

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КРУТИЛЬНИХ КОЛИВАНЬ КАРКАСНОЇ МЕТАЛОКОНСТРУКЦІЇ

© Підгайний Т.Ю., 2007

Розроблено математичну модель і алгоритм розрахунку вільних крутильних коливань каркасної металоко́нструкції. Застосовано засоби континуалізації. Проаналізовано граничні умови. Досліджено вплив зсувної жорсткості з'єднувальної ґратки на власні частоти механічної системи.

The mathematical model and algorithm of calculation of free torsion oscillations of frameworks are developed. Tools of continuing are applied. Boundary conditions are analysed. Effect of a rigidity of shift of a connective lattice on intrinsic frequencies of mechanical system is investigated.

Постановка проблеми. У машинобудуванні та в будівельній індустрії широко застосовуються складні каркасні металоко́нструкції, наприклад, каркаси автобусів, бурові вишки, колони і ферми дорожніх мостів, підймальних кранів тощо. Під час експлуатації вони зазнають значних динамічних навантажень, що може призвести до резонансних явищ, або до виникнення надмірних деформацій і, навіть, до руйнування. Тому дослідження коливань таких металоко́нструкцій має істотне значення. Проте, динамічний аналіз складних механічних систем є утрудненим, через значну кількість стрижневих елементів і вузлів. Тому актуальним завданням є вдосконалення методів розрахунку складених стрижневих систем на основі застосування прийомів континуалізації.

Аналіз відомих досліджень і публікацій. Найпростішими континуалізованими моделями плоских або просторових ферм значної довжини є суцільні стрижні. Застосування розрахункових моделей, рух яких описується згідно з технічною теорією стрижнів, дає можливість проводити наближені динамічні розрахунки несівних ко́нструкцій підймально-транспортних машин [1], мостів [2] і, навіть, кузовів легкових автомобілів [3]. Точнішим представленням складеної ко́нструкції треба вважати балку С. Тимошенка, оскільки такий підхід дає можливість урахувати деформації зсуву, які залежать від жорсткісних властивостей з'єднувальної ґратки [4–7]. Тому теорію балок С. Тимошенка широко використовують у дослідженнях стійкості і поперечних коливань складених металоко́нструкцій. Однак методологія аналізу крутильних коливань довгомірних стрижневих систем опрацьована недостатньо. У праці [8] на основі континуалізації стрижневої системи запропонована математична модель крутильних коливань бурової вишки з урахуванням жорсткісних властивостей і з'єднувальних ґраток.

Постановка задачі. Як логічний розвиток згаданого підходу, у цій статті розробляється математична модель і алгоритми розрахунку крутильних коливань каркасної металоко́нструкції з урахуванням граничних умов на її кінцях.

Основний матеріал. Розглянемо елементарну ділянку металоко́нструкції, зображеної на рис. 1, де x – поздовжня вісь металоко́нструкції, ψ – кут повороту металоко́нструкції навколо поздовжньої осі. Основними деформівними елементами, які визначають крутильну жорсткість ко́нструкції, є балки і стрижневі ґратки. Малим деформаціям кручення ко́нструкції відповідають деформації кручення балок навколо власної осі та деформації їх згину у площині, дотичній до циліндра, твірними якого є балки. Враховуючи осьову симетрію основних елементів, позначено внутрішні сили лише для однієї балки, а також зображено стрижневу ґратку лише на одній грані. Кут

повороту балки дорівнює куту повороту конструкції ψ , прогин балки – w , крутний момент балки – T_0 , згинальний момент – M , поперечна сила – Q , сила зсуву стрижневої ґратки – F , довжина конструкції – l .

