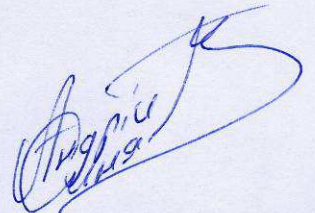


Національна академія наук України
Фізико-механічний інститут ім. Г.В.Карпенка

На правах рукопису

СИНЯВСЬКИЙ АНДРІЙ ТАДЕЙОВИЧ



УДК 537.874

**МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ДЛЯ ПІДВИЩЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ ОЦІНКИ
ПАРАМЕТРІВ НЕОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩ ЗА ВІДОМИМ
РОЗПОДІЛОМ РОЗСІЯНОГО ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ**

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

Дисертація на здобуття наукового ступеня
доктора технічних наук



Науковий консультант
Назарчук Зіновій Теодорович,
доктор фізико-математичних наук, професор

Львів - 2016

ЗМІСТ

Вступ.....	6
РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ЗА ТЕМОЮ ТА ВИБІР НАПРЯМКІВ ДОСЛІДЖЕНЬ	24
1.1. Процес розсіювання електромагнітних хвиль як джерело інформації про неоднорідні середовища	25
1.2. Моделі розповсюдження електромагнітного поля в неоднорідних середовищах.....	29
1.3. Огляд методів розв’язання одновимірних обернених задач розсіювання	52
1.4. Огляд методів розв’язання багатовимірних обернених задач розсіювання...	65
1.5. Висновки до першого розділу	79
РОЗДІЛ 2. МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ ОДНОВИМІРНИХ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ РОЗСПІЮВАННЯ.....	82
2.1. Рівняння типу Шредінгера та система типу Дірака як модель розсіювання електромагнітних хвиль в одновимірному випадку	86
2.2. Розв’язки Йоста як модель спостереження в оберненій задачі розсіювання	95
2.3. Розв’язки одновимірної оберненої задачі розсіювання.....	115
2.4. Висновки до другого розділу.....	139
РОЗДІЛ 3. ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ СЕРЕДОВИЩ ЧЕРЕЗ РОЗВ’ЯЗОК ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ РОЗСПІЮВАННЯ ДЛЯ ХВИЛЬОВИХ РІВНЯНЬ НА ПІВОСІ	143
3.1. Визначення параметрів плоскошаруватої структури на ідеально провідному екрані	145

3.2. Наближений розв'язок оберненої задачі розсіювання для шаруватої структури на плоскому екрані	158
3.3. Розв'язок оберненої спектральної задачі для сферично-шаруватої проникної структури за відомими трансмісійними власними значеннями	165
3.4. Розв'язок оберненої задачі розсіювання за результатом двох експериментів	175
3.5. Висновки до третього розділу	178

РОЗДІЛ 4. РОЗВ'ЯЗАННЯ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ РОЗСІЮВАННЯ ДЛЯ ШАРУВАТОГО ДІЕЛЕКТРИКА ЗА АБСОЛЮТНИМ ЗНАЧЕННЯМ ВИМІРЯНИХ ПАРАМЕТРІВ.....	182
4.1. Розв'язання оберненої задачі розсіювання за модулем коефіцієнта відбиття плоскої хвилі	184
4.2. Забезпечення єдиності розв'язку одновимірної оберненої задачі проходження та розсіювання плоских хвиль шляхом її перевизначення	199
4.3. Виявлення локальних підповерхневих неоднорідностей у діелектричних матеріалах радіохвильовим надвисокочастотним методом....	205
4.4. Висновки до четвертого розділу.....	220

РОЗДІЛ 5. ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ ПЛОСКОШАРУВАТИХ СТРУКТУР ЗА ЗАДАНОЮ ДІАГРАМОЮ РОЗСІЮВАННЯ НА ФІКСОВАНІЙ ЧАСТОТІ.....	222
5.1. Розподіл розсіяного поля над плоско-неоднорідним діелектриком із неперервною функцією діелектричної проникності	222
5.2. Розв'язок оберненої задачі розсіювання за заданою кутовою залежністю коефіцієнта відбиття	230
5.3. Розв'язок оберненої задачі розсіювання для частково відомих даних про розриви шуканої функції	238
5.4. Результати числового розв'язання задачі синтезу багат шарових структур	243
5.5. Висновки до п'ятого розділу	247

РОЗДІЛ 6. ОЦІНЮВАННЯ ГРАНИЦІ КОНТРАСТНИХ РОЗСІЮВАЧІВ У ДВОВИМІРНОМУ ВИПАДКУ.....	249
6.1. Узагальнений підхід до розв’язання оберненої задачі розсіювання	249
6.2. Модель спостереження та побудова індикаторних функцій для розв’язку обернених задач розсіювання	253
6.3. Метод ідентифікації границі ідеально провідного розсіювача за відомим розподілом розсіяного поля на фіксованій частоті.....	256
6.4. Оцінювання границі діелектричного розсіювача за відомим розподілом розсіяного поля на фіксованій частоті	278
6.5. Оцінювання границі проникного розсіювача для моностатично заданих вихідних даних на множині частот	291
6.6. Оцінювання границі ідеально-проникного розсіювача для моностатично заданих вихідних даних на множині частот.....	296
6.7. Висновки до шостого розділу.....	297
 РОЗДІЛ 7. ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ ДИСКРЕТНИХ СКІНЧЕНОВИМІРНИХ МОДЕЛЕЙ РОЗСІЮВАННЯ.....	 301
7.1. Узагальнене статистичне формулювання та розв’язки задачі оцінювання	302
7.2. Приведення обернених задач розсіювання до задачі оцінювання вектора невідомих параметрів.....	308
7.3. Оцінювання порядку моделі розсіювання	321
7.4. Аналітичний розв’язок задачі оцінювання параметрів для двопрменевої моделі розповсюдження хвилі	324
7.5. Теоретична та експериментальна перевірка методу оцінювання параметрів джерела над розсіювальною поверхнею.....	331
7.6. Висновки до сьомого розділу	336

РОЗДІЛ 8. ПОГОДЖЕННЯ ЗОБРАЖЕНЬ ТА РЕЄСТРАЦІЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ У ТРИВИМІРНОМУ ПРОСТОРИ	339
8.1. Високочастотне наближення хвильових процесів у моделі формування оптичних зображень	339
8.2. Задача погодження зображень та встановлення оптичного потоку	341
8.3. Реєстрація 3D переміщень поверхні.....	358
8.4. Висновки до восьмого розділу	366
 Висновки.....	 369
 Перелік посилань	 374
 Додаток А. Властивості коефіцієнтів Йоста для багатошарової структури	 405
 Додаток Б. Методика експериментального визначення параметрів однорідного діелектричного шару за заданим абсолютним значенням коефіцієнта відбиття або коефіцієнта проходження	 409
 Додаток В. Оцінювання параметрів перших двох поверхонь розділу в шаруватій структурі	 412
 Додаток Г. Електромагнітне поле від елементарних джерел над плоско-неоднорідним середовищем.....	 418
 Додаток Д. Акти впровадження	 429

ВСТУП

Актуальність теми. Для вирішення ряду практичних і наукових задач, пов'язаних з ідентифікацією дефектів та пошкоджень у матеріалах, встановленням стану конструкцій, виявленням неоднорідностей в оптично-непроникних середовищах та візуалізацією їх структури необхідно обробляти інформацію отриману дистанційно, що передбачає оцінювання матеріальних параметрів об'єктів дослідження та встановлення їх просторового розподілу. Такі задачі особливо актуальні для неруйнівного контролю, технічної діагностики конструкцій, геолокації та дистанційного зондування. Взаємодія електромагнітного поля з неоднорідним середовищем визначає складну функціональну залежність між електрофізичними параметрами та даними, що доступні для спостереження при вимірюваннях. Оскільки процес розсіювання електромагнітних хвиль описується рівняннями Максвелла, а електрофізичні параметри середовища, де розповсюджуються хвилі, є змінними коефіцієнтами цих рівнянь, то процедуру опрацювання зібраної інформації про розподіл розсіяного поля з метою оцінювання невідомих параметрів можна трактувати як розв'язання оберненої задачі розсіювання для рівнянь Максвелла. В обернених задачах розсіювання вихідними даними вважають характеристики, що описують результат процесу розсіювання – розподіл розсіяного електромагнітного поля, яке реєструють приймачі антени. Зауважмо, що при оцінюванні параметрів неоднорідних середовищ часто є відомою апріорна інформація про об'єкт дослідження. Тоді знаходження розв'язку оберненої задачі вдається спростити. До таких випадків можна віднести задачі аналізу плоско-шаруватих структур, які мають чимале прикладне значення.

До фундаментальних праць теорії обернених задач розсіювання слід віднести роботи українських учених: Ю.Березанського, Р.Гриніва, М.Крейна, В.Лянце, В.Марченка, Я.Микитюка, Л.Нижника, В.Півоварчика, Р.Хапка, Є.Хрусова, Д.Шепельського. Прикладні аспекти теорії обернених задач розсіювання вивчали українські вчені: Д.Батраков, М.Войтович, В.Волосюк, О.Дробахін, В.Сугак,

О.Сухаревський. Варто також відмітити істотний внесок у розвиток теорії обернених задач розсіювання таких учених, як Г.Белкін, А.Благовещенській, В.Буров, А.Бухгейм, І.Гельфанд, П.Гріневіч, В.Захаров, В.Ісаков, М.Клібанов, М.Лаврентьєв, Б.Левітан, Р.Новіков, А.Рамм, В.Романов, А.Тіхонов, А.Тіхонравов. Л.Фаддєєв, Г.Хенкін. Вагомий доробок у теорію розв'язання одновимірних задач розсіювання належить також закордонним ученим: К.Акі, Т.Актосуну, Г.Баланісу, Г.Гладвелу, П.Гуппілауду, М.Джауленту, І.Каю, Г.Крістенссону, Р.Круєгеру, Г.Мозесу. Методи розв'язання багатовимірних обернених задач розсіювання розвивали М.Абловіц, А.Кірш, Р.Клейман, Д.Колтон, Р.Кресс, К.Лангерберг, П.Монк, А.Нахман, Р.Ньютон, Л.Паіварінта, Т.Проссер, Ракеш, Дж.Роузе, П.Сабатьє, В.Саймс, Дж.Сильвестр, Х.Хаддар, Ф.Цаконі, М.Чені, К.Шадан. Розвинуті у даній роботі методи оцінювання параметрів неоднорідних середовищ за розсіяним полем базуються на доробку згаданих вище учених.

На відміну від математичної теорії обернених задач розсіювання, яка спрямована головню на доведення теорем про існування та єдиність розв'язку, важливе прикладне значення має створення таких обчислювальних процедур, які дозволять знайти параметри розсіювачів за реальних умов проведення вимірювань. На жаль, наразі не існує загального підходу до знаходження розв'язків обернених задач розсіювання для рівнянь Максвела, а відомі розв'язки мають частковий характер, обмежену сферу використання і незначну практичну цінність. Підхід, який полягає у мінімізації нев'язки між результатами вимірювання та синтезованими даними, для моделі зі змінними параметрами є мало придатним, оскільки вимагає знаходження глобального мінімуму багатоекстремального функціоналу. Його числова реалізація вимагає багаторазового розв'язання прямої задачі, що є надзвичайно часозатратним. Тому на практиці змушені використовувати грубі наближені оцінки, які базуються на спрощених моделях процесу розсіювання. Це призводить до втрати точності оцінювання шуканих параметрів, хибної ідентифікації дефектів, зменшення роздільної здатності близько розташованих неоднорідностей та недостовірності результату в цілому. Отже, питання вибору моделей процесу розсіювання електромагнітних хвиль, яке б

давало можливість знайти достовірні розв'язки обернених задач розсіювання, є важливим та нагальним.

Іншим важливим аспектом побудови процедури оцінювання параметрів неоднорідних середовищ є те, що зміна електрофізичних властивостей, як функції координат, має кусково-неперервний характер, оскільки в таких середовищах можуть бути присутні контрастні розсіювальні об'єкти (включення). Невідповідність моделі розсіювання реальному об'єкту є причиною похибок при оцінюванні параметрів неоднорідних середовищ із контрастними включеннями. Окрім того, реальні умови, в яких вимірюють розсіяне поле, додатково ускладнюють оцінювання параметрів неоднорідних середовищ. Насамперед це пов'язано з обмеженістю частотного діапазону, в якому здійснюють вимірювання, дискретним характером вимірних даних та скінченним розміром апертури, на якій реєструють складові розсіяного поля. Ці обмеження разом із присутністю випадкової складової у вимірних даних призводять до некоректності сформульованих обернених задач розсіювання, відтак постає питання про існування єдиного розв'язку та вибір відповідної процедури регуляризації. Розв'язання цих проблем забезпечить покращення ефективності систем неруйнівного контролю, дистанційного зондування, підповерхневої локації, а також підвищення їх інформативності на суттєво новий рівень.

Таким чином, наукові дослідження, спрямовані на створення нових альтернативних та редукованих моделей взаємодії електромагнітних хвиль із неоднорідними середовищами, пошуку розв'язку відповідних обернених задач розсіювання для оцінювання параметрів таких середовищ є актуальними, оскільки вони дозволяють отримати інформацію про просторовий розподіл матеріальних параметрів середовищ та форму об'єктів безконтактним способом на основі інформації про розсіяне електромагнітне поле, яке вимірюється на відстані.

Зв'язок роботи науковими програмами, планами, темами. Тематика дисертаційної роботи відповідає основним науковим напрямам та найважливішим проблемам фундаментальних досліджень у галузі природничих, технічних і

гуманітарних наук НАН України на 2014 – 2018 роки (постанова Президії НАН України від 20.12.2013 р., № 179), а саме «Розробка математичних моделей та аналітико-числових методів дослідження і оптимізації механічної поведінки тіл з урахуванням впливу полів різної фізичної природи та дефектів». Задачі, сформульовані в дисертації, співпадають із завданням комплексної програми наукових досліджень НАН України «Проблеми ресурсу і безпеки експлуатації конструкцій, споруд та машин», зокрема, її 2-го розділу: «Розробка методів і нових технічних засобів неруйнівного контролю та діагностики стану матеріалів і виробів тривалої експлуатації».

Основу дисертаційної роботи складають результати теоретичних та практичних досліджень, виконаних автором у рамках держбюджетних наукових тем за відомчим замовленням НАН України у відділі фізичних основ діагностики матеріалів Фізико-механічного інституту ім. Г.В.Карпенка НАН України: «Дослідження взаємодії електромагнітних і пружних полів із дефектами в неоднорідних середовищах та створення нових технічних засобів діагностики» (2009 - 2011 рр.), № ДР 0109U002656; «Вивчення властивостей хвильових полів у матеріалах з дефектами для розроблення методик діагностування і моніторингу відповідальних конструкцій» (2012 - 2014 рр.), № ДР 0112U002784; «Розроблення теорії неруйнівного контролю з'єднань пружних шаруватих структур із тріщинами за умов їх динамічного зондування» (2007 – 2011 рр.), № ДР 0107U004071; «Розроблення нового числово-аналітичного підходу до розв'язання обернених дифракційних задач для плоскошаруватих матеріалів» (2009 - 2010 рр.), № ДР 0109U005807. Частково наукові результати отримано автором під час виконання робіт у відділі методів та систем обробки, аналізу та ідентифікації зображень Фізико-механічного інституту ім. Г.В.Карпенка НАН України, а саме: «Розробка методів автоматичного експрес-аналізу параметрів мікроструктури конструкційних матеріалів» (2002 – 2004 рр.), № ДР 0102U002670 та «Розробка інформаційних технологій реконструкції і кількісного аналізу тривимірних зображень поверхні зламів конструкційних матеріалів» (2005 – 2007 рр.), № ДР 0105U004310.

У дисертаційну роботу ввійшли результати досліджень, отримані автором у рамках цільової науково-дослідної програми Міністерства промислової політики України і ДК Укрспецекспорт (ДКР «Астра» згідно з Договором комісії РОЕ-30/046-2001). Автор був виконавцем госпдоговірної НДР «Створення макету елемента адаптивної антенної решітки та методу обробки прийнятого сигналу» (2002 р.), № ДР 0103U001393 у Національному університеті «Львівська політехніка».

Крім того, дослідження за темою дисертації проводилися при виконанні ряду міжнародних проектів: гранту Програми Фулбрайт «Inverse scattering problem solutions as a foundation of cutting-edge microwave nondestructive evaluation» (2012 – 2013 pp.) в Університеті Делаверу у місті Ньюарк, США; гранту Центру прикладних математичних досліджень «Ground-penetrating radar signal processing based on inverse problem solution» (2007 – 2008 pp.) в Державному університеті Делаверу в місті Довер, США; гранту НАТО «Investigation of radiation and scattering of electromagnetic waves from multilayered structures» (2002 - 2003 pp.) у Варшавській політехніці, Польща.

У рамках вказаних науково-дослідних робіт та проектів здобувач запропонував підходи до опису процесів розсіювання електромагнітних хвиль, що базуються на моделях потенціального розсіювання, розробив стратегію розв'язання двовимірних обернених задач розсіювання, здійснив апробацію отриманих результатів на експериментальних даних та знайшов оригінальні розв'язки обернених задач розсіювання для часткових випадків у високочастотному наближенні та для точкової моделі розсіювання.

Мета та задачі дослідження. Метою дослідження є підвищення ефективності засобів оцінювання параметрів неоднорідних середовищ за відомим розподілом розсіяного електромагнітного поля через розв'язання обернених задач розсіювання.

Для досягнення цієї мети в роботі вирішено такі задачі:

- проведено аналіз моделей, які використовують для моделювання взаємодії

електромагнітного поля з неоднорідними середовищами, встановлено ефективність відомих підходів до оцінювання параметрів неоднорідних середовищ за розсіяним полем та окреслено шляхи її підвищення;

- розвинуто модель, яка дала можливість будувати методи розв'язання одновимірних задач розсіювання для кусково-неперервних середовищ при обмеженнях на вихідні дані, що спричинені умовами проведення експериментальних вимірювань;

- запропоновано методи розв'язання одновимірних задач розсіювання, які враховують неоднорідність матеріалу шарів, втрати в діелектричних матеріалах і наявність розривів функції діелектричної проникності на поверхнях розділу;

- оцінено можливість розв'язання одновимірних обернених задач розсіювання, де вихідні дані задано частково, а саме - без фази, та окреслено умови знаходження однозначного розв'язку;

- розв'язано обернену задачу розсіювання у випадку повного відбиття у півпросторі, що має місце при розсіюванні хвиль на діелектриках з екраном, а також оцінено можливість використання трансмісійних власних значень для ідентифікації сферичних діелектричних структур та показано умови існування розв'язку відповідної оберненої спектральної задачі;

- знайдено наближений розв'язок прямої дифракційної задачі у далекій зоні для контрастних об'єктів, який дає можливість трактувати значення розсіяного поля у точках реєстрації як реалізацію деякого випадкового процесу з випадковою похибкою і детермінованим характером геометричних параметрів та обґрунтовано метод розв'язання двовимірних обернених задач розсіювання для ідентифікації форми ідеально провідних та діелектричних розсіювачів за умови різних вихідних даних;

- розвинуто модель спостереження та методи розв'язання обернених задач для дискретної моделі розсіювання, що в багатовимірному випадку передбачає знаходження розташування точкових розсіювачів та ідентифікацію параметрів тригонометричних сум для розв'язків Йоста в одновимірному випадку;

- розвинуто метод реконструкції поля переміщень у тривимірному просторі

для поверхні об'єкта, що деформується під дією навантажень, використовуючи оптичні зображення в ролі вихідних даних, та обґрунтовано модель, яка дозволяє параметризувати шуканий розв'язок.

