

О.В. Гаврильченко, О.С. Ланець, В.М. Гурський
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра автоматизації та комплексної механізації машинобудівної промисловості

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН СТРИЖНЯ ДВОМАСОВОЇ КОЛИВАЛЬНОЇ СИСТЕМИ ВІБРАЦІЙНОЇ СИНФАЗНОЇ МАШИНИ З ЕЛЕКТРОМАГНІТНИМ ПРИВОДОМ

© Гаврильченко О.В., Ланець О.С., Гурський В.М., 2007

Наведено методику визначення жорсткісних параметрів стрижня двомасової коливальної системи з чотирма ступенями вільності методом скінченних елементів (МСЕ). Наведено деформований стан стрижня в умовах навантаження, отриманий за допомогою МСЕ та методом початкових параметрів. Побудовані епюри згинальних моментів, поперечних сил та напружень по довжині стрижня.

This article describes the method of determination of stiffness parameters of a rod of the double-mass oscillating system with four degrees of liberty of a finite element method (FEM). Deformation states of a rod in requirements of a loading with the help of a finite element method and a method of initial parameters are reduced. Diagrams of the bending moments, transversal forces and tensions on length of a rod are built.

Вступ. Механічні коливальні системи вібраційних машин з електромагнітним приводом налаштовуються на резонансний чи білярезонансний режим роботи. Серед найпоширеніших динамічних схем вібраційних машин такого типу є двомасові, які мають в наявності одну основну (робочу) пружну систему. Проте технологічні можливості таких динамічних схем обмежені для створення великогабаритних машин з огляду на незадовільні показники стабільності в роботі під час завантаження робочого органа. Перспективнішими з цієї точки зору є тримасові вібраційні машини, що налаштовуються на міжрезонансний режим роботи з високою ефективністю використання змушувальної сили [1]. На теперішній час пропонується принцип розрахунку багатомасових (тримасових) динамічних схем вібромашин на основі теорії синфазних коливань [2]. Створені тримасові синфазні машини використовують як великогабаритні машини для ущільнення бетонних сумішей. Все це свідчить про надзвичайно широкі технологічні можливості тримасових динамічних схем.

Постановка проблеми. На рис. 1 показана тримасова синфазна вібраційна машина з коловим електромагнітним приводом та циркуляційним рухом завантаження. Умови резонансної роботи тримасової динамічної схеми з використанням ефекту “нульової жорсткості” [2] визначаються двомасовою коливальною системою з вертикальною пружною системою у вигляді одного стрижня, розташованого вздовж осі вібромашини. Метою статті буде отримання форми деформації та аналіз напруженого стану стрижня двомасової коливальної системи з чотирма ступенями вільності.

Постановка задачі. За допомогою методів МСЕ та початкових параметрів необхідно знайти вимушені коливання двомасової системи з чотирма ступенями вільності та побудувати епюри згинальних моментів, поперечних сил та напружень по довжині стрижня.

Двомасова динамічна схема. Інерційні параметри коливальних тіл відповідно: маси m_1 і m_2 та моменти інерції J_1 та J_2 щодо горизонтальних осей, що проходять через їх центри мас O_1 і O_2 . Силового впливу зазнає друга коливальна маса (робочий орган) зусиллям $p(t)$ та згинальним моментом $m(t)$. Від неї кінематично збудується коливальна маса m_1 через пружну систему у вигляді одного стрижня завдовжки L жорсткості EJ (рис. 2). У разі згину такої пружної системи,

коливальні маси здійснюватимуть рухи за двома узагальненими координатами, а саме – поступальні та кутові переміщення.