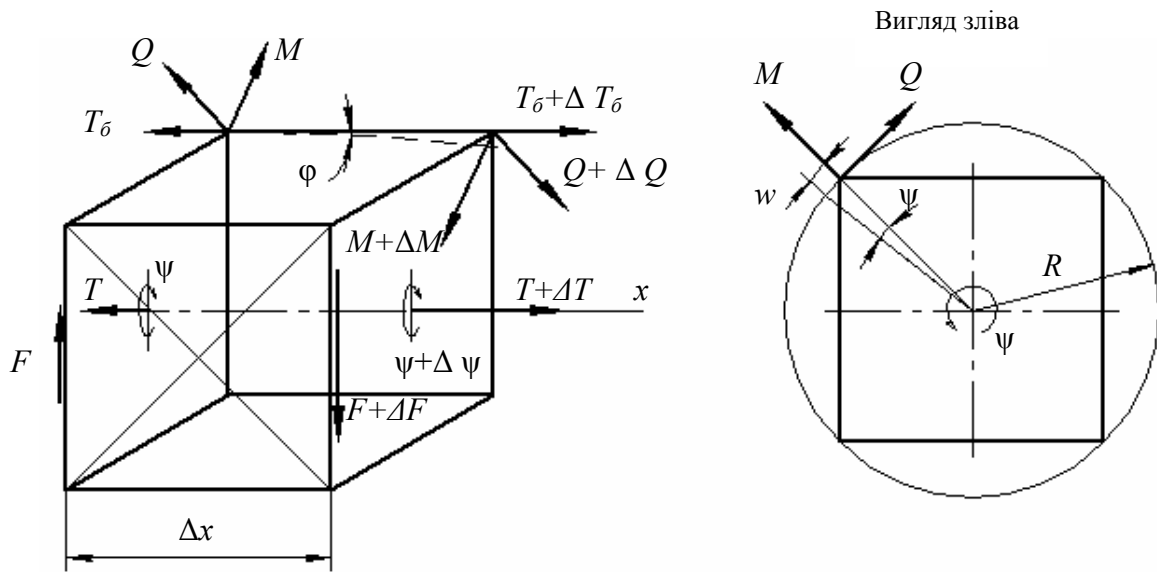


Рис. 1. Схема внутрішніх сил в елементарній ділянці металоконструкції

Введемо для зручності відносну координату

$$\xi = x/l. \quad (1)$$

Прогин балки w запишемо як:

$$w = \psi R, \quad (2)$$

де R – радіус циліндра, твірними якого є балки.

Кут згину балки визначається залежністю:

$$\varphi = \frac{1}{l} \frac{\partial w}{\partial \xi}. \quad (3)$$

Систему невідомих функцій утворюють переміщення $\psi(\xi)$ і $\varphi(\xi)$, а також внутрішні силові фактори $T(\xi)$ і $M(\xi)$, де T – крутний момент конструкції. Враховуючи (1), (2) і (3), отримуємо рівняння

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \frac{l}{R} \cdot \varphi. \quad (4)$$

Трансформуючи зображений елемент конструкції у диференціально малий, складаємо рівняння динаміки згідно з принципом Даламбера

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = \rho \cdot I_p \cdot l \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad (5)$$

де ρ – густина матеріалу балки, I_p – зведений полярний момент інерції поперечного перерізу конструкції, який визначається як відношення погонного моменту інерції маси металоконструкції щодо поздовжньої осі до густини матеріалу.

Взаємозв'язок згинального моменту в балці M і кута згину балки φ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = -\frac{l}{EI} \cdot M, \quad (6)$$

де E – модуль пружності матеріалу першого роду; I – осьовий момент інерції поперечного перерізу балки.

Крутний момент у поперечному перерізі конструкції

$$T = 4(T_{\sigma} + QR + FR / \sqrt{2}). \quad (7)$$

Внутрішні сили в балці подаємо за допомогою залежностей

$$T_{\sigma} = \frac{GI_{p\sigma}}{l} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi};$$

$$Q = \frac{1}{l} \frac{\partial M}{\partial \xi}, \quad (8)$$

де G – модуль пружності матеріалу другого роду; $I_{p\sigma}$ – полярний момент інерції поперечного перерізу балки.

Враховуючи (4), перетворимо перше співвідношення (8) до вигляду

$$T_{\sigma} = \frac{GI_{p\sigma}}{R} \cdot \varphi. \quad (9)$$

Сила зсуву ґратки

$$F = c_0 \cdot \gamma, \quad (10)$$

де c_0 – жорсткість ґратки, γ – кут зсуву.

