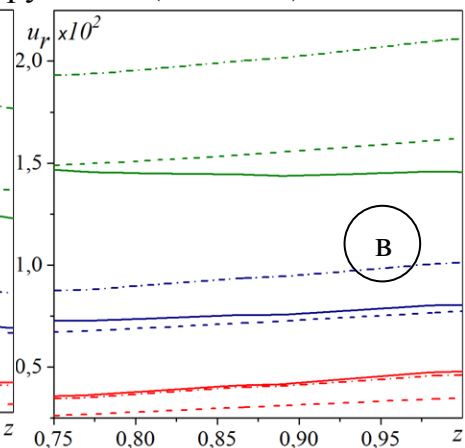
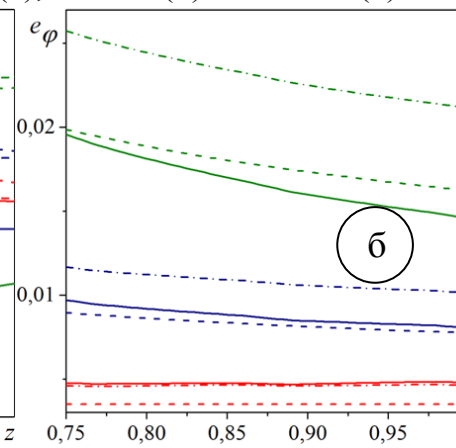
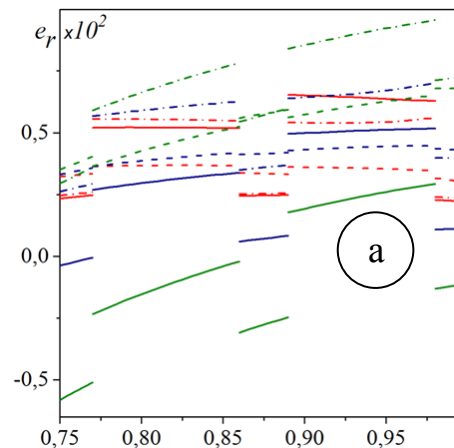


Рис. 14. Радіальні (а) та колові(б) деформації, радіальні переміщення (в) (задача 2)

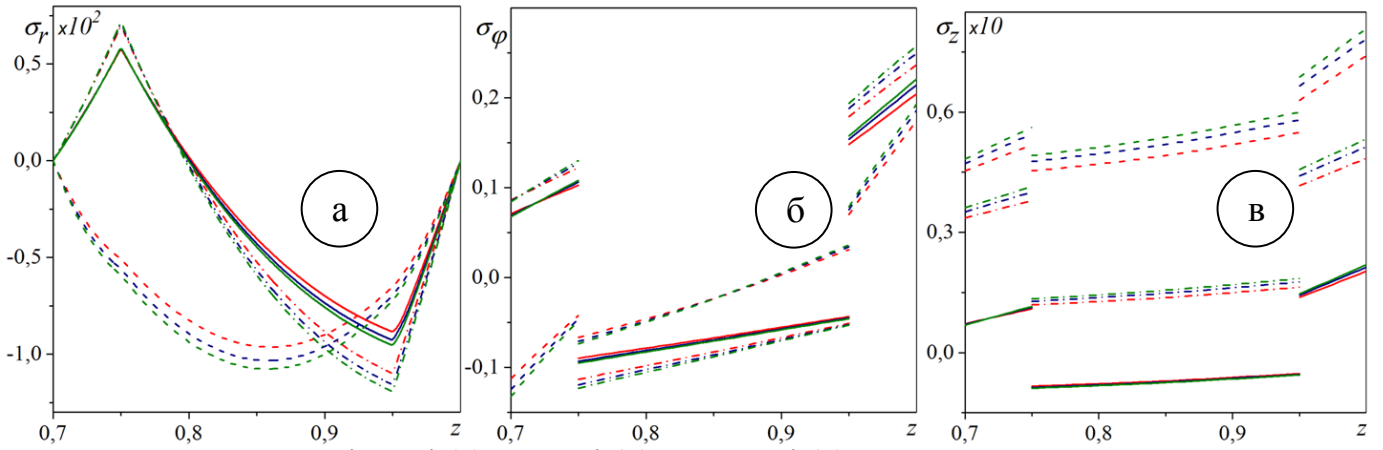


Рис. 15. Радіальні (а), колові (б) та осьові (в) напруження (задача 3)