Об'єктом дослідження є взаємодія електромагнітного поля з неоднорідним середовищем і розсіювання електромагнітних хвиль на неоднорідностях.

Предмет дослідження складають математичні моделі процесів розсіювання та методи знаходження оцінок параметрів неоднорідного середовища за відомим розподілом розсіяного поля.

Методи дослідження. Для опису процесів розсіювання сформульовано моделі та розвинуто аналітичні методи їх дослідження і запропоновано алгоритми та числові методи розв'язання відповідних обернених задач розсіювання. Вирішення сформульованої проблеми та поставлених задач здійснено на основі методів теорії прямих та обернених задач розсіювання, теорії функцій комплексної змінної, теорії операторів та спектрального аналізу, теорії статистичного оцінювання та фільтрації, теорії числового аналізу та теорії обробки сигналів і зображень. Методологічну основу дослідження одновимірних задач розсіювання складає аналіз аналітичних властивостей функцій комплексної змінної, формулювання та розв'язок відповідних задач Гільберта-Рімана. Дослідження багатовимірних задач розсіювання базуються на отриманні наближених розв'язків, зокрема, завдяки спрощенню точних моделей. Статистичне трактування задач оцінювання параметрів дозволило коректно інтерпретувати узагальнені функції при аналізі розсіювання хвиль на поверхнях розділу в неоднорідних середовищах. Достовірність результатів підтверджено шляхом числового моделювання процесів розсіювання та експериментально.

Наукова новизна одержаних результатів. У роботі вирішено важливу науково-прикладну проблему – підвищення ефективності засобів оцінювання параметрів неоднорідних середовищ та встановлення їх просторового розподілу за характеристиками розсіяного електромагнітного поля, що вимірюють дистанційно.

У результаті розв'язання цієї проблеми одержано такі нові наукові результати:

1. Вперше розроблено математичну модель поширення електромагнітної хвилі у плоскошаруватому середовищі із втратами при нормальному падінні та розроблено ефективну числову схему розв'язання оберненої задачі розсіювання відносно неперервних функцій діелектричної проникності та провідності за відомою матрицею розсіювання. Модель базується на представленні електромагнітних процесів у вигляді несиметричної системи типу Дірака, а ефективність числового методу досягнуто за рахунок рекурентної процедури, яка на відміну від інших методів не потребує знаходження оберненої матриці.

2. Створено та обґрунтовано метод розв'язання оберненої задачі розсіювання за коефіцієнтом відбиття для багатошарових структур із однорідними безвтратними матеріалами шарів за умови нормального падіння плоскої хвилі, висока точність якого досягається за рахунок скінченної кількості коефіцієнтів розв'язків Йоста, властивості яких відомі з теорії розсіювання елементарних частинок. На відміну від відомих підходів, розв'язання оберненої задачі розсіювання за допомогою розв'язків Йоста дозволило уникнути обчислень коефіцієнтів безмежних тригонометричних послідовностей в елементах матриці розсіювання.

3. Вперше розроблено метод реконструкції діелектричної проникності за заданою функцією коефіцієнта відбиття нормально падаючої плоскої хвилі, який передбачає ідентифікацію наявних у шуканій функції розривів та відновлення неперервної складової, що по-різному визначають асимптотичну поведінку комплексного коефіцієнта відбиття. Використання моделі розсіювання у вигляді системи типу Дірака дозволило отримати кращу точність наближеного розв'язку оберненої задачі розсіювання шляхом врахування особливостей поведінки імпедансного потенціалу в точках, що відповідають поверхням розділу середовищ.

4. Набув подальшого розвитку підхід до визначення діелектричних параметрів шаруватої структури за значеннями модуля коефіцієнта відбиття та показано можливість однозначного розв'язку такої задачі за умови відомих додаткових даних. Модель у вигляді розв'язків Йоста дозволила виділити випадки,

коли на практиці можна побудувати скінчену кількість плоско-шаруватих діелектричних структур, що мають однакову функцію модуля коефіцієнта відбиття.

5. Обґрунтовано підхід до розв'язання оберненої задачі розсіювання для шаруватої діелектричної структури на ідеально провідній основі, який полягає у виділенні з виміряного коефіцієнта відбиття розв'язків Йоста для ідентичної діелектричної структури без ідеально провідної основи. Цей підхід узагальнено на випадок оберненої спектральної задачі, де вихідними даними є трансмісійні власні значення. При цьому розроблено алгоритм розв'язання оберненої задачі розсіювання, де вихідними даними є дві функції коефіцієнта відбиття діелектричної структури за відсутності та за наявності ідеально-провідної основи.

6. Вперше розроблено метод розв'язання обернених задач розсіювання для фіксованої частоти, які зводяться до одновимірної задачі при багатокутковому опроміненні плоскошаруватої структури за рахунок використання рівняння типу Шредінгера як моделі взаємодії електромагнітної плоскої хвилі з шаруватим середовищем. Цей метод дозволяє синтезувати шаруваті структури за заданою кутовою залежністю комплексного коефіцієнта відбиття та не потребує процедури мінімізації нев'язки, до якої зводяться відомі методи синтезу.

7. Набула розвитку модель подання діаграми розсіювання у вигляді інтегрального перетворення функцій, які мають випадковий характер і можуть досягати максимального значення лише на границі розсіювача, та показано, що така модель може служити теоретичним обґрунтуванням багатьох наближених розв'язків обернених задач розсіювання.

8. Вперше розроблено загальну стратегію побудови методів розв'язання обернених задач розсіювання на основі запропонованої моделі діаграми розсіювання, яка полягає у знаходженні індикаторних функцій для встановлення границі розсіювачів за значеннями розсіяного поля. На відміну від відомих підходів, така стратегія передбачає статистичне трактування обернених задач розсіювання та статистично обґрунтований підхід до знаходження їх розв'язку.

9. Створено та обґрунтовано метод визначення координат точкового джерела

випромінювання над діелектричною поверхнею з невідомими параметрами, який базується на реєстрації поля лінійною чотириелементною антенною решіткою та коректно враховує ефект двопробеневого розповсюдження хвилі.

10. Набув розвитку метод визначення 3D переміщень поверхні об'єкта внаслідок його деформації під прикладеним навантаженням, який базується на тривимірній реконструкції поверхні за оптичними стерео-зображеннями і щільному погодженні зображень та не потребує забезпечення когерентності оптичної системи; при цьому регуляризацію відповідної некоректної задачі досягнуто завдяки використанню моделі анізотропної дифузії.

Вірогідність основних наукових положень і результатів. Основним аргументом, який підтверджує достовірність отриманих результатів щодо розв'язку одновимірних обернених задач розсіювання, є строге формулювання обернених задач, а також математично обґрунтований та коректний шлях їх розв'язання. Про це свідчать теореми про існування та єдиність розв'язку для рівнянь нового типу, що отримано автором шляхом перетворення математичних моделей вихідних задач. Про адекватність моделей рівняння Шредінгера та рівняння Дірака реальним процесам взаємодії електромагнітних хвиль з неоднорідним середовищем свідчить той факт, що існує взаємне перетворення між функціями та параметрами запропонованих у дисертації моделей та рівняннями Максвелла.

Коректність запропонованих моделей для опису процесів розсіювання електромагнітних хвиль у двовимірному випадку підтверджується аналітичним аналізом похибки, яка визначає відмінність між точним розв'язком прямої задачі розсіювання та наближенням. Результати, отримані в роботі, не суперечать фізичній інтерпретації отриманих розв'язків.

Ефективність запропонованих обчислювальних методів оцінювання параметрів неоднорідних середовищ підтверджено порівнянням отриманих результатів з даними інших авторів. Похибки розв'язків обернених задач розсіювання встановлено на основі порівняння числових результатів з точно

відомими, при цьому для порівняння використано вихідні дані про розподіл розсіяного поля, який знайдено як числовий розв'язок прямої задачі розсіювання.

Для підтвердження достовірності методу оцінки координат точкового джерела над розсіювальною поверхнею при двопробеневій моделі розповсюдження, результати обробки експериментальних даних порівняно з точно відомими параметрами, які зафіксовано при організації експерименту. Експериментально також підтверджено дієвість методу встановлення векторного поля переміщень поверхні об'єкту у тривимірному просторі, вихідними даними для якого служили дві пари зображень.

Практичне значення одержаних результатів

1. Отримані результати дали змогу здійснити оцінку кількості шарів діелектричної структури, встановити діелектричну проникність та ширину кожного шару за значеннями комплексного коефіцієнта відбиття, який відомий за результатами вимірювань на дискретній множині частот в обмеженому діапазоні. Це дало можливість аналізувати діелектричні матеріали неруйнівним методом та ідентифікувати розшарування і відхилення параметрів шарів від технологічно заданих значень.

2. Розроблений метод визначення розподілу діелектричної проникності вздовж поперечної координати у діелектричних плоско-шаруватих структурах та розвинуті алгоритми ідентифікації поверхонь розділу за коефіцієнтом відбиття нормально падаючої плоскої хвилі використано як процедури обробки сигналів у засобах підповерхневої радіолокації, що дозволило уникнути хибного виявлення неоднорідностей при аналізі структури середовищ.

3. Ідею розв'язання оберненої задачі розсіювання узагальнено на випадок, в якому шарувата діелектрична структура знаходиться на ідеально провідній плоскій основі, що виконує функції екрану. Запропоновано процедуру знаходження її товщини та показано, як частотну залежність коефіцієнта відбиття можна перерахувати у коефіцієнт відбиття такої ж структури без екрану. Це дало змогу здійснити неруйнівний контроль якості діелектричної ізоляції чи протикорозійних

захисних покривів, які технологічно виконані у вигляді багат шарового діелектричного композиту на металічній основі.

4. Розроблений метод синтезу плоских структур із неперервними функціями діелектричної проникності та провідності за заданими коефіцієнтами відбиття та проходження, які входять у матрицю розсіювання, дав можливість побудувати спеціальні фільтри, хвилеводні частотно-залежні поглиначі, а також дозволив розробити процедуру встановлення параметрів внутрішньої структури плоско-неоднорідних середовищ.

5. Метод синтезу плоских діелектричних структур за заданою залежністю коефіцієнта відбиття від кута падіння плоскої хвилі дав змогу будувати відбиваючі поверхні за заданими характеристиками розсіювання та створювати нові типи спрямованих антен, плоскі рефлектори яких виготовлено за багат шаровою технологією.

6. Розвинутий метод синтезу діелектричних плоско-шаруватих структурах з ідентичними функціями модуля коефіцієнта відбиття для довільно широкого діапазону частот дозволив створити різні відбивні фільтри.

7. Розроблену стратегію побудови індикаторної функції для встановлення границі розсіювачів за відомим значенням розсіяного поля ефективно застосовано при обробці сигналів у засобах неруйнівного контролю, системах підповерхневої локації та дистанційного зондування, а також у системах виявлення джерел електромагнітного та акустичного випромінювання.

8. Метод обробки сигналів у чотириелементній решітці використано для ідентифікації та виявлення точкових джерел електромагнітного поля над плоскою поверхнею при двопробному розповсюдженні. Крім того цей метод служить для вимірювання відбивних характеристик плоскої поверхні. Побудований на основі двопробної моделі розповсюдження хвиль розроблений метод дав можливість отримати оцінку огинаючої сигналу та визначити координати точкового джерела, забезпечуючи їх стійкість до когерентної завади.

9. Розвинутий метод визначення розподілу переміщень у тривимірному просторі дозволив побудувати засоби реєстрації стереозображення однією

фотокамерою та встановити розподіл поля переміщень поверхні об'єкту за його зображеннями у різні моменти часу. Неоднорідність поля встановлених переміщень при цьому свідчатиме про наявність підповерхневих включень чи дефектів. Такий метод також істотно збільшує інформативність оптичних засобів вимірювання для аналізу деформацій і стійкості схилів земної поверхні.

Реалізація та впровадження результатів роботи. Результати досліджень впроваджено при розробленні системи виявлення джерел електромагнітного випромінювання над плоскою поверхнею розділу середовищ у Львівському науково-дослідному радіотехнічному інституті. Метод тривимірної реконструкції поверхні та векторного поля деформацій за рознесеними зображеннями реалізовано програмно. Впровадження цього методу здійснюється у роботах підрозділів Фізико-механічного інституту ім. Г.В.Карпенка НАН України для аналізу мікроструктури поверхні зламів та встановлення тривимірного поля деформацій навколо концентраторів напружень при навантаженні взірців. Окремі результати роботи впроваджено в ТЗОВ «Юнісервіс» при розробленні системи автоматичної класифікації рослинності «Контури» на замовлення ТЗОВ «ИнжГеоГИС» для аналізу даних від оптичного локатора та побудови методів фільтрації хмари нерегулярних точок у тривимірному просторі. Метод виявлення місць розклеювання багат шарових композитів впроваджено у Державному підприємстві «Антонов» для неруйнівного контролю обтікачів бортових радіолокаційних станцій літальних апаратів.

Крім того, результати дослідження можуть бути застосовані для опрацювання та інтерпретації даних від георадарів у наукових установах, що здійснюють геологічну та археологічну розвідки, а також при виконанні науково-дослідних робіт в Інституті радіофізики і електроніки ім. О.Я.Усикова НАН України (м. Харків) та Державному підприємстві «Конструкторське бюро «Південне» ім. М.К. Янгеля (м. Дніпропетровськ).

Істотним внеском в теорію обернених задач розсіювання та математичної

фізики є наступні результати, отримані в дисертації:

1) Розширено клас одновимірних електродинамічних обернених задач розсіювання, що допускають подання шуканого розв'язку через розв'язки математичних задач, теореми існування та єдиності яких доведено. Встановлено, що наявність дельта функцій у Фур'є-розкладі коефіцієнта відбивання не дозволяє безпосередньо застосувати розвинуті в теорії квантового розсіювання відомі підходи до розв'язання оберненої задачі для рівняння Шредінгера. До них відносяться підходи, що використовують оператор перетворення та зводяться до розв'язання інтегральних рівнянь Гельфанда-Левітана, Марченка, Крейна, Захарова-Шабата та інших. Такий випадок потребує особливої уваги, так як поява дельта функцій у Фур'є-розкладі коефіцієнта відбивання вказує на існування контрастних поверхонь розділу середовищ.

2) Запропоновано нові підходи до доведення теореми єдиності розв'язку оберненої задачі розсіювання для шаруватої структури на ідеально провідному екрані та оберненої спектральної задачі для сферичної радіально-симетричної шаруватої структури за множиною трансмісійних власних значень.

3) Розвинуто ефективний числовий метод розв'язання системи рівнянь типу Гельфанда-Левітана-Марченка, яка є основною у відомому «методі оберненої задачі розсіювання» для розв'язання прямої задачі для певного класу еволюційних нелінійних диференціальних рівнянь (AKNS) та моделює, зокрема, розповсюдження солітонів.

Результати роботи впроваджено у навчальному процесі Державного університету штату Делавер (м. Довер, США), на кафедрі математичних наук, зокрема під час підготовки лекційних та практичних занять у рамках літньої навчально-дослідницької студентської програми «Числовий спектральний аналіз», яка включає елементи курсів лінійної алгебри, математичної статистики та теорії обробки сигналів. Для спрощення сприйняття студентами теорії та методів спектрального оцінювання використано розвинуту в дисертаційній роботі стратегію побудови індикаторних функцій, яка дозволяє наочно продемонструвати процедуру виведення оптимального фільтра та знаходження оцінки невідомих

параметрів. Для закріплення вивченого матеріалу студентам запропоновано реалізувати числово та проаналізувати методи оцінювання для часткових випадків узагальненої моделі, розвинутої в дисертації. Зокрема, темами практичних занять було розв'язання задач оцінювання напряму приходу хвилі від джерела випромінювання на лінійну антенну решітку, визначення спектральних складових суміші гармонічних сигналів та ідентифікації параметрів багатошарових структур за коефіцієнтами відбивання та проходження. Впровадження підтвержені відповідними актами.

Результати дослідження можуть бути використані при розробці та модифікації навчальних курсів та впроваджені у навчальний процес в Національному університеті «Львівська політехніка» на кафедрі радіотехнічних пристроїв та систем, а також у Львівському національному університеті імені Івана Франка на факультеті прикладної математики.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертаційної роботи висвітлено на науковій конференції «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» АРАМСС'2015 (Львів, 2015), міжнародних семінарах «Прямі та обернені задачі теорії електромагнітних та акустичних хвиль» DIPED, (Львів, 2015, 2013, 2011, 2009, 2003), науковій конференції «Обчислювальні методи та системи перетворення інформації» (Львів, 2014), конференції «Copper Country Workshop on Numerical Analysis and Inverse Problems» (Хюкхгтон, Мічиган, США, 2013), міжнародній конференції «Novel Directions in Inverse Scattering» (Ньюарк, Делавер, США, 2013), 4-й науково-практичній конференції «Електроніка та інформаційні технології», (Львів, 2012), 7-й Національній науково-технічній конференції і виставці «Неруйнівний контроль та технічна діагностика» (Київ, 2012), 32-ій міжнародній конференції «Композитні матеріали в промисловості» (Ялта, 2012), міжнародній конференції «Функціональний аналіз-2010» (Львів, 2010), міжнародній конференції «Інтегральні рівняння-2010» (Львів, 2010), конференції молодих науковців Інституту радіофізики та електроніки ім. О.Я.Усикова НАН України «Радіофізика, Електроніка, Фотоніка та Біофізика»

(Харків, 2009), міжнародних конференціях «Досвід розробки і застосування САПР в мікроелектроніці» CADSM'2009 (Львів-Поляна, 2009) та CADSM'2003 (Львів-Славське, 2003), міжнародних науково-технічних конференціях «Сучасні проблеми радіоелектроніки, телекомунікацій, комп'ютерної інженерії» TCSET'2006 та TCSET'2002 (Львів-Славське, 2006, 2002), міжнародних конференціях «Microwaves, Radar and Wireless Communications» MIKON'2006 (Краків, Польща, 2006) та MIKON'2002 (Гдиня, Польща, 2002), міжнародних конференціях «Telecommunications in Modern Satellite, Cable and Broadcasting Services» TELSIXS 2005 (Ніш, Сербія, 2005) та TELSIXS 2001 (Ніш, Югославія, 2001), відкритій науково-технічній конференції молодих науковців і спеціалістів Фізико-механічного інституту ім. Г.В.Карпенка НАН України «Проблеми корозійно-механічного руйнування, інженерія поверхні, діагностичні системи» (Львів, 2005), конференціях «European Conference on Wireless Technology, European Microwave Week» (Амстердам, Нідерланди, 2004) та (Мюнхен, Німеччина, 2003), 9-й міжнародній конференції «Colloquium on Microwave Communications» MICROCOLL'2003 (Будапешт, Угорщина, 2003), 12-й міжнародній конференції «СВЧ-техника и телекоммутиационные технологии» КрыМиКо'2002 (Севастополь, 2002), спільній українсько-польській школі-семінарі «Актуальні проблеми теоретичної електротехніки: наука і дидактика» (Алушта, 2001), конференції «Zastosowania elektromagnetyzmu w nowoczesnych technikach i informatyce» (Бидгощ-Венеція, Польща, 2001).