Враховуючи геометричні властивості конструкції, знаходимо кут γ у вигляді

$$\gamma = \frac{R}{\sqrt{2} \cdot l} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi}. \quad (11)$$

Підставивши (11) у (10), і враховуючи (4), отримуємо

$$F = \frac{cl}{R} \varphi, \quad (12)$$

де

$$c = \frac{c_0 R}{\sqrt{2} l}. \quad (13)$$

Підставивши (9), друге співвідношення (8) і (12) у (7), отримаємо

$$\frac{\partial M}{\partial \xi} = T \frac{l}{4R} - \varphi \frac{ls}{R}, \quad (14)$$

де

$$s = \frac{GI_{p\sigma}}{R} + \frac{lc}{\sqrt{2}}. \quad (15)$$

Рівняння з частинними похідними (4), (5), (6) і (14) утворюють систему, яка описує крутильні коливання ділянки конструкції,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = \frac{l}{R} \cdot \varphi; \quad \frac{\partial T}{\partial \xi} = \rho \cdot I_p \cdot l \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = -\frac{l}{EI} \cdot M; \quad \frac{\partial M}{\partial \xi} = T \frac{l}{4R} - \varphi \frac{ls}{R}. \quad (16)$$

Розв'язавши цю систему рівнянь відносно Ψ , отримуємо рівняння крутильних коливань конструкції

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \frac{4Rs}{l^2 \rho I_p} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + \frac{4R^2 EI}{l^4 \rho I_p} \frac{\partial^4 \Psi}{\partial \xi^4} = 0. \quad (17)$$

Шукаємо розв'язок рівняння (17) методом Фур'є [9, 10] у вигляді

$$\Psi(\xi, t) = X(\xi) \Xi(t). \quad (18)$$

де X – функція, яка залежить лише від ξ , а Ξ – лише від t . Перепишемо (17) у вигляді

$$\frac{4Rs}{l^2 \rho I_p} \frac{X''}{X} - \frac{4R^2 EI}{l^4 \rho I_p} \frac{X^{IV}}{X} = \frac{\ddot{\Xi}}{\Xi}, \quad (19)$$

Тут ліва частина залежить лише від ξ , а права – лише від t . Для тотожного виконання цієї рівності (за будь-яких ξ і t) необхідно, щоб кожна з частин дорівнювала сталій величині, яку позначимо $-p^2$. Отримаємо два рівняння:

$$\frac{\ddot{\Xi}}{\Xi} = -p^2; \quad \frac{4Rs}{l^2 \rho I_p} \frac{X''}{X} - \frac{4R^2 EI}{l^4 \rho I_p} \frac{X^{IV}}{X} = -p^2, \quad (20)$$

де невідома величина p буде власною частотою коливань. Перше рівняння відображає коливний характер процесу, а друге визначає форму коливань і дозволяє знайти власні частоти. Перепишемо його у вигляді

$$X^{IV} - \alpha^2 X'' - k^4 X = 0, \quad (21)$$

де

$$k = \sqrt[4]{\frac{l^4 \rho I_p p^2}{4R^2 EI}}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{s}{REI}}. \quad (22)$$

Розв'язок рівняння (21) має вигляд:

$$X = X_1(\xi)X(0) + X_2(\xi)X'(0) + X_3(\xi)X''(0) + X_4(\xi)X'''(0). \quad (23)$$

Згідно з методом Крилова складаємо вираз

$$\begin{pmatrix} X(\xi) \\ X'(\xi) \\ X''(\xi) \\ X'''(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1(\xi) & X_2(\xi) & X_3(\xi) & X_4(\xi) \\ X_1'(\xi) & X_2'(\xi) & X_3'(\xi) & X_4'(\xi) \\ X_1''(\xi) & X_2''(\xi) & X_3''(\xi) & X_4''(\xi) \\ X_1'''(\xi) & X_2'''(\xi) & X_3'''(\xi) & X_4'''(\xi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X(0) \\ X'(0) \\ X''(0) \\ X'''(0) \end{pmatrix}, \quad (24)$$

де $X_i(\xi)$ – фундаментальна система інтегралів (функцій Крилова) [7].

Для визначення власних частот і форм необхідно врахувати граничні умови (при $\xi=0$ і $\xi=1$). Розглянемо такі випадки граничних умов.

1. У випадку жорстко защемленого краю (рис. 2) нулю дорівнюють кут повороту конструкції ψ і кут згину балки φ , тобто,

$$\psi(0) = 0, \quad \varphi(0) = 0. \quad (25)$$

З врахуванням першого рівняння (16) і позначення (18) перетворимо граничні умови (25) до вигляду

$$X = 0, \quad X' = 0. \quad (26)$$

2. У випадку пружно закріпленого краю з дисковим вантажем (рис. 3) крутний момент T дорівнює сумі реактивного моменту пружного закріплення і моменту інерції дискового вантажу:

$$T = c_{кр} \psi + J \ddot{\psi}, \quad (27)$$

де $c_{кр}$ – крутильна жорсткість опор, J – момент інерції дискового вантажу.