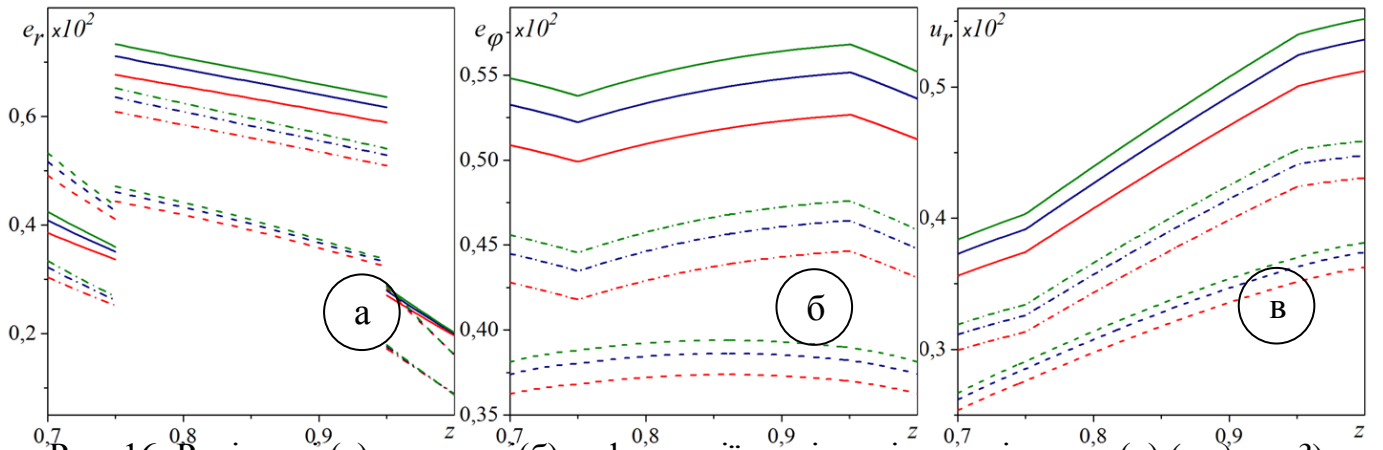


Рис. 16. Радіальні (а) та колові(б) деформації, радіальні переміщення (в) (задача 3)

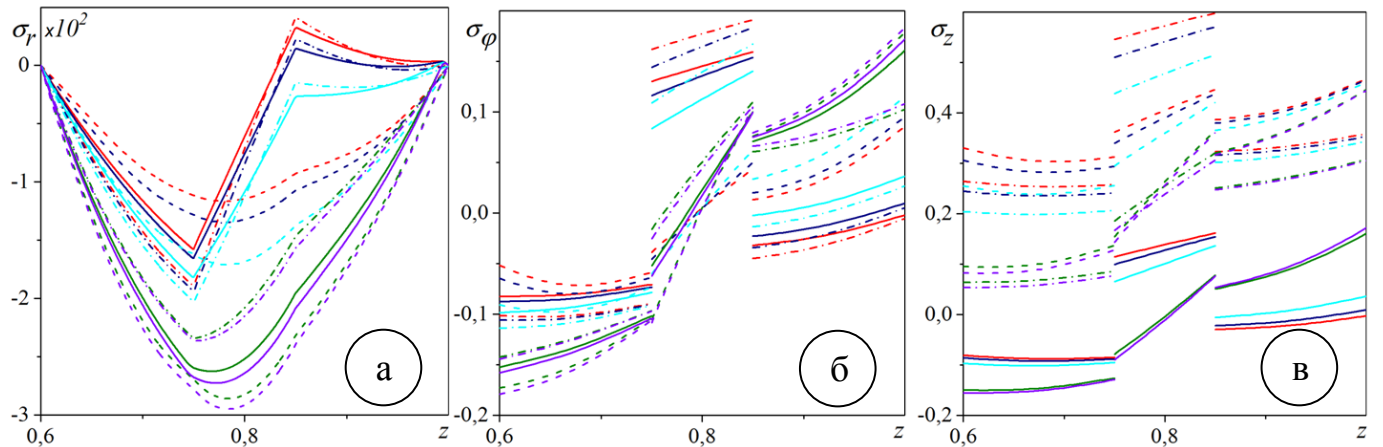


Рис. 17. Радіальні (а), колові (б) та осьові (в) напруження (задачі 4, 5)