У повному обсязі дисертаційна робота доповідалася і обговорювалася на семінарах: Фізико-механічного інституту ім. Г.В.Карпенка НАН України, кафедри прикладної математики Львівського національного університету імені Івана Франка, кафедри математичних наук в Університеті Делавару (м. Ньюарк, США), кафедри математичних наук в Державному Університеті Делавару (м. Довер, США).

Особистий внесок здобувача. Основні положення та результати роботи повною мірою висвітлені у публікаціях [1 - 52]. Усі результати, подані у

дисертаційній роботі, здобувачем отримано особисто. У наукових працях, написаних у співавторстві, здобувачу належить: запис хвильових електродинамічних рівнянь через модель потенціального розсіювання та розв'язання обернених задач розсіювання - [3,5,7,32,34]; створення методів розв'язання обернених задач розсіювання відносно параметрів плоско шаруватих структур та розвиток методів оцінювання параметрів домінуючих розсіювачів, які забезпечують високу роздільну здатність - [6,9,25-27,36,37]; приведення вихідної електродинамічної задачі до оберненої задачі розсіювання для рівняння типу Шредінгера та синтез плоских структур за заданими характеристиками розсіювання [13,16,38,39,42,44-46]; реконструкція фази для коефіцієнтів у розв'язках рівняння типу Шредінгера та знаходження множини розв'язків обернених задач розсіювання, де вихідні дані задано лише модулем комплекснозначної функції - [2,4,33]; аналіз та обробка результатів вимірювань з метою оцінювання параметрів діелектричних структур та ідентифікації підповерхневих неоднорідностей - [1,29-31]; створення методів оцінювання кутів приходу плоскої хвилі на багатоелементні решітки та оцінювання параметрів моделі, а також аналіз точності оцінювання та розвиток теорії високороздільного спектрального аналізу для розв'язання обернених задач розсіювання - [11,14,43]; розвиток методів погодження зображень, аналіз моделей для опису векторнозначної функції переміщень та створення процедури реконструкції тривимірного поля переміщень за стереозображеннями - [10,12,15,41]; побудова архітектури системи та створення методів фільтрації у тривимірному просторі - [24]; числове розв'язання прямої задачі розсіювання методом моментів, а також створення та перевірка ефективності методів мікрохвильової візуалізації, де модель розсіювання побудова на основі наближення фізичної оптики - [17,22,23,47,50-52]; створення методів оцінювання параметрів досліджуваних об'єктів при описі вихідних даних статистичною моделлю спостереження - [18-21,48,49]. В усіх опублікованих працях здобувач особисто здійснив реалізацію числових методів для розв'язання обернених задач розсіювання та перевірку достовірності отриманих результатів.

Публікації. Результати роботи викладено в 52-х наукових публікаціях, у тому числі: 23 - у фахових наукових виданнях України та статтях у наукових періодичних виданнях інших держав, 8 з яких - статті у наукових фахових журналах, що входять до міжнародних наукометричних баз даних (Scopus, ISI, SCI, IET, Zentrblatt, Engineering Village, Ei Compendex, ResearchGate, IEEE Xplore та ін.) та 29 - публікації у збірниках матеріалів і праць конференцій.

Структура і обсяг дисертаційної роботи. Дисертаційна робота складається із вступу, основної частини, яка містить вісім розділів, висновків, списку літератури та додатків, що викладені на 436 сторінках, у тому числі 336 сторінок основного тексту. Дисертація містить 115 ілюстрацій обсягом 60 стор., 3 таблиці на 4 стор., п'ять додатків на 32 стор. і список використаних джерел із 314 найменувань на 31 стор.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ЗА ТЕМОЮ ТА ВИБІР НАПРЯМКІВ ДОСЛІДЖЕНЬ

Сучасні технології у машинобудуванні, хімічній та нафтохімічній галузях, а також у будівництві базуються на впровадженні стратегії поступового розширення сфери використання безпровідних та малопровідних матеріалів, у тому числі заміну високовартністних металевих елементів конструкцій та елементів конструкцій з кольорових металів на міцніші та легші композитні діелектричні матеріали [53]. Незамінними залишаються діелектричні матеріали у системах ізоляції та антикорозійного захисту. Внаслідок такого перерозподілу технологічних пріоритетів усе більш актуальним стає оцінювання стану та виявлення внутрішніх пошкоджень діелектриків неруйнівними методами [54], оскільки вимоги до забезпечення впродовж експлуатації механічних параметрів діелектричних конструкцій зростають. Крім того, залишається відкритою проблема визначення неруйнівними методами фізико-хімічних параметрів діелектричних матеріалів при їх виготовленні та експлуатації. Спорідненою проблемою є створення методів обробки інформації в радіолокації та підповерхневого дистанційного зондуванні неоднорідних маловтратних середовищ, які базуються на подібних до неруйнівного контролю засадах.

Спільним є те, що характеристики внутрішньої структури матеріалів, а особливо, їх електричні параметри не є доступними для прямого визначення. Тому основу неруйнівного контролю та підповерхневого зондування складають методи непрямого оцінювання параметрів неоднорідних середовищ за розсіяним електромагнітним полем, яке має властивість проникати у діелектричні матеріали та розсіюватися на неоднорідностях. Математично методи непрямого оцінювання параметрів об'єктів можна трактувати як обернену задачу, для якої вихідними даними є результати вимірювання розсіяного поля. Розв'язок оберненої задачі дає можливість судити також про просторовий розподіл параметрів середовища, або про ступінь їх відхилення від очікуваного значення.

Відокремившись в окремий напрям математики, теорія обернених задач розсіювання [55-58] налічує багато методів та математичних підходів, які потенційно можуть бути придатними для застосування у неруйнівному контролі. На жаль, більшість підходів до розв'язання обернених задач розсіювання розвинуті для окремих тривіальних моделей, які не враховують особливості функціонування надвисокочастотних вимірювальних засобів, а отже не можуть бути застосовані до обробки результатів реальних вимірювань. Тому важливим є пошук зручних математичних моделей та виділення спільних теоретичних засад для побудови методів непрямого оцінювання параметрів неоднорідних середовищ. Саме тому метою цього розділу є аналіз відомих підходів до оцінювання параметрів неоднорідних середовищ та діелектричних матеріалів, що використовують розподіл розсіяного електромагнітного поля як вихідні дані.

1.1. Розсіювання електромагнітних хвиль як джерело інформації про неоднорідні середовища

В основі непрямих методів оцінювання параметрів матеріалів та конструкцій лежать різні фізичні явища. За природою їх розділяють на механічні явища, електромагнітні явища, спектрально-резонансні, капілярні явища тощо. Очевидно, що ступінь кореляції параметрів матеріалу та контрастність прояву тих чи інших явищ буде визначати ефективність оцінювання невідомих параметрів.

На користь електромагнітних методів свідчить той факт, що різні фізико-хімічні параметрами діелектричних матеріалів мають високу ступінь кореляції з електричними властивостями, і необхідну інформацію можна здобути з вимірів електромагнітного поля навколо або з поверхні об'єктів дослідження. Мікрохвильові, або надвисокочастотні методи є найбільш прийнятними для аналізу діелектриків, оскільки властивості проникання, відбиття та проходження електромагнітних хвиль надвисокочастотного діапазону зумовлюють появу у дифрагованому полі складових, які несуть інформацію про внутрішню структуру об'єкта дослідження. Вплив неоднорідності матеріалу на характеристики

розсіювання є пропорційним до співвідношення розмірів цих неоднорідностей до довжини хвилі. Це, в свою чергу, демонструє можливість досягнення високої роздільної здатності локалізації дефектів та точності оцінки параметрів матеріалів при помірній вартості та апаратних затратах.

Як частковий випадок електромагнітних методів для непрямого оцінювання параметрів матеріалів виділяють методи, що використовують хвилі оптичного діапазону [59]. Оптичні засоби неруйнівного контролю за характером випромінювання розділяють на когерентні та некогерентні. В останніх використовують проєціювання, тріангуляцію та затінення. Можливість оцінювання фазової складової у когерентних оптичних засобах неруйнівного контролю дозволяє застосовувати методи еліпсометрії, інтерферометрії, аналізу спеклограм, голографії, широкографії та інші волоконно-оптичні методи для когерентних променів.

З метою виділення спільної математичної моделі в таблиці 1.1 приведено перелік практичних задач, де розсіяне електромагнітне поле може характеризувати об'єкти дослідження.

Згідно з ГОСТ 18238-72, *неоднорідне середовище*, це середовище, в якому існує дві і більше області, що мають різні електромагнітні властивості. Керуючись цим означенням, об'єкти дослідження загально названо неоднорідними середовищами, оскільки таке визначення охоплює широкий клас прикладних задач, вирішення яких пов'язане з оцінкою параметрів таких середовищ.

Основним критерієм при створенні нових методів оцінювання параметрів неоднорідних середовищ, який прийнято за основу, є покращення показників ефективності, що описують інформативність та достовірність отриманих результатів у заданій області застосування та для заданого динамічного діапазону контрольованих параметрів. *Ефективність* того чи іншого методу значною мірою визначають такі характеристики, як точність оцінки параметра, що контролюють, роздільна здатність у задачах виявлення, точність відображення просторово-розподіленої залежності досліджуваного параметра в задачах візуалізації, а також обчислювальна складність методу, який дозволяє досягнути бажаних показників точності за відомим розподілом електромагнітного поля.

Таблиця 1.1. Задачі, в яких розподіл розсіяного поля дозволяє дистанційно оцінити параметри досліджуваних середовищ та матеріалів

Діагностування композитів:

- вимірювання товщини покривів, однорідних діелектричних стінок, шаруватих композитів, виготовлених із пластиків, кераміки, дерева та інших типів діелектричних матеріалів;
- виявлення незначних відхилень від нормативних значень товщин шарів у багатошарових діелектричних композитах;
- виявлення порожнин та місць з розшаруванням і відлущенням, а також визначення товщини шаруватих діелектричних композитів та діелектриків на провідній основі;
- визначення глибини відлущення у шаруватих композитних структурах та розшарування у товстих діелектричних матеріалів;
- виявлення ознак корозії під пофарбованими ділянками та товстими шаруватими композитними покривами;
- діагностування товстих пластикових композитів та композитів з органічного скла для виявлення локальних та протяжних внутрішніх дефектів;
- виявлення дефектів типу розриву у пучках волокон під час виготовлення композитів та при експлуатації, а також оцінювання орієнтації таких пучків;
- виявлення і опис пошкоджень армованих композитних структур, включаючи графітові композити.

Охарактеризування діелектричних матеріалів:

- встановлення значень матеріальних параметрів діелектриків;
- ідентифікація складових у суміші діелектричних матеріалів та визначення їх вмісту в загальному об'ємі; оцінка їх властивостей;
- виявлення та оцінювання пористості кераміки, температурного бар'єру

покривів, полімерів, скла, резини тощо;

- виявлення та оцінка стану затвердіння хімічно активних матеріалів, включаючи клейові речовини на резиновій основі, епоксидні смоли, матеріали, що містять цемент, каучук і т.д.;
- встановлення кореляції електричних властивостей матеріалів, з їх фізичними та механічними властивостями, такими як міцність до стиску, навантаження та напруження і, відповідно, охарактеризування деформовано-напруженого стану в оптичних волокнах та інших матеріалах.

Діагностування поверхні металу:

- виявлення втомних тріщин у металах, спричинених навантаженням;
- визначення розмірів тріщини та локалізація її вершини;
- виявлення тріщин, прихованих різними діелектричними покриттями, іржею, а також виявлення тріщин, заповненими іншими діелектричними наповнювачами, включаючи бруд, фарбу та різні солі;
- точне профілювання поверхні та оцінювання шорсткості металу;
- виявлення та характеристика дефектів у металевих та алюмінієвих прокатних листах.

Мікрохвильова візуалізація:

- візуалізація дефектів та розподілу внутрішніх неоднорідностей у деталях;
- візуалізація за вимірними значеннями поля у близькій та дальній зонах на основі різних методик реконструкції, в тому числі у реальному масштабі часу для потреб безпеки;

Застосування у медицині та індустрії:

- виявлення нездорових ділянок шкіри;
- мікрохвильова діагностика частин людського організму в реальному масштабі часу;
- лікувальна гіпертермія;
- оцінювання рівня вологості деревини, лісоматеріалів, текстилю, зерна, їжі тощо;

- перевищення порогу вологості у стовбурах та виявлення вузлоподібних включень;
- оцінювання властивостей резини у виробництві текстилю;
- спікання у виробництві кераміки;
- оцінювання місткості води у затверділому цементі;
- виявлення включень та неоднорідностей у бетоні, ідентифікація підсилюючих конструкційних елементів, оцінювання місткості хлоридів;
- оцінювання степені затвердіння бетону;
- оцінювання степеня заповнення бетону у формах та виявлення порожнин між кам'яною кладкою;
- підповерхневе зондування землі для виявлення прихованих об'єктів та вирішення археологічних задач;
- виявлення рухомих об'єктів за перешкодами.

1.2. Моделі розповсюдження електромагнітного поля в неоднорідних середовищах

1.2.1. Особливості взаємодії діелектричних матеріалів з електромагнітним полем. З приведеного вище переліку (таблиця 1.1) видно, що параметри, які повинні контролюватися, пов'язані з різними фізичними величинами, такими, як метричні розміри, електричні параметри, вологість, механічне напруження, хімічний склад, пористість тощо. Крім того, діелектричні матеріали об'єктів дослідження можуть мати істотно різні характеристики.

Зауважимо, що при дослідженні надвисокочастотними методами ключовим фактором є взаємодія електромагнітних хвиль з неоднорідним середовищем об'єкта дослідження. Отже, ступінь цієї взаємодії буде визначатися лиш електричними та магнітними властивостями матеріалу, в тому числі і у надвисокочастотному діапазоні частот. У свою чергу, електричні параметри залежать від неелектричних величин, зумовлених впливом фізичних полів іншої природи, зокрема, тиску, температури, вологості, механічного напруження. Як видно з таблиці 1.1, ці

параметри також можуть представляти інтерес з метою контролю, разом з такими характеристиками діелектрика, як густина, пористість, вміст води, або ступінь відсиріння.

Непряме оцінювання параметрів матеріалів, які мають яскраво виражені магнітні властивості, можна здійснювати магнітними методами (аналіз коерцитивної сили та залишкової намагніченості, методи на основі ефекту Баркгаузена, метод розсіювання магнітного потоку) [59]. Вони в достатній мірі розвинуті, і тому основний акцент у роботі зроблено на розсіюванні хвиль діелектриками.

За критерій аналізу діелектричного матеріалу виберемо електричний параметр, що встановлює взаємозв'язок між векторами електромагнітного поля, які є причиною електромагнітних процесів, і векторами, які є наслідком цих процесів. У випадку електричного поля, напруженість електричного поля $\bar{E}(x, y, z)$ є причиною зміщення та поляризації в середовищі, а вектор електричного зміщення $\bar{D}(x, y, z)$ є наслідком цього процесу. На мікроскопічному рівні поляризація відбувається за участі різних механізмів, але моделі таких процесів є настільки складними, що найчастіше користуються макроскопічною параметризованою моделлю, використовуючи абсолютну діелектричну проникність $\epsilon_a(x, y, z)$, як параметр, що характеризує матеріал. У загальному випадку причинно-наслідкова залежність матиме вигляд $\bar{D}(x, y, z) = \epsilon_a(x, y, z)\bar{E}(x, y, z)$. Для вакууму цю залежність можна записати як $\bar{D}(x, y, z) = \epsilon_0\bar{E}(x, y, z)$. Очевидно, що різні матеріали можуть мати однакову діелектричну проникність, що вказує на неможливість однозначної ідентифікації діелектричних матеріалів лише за їх реакцією на дію електричного поля. Така неоднозначність у більшості випадків не є критичною. Наприклад, у неруйнівному контролі, задачею контролю є встановлення відповідності між вимірним параметром та еталонним значенням.

Відповідно до типу функціональної залежності діелектричної проникності, діелектрики прийнято умовно розділяти на два класи: чисті або безвтратні діелектрики та діелектрики з втратами. Для перших функція $\epsilon_a(x, y, z)$ є дійсною, а

для втратних – комплекснозначною $\dot{\epsilon}_a(x, y, z) = \epsilon'_a(x, y, z) + i\epsilon''_a(x, y, z)$ та залежною від частоти ω , де $\sigma(x, y, z) = \omega\epsilon''_a(x, y, z)$ - питома провідність діелектрика. За характером залежності діелектричної проникності від координат, матеріали розділяють на однорідні ($\epsilon_a = const$), матеріали з неперервно змінними параметрами $\epsilon_a \in C$ та кусково-змінними параметрами $\epsilon_a(x) = \epsilon_{a1}(x), x < s$ і $\epsilon_a(x) = \epsilon_{a2}(x), x > s$. Саме до останнього типу відносять багатошарові структури. Залежність властивостей реакції діелектричного середовища від поляризації напруженості електричного поля дозволяє розділити діелектрики на ізотропні та анізотропні. Для останніх функція діелектричної проникності має вигляд тензора, а отже дія електричного поля на анізотропний матеріал буде визначатися як

$$\begin{bmatrix} D_x(x, y, z) \\ D_y(x, y, z) \\ D_z(x, y, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x(x, y, z) \\ E_y(x, y, z) \\ E_z(x, y, z) \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

Варто також звернути увагу, що незалежно від діелектричних властивостей матеріали можуть проявляти слабкі пара- та феромагнітні властивості через наявність різних домішок. Очевидно, що ефектом впливу магнітних властивостей діелектриків на електромагнітне поле нехтувати не можна, так як воно є додатковим джерелом інформації. У випадку, якщо матеріали проявляють сильні пара- та феромагнітні властивості, їх неруйнівний контроль доцільно здійснювати іншими методами, беручи до уваги, що більшість таких матеріалів є провідниками електричного струму.