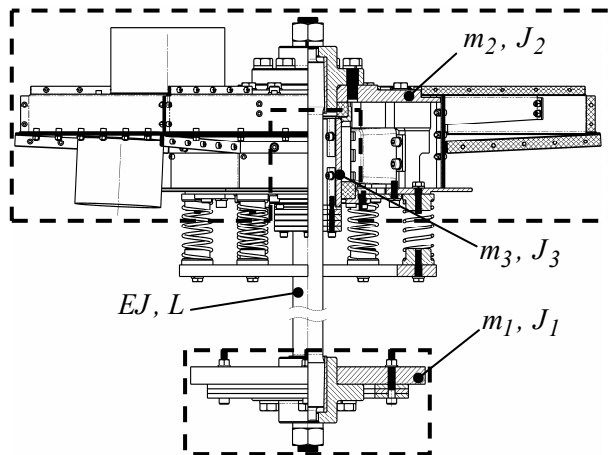


Рис. 1. Тримасова вібраційна машина

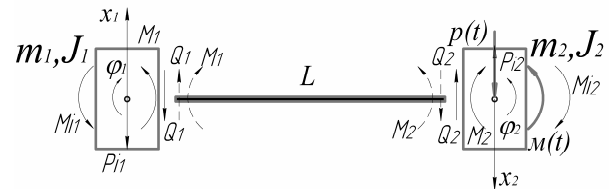


Рис. 2. Сили, що діють на двомасову коливальну систему

Для розрахунку стрижня, що працює на згин, розглянемо динамічну модель руху двомасової коливальної системи з чотирма ступенями вільності (рис. 2) за відносними узагальненими координатами x_1 , φ_1 , x_2 , φ_2 , де x_1 – миттєве переміщення вздовж осі x центра мас O_1 маси m_1 ; φ_1 – миттєвий кут повороту маси m_1 навколо власного центра мас; x_2 – миттєве переміщення вздовж осі x центра мас O_2

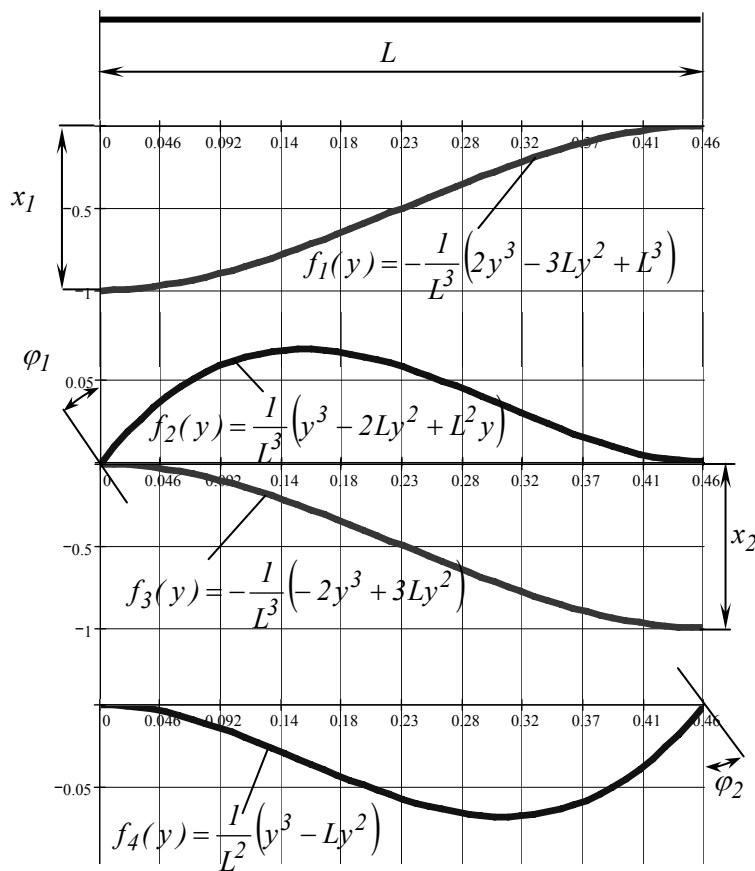


Рис. 3. Прогини стрижня у разі одиничних переміщень опорних вузлів

маси m_2 внаслідок силового збурення $p(t) = P \sin \omega t$; φ_2 – миттєвий кут повороту маси m_2 навколо власного центра мас O_2 , зумовлений дією згинального моменту $m(t) = M \sin \omega t$.

Умова рівноваги за принципом Даламбера:

$$\begin{cases} P_{i1} + Q_1 = 0, \\ M_{i1} + M_1 = 0, \\ P_{i2} + Q_2 = p(t), \\ M_{i2} + M_2 = m(t), \end{cases} \quad (1)$$

де P_{i1} , P_{i2} , M_{i1} , M_{i2} – сили та моменти інерції, що діють на коливальні маси; Q_1 , Q_2 , M_1 , M_2 – поперечні сили та згинальні моменти в крайніх місцях перерізу стрижня.