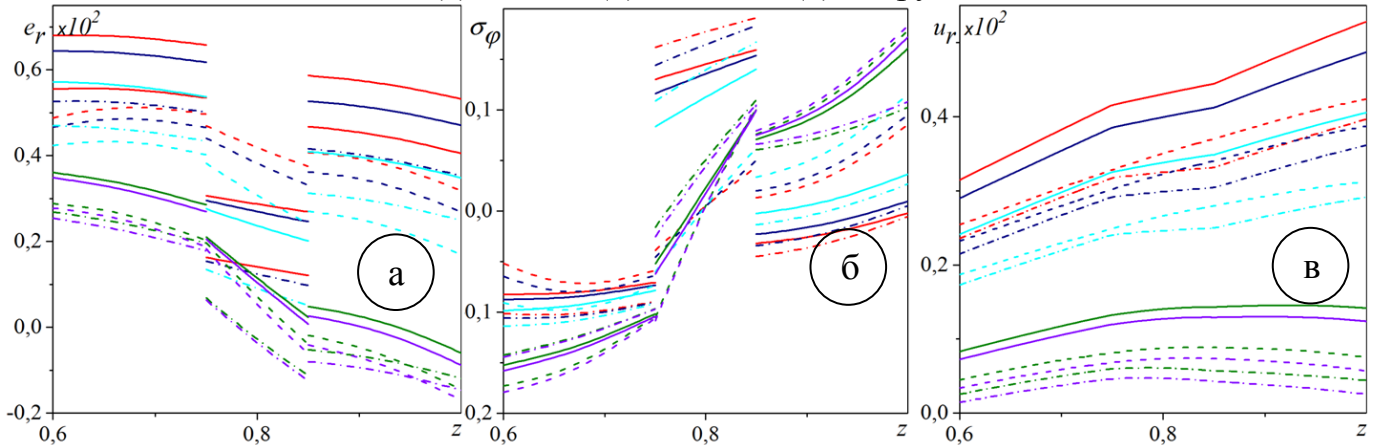


Рис. 18. Радіальні (а) та колові(б) деформації, радіальні переміщення (в) (задачі 4, 5)

ператур без тепловідведення з зовнішньої поверхні $\rho = \rho_4$ (суто конвективний теплообмін), синіми – за відведення тепла випаровуванням рідини FC72, а блакитними – FC87, зеленими – за кипіння FC72, а фіолетовими – FC87).

Дослідження впливу термочутливості показало, що важливу роль відіграє врахування залежності теплових і механічних характеристик матеріалів при визначенні розподілів компонент напружено-деформованого стану. Так, у всіх дослідженнях спостерігались великі кількісні та якісні (розтяг в термочутливому та стиск у нетермочутливому чи навпаки) розбіжності між розподілами напружень. При цьому розподіли температур нетермочутливих тіл достатньо точно описували тепловий стан термочутливого циліндра, що може бути корисним при їх експрес-оцінці. Також встановлено, що краще наближення до розподілів температур та компонент напружено-деформованого стану термочутливих циліндрів дають такі розподіли нетермочутливих за використання середньоінтегральних значень теплових та механічних характеристик матеріалів шарів.

Виявлено, що процеси кипіння та випаровування рідин з поверхонь шаруватих порожнистих циліндрів суттєво інтенсифікують тепловідведення і є досить ефективними способами відведення тепла за критичних умов. При цьому встановлено, що використання лінеаризованої умови випаровування не дає адекватних розподілів температур та компонент напружено-деформованого стану.