Поперечна сила дорівнює сумі реакції опори і силі інерції вантажу:

$$Q = c_{з2} w + ma. \quad (28)$$

де $c_{з2}$ – згинна жорсткість опор, a – лінійне пришвидшення.

Враховуючи (16), (18), другу рівність (8) і (2), перетворимо граничні умови (27) і (28) до вигляду

$$\frac{4R^2 EI}{l^3} X''' - \frac{4Rs}{l} X' + (c_{кр} - Jp^2) X = 0, \quad (29)$$

$$\frac{EI}{l^2} X''' + (c_{з2} - mp^2) X = 0$$

Всі інші варіанти закріплення є частковими випадками другого загального випадку при $J=0$, $m=0$ і (або) $c_{кр}=0$, $c_{з2}=0$.

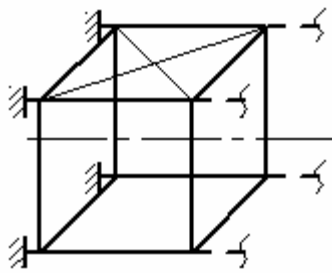


Рис. 2. Схема жорсткого закріплення

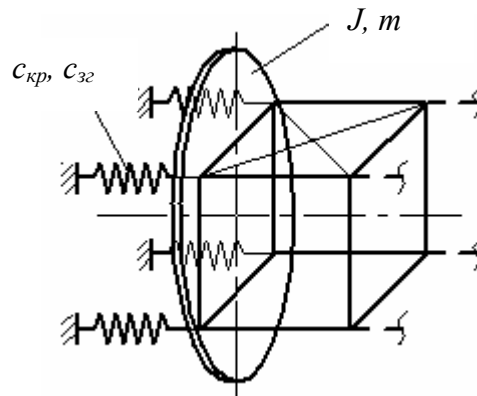


Рис. 3. Схема пружного закріплення з дисковим вантажем

Для прикладу визначимо нижчі власні частоти каркасної конструкції розміром 1×1×10 м. з двома защемленими кінцями, у якій балками є труби 40×40мм., а забудова ґратки з труб 40×20 мм по ГОСТ [11, 12] (рис. 4).

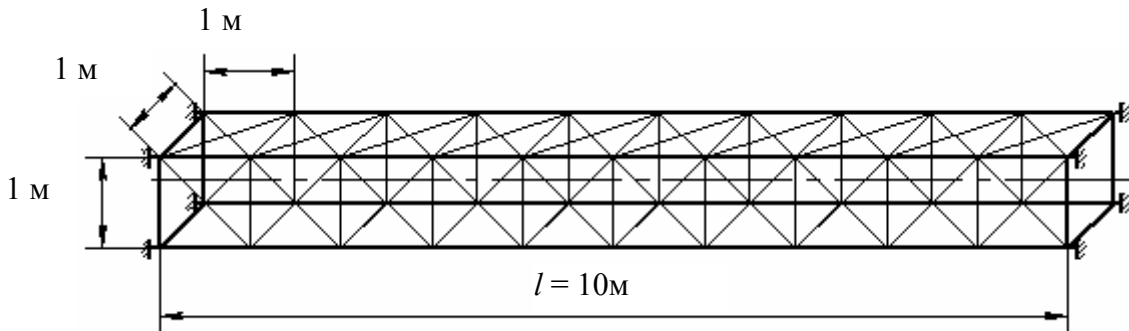


Рис. 4. Каркасна металоконструкція

Для того, щоб сталі коефіцієнти розв'язку диференціального рівняння не дорівнювали нулю, прирівнюємо до нуля визначник, отриманий після підстановки (26) і $\xi=0, \xi=1$ у (24)

$$\begin{vmatrix} X_3(\xi) & X_4(\xi) \\ X'_3(\xi) & X'_4(\xi) \end{vmatrix} = 0, \quad (30)$$

визначивши який, отримаємо трансцендентне рівняння для власної частоти:

$$2(1 - \cos(\lambda_1)\text{ch}(\lambda_2)) + (\lambda_2/\lambda_1 - \lambda_1/\lambda_2)\sin(\lambda_1)\text{sh}(\lambda_2) = 0, \quad (31)$$

де

$$\lambda_1 = \sqrt{-\frac{\alpha^2}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^4}{4} + k^4}}, \quad \lambda_2 = \sqrt{-\frac{\alpha^2}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^4}{4} + k^4}} \quad (32)$$

Розв'язавши рівняння (31) числовим методом, отримано значення двох нижчих власних частот і їх залежність від жорсткості ґратки c_0 (рис. 5).