Форми та функції деформацій при одиничних переміщеннях опор стрижня показані на рис. 3. Із їх врахуванням форму деформації стрижня можна виразити через його вузлові переміщення:

$$w(y) = f_1(y)x_1 + f_2(y)\varphi_1 + f_3(y)x_2 + f_4(y)\varphi_2. \quad (2)$$

Згідно з МСЕ [3, 4], запишемо вирази внутрішніх сил, що передаються на вузли стрижня:

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \varphi_1 \\ x_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Коефіцієнти жорсткості під час згину визначаються [3]:

$$c_{ij} = \int_0^L EJ f_i''(y) f_j''(y) dy. \quad (4)$$

Матриця жорсткості стрижня, отримана за допомогою (4), коли як фундаментальні функції форми використовуються вирази з рис. 3, має вигляд:

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{pmatrix} = EJ \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} & \frac{-12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} \\ \frac{-6}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ \frac{-12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{-6}{L^2} & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \varphi_1 \\ x_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Система рівнянь (1) у матрицевому вигляді

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \varphi_1 \\ x_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P \\ M \end{bmatrix}. \quad (6)$$

При інерційних параметрах коливальних мас $m_1 = 52,48 \text{ кг}$, $J_1 = 0,53 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $m_2 = 116,67 \text{ кг}$, $J_2 = 3,59 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ та довжині і діаметрі стрижня $L = 0,46 \text{ м}$, $d = 46,787 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, значення амплітуд коливань за лінійними та кутовими координатами, коли $P = 300 \text{ Н}$ і $M = 15,366 \text{ Н} \cdot \text{м}$ на частоті збурення $\omega = 314 \text{ рад/с}$ становлять $x_1 = -0,00018 \text{ м}$, $x_2 = 0,000056 \text{ м}$, $\varphi_1 = -0,0017 \text{ рад}$, $\varphi_2 = 0,0014 \text{ рад}$ (рис. 4 та рис. 5).

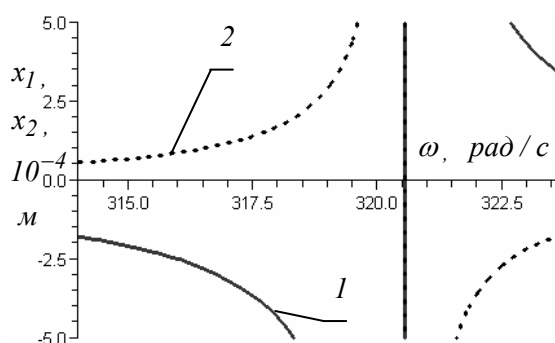


Рис. 4. АЧХ поступального руху двомасової коливальної системи за координатами x_1 (1) та x_2 (2)

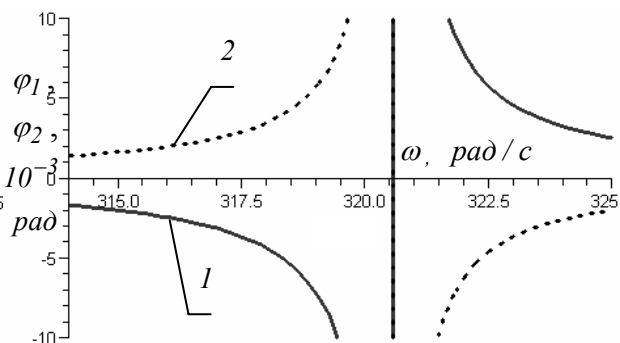


Рис. 5. АЧХ обертального руху двомасової коливальної системи за координатами φ_1 (1) та φ_2 (2)

Знаючи вертикальні переміщення вузлів та їхні кути повороту, підставляємо ці значення у вираз (2) та будуємо форму прогину $w(x)$ (рис. 6) стрижня, куту повороту $\Theta(x) = \frac{dw(x)}{dx}$ (рис. 7),

епюри згинальних моментів $M(x) = EJ \frac{d^2 w(x)}{dx^2}$ (рис. 8), поперечних сил $Q(x) = EJ \frac{d^3 w(x)}{dx^3}$ (рис. 9)

та напружень $\sigma(x) = \frac{M(x)}{W}$ (рис. 10) по довжині стрижня.