У п'ятому розділі описано прикладні програмні засоби: «Програму для розрахунку температурних напружень багатошарових по осі циліндрів» («StressCalc_ axes») та «Програму для розрахунку компонент напружено-деформованого стану багатошарових за радіальною координатою порожнистих циліндрів» («StressCalc_ rad»), що розроблені для моделювання термопружного стану шаруватих по осьовій та радіальній координатах циліндрів. Зареєстровано авторські права на ці програми у Державній службі інтелектуальної власності України.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ РОБОТИ ТА ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота є завершеним науковим дослідженням, у якому вирішене актуальне наукове завдання з математичного моделювання температурних полів та компонент напружено-деформованого стану шаруватих за осьовою та радіальною координатами циліндричних тіл, у яких враховуються залежності теплових та механічних характеристик матеріалів шарів від температури за складних умов взаємодії із довкіллям та внутрішніх тепловиділень. При цьому отримано такі основні результати:

1. Сформульовано нелінійні математичні моделі теплового та напружено-деформованого станів термочутливих та нетермочутливих (за опорних та середньоінтегральних значень термомеханічних характеристик матеріалів) багатошарових за осьовою та радіальною координатами циліндричних тіл за різних умов теплообміну із довкіллям та знайдено їх числові розв'язки.
2. Здійснено порівняльний аналіз отриманих результатів та досліджено вплив термочутливості матеріалів шарів циліндрів, безрозмірних критеріїв Біо, Кірпічова, Старка та Померанцева, інтенсивності кипіння та випаровування рідини, використання лінеаризованої умови випаровування на характер та рівень розподілів температур та компонент напружено-деформованого стану.
3. Встановлено, що нехтування термочутливістю матеріалів шарів циліндрів при визначенні розподілів температур цілком допустиме, оскільки максимальні розбіжності між такими розподілами термочутливого та нетермочутливого (як за опорних,

так і за середньоінтегральних значень термомеханічних характеристик матеріалів шарів) циліндрів є достатньо малими. Це може бути корисним при здійсненні експрес-оцінки теплового стану шаруватих циліндричних тіл.

4. При визначенні розподілів компонент напружено-деформованого стану з використанням моделі нетермочутливого тіла наявні великі кількісні (більше 50%) та іноді і якісні (розтяг у термочутливому тілі та стиск у нетермочутливому, чи навпаки) розбіжності. Таке недостовірне визначення компонент термопружного стану не може бути використане при проектуванні багат шарових циліндричних конструкцій.
5. Дослідження тепловідведення шляхом кипіння та випаровування рідини з обмежувальних поверхонь показало їх ефективність, оскільки вони суттєво інтенсифікують відведення тепла – зниження температури може сягати 30% . Однак, використання лінеаризованої умови випаровування рідини з поверхні циліндра не дає адекватного розподілу температур і компонент напружено-деформованого стану.
6. Для числового аналізу та графічної ілюстрації розв'язків побудованих моделей розроблено програмні засоби для розрахунку температурних полів та компонент напружено-деформованого стану багат шарових за осьовою та радіальною координатами циліндричних тіл.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Попович В. С. Напружено-деформований стан кусково-однорідного термочутливого циліндра за тепловідведення кипінням рідини / В. С. Попович, І. І. Ракоча // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2015. – Т. 58, №2. – С. 89-97.
2. Попович В. С. Моделювання термопружного стану шаруватого по осі термочутливого циліндра за тепловідведення шляхом випаровування рідини / В. С. Попович, І. І. Ракоча // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2015. – Т. 58, №3. – С. 7-14.
3. Попович В. С. Математичне моделювання та дослідження термопружного стану п'ятишарового термочутливого порожнистого циліндра / В. С. Попович, І. І. Ракоча // *Прикл. проблеми механіки і математики.* – 2015. – Вип. 13. – С. 88-100.
4. Ракоча І. Математичне моделювання, визначення та дослідження термопружного стану трискладового термочутливого циліндра / І. Ракоча, В. Попович // *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології.* – 2015. – Вип. 21. – С. 186-197.
5. Ракоча І. Математичне моделювання та визначення термопружного стану двоскладового термочутливого циліндра за конвективно-променевого нагрівання / І. Ракоча, В. Валяшек // *Вісник Тернопільського національного технічного університету.* – 2015. – № 1 (77). – С. 87-97.
6. Ракоча І. І. Математичне моделювання та визначення термопружного стану двоскладового термочутливого циліндра за складного нагрівання / І. І. Ракоча, В. С. Попович // *Прикл. проблеми механіки і математики.* – 2014. – Вип. 12. – С. 69-77.
7. Kushnir R. M. Mathematical modelling, definition and investigation of the thermostressed state of the thermosensitive three-layer hollow cylinder under convective-radiative heating / R. M. Kushnir, V. S. Popovych, I. I. Rakocha // *Math. Modeling and Computing.* – 2015. – V. 2, No. 2. – P. 160-175.
8. Попович В. С. Комп'ютерна програма «Програма для розрахунку компонент напружено-деформованого стану багат шарових за радіальною координатою порожнистих циліндрів (Програма «StressCalc_rad»)» / В. С. Попович, І. І. Ракоча // Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 64105 від 16.02.2016 р.