Оскільки створення єдиного методу оцінювання параметрів, який би однаково ефективно працював для різних за характером функцій діелектричної проникності представляє неабияку трудність, прийнято звужувати область застосування та будувати методи, базуючись на апріорній інформації про неоднорідне середовище. Так, електромагнітний неруйнівний контроль прийнято спеціалізувати у відповідності до призначення. Очевидно, що створення універсальних засобів оцінювання параметрів різних за властивостями матеріалів діелектриків є однією з пріоритетних задач.

Через велику кількість параметрів в анізотропній моделі (1.1), що характеризує середовище, їх оцінювання за розсіяним електромагнітним полем є надзвичайно складною задачею. Вона виходить за рамки дисертаційного дослідження. Основну ж увагу приділимо ізотропному випадку, де $\bar{D}(x, y, z) = \varepsilon_a(x, y, z)\bar{E}(x, y, z)$.

Проникнення електромагнітних хвиль у неоднорідні середовища та розсіювання хвиль на поверхнях розділу є лише однією з передумов для досягнення ефективності радіочастотних методів контролю. Іншим фактором, який відіграє істотну роль у розвитку методів та засобів оцінювання параметрів неоднорідності середовищ непрямыми методами, є наявність універсальної математичної моделі розповсюдження електромагнітного поля у неоднорідному середовищі. У диференціальній формі, з врахуванням причинно-наслідкових залежностей між напруженістю електричного поля \mathcal{E} та вектором електричної індукції \mathcal{D} (а також між напруженістю магнітного поля \mathcal{H} та вектором магнітної індукції \mathcal{B} для магнітних середовищ), таку модель подають у вигляді рівнянь Максвела

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathcal{E} + \mu \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} &= 0, \\ \operatorname{rot}\mathcal{H} - \varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} &= \sigma \mathcal{E}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Повна система рівнянь Максвела включає ще два рівняння, які за відсутності сторонніх струмів та зарядів мають вигляд $\operatorname{div}\mathcal{B} = 0$ та $\operatorname{div}\mathcal{D} = 0$.

Для гармонічної зміни поля в часі з частотою ω розв'язок рівнянь (1.2) можна подати за допомогою виразів

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x, t) &= \operatorname{Re} \left\{ \left(\varepsilon + \frac{i\sigma}{\omega} \right)^{-1/2} E(x) \exp(-i\omega t) \right\}, \\ \mathcal{H}(x, t) &= \operatorname{Re} \left\{ \mu^{-1/2} H(x) \exp(-i\omega t) \right\}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Відповідно, рівняння Максвела (1.2) набудуть вигляду:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}E - ikH &= 0, \\ \operatorname{rot}H + ikE &= 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

де $k = \omega \sqrt{\mu(\varepsilon + i\sigma/\omega)}$ - хвильове число.

При дослідженні процесів розсіювання з метою забезпечення єдиності розв'язку на розв'язки рівняння Максвелла накладають додаткові умови випромінювання на безмежності. На границях розділу середовищ з різними параметрами розв'язок рівнянь (1.4) також має задовольняти умовам спряження нормальних та тангенціальних складових електромагнітного поля.

1.2.2. Різні аспекти реєстрації розсіяного електромагнітного поля при оцінюванні параметрів неоднорідних середовищ. Носієм інформації про параметри та структуру діелектричних об'єктів є розподіл розсіяного електромагнітного поля E_{scat} , а отже спосіб реєстрації цього поля визначатиме характеристики засобу радіочастотного неруйнівного контролю. Важливо зазначити, що об'єкти дослідження не є джерелом електромагнітного поля, тому вимірне поле є, як правило, реакцією на штучно створене поле E_{inc} . Це встановлює вимоги до джерел електромагнітного поля, які використовують у неруйнівному контролі. Крім елементарних джерел випромінювання електромагнітного поля, таких як диполі, вібратори, щілини, в неруйнівному контролі також застосовують діаграмоформульовальні елементи. До них належать рупорні, лінзові, параболічні антени і т.д. Кожному з цих пристроїв можна поставити свою електродинамічну модель, виходячи з рівнянь Максвелла.

Беручи до уваги, що розподіл поля довкола об'єкта дослідження свідчить про його електричні параметри та внутрішню структуру, параметри антенних пристроїв (діаграма спрямованості, поляризаційна діаграма, смуга пропускання і т.д.) повинні задовольняти певним вимогам, або щонайменше, ці параметри мають бути контрольовані. Для цього здійснюють калібрування антенно-фідерної системи засобів неруйнівного контролю, оцінюючи параметри її моделі. Результати калібрування належним чином враховують у процесі обробки, для корекції комплексних частотної та просторової характеристик.

При виборі моделі, як правило, не вдається використати припущення про взаємодію об'єкта дослідження із сформованим електромагнітним полем лише у дальній зоні антенної системи, оскільки необхідно забезпечити показники

чутливості та роздільної здатності відповідних засобів, а також враховувати інші технологічні та конструкційні обмеження. Саме тому модель опромінювальної плоскої електромагнітної хвилі та амплітуду розсіювання можна використати лише у спеціально обумовлених випадках. Загалом елементи випромінювання, тракт реєстрації електромагнітного поля та об'єкт дослідження складають єдину електродинамічну систему і, відповідно, їх взаємодію необхідно враховувати при моделюванні та створенні методів обробки зареєстрованої інформації.

Взаємність пасивних електромагнітних пристроїв дає можливість технологічно сумістити засоби формування та реєстрації електромагнітного поля. При цьому виникає потреба розділення приймального та передавального трактів.

Очевидним є те, що вимірювання величини електромагнітного поля для фіксованих значень аргументів (координати та частоти) функції $E_{scat}(x, \omega)$ є недостатніми даними для охарактеризування об'єкта дослідження. Тому у засобах неруйнівного контролю використовують просторове сканування, застосовують багаточастотний принцип роботи: $E_{scat}(x, \omega), \omega \in [\omega_1, \dots, \omega_n]$, або принцип зондування електромагнітним імпульсом із заданою часовою залежністю його амплітуди: $\mathcal{E}_{inc}(x, t)$ [60]. У деяких випадках, в засобах неруйнівного контролю використовують принцип неперервного випромінювання зі змінною у часі частотою [61], що зумовлено відносною простотою технічної реалізації такої системи. При цьому виникає задача виділення з зафіксованої інформації корисних параметрів, підданих нелінійному перетворенню.

Аналогічним прикладом, де простота технічної реалізації приймача приводить до часткової втрати інформації, що містить розсіяне об'єктом поле, є реєстрація лише енергетичних параметрів прийнятих сигналів при багаточастотному зондуванні. З іншої сторони, для досягнення когерентності і вимірювання комплекснозначних величин порівнюють зареєстровані значення електромагнітного поля з полем від опорного джерела. Така когерентність досягається завдяки використанню мостових та гетеродинних схем прийому, що істотно підвищують

складність приймача, особливо при намаганні забезпечити стабільні характеристики у широкому діапазоні частот.

Іншою складовою моделі процесів при неруйнівному контролі є присутність випадкової компоненти через наявність шумів, в основному, у першому каскаді підсилення та при гетеродинному перетворенні сигналів. Як правило, можна припустити, що дійсна і уявна частини цієї випадкової компоненти мають нормальний розподіл.

Важливо також зазначити, що лінійна модель є прийнятною, якщо ширина динамічного діапазону приймача є значно більшою, ніж максимальна величина прийнятого сигналу. Крім того, повинна забезпечуватись умова лінійності характеристик тракту приймача в усьому динамічному діапазоні. Таку лінійність часто досягають корекцією на етапі обробки інформації за даними попереднього калібрування системи.

Щодо лінійності самого процесу розсіювання, то вона буде порушуватись у випадку рухомих об'єктів (за рахунок доплерівських ефектів) або присутності в об'єктах дослідження включень, в яких взаємозв'язок між напруженістю поля та вектором електричного зміщення має нелінійний характер.

Очевидним є те, що багато аспектів технічної реалізації залишаються визначальними при створенні пристроїв неруйнівного контролю та здійсненні обробки зареєстрованої інформації. Тому при формуванні математичної моделі процесів вимірювання повинні враховуватись перелічені вище особливості, а створення методів, які б давали можливість оцінити параметри діелектриків, відповідно, ґрунтуватися на строгому математичному підході з використанням даної моделі.

1.2.3. Одновимірні моделі опису електромагнітного поля в неоднорідному середовищі. За умови нормального падіння плоскої хвилі на плоско-неоднорідну структуру рівняння Максвела (1.2) можна звести до одновимірного хвильового рівняння. Для чисто діелектричного ізотропного частотно-незалежного матеріалу,

розповсюдження електромагнітних хвиль у часовій області можна промоделювати системою рівнянь

$$\begin{cases} \partial E(z,t)/\partial z - \mu_0 \mu \partial H(z,t)/\partial t = 0, \\ \partial H(z,t)/\partial z - \varepsilon_0 \varepsilon(z) \partial E(z,t)/\partial t = 0, \end{cases} \quad (1.5)$$

де $E(z,t)$ та $H(z,t)$ є електричною та магнітною напруженістю поля; ε_0 та μ_0 - діелектрична та магнітна проникність вакууму, відповідно; μ - відносна магнітна проникність середовища розповсюдження, яке прийнято вважати в даному випадку немагнітним ($\mu=1$) і $\varepsilon(z)$ - функція відносної діелектричної проникності структури, що досліджується.

Припустимо, що область $z < 0$ є вільним простором розповсюдження, плоско-неоднорідна структура розташована в півпросторі $z > 0$, а функція $(\varepsilon(z)-1)$ має компактний супорт.

Для того, щоб привести рівняння (1.5) до канонічної форми, введемо нову змінну $\tau(z)$:

$$\tau(z) = \int_0^z \sqrt{\mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon(z')} dz'; \quad (1.6)$$

$$\frac{d\tau(z)}{dz} = \sqrt{\mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon(z)}, \quad (1.7)$$

де $\tau(z)$ - затримка в часі, або час розповсюдження хвилі, яка проходить відстань z від точки $z=0$ поверхні. Звідси, рівняння (1.6) набуває більш симетричного вигляду

$$\begin{cases} \partial E(\tau,t)/\partial \tau - \rho(\tau) \partial H(\tau,t)/\partial t = 0, \\ \partial H(\tau,t)/\partial \tau - (\rho(\tau))^{-1} \partial E(\tau,t)/\partial t = 0, \end{cases} \quad (1.8)$$

де $\rho(\tau) = \sqrt{\mu_0 \mu / \varepsilon_0 \varepsilon(\tau)}$ є характеристичний опір середовища розповсюдження. Розв'язок рівняння (1.8) для тангенціальних компонент поля можна подати двома лінійно незалежними складовими

$$\begin{bmatrix} E(\tau,t) \\ H(\tau,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1/\rho(\tau) & -1/\rho(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D(\tau,t) \\ U(\tau,t) \end{bmatrix}, \quad (1.9)$$

де $D(\tau, t)$ та $U(\tau, t)$ - падаюча та відбита хвилі, які розповсюджуються в протилежних напрямках: $D(\tau, t) = d_0(\tau - t)$ і $U(\tau, t) = u_0(\tau + t)$, відповідно.

Припускаючи, що в точці $z=0$ відсутня поверхня розділу середовищ, розв'язок прямої задачі можна шукати у вигляді

$$D(0, t) = \delta(t) \quad \text{та} \quad U(0, t) = r(t), \quad (1.10)$$

де $\delta(t)$ - дельта-функція. Тут $r(t)$ має сенс імпульсної характеристики багат шарової структури як реакції на $\delta(t)$ -збудження.

Одновимірну задачу розсіювання розв'язують також відносно невідомої частотної залежності коефіцієнта відбиття $R(\omega)$, який встановлює відношення між двома гармонічними хвилями, що розповсюджуються у протилежних напрямках:

$$e(z, \omega) = \exp(-i\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}z) + R(\omega)\exp(i\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}z) \quad \text{для} \quad z \leq 0. \quad (1.11)$$

Застосувавши зворотне перетворення Фур'є до попереднього виразу, отримаємо

$$E(z, t) = \delta(t - \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}z) + r(t + \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}z). \quad (1.12)$$

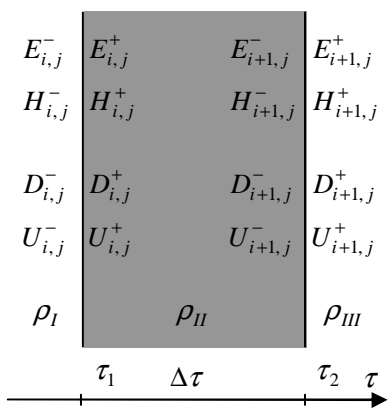


Рис. 1.1. Граничні

значення складових поля
для одного шару

Звідси імпульсна характеристика плоско-неоднорідної структури визначається коефіцієнтом відбиття як

$$r(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\omega) \exp(i\omega t) d\omega. \quad (1.13)$$

Отже пряма задача розсіювання полягає у тому, щоб знайти коефіцієнт відбиття і, відповідно, імпульсну характеристику плоско-неоднорідної структури, якщо відомо всі її параметри, а саме функцію діелектричної проникності, або товщину і діелектричну проникність всіх шарів.

Аналіз електромагнітного поля структури з плоскими поверхнями розділу можна зробити для часткового випадку – однорідного діелектричного шару (рис. 1.1). Товщина цього шару h визначає часову затримку $\Delta\tau = h\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon_{II}}$.

Коефіцієнт $\rho_m = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0\varepsilon_m}$ є характеристичним опором будь-якого з середовищ

$m = I, II, III$. Беручи до уваги відсутність складових поля, орієнтованих у напрямку осі z , граничні умови визначають неперервність перпендикулярних електричної та магнітної складових на поверхнях розділу середовищ $\tau = \tau_i, i = 1, 2$. Крім того, умову розповсюдження падаючої та відбитої хвиль всередині однорідного шару між поверхнями розділу можна визначити як

$$\begin{bmatrix} E(\tau_i - 0, t) \\ H(\tau_i - 0, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(\tau_i + 0, t) \\ H(\tau_i + 0, t) \end{bmatrix}; \quad (1.14)$$

$$\begin{bmatrix} D(\tau, t) \\ U(\tau, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0(\tau - t) \\ u_0(\tau + t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D(\tau + \Delta\tau, t + \Delta\tau) \\ U(\tau + \Delta\tau, t - \Delta\tau) \end{bmatrix}. \quad (1.15)$$

Це означає, що кожна хвиля витрачає час $\Delta\tau$ щоб пройти крізь всю товщину шару.

Припускаючи, що в досліджуваній структурі на момент збудження вихідної хвилі напруженість поля є нульовою, можна записати умову причинності

$$U(\tau, t) = 0, \text{ при } \tau > t. \quad (1.16)$$

Умови (1.14) - (1.16) дозволяють розв'язати пряму задачу дифракції у часовій області. У загальному випадку цю задачу можна сформулювати відносно падаючої хвилі $U(\tau, t)$ за умови, що часова залежність вихідної хвилі відома: $D(\tau, t)$. У випадку багат шарової структури застосовують рекурентну процедуру: починаючи з першої поверхні розділу, встановлюють значення напруженостей поля в околі кожної наступної поверхні розділу середовищ та визначають у цих точках функції $U(\tau, t)$ та $D(\tau, t)$ [62].

Відношення відбитої хвилі до падаючої у частотній області дає можливість обчислити коефіцієнт відбиття $R(\omega) = u^-(0, \omega) / d^-(0, \omega)$, якщо $d^-(0, \omega) \neq 0$. Тут $u^-(0, \omega)$ та $d^-(0, \omega)$ є функціями, які отримано застосуванням зворотного перетворення Фур'є (1.12) до функцій $U^-(0, t)$ та $D^-(0, t)$.

Інший принцип, який полягає у встановленні залежностей між коефіцієнтом розсіювання багат шарової структури та її частковим коефіцієнтом розсіювання без зовнішнього шару, також ефективно використовують для моделювання

розповсюдження хвиль у багат шаровій структурі у частотній області [63]. Він зводиться до перемноження трансмісійних матриць всіх шарів.

Якщо функція діелектричної проникності є неперервною, то розв'язання прямої задачі розсіювання відносно коефіцієнта відбиття зводиться до розв'язку рівняння Рікати [64,65]. Розв'язок такої задачі також шукають наближено, апроксимуючи неперервну діелектричну проникність кусково-постійною функцією. З практичної точки зору, найзручнішим способом апроксимації діелектричної проникності є наближення кусково-постійною функцією, розриви якої знаходяться у вузлах деякої регулярної сітки. Такі багат шарові структури називають середовищами типу Гуппілауд [66].

Нехай $\Delta\tau$ крок регулярної сітки. Це означає, що взаємодія між хвилею та середовищем буде розглядатися тільки для дискретних величин часу $t = j\Delta\tau$ та дискретних значень часової затримки $\tau = i\Delta\tau$, що спричинені розповсюдженням хвиль крізь багат шарову структуру. При цьому значення i та j вважають цілими, а їх суму $(i + j)$ - парною величиною. Точки, де значення електромагнітного поля обчислюється, показано на рис. 1.2 у координатах часу і часової затримки. Перехід до дискретної моделі розповсюдження хвиль вимагає нових позначень складових електромагнітного поля, а також нових позначень для падаючої та відбитої хвиль:

$$\begin{bmatrix} E_{i,j}^{\pm} \\ H_{i,j}^{\pm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(i\Delta\tau \pm 0, j\Delta\tau) \\ H(i\Delta\tau \pm 0, j\Delta\tau) \end{bmatrix}; \quad (1.17)$$

$$\begin{bmatrix} D_{i,j}^{\pm} \\ U_{i,j}^{\pm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D(i\Delta\tau \pm 0, j\Delta\tau) \\ U(i\Delta\tau \pm 0, j\Delta\tau) \end{bmatrix}. \quad (1.18)$$

За аналогією до дискретного зображення компонент електромагнітного поля, характеристичний опір у дискретній моделі визначено з лівої $\rho_i^- = \rho(\tau_i - 0)$ та правої $\rho_i^+ = \rho(\tau_i + 0)$ сторін від інтерфейсу i . Згідно з припущенням, багат шарова структура має однорідний матеріал $\rho(\tau) = const$ між сусідніми поверхнями розділу $\tau_i < \tau < \tau_{i+1}$, а отже виконується умова $\rho_i^+ = \rho_{i+1}^-$.