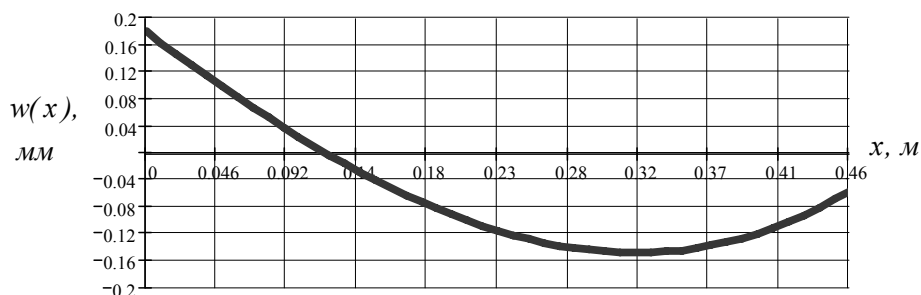


Рис. 6. Прогин стрижня

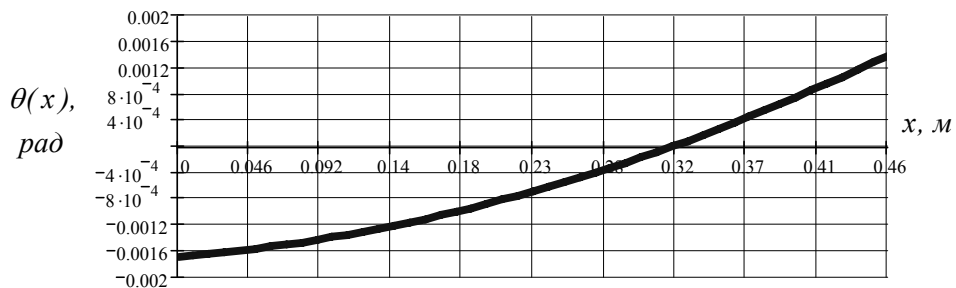


Рис. 7. Кут повороту

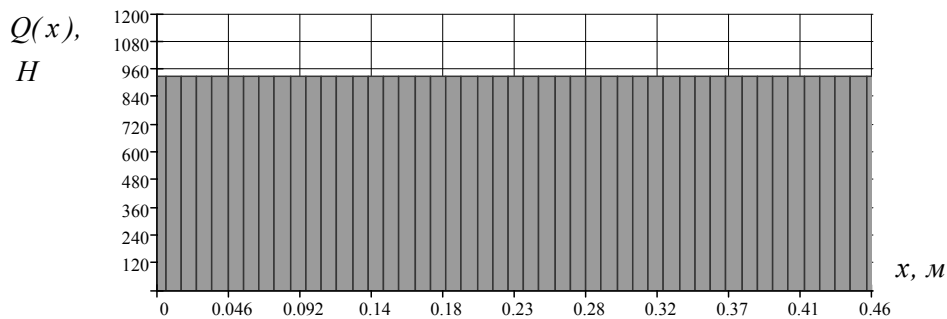


Рис. 8. Епюра поперечних сил

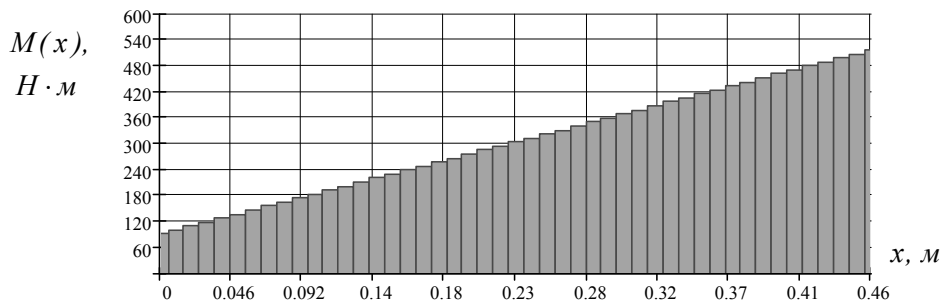


Рис. 9. Епюра згинальних моментів

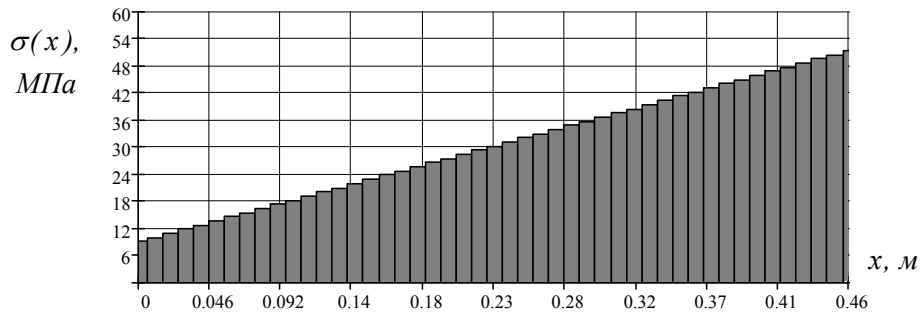


Рис. 10. Напруження по довжині стрижня

Метод початкових параметрів. Знайдемо вимушені коливання двомасової системи (рис. 11), що спричинені граничними зусиллям P та моментом M , що діють на другу коливальну масу. Для цього скористаємося методом початкових параметрів [5, 6], що використовується для визначення власних частот і форм коливань балок з кількома ділянками.