Аналізуючи отримані залежності, маємо можливість вибрати необхідну жорсткість ґратки, враховуючи умови забезпечення допустимої власної частоти, оскільки інші геометричні параметри, які впливають на власну частоту, є, зазвичай, в практиці під час проектування заданими.

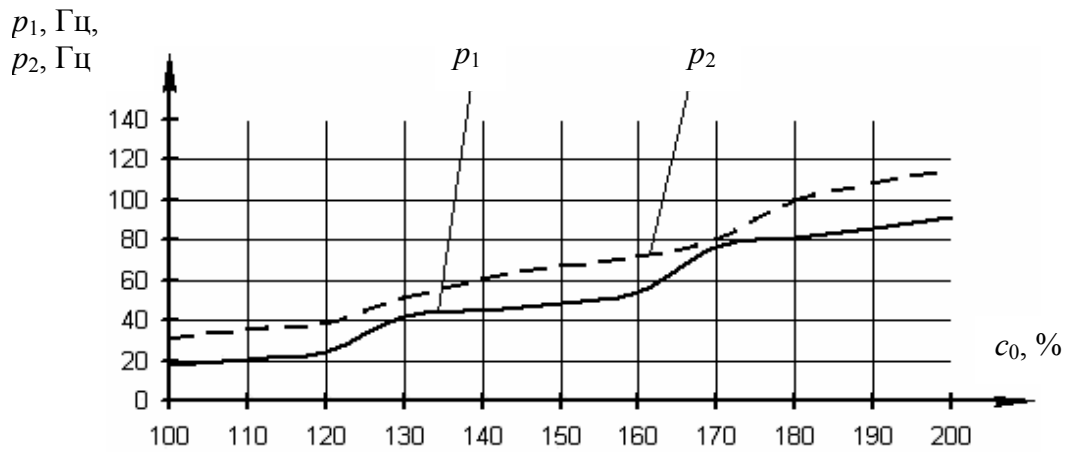


Рис. 5. Залежність нижчих власних частот від жорсткості гратки c_0

Висновки. Отже, запропонована математична модель дає можливість визначати нижчі власні частоти і форми каркасних металоконструкцій на основі простого алгоритму, який зводиться до розв'язування трансцендентного рівняння. Це значно спрощує розрахунок на коливання складених механічних систем.

Побудовану модель можна використовувати в інженерній практиці з метою усунення резонансних режимів роботи несівних металоконструкцій, зменшення їх матеріаломісткості та підвищення надійності.

1. *Вибрації в техніці: Справочник: В 6 т. – М.: Машиностроение, 1978–1981. Т. 3: Колебания машин, конструкций и их элементов. – 1980. – 544 с.*
2. *Строительная механика. Стержневые системы: Учеб. для вузов / А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, Б.Я. Лащеников, Н.Н. Шапошников; Под. ред. А.Ф. Смирнова. – М.: Стройиздат, 1981. – 512 с.*
3. Харченко Є.В., Гудз С.Г. *Визначення нижчих власних частот згинно-зсувних коливань кузова автомобіля із застосуванням континуалізованих розрахункових моделей // International symposium on engineering design and scientific research of automotive vehicles.*
4. Филипов А.П. *Колебания деформируемых систем. – М.: Машиностроение, 1970. – 732 с.*
5. Бидерман В. Л. *Теория механических колебаний. – М.: Высш. шк., 1980. – 408 с.*
6. Ржаницын А.Р. *Строительная механика. – М.: Высш. шк., 1982. – 400 с.*
7. Харченко Є.В. *Динамические процессы буровых установок. – Львов: Світ, 1991. – 176 с.*
8. Харченко Є.В. *Континуально-дискретна математична модель бурової установки // Машинознавство: Зб. наук. пр. Нац. ун-ту “Львівська політехніка”. – 1997. – № 1.*
9. Василенко М.В., Алексейчук О.М. *Теорія коливань і стійкості руху: Підручник. – К.: Вища шк., 2004. – 525 с.*
10. Пановко Я. Г. *Основы прикладной теории колебаний и удара. – Л.: Машиностроение, 1976. – 320 с.*
11. ГОСТ 8639-82. *Трубы сталеви квадратні.*
12. ГОСТ 8645-68. *Трубы сталеви прямокутні.*