Відношення між складовими поля з обох сторін поверхні розділу можна встановити на основі виразу (1.9) і граничних умов (1.14), (1.17) та (1.18), записаних у дискретній формі:

$$\begin{bmatrix} D_{i+1,j}^+ \\ U_{i+1,j}^+ \end{bmatrix} = \frac{1}{2\rho_{i+1}^-} \begin{bmatrix} (\rho_{i+1}^+ + \rho_{i+1}^-) & -(\rho_{i+1}^+ - \rho_{i+1}^-) \\ -(\rho_{i+1}^+ - \rho_{i+1}^-) & (\rho_{i+1}^+ + \rho_{i+1}^-) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{i+1,j}^- \\ U_{i+1,j}^- \end{bmatrix} = Q_{i+1} \begin{bmatrix} D_{i+1,j}^- \\ U_{i+1,j}^- \end{bmatrix}. \quad (1.19)$$

Для того, щоб описати процес розповсюдження хвилі крізь структуру типу Гуппілауд, умову передачі (1.15) приведемо до дискретного вигляду: $D_{i+1,j}^- = D_{i,j-1}^+$ та $U_{i+1,j}^- = U_{i,j+1}^+$. Розглянемо дискретний момент часу $j+1$ замість j . Це можна записати аналітично, здійснюючи заміну позначень у виразі (1.19):

$$\begin{bmatrix} D_{i+1,j+1}^+ \\ U_{i+1,j+1}^+ \end{bmatrix} = Q_{i+1} \begin{bmatrix} D_{i,j}^+ \\ U_{i,j+2}^+ \end{bmatrix}. \quad (1.20)$$

Цей вираз є основним рівнянням, що описує розповсюдження хвиль крізь середовище типу Гуппілауд. Знаючи параметри середовища - всі ρ_i , а також значення у правій частині виразу (1.20), знаходимо невідомі в лівій частині, починаючи з величин, що задає гранична умова (1.16).

Обернену задачу розсіювання формулюють відносно невідомої діелектричної проникності. У тривіальній одновимірній задачі розсіювання припускають, що невідома функція є неперервною і дійсною, а вихідні дані задані частотною залежністю коефіцієнта відбиття $R(\omega)$ для всіх значень частоти $\omega \in \mathbb{R}^1$, або імпульсною характеристикою $r(t)$. Як видно, різні підходи до розв'язання прямої одновимірної задачі розсіювання не дають змогу безпосередньо побудувати розв'язок оберненої навіть для тривіального випадку.

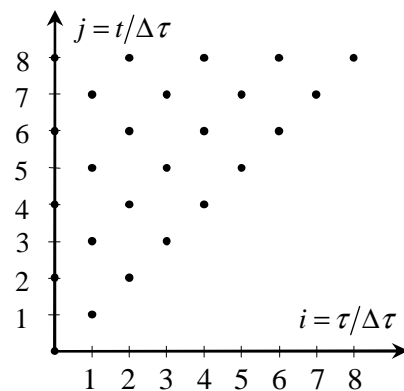


Рис. 1.2. Регулярна сітка в площині час-затримка, в вузлах якої обчислено

значення електромагнітного поля

значення електромагнітного поля

1.2.4. Розсіювання на контрастному ідеально провідному розсіювачі. Для математичного опису розсіювання електромагнітних хвиль та формулювання відповідної оберненої задачі у багатовимірному випадку розглянемо окремо дві тривіальні моделі, де об'єктом дослідження є:

- ідеально провідний циліндричний розсіювач;
- діелектричний розсіювач, параметри якого змінюються у просторі неперервно.

У першому випадку на ідеально провідний розсіювач D з поверхнею ∂D падає плоска монохроматична електромагнітна хвиля, хвильовий вектор якої колінеарний з вектором падіння \mathbf{d} (рис.1.3). Розсіяне поле вимірюємо на поверхні B , кожна точка якої, за припущенням, є рівновіддаленою від початку координат. Вважатимемо також, що відстань до цієї точки поверхні B є незрівнянно більшою, ніж розміри розсіювача D .

Математично процеси динамічної взаємодії електромагнітного поля та ідеально-провідного розсіювача D , розташованого у середовищі з діелектричною проникністю ε та магнітною проникністю μ можна описати рівняннями Максвела (1.4), які визначають просторовий розподіл поля та його часову залежність.

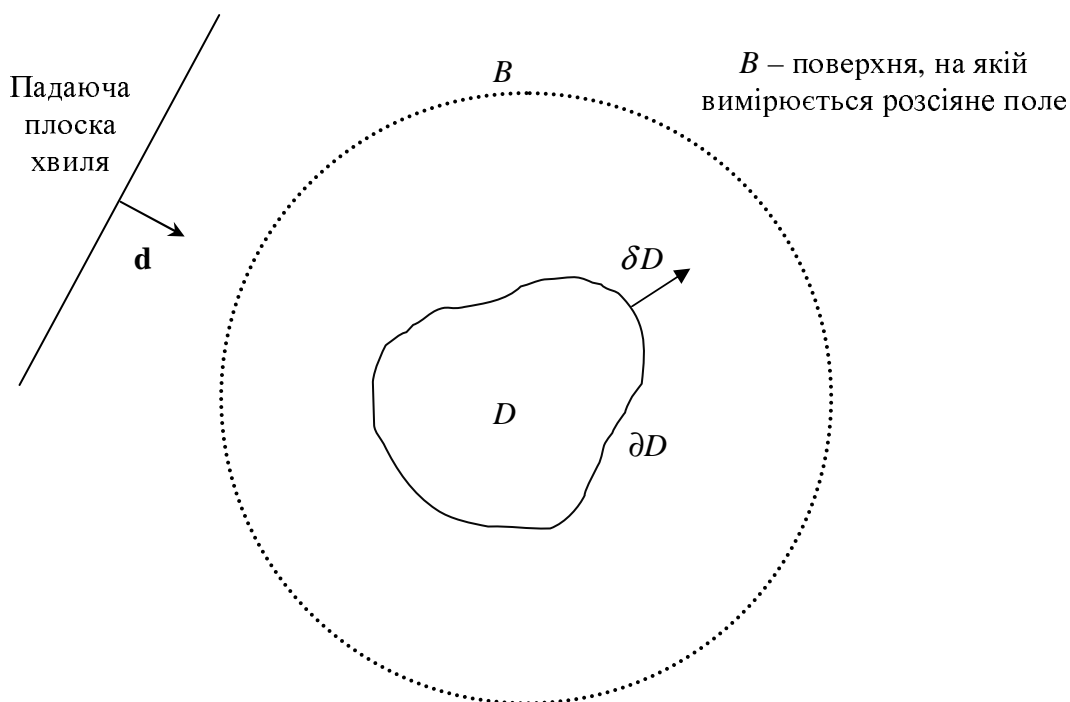


Рис.1.3. Падіння плоскої хвилі на ідеально провідний розсіювач D

Розв'язок прямої задачі розсіювання для рівняння Максвелла (1.4), яка дозволяє визначити розподіл поля довкола $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus D$ відомого розсіювача D , записують у вигляді $E = E^i + E^s$ та $H = H^i + H^s$, де E^s та H^s - функції, що відповідають електричній та магнітній складовим розсіяної хвилі і E^i та H^i - падаючої, відповідно.

Оскільки матеріал розсіювача є ідеально провідним, то на його поверхні розв'язок (1.4) задовольняє граничній умові

$$\mathbf{v} \times E = 0, \quad (1.21)$$

де \mathbf{v} - спрямована назовні нормаль до поверхні.

Єдиність розв'язку прямої задачі розсіювання можна забезпечити, якщо на розв'язок накласти умову випромінювання на нескінченості типу Silver-Müller

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (H^s \times \mathbf{x} - rE^s) = 0, \quad (1.22)$$

де $r = |\mathbf{x}|$.

Аналітичні та числові розв'язки прямої задачі розсіювання всесторонньо висвітлені в літературі, зокрема в [67-72]. В інтегральній формі розв'язок прямої задачі розсіювання зручно записати, використовуючи формули Стретона-Чу [70]:

$$E(\mathbf{x}) = E^i(\mathbf{x}) - \frac{1}{ik} \text{rot rot} \int_{\partial D} \mathbf{v}(\mathbf{y}) \times H(\mathbf{y}) \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}); \quad (1.23)$$

$$H(\mathbf{x}) = H^i(\mathbf{x}) + \text{rot} \int_{\partial D} \mathbf{v}(\mathbf{y}) \times H(\mathbf{y}) \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}), \quad (1.24)$$

де $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\exp(ik|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}$ - функція Гріна для вільного простору.

Для спрощення теоретичного доведення розглянемо частковий випадок, коли плоска хвиля падає на безмежно довгий ідеально провідний циліндр з поперечним перерізом D . При цьому вісь циліндра співпадає з координатною віссю x_3 . Поляризацію падаючої хвилі вибрано так, що розв'язок рівняння Максвелла для напруженості електричного поля має лише одну складову $E = (0, 0, E_3)$. Отже, вираз для плоскої хвилі буде мати вигляд $E^i(\mathbf{x}) = \exp(ik\mathbf{x} \cdot \mathbf{d}) \hat{e}_3$, де \hat{e}_3 - одиничний вектор, що співпадає з віссю координат x_3 та віссю циліндра. Припустимо також, що фронт

падаючої плоскої хвилі є паралельним до осі циліндра, а отже вектор $\mathbf{d} \in \mathbb{S}^1$, $\mathbf{d} = (d_x, d_y, 0)$ залежатиме лише від кута падіння, визначеного у площині xy . Очевидно, що для такого випадку напруженість магнітного поля, як розв'язок рівняння Максвела, визначатиметься двома складовими $H = (H_1, H_2, 0)$. Вони H_1 та H_2 та ненульова складова вектора напруженості електричного поля E_3 можуть бути визначені з системи рівнянь (1.4), переписаних у вигляді

$$\begin{cases} \frac{\partial E_3}{\partial y} = ikH_1, \\ \frac{\partial E_3}{\partial x} = -ikH_2, \\ \frac{\partial H_2}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial y} = -ikE_3. \end{cases} \quad (1.25)$$

У результаті підстановки перших двох рівнянь в останнє отримаємо

$$\Delta E_3 + k^2 E_3 = 0 \text{ для } \mathbb{R}^3 \setminus D. \quad (1.26)$$

Умову випромінювання на безмежності (1.22) для скалярного випадку запишемо через умову Зомерфельда

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial E_3^s}{\partial r} - ikE_3^s \right) = 0, \quad (1.27)$$

а гранична умова (1.21) на поверхні циліндра матиме вигляд

$$E_3(\mathbf{x}) = 0, \text{ для } \mathbf{x} \in \partial D. \quad (1.28)$$

Очевидно, що розв'язок рівняння (1.25) можна подати як суму падаючої і розсіяної хвилі:

$$E_3(\mathbf{x}) = \exp(ik\mathbf{x} \cdot \mathbf{d}) + E_3^s(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (1.29)$$

Використавши інтегральне зображення розв'язку (1.23) для загального випадку, визначимо його складові для випадку розсіювання плоскої хвилі на циліндричному розсіювачі. Для цього покажемо, що другий доданок у виразі (1.29) можна записати через функцію густини поверхневих струмів $J(\mathbf{y})$

$$\begin{aligned}
E(\mathbf{x}) &= E^i(\mathbf{x}) - \frac{1}{ik} \text{rotrot} \int_{\partial D} \nu(\mathbf{y}) \times H(\mathbf{y}) \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) = \\
&= E^i(\mathbf{x}) - \frac{1}{ik} \text{rotrot} \int_{\partial D} \hat{e}_3 J(\mathbf{y}) \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) = E^i(\mathbf{x}) - \frac{1}{ik} \text{rotrot}(\hat{e}_3 T_3),
\end{aligned} \tag{1.30}$$

де $T_3(\mathbf{x}) = \int_{\partial D} J(\mathbf{y}) \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ds(\mathbf{y})$ - скаляр.

Подвійне застосування оператора ротації до функції $(\hat{e}_3 T_3)$ дає можливість записати тотожність

$$\begin{aligned}
\text{rotrot}(\hat{e}_3 T_3) &= \hat{e}_1 \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T_3}{\partial x} \right) \right) + \hat{e}_2 \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T_3}{\partial y} \right) \right) + \hat{e}_3 \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial T_3}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T_3}{\partial y} \right) \right) = \\
&= -\hat{e}_3 \left(\frac{\partial^2 T_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_3}{\partial y^2} \right) = -\hat{e}_3 \Delta T_3.
\end{aligned} \tag{1.31}$$

У свою чергу Лапласіан скалярної функції T_3 можна визначити як

$$\Delta T_3 = \Delta \left(\int_{\partial D} J(\mathbf{y}) \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \right) = \int_{\partial D} J(\mathbf{y}) (\Delta \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})) ds(\mathbf{y}). \tag{1.32}$$

Враховуючи, що функція Гріна $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ є розв'язком рівняння Гельмгольца $\Delta \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + k^2 \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, її Лапласіан рівний

$$\Delta \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - k^2 \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \tag{1.33}$$

Підставивши цей вираз у формулу (1.32), отримаємо

$$\begin{aligned}
\Delta T_3 &= \Delta \left(\int_{\partial D} J(\mathbf{y}) \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \right) = \int_{\partial D} J(\mathbf{y}) (\Delta \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})) ds(\mathbf{y}) = \\
&= \int_{\partial D} J(\mathbf{y}) (\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - k^2 \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})) ds(\mathbf{y}) = -k^2 \int_{\partial D} J(\mathbf{y}) \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}).
\end{aligned} \tag{1.34}$$

Тоді з виразів (1.30), (1.31) та (1.34) можемо знайти інтегральне зображення напруженості електричного поля довкола нескінченно довгого ідеально провідного циліндра

$$\begin{aligned}
E(\mathbf{x}) &= E^i(\mathbf{x}) - \frac{1}{ik} \text{rotrot} \int_{\partial D} \nu(\mathbf{y}) \times H(\mathbf{y}) \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) = E^i(\mathbf{x}) - \frac{1}{ik} \text{rotrot}(\hat{e}_3 T_3) = \\
&= E^i(\mathbf{x}) + \hat{e}_3 (ik) \int_{\partial D} J(\mathbf{y}) \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}).
\end{aligned} \tag{1.35}$$

Складова $E_3^s(\mathbf{x}) = ik \int_{\partial D} J(\mathbf{y}) \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ds(\mathbf{y})$ розсіяного поля у цьому виразі залежить від функції густини поверхневого струму $J(\mathbf{y})$ для $\mathbf{y} \in \partial D$, яка

визначається розподілом падаючої хвилі на поверхні розсіювача. Неявну залежність функцій $E_3^s(\mathbf{x})$ та $J(\mathbf{y})$ від напрямку \mathbf{d} падіння плоскої хвилі на циліндр тут опущено задля спрощення.

Пряма задача розсіювання [67] зводиться до інтегрального рівняння, записаного відносно невідомої густини розподілу струмів $J(\mathbf{y})$, яке отримують з граничної умови (1.28). Визначення функції $J(\mathbf{y})$ з граничної умови виходить за рамки цього дослідження, оскільки не представляє цінності для вирішення оберненої задачі методами, що розглядаються.

Для числового знаходження густини струму та обчислення напруженості поля довкола ідеально провідного тіла використано метод фундаментальних розв'язків [73]. З метою збільшення відношення розмірів розсіювача до довжини хвилі реалізовано підхід, який полягає у розкладі регуляризованої системи інтегральних рівнянь в базисі Wavelet функцій [74]. Завдяки властивостям Wavelet розкладу вдалося отримати матриці з великою кількістю малозначущих елементів. Це, в свою чергу, дозволило досягнути значно менших обчислювальних затрат на реалізацію ітераційної процедури знаходження оберненої матриці, ніж у випадку обчислення розсіяного поля методом фундаментальних розв'язків без розрідження матриць. Для перевірки точності числових методів розв'язання прямої задачі розсіювання використано аналітичний розв'язок, який можна знайти для ідеально провідного циліндра з круглим перерізом [72], подаючи значення поля у вигляді суми коефіцієнтів ряду спеціальних функцій.

Якщо пряму задачу розсіювання для заданої форми розсіювача ∂D формулюють відносно невідомих функцій E^s та H^s на поверхні B при відомому розподілі поля падаючої хвилі, що визначається вектором \mathbf{d} та поляризацією, то обернена задача, навпаки, полягає у знаходженні невідомої функції ∂D . Розподіл напруженостей електромагнітного поля $E^s(\mathbf{x}, \mathbf{d})$ та $H^s(\mathbf{x}, \mathbf{d})$, які реєструють на поверхні $\mathbf{x} \in B$, має характерну асимптотичну поведінку на безмежності, яка визначається діаграмою розсіювання $f(\mathbf{d}, \mathbf{l})$, де $\mathbf{l} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|, |\mathbf{x}| \rightarrow \infty$. Вихідними даними в оберненій задачі можуть служити функції розподілу поля $E^s(\mathbf{x}, \mathbf{d})$ та $H^s(\mathbf{x}, \mathbf{d})$ у

ближній зоні, задані для всіх напрямів падаючої хвилі $\mathbf{d} \in \mathbb{S}^2$ з фіксованою поляризацією, або діаграма розсіювання $f(\mathbf{d}, \mathbf{l})$, $\mathbf{l}, \mathbf{d} \in \mathbb{S}^2$. Саме для останньої задовольняється умова єдності розв'язку оберненої задачі розсіювання.

1.2.5. Розсіювання на проникному діелектричному об'єкті. Як відомо, за певних умов рівняння Максвела також можна подати у вигляді рівняння Гельмгольца. Розглянемо один з цих випадків на прикладі поширення електромагнітних хвиль у неоднорідному середовищі з коефіцієнтом заломлення $n(x, y, z) = \varepsilon(x, y, z) / \varepsilon_0$. Відповідну модель складають рівняння Максвела (1.4) для монохроматичної хвилі відносно напруженостей електричного та магнітного полів:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} E - ikH = 0, \\ \operatorname{rot} H + ikn(x, y, z)E = 0, \end{cases} \quad (1.36)$$

де $k = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ - хвильовий коефіцієнт, ε_0 та μ_0 - діелектрична та магнітна проникність вакууму, ε - абсолютне значення діелектричної проникності і ω - радіальна частота.

У загальному випадку діелектрична проникність $\varepsilon(x, y, z)$ може бути кусково-неперервною, а для середовищ із втратами діелектрична проникність і коефіцієнт заломлення матимуть комплексний вигляд $n(x, y, z) = (\varepsilon(x, y, z) + i\sigma(x, y, z)/\omega) / \varepsilon_0$, де $\sigma(x, y, z)$ - провідність середовища. Для контрастного однорідного розсіювача розподіл діелектричної проникності у просторі $\varepsilon(x, y, z)$ має вигляд кусково-постійної функції.