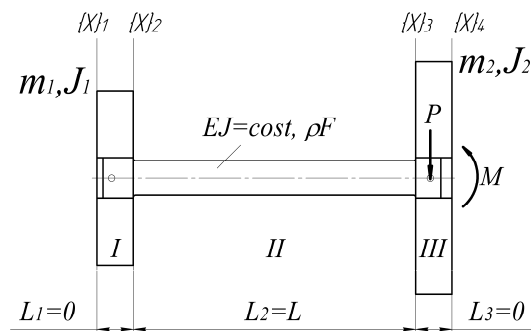


Рис. 11. Двомасова коливальна система

Амплітудний вектор стану довільного перерізу балки визначається чотирма компонентами – прогином $W(x)$, кутом повороту $\Theta(x)$, згинальним моментом $M(x)$ і поперечною силою $Q(x)$. Формулу переходу від початку до кінця ділянки запишемо у вигляді:

$$X_4 = M_{43}M_{32}M_{21}X_1, \quad (7)$$

де M_{43} , M_{32} , M_{21} – матриці переходу відповідно через ділянки балки III, II та I; X_4 , X_1 – вектори (стовпці) стану в крайньому правому та лівому перерізах.

Матриця переходу M_{43} через ділянку балки III, де зосереджена проміжна маса m_2 з моментом інерції J_2 :

$$M_{43} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -J_2\omega^2 & 1 & 0 \\ m_2\omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Матриця переходу M_{32} через ділянку стрижня II довжиною L , жорсткістю $EJ = const$ з врахуванням його маси (ρFL) визначається:

$$M_{32} = \begin{bmatrix} K_1(kL) & \frac{1}{k}K_2(kL) & \frac{1}{k^2}K_3(kL) & \frac{1}{k^3}K_4(kL) \\ kK_4(kL) & K_1(kL) & \frac{1}{k}K_2(kL) & \frac{1}{k^2}K_3(kL) \\ EJk^2K_3(kL) & EJkK_4(kL) & K_1(kL) & \frac{1}{k}K_2(kL) \\ EJk^3K_2(kL) & EJk^2K_3(kL) & kK_4(kL) & K_1(kL) \end{bmatrix}, \quad (9)$$

де $K_1(kL)$, $K_2(kL)$, $K_3(kL)$, $K_4(kL)$ – функції Кривої, що є такими комбінаціями частинних розв’язків: $K_{1,3} = \frac{chkx \pm \cos kx}{2}$, $K_{2,4} = \frac{shkx \pm \sin kx}{2}$.

Матриця переходу M_{21} через ділянку балки I , де зосереджена маса m_1 з моментом інерції J_1 :

$$M_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -J_1\omega^2 & 1 & 0 \\ m_1\omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Перехід від правого до лівого кінця стрижня запишемо у вигляді:

$$\begin{Bmatrix} W_4 \\ \Theta_4 \\ M_4 \\ Q_4 \end{Bmatrix} = M_{43} M_{32} M_{21} \begin{Bmatrix} W_1 \\ \Theta_1 \\ M_1 \\ Q_1 \end{Bmatrix}. \quad (11)$$

Записавши у рівняння (11) граничні умови $M_1 = Q_1 = 0$ на лівому вільному кінці, отримаємо вектор стану X_4 в крайньому правому положенні:

$$\begin{Bmatrix} W_4 \\ \Theta_4 \\ M_4 \\ Q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left[K_1(kL) + \frac{K_4(kL)m_2\omega^2}{k^3 EJ} \right] \cdot W_1 + \left[\frac{K_2(kL)}{k} - \frac{K_3(kL)J_2\omega^2}{k^2 EJ} \right] \cdot \Theta_1 \\ \left[kK_4(kL) + \frac{K_3(kL)m_2\omega^2}{k^2 EJ} \right] \cdot W_1 + \left[K_1(kL) - \frac{K_2(kL)J_2\omega^2}{kJ} \right] \cdot \Theta_1 \\ \left[-J_1\omega^2 kK_4(kL) + k^2 EJK_3(kL) + \left(-\frac{K_3(kL)J_1\omega^2}{k^2 EJ} + \frac{K_2(kL)}{k} \right) m_2\omega^2 \right] \cdot W_1 + \\ + \left[-J_1\omega^2 K_1(kL) + kEJK_4(kL) - \left(-\frac{K_2(kL)J_1\omega^2}{kJ} + K_1(kL) \right) J_2\omega^2 \right] \cdot \Theta_1 \\ \left[m_1\omega^2 K_1(kL) + k^3 EJK_2(kL) + \left(\frac{K_4(kL)m_1\omega^2}{k^3 EJ} + K_1(kL) \right) m_2\omega^2 \right] \cdot W_1 + \\ + \left[\frac{K_2(kL)m_1\omega^2}{k} + k^2 EJK_3(kL) - \left(\frac{K_3(kL)m_1\omega^2}{k^2 EJ} + kK_4(kL) \right) J_2\omega^2 \right] \cdot \Theta_1 \end{Bmatrix}. \quad (12)$$

де значення коефіцієнта k визначаємо за формулою

$$k = \sqrt{\frac{\omega}{\frac{EJ}{\rho F}}}. \quad (13)$$

Умови на правому кінці стрижня $M_4 = M$; $Q_4 = P$ зумовлюють систему рівнянь:

$$\begin{aligned} & \left[-J_1\omega^2 kK_4(kL) + k^2 EJK_3(kL) + \left(-\frac{K_3(kL)J_1\omega^2}{k^2 EJ} + \frac{K_2(kL)}{k} \right) m_2\omega^2 \right] \cdot W_1 + \\ & + \left[-J_1\omega^2 K_1(kL) + kEJK_4(kL) - \left(-\frac{K_2(kL)J_1\omega^2}{kJ} + K_1(kL) \right) J_2\omega^2 \right] \cdot \Theta_1 = M; \end{aligned}$$

$$\left[m_1 \omega^2 K_1(kL) + k^3 EJK_2(kL) + \left(\frac{K_4(kL)m_1 \omega^2}{k^3 EJ} + K_1(kL) \right) m_2 \omega^2 \right] \cdot W_1 +$$

$$+ \left[\frac{K_2(kL)m_1 \omega^2}{k} + k^2 EJK_3(kL) - \left(\frac{K_3(kL)m_1 \omega^2}{k^2 EJ} + kK_4(kL) \right) J_2 \omega^2 \right] \cdot \Theta_1 = P,$$

які дають можливість виразити два інших початкових параметри, а саме W_1 та Θ_1 . Підставивши їх у перші два рівняння системи (12), отримаємо W_4 та Θ_4 .

Рівняння форм коливань мають вигляд

$$W(x) = \left[K_1(kx) + \frac{K_4(kx)m_2 \omega^2}{k^3 EJ} \right] \cdot W_1 + \left[\frac{K_2(kx)}{k} - \frac{K_3(kx)J_2 \omega^2}{k^2 EJ} \right] \cdot \Theta_1;$$

$$\Theta(x) = \left[kK_4(kx) + \frac{K_3(kx)m_2 \omega^2}{k^2 EJ} \right] \cdot W_1 + \left[K_1(kx) - \frac{K_2(kx)J_2 \omega^2}{kEJ} \right] \cdot \Theta_1.$$

і графічно зображені на рис. 6, 7.

Висновки. Викладено методики побудови вимушених форм деформації стрижня у двомасовій коливальній системі вібраційної машини з чотирма ступенями вільності методом МСЕ та початкових параметрів. Інтегруванням форм деформації отримано епюри згинальних моментів, поперечних сил та напружень по довжині стрижня.

1. Вайсберг Л.А. Проектирование и расчет вибрационных грохотов. – М.: Недра, 1986. – 144 с.
2. Ланець О.С. Обґрунтування необхідності створення багатомасових вібраційних машин з електромагнітним приводом на основі теорії синфазних коливань // Вісн. Нац. ун-ту "Львівська політехніка". – 2006. – № 560. – С. 59–70.
3. Клаф Р., Пензиен Дж. Динамика сооружений / Пер. с англ. – М.: Стройиздат, 1979. – 320 с.
4. Метод конечных элементов: Учеб. пособие для вузов / Под ред. П.М. Варвака. – К.: Вища шк., 1981. – 176 с.
5. Бабаков И.М. Теория колебаний. – М.: Наука, 1968.
6. Василенко М.В., Алексейчук О.М. Теория колебаний і стійкості руху: Підручник. – К.: Вища шк., 2004. – 525 с.