9. Попович В. С. Комп'ютерна програма «Програма для розрахунку температурних напружень багат шарових по осі циліндрів (Програма «StressCalc_axes»)» / В. С. Попович, І. І. Ракоча // Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 64106 від 16.02.2016 р.
10. Кушнір Р. М. Математичне моделювання, визначення та дослідження термопружного стану шаруватих термочутливих циліндричних тіл / Р. М. Кушнір, В. С. Попович, І. І. Ракоча // Матеріали науково-технічної конференції «Мікро- та нанонеоднорідні матеріали: моделі та експеримент» (INTERPOR'15). – Львів, 2015. – С. 22-23.
11. Попович В. Математичне моделювання та дослідження термопружного стану шарового термочутливого порожнистого циліндра / В. Попович, І. Ракоча // Матеріали Міжнародної науково-методичної конференції «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі». – Київ, 2015. – С. 27-29.
12. Попович В. С. Математичне моделювання та визначення термопружного стану двох шарової термочутливої пластини за складного нагріву / В. С. Попович, І. І. Ракоча // Тези доповідей VI Міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації». – Кам'янець-Подільський : КПНУ ім. Івана Огієнка, 2014. – С. 125-127.
13. Ракоча І. Математичне моделювання процесу тепловідведення шляхом випаровування рідини з обмежувальної поверхні багат шарового термочутливого циліндра / І. Ракоча // Матеріали XII Міжнародної конференції «Фізичні явища в твердих тілах». – Харків, 2015. – С. 57.
14. Ракоча І. Математичне моделювання та визначення термопружного стану двоскладового за осьовою координатою термочутливого циліндра за складного нагрівання / І. Ракоча, В. Попович // Тези доповідей 4-ї Міжнародної науково-технічної конференції «Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення та експлуатації машинобудівних конструкцій». – Львів : КІНПАТРИ ЛТД, 2014. – С. 47-48.
15. Ракоча І. Математичне моделювання та визначення термопружного стану кусково-однорідного за осьовою координатою термочутливого циліндра за складного нагрівання / І. Ракоча, В. Попович // Наукові праці IX Міжнародної наукової конференції «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур». – Львів : ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2014. – С. 153-156.
16. Ракоча І. І. Математичне моделювання та дослідження термопружного стану шаруватого за радіальною координатою термочутливого порожнистого циліндра / І. І. Ракоча, В. С. Попович // Матеріали II Всеукраїнської науково-практичної конференції молодих учених і студентів «Інформаційні технології в освіті, техніці та промисловості». – Івано-Франківськ, 2015. – С. 178-179.
17. Ракоча І. І. Моделювання процесу тепловідведення шляхом кипіння рідини в три-складовому термочутливому циліндрі / І. І. Ракоча, В. С. Попович // Матеріали VIII Міжнародної наукової конференції ім. ак. І. І. Ляшка «Обчислювальна та прикладна математика». – Київ, 2015. – С. 73-74.
18. Rakocha I. I. The definition and mathematical modeling of the thermosensitive condition of a three-component thermosensitive cylinder under complex heating / I. I. Rakocha // Proceedings of the 4th International Scientific Conference of Students and Young Scientists «Theoretical and Applied Aspects of Cybernetics». – Kyiv, 2014. – P. 188-198.

АНОТАЦІЇ

Ракоча І. І. Математичне моделювання термопружного стану шаруватих циліндричних тіл за умов складного високотемпературного нагрівання. – *На правах рукопису.*

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи. – Національний університет «Львівська політехніка» МОН України, Львів, 2016.

У дисертаційній роботі розроблено математичні моделі та методи визначення усталеного теплового та термопружного станів багатошарових за осьовою та радіальною координатами термочутливих циліндрів, на обмежувальних поверхнях яких задані різні умови теплообміну із довкіллям (сталі температури та теплові потоки, конвективний, променевий та конвективно-променевий теплообмін, тепловідведення кипінням та випаровуванням рідини), а всередині шарів наявні рівномірно розподілені джерела тепла, у площинах контакту шарів, коефіцієнти теплопровідності матеріалів яких є різні, – рівномірно розподілені джерела тепла, що створюють сталі потоки.