Для прикладу розглянемо випадок перпендикулярного падіння плоскої електромагнітної хвилі на діелектричний циліндр довільного поперечного перерізу, в якого діелектрична проникність $\varepsilon(x, y, z) = \varepsilon(x, y, 0)$ не залежить від координати z (рис. 1.4). Тоді коефіцієнт заломлення має вигляд $n(x, y, z) = n(x, y, 0) = \varepsilon(x, y, 0) / \varepsilon_0$. Будемо вважати, що поляризацію падаючої хвилі вибрано так, що складові поля

падаючої хвилі відсутні $E_1^i = E_2^i = H_3^i = 0$. Тоді рівняння Максвела (1.36) можна переписати у вигляді

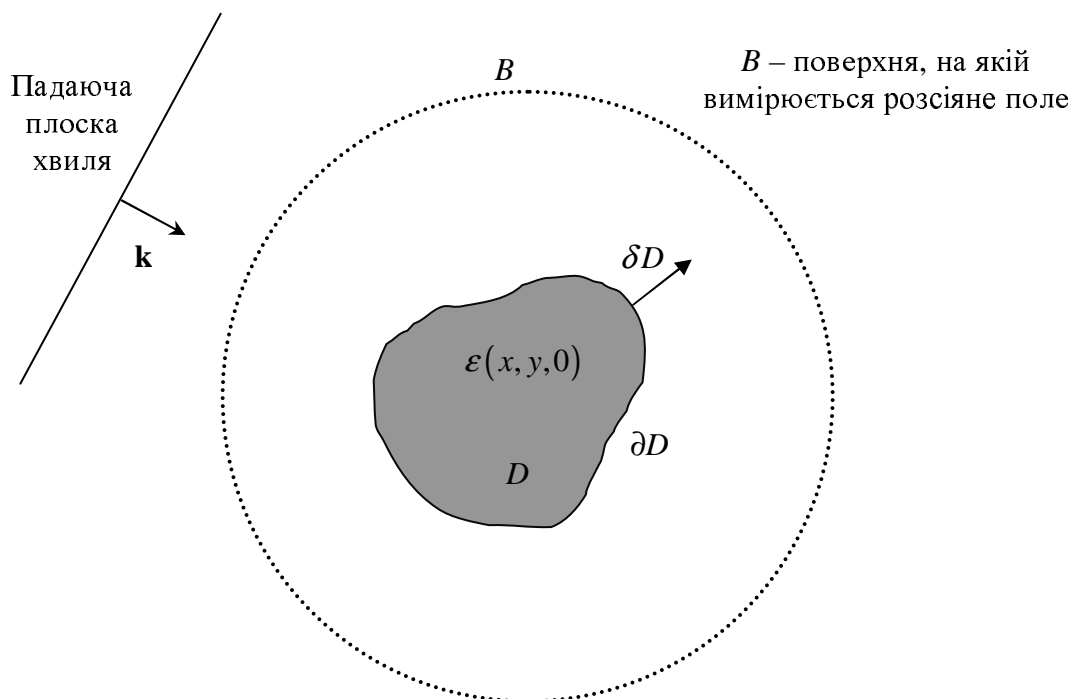


Рис. 1.4. Падіння плоскої хвилі на діелектричний розсіювач D

$$\begin{cases} \frac{\partial E_3}{\partial y} = ikH_1, \\ \frac{\partial E_3}{\partial x} = -ikH_2, \\ \frac{\partial H_2}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial y} = -ikn(x, y, 0)E_3. \end{cases} \quad (1.37)$$

У результаті підстановки перших двох рівнянь в останнє отримаємо

$$\frac{d^2 E_3}{dx^2} + \frac{d^2 E_3}{dy^2} + k^2 n(x, y, 0) E_3 = 0. \quad (1.38)$$

Введемо нову змінну $v(x, y) = k^2 - k^2(\varepsilon(x, y, 0)/\varepsilon_0)$ і перепишемо хвильове рівняння (1.38), розділивши постійні та змінні коефіцієнти

$$\frac{\partial^2 E_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_3}{\partial y^2} - v(x, y) E_3 + k^2 E_3 = 0. \quad (1.39)$$

Оскільки всі змінні у цьому виразі не залежать від координати z , таке рівняння можна трактувати як двовимірне рівняння Шредінгера.

$$\Delta\psi - v \cdot \psi + k^2\psi = 0, \quad (1.40)$$

де ψ та v - мають зміст хвильової функції та потенціалу, а $k^2 = E$ є енергією в теорії квантової механіки [75].

Як видно з (1.38) та (1.40), для фіксованої частоти ω рівняння Гельмгольца та рівняння Максвела після простої заміни коефіцієнтів $v(x, y) = k^2(1 - n(x, y, 0))$ та змінних $E_3 = \psi$ можна розглядати як двовимірне рівняння Шредінгера з фіксованим значенням енергії. Навіть при комплексному значенні діелектричної проникності та комплексному коефіцієнті заломлення на фіксованій частоті рівняння Гельмгольца також можна трактувати як рівняння Шредінгера з комплекснозначною функцією потенціалу. Саме ця особливість дозволяє скористатися теоретичними напрацюваннями в теорії прямих та обернених задач розсіювання для рівняння Шредінгера, вирішуючи аналогічні акустичні та електродинамічні задачі.

Розглянемо пряму задачу розсіювання на неоднорідному діелектричному безвтратному циліндрі, виходячи з встановленого взаємозв'язку між рівнянням (1.38) та (1.40) у двовимірному випадку $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Асимптотичну поведінку розв'язків рівняння (1.40), які задовольняють умові Зомерфельда на нескінченості, можна виразити через діаграму розсіювання, або функцію розсіяного поля в дальній зоні $f(\mathbf{k}, \mathbf{l})$, де \mathbf{k} та \mathbf{l} - вектори, які визначають напрями падіння плоскої хвилі та спостереження. Абсолютне значення векторів \mathbf{k} та \mathbf{l} дорівнює хвильовому числу у вільному просторі $|\mathbf{k}| = |\mathbf{l}| = k = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$. Як відомо, поле в дальній зоні довкола розсіювача можна виразити сумою напруженості поля падаючої хвилі та напруженості розсіяного поля, що відповідає асимптоті розв'язку рівняння Шредінгера відносно хвильової функції на безмежності:

$$\psi^+(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = \exp(i(\mathbf{x}, \mathbf{k})) - i\pi\sqrt{2\pi} \exp(-i\pi/4) \frac{\exp(i|\mathbf{x}| |\mathbf{k}|)}{\sqrt{|\mathbf{x}| |\mathbf{k}|}} f\left(\mathbf{k}, |\mathbf{k}| \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{x}|}}\right), \quad (1.41)$$

де \mathbf{x} - точка спостереження.

Аналогічну форму запису розв'язку прямої задачі розсіювання, яка використовує діаграму $f(\mathbf{k}, \mathbf{l})$, можна встановити також для випадку ідеально

провідного циліндру, що описано в попередньому пункті.

Для рівняння Шредінгера (1.40) розв'язок прямої задачі розсіювання полягає у знаходженні функції $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{k})$, якщо потенціал v є відомим. Такий розв'язок можна отримати з рівняння Ліппмана-Швінгера [76]:

$$\psi^\pm(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = \exp(i(\mathbf{l}, \mathbf{x})) + \int_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2} G_\pm(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{k}) v(\mathbf{y}) \psi^\pm(\mathbf{y}, \mathbf{k}) d\mathbf{y}, \quad (1.42)$$

де $G_\pm(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = -\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2} \frac{\exp(i(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}))}{\boldsymbol{\xi}^2 - \mathbf{k}^2 \mp i0} d\boldsymbol{\xi}$ - функція Гріна.

Для відомої хвильової функції $\psi^+(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ діаграму розсіювання знаходять з виразу [55]:

$$f(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \exp(-i(\mathbf{l}, \mathbf{x})) v(\mathbf{x}) \psi^+(\mathbf{x}, \mathbf{k}) d\mathbf{x}. \quad (1.43)$$

У випадку, якщо однорідний діелектричний циліндр має контрастні границі, розв'язок прямої задачі шукають методом інтегральних рівнянь [67, 77, 78]. В роботі розв'язок прямої задачі для контрастних діелектричних розсіювачів знайдено числово за допомогою методу фундаментальних розв'язків [79], а його точність перевірено у часткових випадках співставленням числових даних із аналітичними розв'язками задачі розсіювання на діелектричному циліндрі круглого перерізу та діелектричному багат шаровому круглому циліндрі [80].

Функцію діаграми розсіювання $f(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ задають як вихідні дані при формулюванні відповідної оберненої задачі. Вона полягає у знаходженні невідомого потенціалу Шредінгера v і, відповідно, коефіцієнта заломлення $n(x, y, 0) = 1 - v(x, y)/k^2$ та функції діелектричної проникності $\varepsilon(x, y, 0) = \varepsilon_0 n(x, y, 0)$.

1.2.6. Формулювання оберненої задачі як інструмент для оцінювання параметрів моделі досліджуваних середовищ. На сьогоднішній день принципи функціонування засобів, що здійснюють оцінювання параметрів середовищ непрямыми методами (у тому числі і засоби неруйнівного контролю та дистанційного зондування) шляхом належної обробки результатів вимірювань,

спеціалізують у відповідності до припущення про характер розподілу діелектричної проникності об'єктів дослідження. На практиці така апіорна інформація про об'єкт дослідження є доступною лише у небагатьох випадках, а невідповідність способу оцінювання параметрів припущенню про об'єкт дослідження може істотно спотворити результат. Тому методи обробки необхідно будувати на основі якомога більш узагальненої моделі.

З аргументів, наведених вище, видно, що базовою моделлю для систем неруйнівного контролю та дистанційного зондування є рівняннями Максвелла з певними обмеженнями на геометрію та параметри, зумовлені технічними аспектами реалізації вимірювань. Вчені розвинули багато методів для розв'язання таких рівнянь з метою моделювання реальних процесів за умови, що характеристики вимірювальної системи та параметри середовищ відомі. Розв'язок рівнянь Максвелла дозволяє визначити розподіл електромагнітного поля та змоделювати реєстрацію даних у засобах вимірювання. Така пряма задача розсіювання належить до добре вивчених розділів в теорії диференціальних та інтегральних рівнянь. На відміну від прямих задач, обернену задачу розсіювання формулюють відносно невідомих параметрів (форма, матеріал, внутрішня структура) об'єкта дослідження за відомими даними про розсіяне поле навколо нього. Саме тому розв'язок обернених задач розсіювання розглядають як найбільш раціональний підхід до створення методів обробки вимірювань у засобах, що здійснюють оцінювання параметрів середовищ непрямыми методами.

Очевидно, що через складність моделей процесів розсіювання неможливо знайти розв'язок оберненої задачі у явній формі, де результат був би поданий функцією вихідних даних - параметрів розсіяного поля. Тому *строгим* називають розв'язок багатовимірної оберненої задачі розсіювання, якщо його вдається звести до розв'язання тривіальних задач без спрощення самої моделі процесу розсіювання. При цьому необхідно, щоб такі тривіальні задачі задовольняли умовам існування та єдиності розв'язку.

Оскільки обернені задачі розсіювання належать до більш загального класу обернених задач, і з огляду на співвідношення між вихідними даними та шуканими

параметрами, ці задачі є ще й істотно нелінійними. Без сумніву, їх необхідно розглядати як некоректні задачі [81]. Відповідно постають питання про існування розв'язку, його єдиність та стійкість до похибок. Більшість із цих питань у теорії обернених задач досі залишаються без відповіді. Перелічені проблеми доведення існування та єдиності розв'язку стають особливо гострими для обернених задач розсіювання, що базуються на загальних, багатовимірних моделях.

Сформулювати обернену задачу про знаходження невідомих параметрів $\{\varepsilon(x), \sigma(x)\}$ діелектрика (у тому числі з втратами) можна за допомогою мінімізації нев'язки

$$\{\hat{\varepsilon}(x), \hat{\sigma}(x)\} = \arg \min_{\varepsilon(x), \sigma(x)} \|E_{scat}(x', \omega) - E_{synt}(x', \omega)\|, \quad (1.44)$$

де $E_{scat}(x', \omega)$ та $E_{synt}(x', \omega)$ - результати вимірювань та синтезовані дані встановлені у відповідності до розв'язку прямої задачі, модель якої вибрано з огляду на особливості процесів розсіювання та технічні обмеження.

Враховуючи некоректність сформульованих обернених задач, доцільним видається пошук лише їх наближеного розв'язку. За наявності апріорних даних задачу мінімізації (1.44) модифікують, регуляризуючи розв'язок. Таку регуляризацию здійснюють методами Тихонова [81], Лаврентьева [82] і т.д. за умови гладкості шуканого розв'язку. Статистичний підхід до оцінювання параметрів методами максимуму апостеріорної ймовірності за наявності апріорної інформації також дає можливість отримати регуляризований розв'язок [20].

З формулювання задачі мінімізації нев'язки випливає, що розв'язок оберненої задачі включає розв'язок добре вивченої прямої задачі [83]. Саме цим пояснюють той факт, що мінімізаційні підходи до розв'язання обернених задач розсіювання набули широкого розповсюдження як серед математиків, так і серед науковців-прикладників. При цьому мінімізаційні підходи успадкували та ефективно розвивають багато інструментів з теорії інтегральних та диференціальних рівнянь, а також з теорії числового аналізу. Крім звичайних підходів, що базуються на методах Ньютона [84,85] та градієнтного спуску [86], існують методи, в яких задача мінімізації сформульована неявно, а розв'язок оберненої задачі розсіювання

зводиться до ітераційної схеми уточнення результату. Варто зазначити такі підходи як level-set method [87], гібридний метод [88,89] та метод найкращої підгонки [90] при різних параметризаціях невідомих функцій, або параметрично заданих поверхонь, де задовольняються граничні умови.

Очевидно, що функціонали нев'язки, які асоціюються з оберненими задачами розсіювання, мають багатоекстремальний характер, тому існує ймовірність знайти лише локальний екстремум, зокрема через властиву цим задачам сильну залежність від початкового наближення. Для вирішення багатоекстремальних задач застосовують генетичні алгоритми [91], що дозволяють досягнути прийняттого наближеного розв'язку у багатьох практичних задачах. Це особливо стосується розв'язку задачі синтезу розсіювачів, для яких задано характеристики розсіювання [92].

У той час як багато науковців трактують обернену задачу розсіювання як задачу мінімізації функціоналу нев'язки, інші дослідники намагаються знайти менш часо- та ресурсозатратні підходи, які не потребують розв'язання багатоекстремальної задачі мінімізації та багатократного розв'язання прямої задачі.

Саме аналіз і розвиток немінимізаційних строгих підходів є пріоритетним напрямом дисертаційної роботи.

З метою систематизації аналізу відомих підходів до розв'язання обернених задач розсіювання їх класифіковано відповідно до розмірності оберненої задачі, способу представлення вихідних даних та використаної моделі процесів розсіювання.

1.3. Огляд методів розв'язання одновимірних обернених задач розсіювання

За характером шуканої функції обернені задачі розсіювання плоских електромагнітних хвиль на плоско-неоднорідних середовищах прийнято умовно розділяти на два типи: обернені задачі, в яких шукана діелектрична проникність є неперервною функцією; обернені задачі для структур з однорідними електричними

параметрами шарів, які можна трактувати як задачі реконструкції кусково-постійної діелектричної проникності. Можуть бути також і задачі змішаного типу. Частково аналіз відомих методів розв'язання одновимірних обернених можна знайти в оглядових статтях [93-95] та монографіях [62, 96,97].

1.3.1. Встановлення неперервної дійсної діелектричної проникності за комплексним коефіцієнтом відбиття. Обернені задачі розсіювання стали предметом спеціального вивчення (як окремий розділ математики) на початку 50-х років. Значного прогресу в розвитку теорії одновимірних обернених задач розсіювання досягнуто завдяки доведенню теореми про існування операторів перетворення [98]. Остатні дозволили звести розв'язок одновимірної оберненої задачі розсіювання до інтегрального рівняння Вольттери другого роду [99,100]. Таке рівняння при виконанні певних умов на шукану гладку функцію має єдиний розв'язок. І. Гельфанд, Б. Левітан [101] та В.Марченко [99,100-103] розвинули строгий метод встановлення радіального потенціалу в рівнянні Шредінгера за даними розсіювання, що характеризує взаємодію двох елементарних частинок. Розвиток методів розв'язання обернених задач розсіювання відносно неперервної функції діелектричної проникності, в основному, пов'язаний з ідеями, покладеними в основу теорії одновимірних обернених задач для рівняння Шредінгера [97,104-111], та відповідних спектральних задач для операторів Штурма-Ліувіля [112]. Варто наголосити, що одновимірне рівняння Шредінгера є частковим випадком радіального рівняння Шредінгера при нульовому значенні кутового моменту [55]. Окрім того, приведення одновимірного хвильового рівняння типу Гельмгольца до рівняння Шредінгера дозволяє використати методи інтегральних рівнянь Гельфанда-Левітана та Марченка для реконструкції неперервної функції діелектричної проникності [93,94,96]. Особливими випадками в теорії потенціального розсіювання є спеціальні Брагманівські потенціали для рівняння Шредінгера, які дозволяють обернену задачу розсіювання розв'язати строго у явній формі [113].

Відомо, що якщо задано комплексний коефіцієнт відбиття $R(\omega)$ для $\omega \in \mathbb{R}^1$ за умови нормального падіння на плоско-неоднорідну структуру, то неперервну функцію діелектричної проникності можна відновити єдиним чином, а обернену задачу розсіювання можна вважати тривіальною. Твердження про єдиність випливає з властивості самоспряженості задачі та теореми Левінсона [55].

Поряд із застосуванням теорії Гельфанда-Левітана та Марченка до одновимірного акустичного рівняння розвинуто й інші методи встановлення неперервної функції коефіцієнтів хвильових рівнянь, які також зводяться до інтегральних рівнянь типу Вольтерри другого роду. Спочатку виведення таких методів базувалося на твердженнях функціонального аналізу, а згодом нові розв'язки отримано за допомогою теорії операторів та теорії функцій комплексної змінної, де ключову роль відіграла задача Гільберта-Рімана. В таблиці 1.2. подано перелік основних інтегральних рівнянь та залежностей, що складають основу відомих методів встановлення функції діелектричної проникності. Для цього за вихідними даними визначено імпульсну характеристику плоско-неоднорідної структури як

$$r(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R(k) \exp(ikz) dk. \quad (1.45)$$

На жаль, всі ці методи використовують інтегральні рівняння Вольттера другого роду і, як встановлено в роботі [114], не дозволяють вирішити обернену задачу відносно шуканих функцій, що містять особливості - розриви в точках розташування поверхонь розділу середовищ.

Крім того, наявність втрат у середовищі переводить обернену задачу розсіювання в клас несамоспряжених задач, що істотно ускладнює їх розв'язок.

Таблиця 2.1. Методи розв'язання оберненої задачі розсіювання відносно діелектричної проникності, які зводяться до інтегрального рівняння другого роду

<p>Метод Гельфанда-Левітана і Марченка [106]</p> $r(x+y) + K_{GLM}(x,y) + \int_{-y}^x K_{GLM}(x,y')r(y+y')dy' = 0$ $V(x) = -\frac{d}{dx}K_{GLM}(x,x)$ $\frac{d^2}{dx^2}(\sqrt[4]{\varepsilon(x)}) + V(x)\sqrt[4]{\varepsilon(x)} = 0$
<p>Метод Захарова-Шабата [8]</p> $\begin{cases} r(x+y) - K_1(x,y) + \int_{-y}^x K_2(x,y')r(x+y')dy' = 0, \\ K_2(x,y) + \int_{-y}^x K_1(x,y')r(x+y')dy' = 0 \end{cases}$ $\tau(x) = -K_1(x,x)$ $\varepsilon(x) = \exp\left(-4 \int_{-\infty}^x \tau(x')dx'\right)$
<p>Метод Баланіса [108]</p> $K_{Balanis}(x,y) - \int_{-y}^x [1 + K_{Balanis}(x,y')]r(y+y')dy' = 0$ $\varepsilon(x) = \frac{1}{(1 + K_{Balanis}(x,x))^4}$
<p>Метод Коена [107]</p> $r(x+y) + K_{Coen}(x,y) + \int_{-y}^x K_{Coen}(x,y')r(y+y')dy' = 0$ $\varepsilon(x) = \left(1 + \int_{-x}^x K_{Coen}(x,y')dy'\right)^4$
<p>Метод Гопіназ-Сондхі [136]</p> $K_{Gopinath-Sondhi}(x,y) + \frac{1}{2} \int_{-x}^x [r(y-y') - \delta(y-y')] K_{Gopinath-Sondhi}(x,y')dy' = 1$ $\varepsilon(x) = (K_{Gopinath-Sondhi}(x,x))^4$

1.3.2. Обернені задачі розсіювання для середовищ із втратами та анізотропних середовищ. Обернені задачі розсіювання для втратних середовищ мають особливе фізичне значення [115-118], так як більшість діелектричних матеріалів характеризуються незначними втратами електромагнітної енергії на струми провідності. Математично ця проблема є еквівалентною до оберненої задачі розсіювання для енергонезалежного потенціалу в рівнянні Шредінгера [55, 117, 119, 120], а також для несиметричної системи Дірака [121, 122]. Варто відзначити роботи Jaulen [117, 120] в теорії обернених задач для енергозалежних потенціалів і, зокрема, працю [123], де проблему синтезу втратної лінії передачі розглянуто як обернену задачу розсіювання для системи рівнянь типу Захарова-Шабата [124]. Крім того, розв'язок нелінійних еволюційних рівнянь [125, 126] є іншою областю застосування підходу оберненої задачі розсіювання, де система рівнянь Захарова-Шабата відіграє важливу роль.

Одновимірну обернену задачу для рівняння Шредінгера з енергозалежним потенціалом також розглядали в [127-129]. Варто відзначити, що для реконструкції комплекснозначної функції діелектричної проникності необхідно знати як коефіцієнти відбиття, так і коефіцієнти пропускання досліджуваної структури, виміряні з різних сторін. Дисперсійну задачу приведено до задачі Гільберта-Рімана в роботі Шепельського [130, 131].

Недавно опубліковані роботи Гриніва [132] є вагомим внеском у спектральну теорію операторів з енергозалежним потенціалом, що є моделлю втратних середовищ.

Знаходження функції провідності плоских середовищ постає також у проблемах магнітотелурики [133], які зводять до одновимірної оберненої задачі. Математично цю проблему розглядають як рівняння Шредінгера, а вихідні дані для магнітотелуричних задач ототожнюють з коефіцієнтом відбиття для низьких частот. Відповідно розв'язок оберненої задачі можна шукати, використовуючи теорію обернених задач для потенціального розсіювання, за аналогією як це було показано для одновимірної хвильової задачі відносно дійсної функції діелектричної проникності.

Одновимірні обернені задачі, в яких зустрічаються одноосні біанізотропні шаруваті структури, досліджено в роботі Шепельського [134]. Розв'язання одновимірних обернених задач для біанізотропних матеріалів знаходимо також в роботі [135]. Оскільки кількість невідомих функцій в одновимірній оберненій задачі для анізотропної структури є значно більшою, ніж у тривіальному випадку, для забезпечення єдиності розв'язку матриця розсіювання повинна бути заданою для різних кутів падіння. Вивчення обернених задач розсіювання для анізотропних матеріалів виходить за рамки дисертаційної роботи через їх складність та істотні обмеження у застосуванні.

1.3.3. Оцінка параметрів середовищ з кусково-постійними параметрами та дискретний випадок оберненої задачі. Практично важливою є задача, яка полягає у точному встановленні параметрів розривів (стрибків) у кусково-постійних функціях матеріальних параметрів, або, іншими словами, ідентифікації параметрів багат шарової структури. Найбільш помітного прогресу у розв'язанні обернених задач розсіювання електромагнітних хвиль на середовищах з контрастними границями розділу досягнуто в роботах Krueger [137], Грінберг [138], Aktosun [139,140] та Cheney [141]. Ідея пошарового «зрізання» (layer stripping, layer peeling) [62,142,143] може служити поясненням багатьох методів, спрямованих на реконструкцію кусково-постійних середовищ. Однак відомо, що метод пошарового «зрізання» є потенційно нестійким і може призводити до розбіжності процедури реконструкції [145].

Велика кількість методів розв'язування обернених задач з кусково-постійною функцією діелектричної проникності ґрунтуються на дискретній моделі, що передбачає спеціальний кусково-постійний характер шуканих функцій. Як дискретну модель розглядають окремих підклас кусково-постійних функцій, в яких розриви розташовуються лише у вузлах деякої регулярної сітки. Фізичним прототипом матеріалів, що описують такими функціями є середовища типу Гопілауд [66]. Суттєвий доробок у теорії розв'язання дискретних одновимірних обернених задач розсіювання внесли Гладвел та Акі [62, 146]. В роботі Гриніва [147]

математично коректно показано, як метод інтегральних рівнянь, який дає розв'язок оберненої задачі для рівняння Шредінгера зі спеціальним класом потенціалів, можна привести до дискретної форми. В своїх дослідженнях автор монографії Дробахіна [148] також пропонує отримувати окремо оцінку імпульсної характеристики та розв'язувати обернену задачу розсіювання для кусково-постійного середовища у дискретному вигляді. Відомо також про спроби узагальнення цього підходу на втратні середовища [149].

Для прикладу наведемо два методи розв'язання оберненої задачі розсіювання у дискретній формі.

Перший метод [146] подамо без доведення. Вважаючи, що імпульсну характеристику багатопарової структури задано як вихідні дані у дискретному вигляді R_0, R_1, R_2, \dots , розв'язок оберненої задачі розсіювання також шукатимемо у дискретному вигляді. Основою цього методу є система рівнянь

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & & & R_0 \\ & 0 & R_0 & R_1 \\ & R_0 & \ddots & \vdots \\ R_0 & R_1 & \cdots & R_{k-1} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} K(k, 2-k) \\ K(k, 4-k) \\ \vdots \\ K(k, k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R_0 \\ -R_1 \\ \vdots \\ -R_{k-1} \end{pmatrix}, \quad (1.46)$$

де K - невідомі коефіцієнти.

За знайденим розв'язком рівняння (1.46) встановлюємо коефіцієнти відбиття кожної з поверхонь розділу, що знаходяться у вузлах регулярної сітки:

$$r_{k-1} = \frac{1}{\prod_{i=0}^{k-2} (1-r_i)^2 [1+K(k,k)]} - 1. \quad (1.47)$$

Відповідно, характеристичний опір ρ_i^+ кожного наступного шару структури можна знайти з коефіцієнта відбиття $r_i = \frac{\rho_i^- - \rho_i^+}{\rho_i^- + \rho_i^+}$, знаючи величину характеристичного опору попереднього шару ρ_i^- .

Більш загальним є підхід, описаний у роботі [62]. Тут передбачені випадки опромінювання структур послідовністю δ -функцій. Пряму задачу розсіювання для такої моделі розв'язано у попередньому пункті. Згідно з виразом (1.16), умову

причинності у дискретній формі можна подати як $U_{i+1,j+1}^+ = 0$ при $i = j$. Підставляючи цю умову в рівняння (1.20), можна переконатися, що має місце наступна тотожність:

$$(\rho_{i+1}^+ - \rho_{i+1}^-) / (\rho_{i+1}^+ + \rho_{i+1}^-) = U_{i,i+2}^+ / D_{i,i}^+. \quad (1.48)$$

Такий запис означає, що лише інформація про характеристичний опір попереднього шару $\rho_{i+1}^- = \rho_i^+$ та параметри хвиль у ньому дозволяють встановити характеристичний опір наступного шару ρ_{i+1}^+ .

Тепер процедуру реконструкції характеристичного опору всіх шарів структури типу Гопіллауд можна сформулювати як рекурсивну послідовність обчислень. Припустимо, що функції $D_{0,j}^+$ та $U_{0,j}^+$ є відомими у відповідності до постановки оберненої задачі розсіювання, в тому числі і для часткового випадку, який визначено умовами (1.10). Починаючи з першого шару $i=0$, для якого величина ρ_0^+ є відомою, наступне значення ρ_1^+ можна знайти на основі приведених вище формул. Таку процедуру обчислень можна рекурентно повторювати, при цьому кожен цикл включатиме два кроки:

1. Визначення характеристичного опору кожного наступного шару $(i+1)$ у відповідності до виразу (1.48):

$$\rho_{i+1}^+ = \rho_i^+ (D_{i,i}^+ + U_{i,i+2}^+) / (D_{i,i}^+ - U_{i,i+2}^+). \quad (1.49)$$

2. Обчислення всіх величин $D_{i+1,j+1}^+$ та $U_{i+1,j+1}^+$ $j = \overline{i, N}$ згідно з формулою (1.20), коли $(i+j)$ є парною величиною:

$$\begin{bmatrix} D_{i+1,j+1}^+ \\ U_{i+1,j+1}^+ \end{bmatrix} = \frac{1}{2\rho_i^+} \begin{bmatrix} (\rho_{i+1}^+ + \rho_i^+) & -(\rho_{i+1}^+ - \rho_i^+) \\ -(\rho_{i+1}^+ - \rho_i^+) & (\rho_{i+1}^+ + \rho_i^+) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{i,j}^+ \\ U_{i,j+2}^+ \end{bmatrix}. \quad (1.50)$$

Знайшовши значення характеристичного опору для кожного шару ρ_i , остатній крок реконструкції полягає у встановленні діелектричної проникності ε_i та метричного значення ширини z_i кожного шару. Формули є тривіальними

$$\varepsilon_i = \frac{\mu_0 \mu}{\varepsilon_0 (\rho_i^+)^2} \text{ та } z_i = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{\mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon_i}}. \quad (1.51) \text{ та } (1.52)$$

Результати реконструкції функції діелектричної проникності для тришарової структури показано на рис. 1.5. Їх порівняно з оригінальною функцією діелектричної проникності для двох сценаріїв числового експерименту: без шуму (рис. 1.5.а) та за умови високого рівня шуму (рис. 1.5.б). Вихідні дані для цих двох випадків визначено як дискретні відліки коефіцієнта відбиття, які задано на сітці частот від нуля до 50 ГГц з кроком 0.1 ГГц. З рис. 1.5 (точкова лінія) видно, що метод «зрізання шарів», який базується на дискретному перетворенні Фур'є, для встановлення імпульсної характеристики досліджуваної структури є дуже чутливим до наявної випадкової складової у вихідних даних. Крім того, феномен Гібса, що спостерігається при реконструкції, утруднює інтерпретацію кривої діелектричного профілю (рис. 1.5.а, пунктирна лінія).

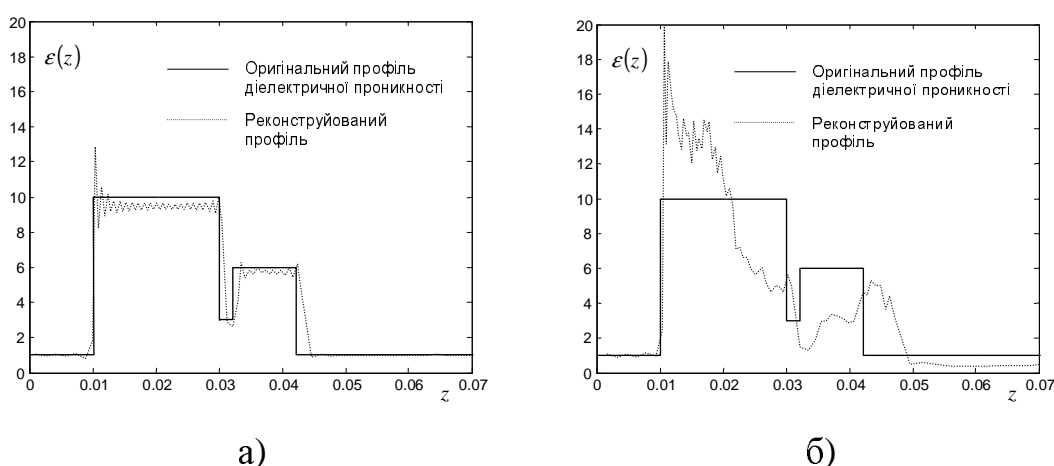


Рис. 1.5. Приклад реконструкції діелектричної проникності для тришарової структури за умови вимірювання коефіцієнта відбиття в обмеженому діапазоні частот: без шуму – а) і при наявній шумовій складовій з відношенням «сигнал/шум» 1дБ – б). Суцільною лінією показано шуканий профіль діелектричної проникності, а пунктирною – результати реконструкції дискретним методом розв'язання оберненої задачі [62]

Підсумовуючи аналіз дискретних методів розв'язання оберненої одновимірної задачі, зазначимо, що для їх реалізації необхідно за частотною залежністю

коефіцієнта відбиття встановити безмежну кількість коефіцієнтів ряду, яким відповідає імпульсна характеристика. Однак випадкова похибка у вимірних даних для обмеженого діапазону частот не дозволяє точно оцінити коефіцієнти, особливо ті, які мають відносно невелику амплітуду. Це призводить до характерних спотворень розв'язку, або до розбіжності ітераційного процесу при розв'язанні оберненої задачі методом пошарового зрізання.

Описаний дискретний підхід дозволяє відновлювати розривну функцію діелектричної проникності багатошарової структури, а також дає можливість отримати наближений розв'язок задачі реконструкції неперервних функцій діелектричної проникності.

1.3.4. Оцінювання параметрів матеріалів із кусково-неперервними характеристиками. На практиці шукана функція діелектричної проникності матеріалів може бути довільною. Наявність поверхонь розділу між шарами вказує на присутність розривів функції діелектричної проникності, при цьому електричні параметри кожного шару назагал можна представити неперервною функцією. Огляд літератури дає можливість стверджувати, що через суттєву математичну складність розв'язанню оберненої задачі для змішаного типу приділено значно менше уваги. Так Грінберг [138], а згодом і Актосун [139] намагалися звести такі одновимірних обернені задачі до розв'язання сингулярних інтегральних рівнянь. Круєгер [137] розглядав формулювання оберненої задачі для випадку, коли параметри та характер розривів у функціях діелектричної проникності вважався заданим, а обернена задача зводилася до реконструкції неперервної частини діелектричної проникності матеріалів плоскошаруватої структури між поверхнями розділу. Відсутність числових результатів не дає змогу оцінити практичну придатність описаних методів для реконструкції діелектричної проникності довільного типу.

1.3.5. Одновимірні обернені задачі, в яких вихідні дані задано частково. В теорії одновимірних задач розсіювання варто виділити окремий напрям, який охоплює різні формулювання обернених задач, їх аналіз та розв'язки за умови, що

вихідні дані задано частково, і відповідно, єдиність розв'язання таких задач не є гарантованою. Ці задачі умовно можна розділи на три групи:

- обернені задачі розсіювання, де вихідні значення задано модулем частотозалежної функції коефіцієнта відбиття;
- обернені задачі розсіювання, для яких вихідні дані задано в часовій області;
- обернені задачі розсіювання, в яких матрицю розсіювання задано для обмеженої смуги частот.

Очевидно, що для перелічених задач питання побудови конструктивної процедури отримання розв'язку є вторинним. Пріоритетною проблемою є встановлення умов однозначності розв'язку та визначення обмежень на клас функцій, для яких сформульована обернена задача має єдиний розв'язок. Окремо можна виділити випадки, де знаходження всіх можливих розв'язків оберненої задачі розсіювання також має практичну цінність (задачі синтезу).

Труднощі, що виникають при побудові засобів для прецизійних фазових вимірювань, спонукали виокремленню першої групи обернених задач розсіювання та їх розвиток. Відомі підходи до аналізу і розв'язання таких задач можна знайти в роботах [150 - 152]. Реконструкція фази [150] відіграє тут ключову роль.

Друга група задач, де вихідні дані задано в часовій області, є узагальненням формулювання більшості обернених задач розсіювання, що розглядаються в дисертації. На відміну від частотно заданих вихідних даних у вигляді комплексної функції коефіцієнта відбиття, формулювання оберненої задачі розсіювання в часовій області вимагає інформацію про функції, що визначають поведінку у часі як падаючої хвилі, так і розсіяної. Особливим різноманіттям характеризуються формулювання обернених задач розсіювання, що стосуються акустичних та пружних хвиль. Тут дія на плоскошаруваті структури та досліджувана реакція можуть мати різне фізичне значення, на відміну від електродинамічного формулювання. Підходи до вирішення одновимірних обернених задач у часовій області описано в роботах [153-156].

Зазначимо, що у формулюванні оберненої задачі в часовій області часткове задання вихідних даних набуває ще й іншого аспекту [157,158]. Природно виникає

питання, на якому часовому інтервалі реакція об'єкта на задану дію дозволяє однозначно сформулювати та розв'язати обернену задачу [159] для оцінювання його параметрів. Обернена задача розсіювання за умови частково відомого розв'язку розглядалася в роботі [160]. Усесторонній огляд методів розв'язання таких обернених задач виходить за рамки дисертації.