На основі побудованих розв'язків досліджено вплив залежності термомеханічних характеристик матеріалів шарів від температури та вхідних параметрів теплообміну на характер та рівень розподілів температур та компонент напружено-деформованого стану багатошарових термочутливих циліндрів.

Розроблено та зареєстровано у Державній службі інтелектуальної власності України програмні засоби для розрахунку температурних полів та компонент напружено-деформованого стану багатошарових за осьовою та радіальною координатами циліндричних тіл.

Ключові слова: математичне моделювання, термочутливий матеріал, температура, тепловий стан, температурні напруження, напружено-деформований стан, багатошаровий циліндр.

Ракоча И. И. Математическое моделирование термоупругого состояния слоистых цилиндрических тел при условии сложного высокотемпературного нагрева. – *На правах рукописи.*

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 01.05.02 – математическое моделирование и вычислительные методы. – Национальный университет «Львовська політехніка» МОН України, Львов, 2016.

В диссертационной работе разработано математические модели и методы определения устойчивого теплового и термоупругого состояний термочувствительных по радиальной и осевой координате цилиндров, на ограничительных поверхностях которых заданы различные условия теплообмена с окружающей средой (устоявшиеся температуры и тепловые потоки, конвективный, лучистый и конвективно-лучистый теплообмен, теплоотвод путем кипения или испарения жидкости), а внутри слоев цилиндра – равномерно распределены источники тепла, в плоскостях контакта слоев, коэффициенты теплопроводности материалов которых разные, – равномерно распределены источники тепла, что создают постоянные потоки.

Исследовано влияние зависимости термомеханических характеристик материалов слоев от температуры и параметров теплообмена на характер и уровень распределений температур и компонент напряженно-деформированного состояния.

Разработано и зарегистрировано в Государственной службе интеллектуальной собственности Украины программные средства для расчета температурных полей и компонент напряженно-деформированного состояния многослойных по осевой и радиальной координатах цилиндрических тел.

Ключевые слова: математическое моделирование, термочувствительный материал, температура, тепловое состояние, температурные напряжения, напряженно-деформированное состояние, слоистый цилиндр.

Rakocha I.I. Mathematical modeling of the stress-strain state of layered cylindrical bodies under complex high-temperature heating. – *On the rights of a manuscript.*

The thesis for a Technical Sciences Candidate's Degree on specialty 01.05.02 – mathematical modeling and computational methods. – Lviv Polytechnic National University of Ministry of Education and Science of Ukraine, Lviv, 2016.

On the example of the multilayered by axial and radial coordinate cylinders the formulation of the mathematical model and the method of determination of steady-state distributions of temperature and stresses are illustrated. The two of boundary conditions (constant temperature, heat flux, convective, radiative or convective-radiative conduction, heat removal through boiling and evaporation of a liquid) take places on boundary surfaces. It is assumed that within layers of cylinder there are evenly distributed heat sources. Between layers the conditions of perfect thermal contact are performed.

The influence of thermomechanical properties of materials of the cylinder components depending on the temperature, dimensionless Biot, Kirpichev and Pomerantsev criteria, use of linear condition of evaporation on the nature and level of temperature and stress distributions are investigated.

It was established, that negation of thermosensitivity of materials during temperature distribution calculations is totally acceptable, because the maximal differences between these distributions of thermosensitive and nonthermosensitive cylinders are not large. This information can be useful for express estimation of thermal state of multilayer bodies.

There are big quantitative and qualitative differences between stress-strain state distributions of thermosensitive and nonthermosensitive cylinders, if to negate dependences on the temperature of thermal and mechanical characteristics of materials. Thus, the use of nonthermosensitive characteristics does not show adequate corresponding distributions.

The heat outflow using boiling or evaporation of liquid was investigated. It was shown that these methods of heat control are effective because the temperature of body can be decreased up to 30%.

The software to calculate temperature fields and stress-strain state of the multilayered by axial and radial coordinate cylinders have been developed.

Keywords: mathematical modeling, thermosensitive material, temperature, thermal state, thermal stresses, stress-strain state, multilayered cylinder.