Питання щодо можливості розв'язання обернених задач розсіювання, в яких вихідні дані задано лише у скінченій смузі частот, пов'язане перш за все із застосуванням описаних вище тривіальних рішень. Очевидно, що реалізувати вимірювання комплексного коефіцієнта відбиття (у тому числі всіх елементів матриці розсіювання) для всіх значень частот (від нуля до безмежності) є практично неможливим. Тому надзвичайно актуальною стає проблема вибору методу розв'язання оберненої задачі, який дасть можливість отримати найкращу апроксимацію істинного розв'язку. Одним із можливих шляхів тут є розв'язання еквівалентної оберненої задачі в часовій області та відповідна регуляризація результату. Не зважаючи на важливість такого формулювання оберненої задачі, йому приділено недостатньо уваги, особливо в задачах, які стосуються аналізу шаруватих структур.

1.3.6. Наближені методи розв'язку. Історично одним із перших методів обробки сигналів у системах зондування шаруватих структур був метод погодженої фільтрації, успадкований з радіолокації. Відповідна обробка сигналів, зафіксованих при відбитті хвилі від багатошарових структур, має істотну ваду – не вдається усунути взаємний вплив хвиль, відбитих від різних поверхонь розділу, оскільки метод базується на моделі точкового розсіювання. Як наслідок, в результаті обробки можна спостерігати так звані некомпенсовані ехо-відгуки, які хибно вказують на наявність неіснуючих поверхонь розділу. Аналіз методу погодженої фільтрації багатофазних сигналів з різними автоковаріаційними функціями зроблено в праці [18].

Розв'язанню обернених задач дифракції на основі наближення Борна [161] властиві спотворення розв'язку, оскільки ці методи, базуючись на гіпотезі про малі

зміни діелектричної проникності, належним чином не враховують ефекту розсіювання хвиль на контрастних поверхнях розділу шаруватої структури. Знайдена такими методами оцінка діелектричної проникності істотно відрізняється від оригіналу. Методи ренормалізації оберненої задачі також не дають бажаного ефекту [162-163]. Відомо також, що в основу деяких методів розв'язання оберненої задачі покладено WKВ-апроксимацію розв'язку [164] задач розсіювання.

1.3.7. Оптимізаційні методи розв'язку. Як було зазначено, метод найменших квадратів можна використати для розв'язання оберненої задачі розсіювання [165,166], у тому числі відносно електричних та геометричних параметрів однорідних шарів плоскої структури. Цей метод зводиться до пошуку розв'язку багатоекстремальної задачі, і тому його використання оправдане лише для плоскошаруватих структур з малою кількістю невідомих параметрів. В інженерній практиці серед відомих методів найбільш придатним є генетичний алгоритм [91] пошуку розв'язку багатоекстремальної оптимізаційної задачі [16]. На жаль, для багат шарових структур та структур з неперервною зміною діелектричної проникності такий метод стає практично непридатним через велику кількість невідомих параметрів.

Застосування оптимізаційних методів розв'язання оберненої задачі для багат шарової структури також потребує встановлення жорстких апіорних обмежень на розв'язок, які гарантують знаходження глобального екстремуму [167-170].

Одним із теоретично апробованих шляхів розв'язання оберненої задачі для плоскошаруватої структури з однорідними безвтратними матеріалами шарів є метод гілок та меж [171].

Як підсумок, варто зазначити, що загальним недоліком існуючих методів розв'язання одновимірних обернених задач розсіювання є те, що втрата точності оцінювання параметрів пов'язана з невідповідністю між моделлю, яку покладено в основу того чи іншого методу, та реальним об'єктом дослідження.

Також відомі методи повністю втрачають свою ефективність у випадку частотно-обмежених вихідних даних, які є результатом вимірювання у скінченій смузі частот або неточно заданої імпульсної характеристики. Висока чутливість до похибок є характерною для більшості методів, навіть коли вони ведуть до добре обумовленої задачі.

1.4. Огляд методів багатовимірної оберненої задачі розсіювання

Розвинута плідна ідея застосування операторів перетворення спонукала багатьох дослідників на спроби узагальнити результати теорії одновимірних задач розсіювання на багатовимірний випадок. Перш за все це стосується багатовимірних задач квантової механіки [55-57,75] для потенціальної моделі розсіювання частинок, де обернена задача формулюється відносно функції нерадіального потенціалу в рівнянні Шредінгера. Розвиток багатовимірних обернених задач розсіювання набув найбільшого прогресу у 70-ті та 80-ті роки. Саме тоді реалізовано кілька успішних спроб розв'язати дво- та тривимірні задачі. При цьому найбільших досягнень було отримано завдяки роботам R.Newton [57], P.Sabatier [55] та M.Cheney [172-175]. Російські наукові школи Л.Фадєєва [176, 177], П.Гріневича та Р.Новікова [178-184], також досягнули прийнятних результатів у вирішенні багатомірних обернених задач для рівняння Шредінгера. Існування та єдиність розв'язку є особливим предметом досліджень у теорії багатовимірних обернених задач. Варто відзначити праці В.Ісакова [184], який вніс суттєвий доробок в теорію єдиності. Загалом, для фіксованої енергії (частоти) багатовимірна задача для всіх можливих кутів спостереження та зондування є перевизначеною [55, 185]. Тому окремо розглядають питання щодо визначення мінімального обсягу вихідних даних, який задовольнятиме умову єдиності розв'язку.

Незважаючи на успішне розв'язання багатовимірних обернених задач квантової механіки, отримані результати не набули визначального значення для розвитку теорії багатовимірних задач розсіювання електромагнітних хвиль, як це можна спостерігати в одновимірному випадку. Тим не менше, існують часткові випадки,

коли багатовимірні рівняння Шредінгера можна звести до рівняння Гельмгольца, яке описує розсіювання акустичних хвиль [173, 174]. Відповідно результати теорії багатовимірних обернених задач для рівняння Шредінгера можна застосувати до деяких практично важливих випадків, де обернені задачі записано для електродинамічної моделі розсіювання хвиль відносно матеріальних параметрів розсіювачів.

З метою огляду, аналізу та порівняння відомих методів теорії багатовимірних обернених задач зупинимося на найбільш загальному існуючому строгому розв'язку. Цей метод запропоновано та розвинуто в роботах [178, 181]. Як і в більшості одновимірних задач, в основі цього методу лежить аналітичне продовження функції комплексної змінної та розв'язок відповідної задачі Гільберта-Рімана [186-187].

1.4.1. Ідея побудови строгого розв'язку оберненої задачі розсіювання.

Особливості оберненої задачі розсіювання та, відповідно, метод її розв'язання істотно залежать від області визначання параметрів \mathbf{k} та \mathbf{l} . У загальному випадку для рівняння Шредінгера обернену задачу можна сформулювати, коли абсолютна величина векторів \mathbf{k} та \mathbf{l} є змінною. Оскільки цей випадок не має відповідної моделі у багатовимірному електродинамічному формулюванні оберненої задачі розсіювання, розглянемо лише двовимірну обернену задачу для рівняння Шредінгера, де $\mathbf{k}/k \in \mathbb{S}^1$ та $\mathbf{l}/k \in \mathbb{S}^1$ для $k = const$. Враховуючи, що діаграма розсіювання $f(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ у дальній зоні для електродинамічної моделі та моделі потенціального розсіювання є однаковими, то з заданої функції $f(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ розв'язок оберненої задачі розсіювання дозволить знайти потенціал v , який, у свою чергу, дає можливість обчислити розподіл діелектричної проникності згідно з тотожністю

$$\varepsilon(x, y, 0) = \varepsilon_0 \left(1 - v(x, y) / k^2 \right). \quad (1.53)$$

Відомо, що існує єдиний розв'язок оберненої задачі розсіювання для контрастного діелектричного однорідного розсіювача, якщо вихідні дані задані асимптотикою розв'язків цього рівняння на нескінченості при всіх можливих кутах

спостереження та кутах падіння плоскої хвилі для фіксованої частоти [184,188]. З іншої сторони показано, що єдиний розв'язок оберненої задачі розсіювання для рівняння Шредінгера з фіксованою енергією $k^2 = E$ існує, якщо потенціал задовольняє умові зникання [181]:

$$v(\mathbf{x}) \leq \frac{q}{(1+|\mathbf{x}|)^{2+\delta}}, \quad (1.54)$$

де $\delta > 0$ та $q > 0$ - константи.

В основі розв'язання оберненої задачі розсіювання для фіксованої енергії покладено ідею, яку розвинув в своїх роботах Фаддеев [176]. При цьому шукають розв'язок інтегрального рівняння відносно деякої функції $h_\gamma(\mathbf{k}, \mathbf{l})$, виходячи із заданої діаграми розсіювання

$$h_\gamma(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = f(\mathbf{k}, \mathbf{l}) + \frac{\pi i}{|\mathbf{k}|} \int_{\mathbb{S}_k^1} h_\gamma(\mathbf{k}, \mathbf{m}) \chi((\mathbf{m} - \mathbf{k}) \gamma) f(\mathbf{m}, \mathbf{l}) d\mathbf{m} \quad (1.55)$$

де $\gamma \in \mathbb{S}^1$ - нова змінна; $\chi(s) = \{0, s \leq 0; 1, s > 0\}$ - функція Хевісайда.

Рівняння (1.55) за своєю формою відповідає інтегральному рівнянню, яка використовують для розв'язання одновимірних задач розсіювання методом Гельфанда-Левітана та Марченка [103].

Знайдена функція $h_\gamma(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ для $\mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{R}^2, k^2 = l^2, \gamma \in \mathbb{S}^1$ має продовження в комплексній площині, для якого виконується умова [181]

$$h_\gamma(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = h(\mathbf{k} + i0\gamma, \mathbf{l} + i0\gamma). \quad (1.56)$$

Отже, наступною підзадачею є встановлення функції $h(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ для $\mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{R}^2, k^2 = l^2, \text{Im} \mathbf{k} = \text{Im} \mathbf{l}$. Її розв'язок дозволяє побудувати функцію, що залежить від різниці змінних $\mathbf{k} - \mathbf{l} = \mathbf{p}$:

$$h(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = H(\mathbf{k}, \mathbf{k} - \mathbf{l}) = H(\mathbf{k}, \mathbf{p}). \quad (1.57)$$

З умови (1.56) випливає інше співвідношення між граничними значеннями функцій $h(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ та $H(\mathbf{k}, \mathbf{p})$:

$$h_\gamma(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = H_\gamma(\mathbf{k}, \mathbf{k} - \mathbf{l}), \quad \mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{R}^2, k^2 = l^2, \gamma \in \mathbb{S}^1. \quad (1.58)$$

Побудувавши продовження функції $H(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ у комплексній площині, можна знайти розв'язок оберненої задачі відносно потенціалу в рівнянні Шредінгера, поведінка розв'язків якого на безмежності описує діаграма розсіювання $f(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ згідно з (1.41). Оцінку шуканої функції потенціалу знаходять з асимптоти [181]

$$\hat{v}(\mathbf{p}) = H(\mathbf{k}, \mathbf{p}) + O\left(\frac{1}{(1 + \mathbf{p}^2)^{\mu/2} |\mathbf{k}|^\sigma}\right), \quad |\mathbf{k}| = \sqrt{(\operatorname{Re} \mathbf{k})^2 + (\operatorname{Im} \mathbf{k})^2} \rightarrow \infty \quad (1.59)$$

де μ та σ - константи.

Ідею розв'язання оберненої задачі розсіювання можна пояснити графічно. На рис. 1.6 зображено комплексну площину і відповідну область значень векторів \mathbf{p} , \mathbf{k} та \mathbf{l} . При фіксованому значенні частоти область визначення функції $f(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ лежить на колі радіуса k . Відповідно, для вихідних даних оберненої задачі вектор $\mathbf{p} = \mathbf{k} - \mathbf{l}$ може набувати значень лише на крузі з радіусом $2k$. Як видно з (1.59), потенціал $v(\mathbf{p})$ визначається з асимптоти функції $H(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ для великих значень \mathbf{k} . Саме продовження функції $H_\gamma(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ до $H(\mathbf{k}, \mathbf{p})$, яке є основним етапом процедури знаходження розв'язку оберненої задачі, спрямоване на те, щоб встановити функцію $H(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ для довільних параметрів \mathbf{p} та \mathbf{k} .

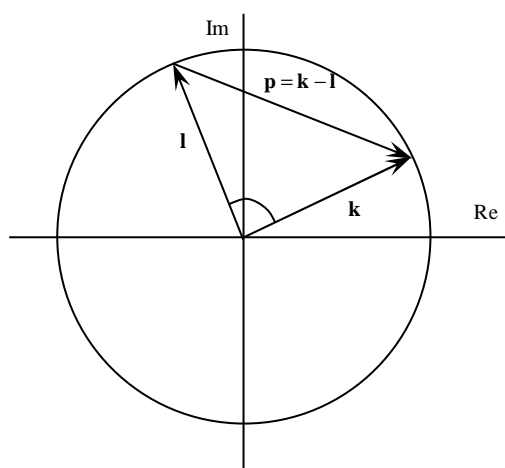


Рис. 1.6. Область значень векторів \mathbf{p} , \mathbf{k} та \mathbf{l} у комплексній площині.

Вихідні дані оберненої задачі розсіювання $f(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ задані на колі радіуса k

Вище описану ідею побудови розв'язку оберненої задачі розсіювання можна також узагальнити на тривимірний випадок. Істотна відмінність між двовимірною та тривимірною задачею полягає у тому, що є можливість заміни декартової двовимірної системи координат на комплексну площину з подальшою реалізацією процедури продовження аналітичних функцій комплексного аргумента.

У відповідності до [181] розв'язок оберненої задачі розсіювання у двовимірному випадку можна знайти, реалізуючи наступні кроки:

1. Якщо початково розв'язок оберненої задачі шукали в системі координат $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, то у двовимірному випадку доцільно ввести заміну змінних, шукаючи розв'язок як функцію комплексного аргумента

$$z = x_1 + ix_2; \quad (1.60)$$

$$\bar{z} = x_1 - ix_2. \quad (1.61)$$

Аналогічно вводять комплексні змінні для визначення діаграми розсіювання $f(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = f_c(\lambda, \lambda')$ у новій системі координат:

$$\lambda = (k_1 + ik_2)/k; \quad (1.62)$$

$$\lambda' = (l_1 + il_2)/k. \quad (1.63)$$

2. Розв'язок інтегрального рівняння (1.41) у новій системі координат шукають, розв'язуючи два рівняння такого ж типу відносно функцій $h_{\pm}(\lambda, \lambda')$

$$h_{\pm}(\lambda, \lambda') - i\pi \int_{|\lambda''|=1} h_{\pm}(\lambda, \lambda'') \theta \left[\mp \frac{1}{i} \left(\frac{\lambda''}{\lambda} - \frac{\lambda}{\lambda''} \right) \right] f_c(\lambda'', \lambda') |d\lambda''| = f_c(\lambda, \lambda'). \quad (1.64)$$

3. На основі розв'язків попередніх рівнянь (1.64) формують інтегральне рівняння відносно невідомої $\rho(\lambda, \lambda')$:

$$\rho(\lambda, \lambda') + i\pi \int_{|\lambda''|=1} \rho(\lambda, \lambda'') \theta \left[\frac{1}{i} \left(\frac{\lambda''}{\lambda} - \frac{\lambda}{\lambda''} \right) \right] h_0(\lambda'', \lambda') |d\lambda''| = -i\pi h_0(\lambda, \lambda'), \quad (1.65)$$

де $h_0(\lambda, \lambda') = \theta \left[-\frac{1}{i} \left(\frac{\lambda'}{\lambda} - \frac{\lambda}{\lambda'} \right) \right] h_+(\lambda, \lambda') - \theta \left[\frac{1}{i} \left(\frac{\lambda'}{\lambda} - \frac{\lambda}{\lambda'} \right) \right] h_-(\lambda, \lambda')$.

4. Окремо здійснюють реконструкцію неперервної функції $\mu(z, \lambda)$ за її стрибком на одиничному колі $|\lambda| = |\lambda'| = 1$. Граничні значення такої функції пов'язані через $\rho(\lambda, \lambda')$ наступною тотожністю

$$\mu_+(z, \lambda) = \mu_-(z, \lambda) + \int_{|\lambda'|=1} \rho(\lambda, \lambda') \exp \left[\frac{i\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}{2} \left((\lambda' - \lambda)\bar{z} + \left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda} \right) z \right) \right] \mu_-(z, \lambda') |d\lambda'|. \quad (1.66)$$

Використовуючи рівняння (1.64) та формулу Коші-Гріна

$$\mu(z, \lambda) = -\frac{1}{\pi} \iint_D \frac{\partial \mu(\zeta, \lambda)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{d\zeta_R d\zeta_I}{\zeta - \lambda} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \mu(\zeta, \lambda) \frac{d\zeta}{\zeta - \lambda}, \quad (1.67)$$

розв'язок задачі встановлення аналітичної функції за її стрибком шукають у вигляді

$$\begin{aligned} \mu(z, \lambda) = & 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{d\zeta}{\zeta - \lambda} \int_{\lambda'=1} \rho(\zeta, \lambda', z) \mu(z, \lambda'(1-0)) |d\lambda'| - \\ & - \iint_{\mathbb{C}} r(\zeta, \omega, z) \mu \left(z, -\frac{1}{\bar{\lambda}} \right) \frac{d\zeta_R d\zeta_I}{\zeta - \lambda}. \end{aligned} \quad (1.68)$$

При цьому використано властивість, що шукана функція задовольняє $\bar{\partial}$ -рівнянню («дельта-бар рівнянню» [189])

$$\frac{\partial \mu(z, \lambda)}{\partial \bar{z}} = r(\lambda, z) \overline{\mu(z, \lambda)}, \quad (1.69)$$

$$\text{де } r(\lambda, z) = \frac{\pi \operatorname{sgn}(\lambda \bar{\lambda} - 1)}{\lambda} \exp \left[-\frac{ik}{2} \left(\left(\lambda + \frac{1}{\bar{\lambda}} \right) \bar{z} + \left(\bar{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \right) z \right) \right] b(\lambda).$$

Тут аналітичну функцію $b(\lambda, \omega)$ встановлюють за її граничним значенням, на одиничному колі $b(\lambda(1+0)) = h_-(\lambda, -\lambda)$, для $|\lambda| = 1$.

5. Шуканий потенціал в рівнянні Шредінгера обчислюють, розкладаючи знайдену функцію $\mu(z, \lambda)$ у ряд $\mu(z, \lambda) = 1 + \mu_1(z)\lambda + O(|\lambda|)$, для $|\lambda| \rightarrow 0$. Тоді вираз для потенціалу має вигляд

$$v(z) = 2i\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \mu_1(z). \quad (1.70)$$

Як видно, строге розв'язання оберненої задачі є надзвичайно складним. Оскільки знаходження швидкозникаючої функції потенціалу, або функції

діелектричної проникності, полягає у вирішенні кількох інтегральних рівнянь, такий підхід має лише теоретичне значення і мало придатний для практичних обчислень. Тому для числової реалізації використовують різні апроксимації, отримані на основі строгого розв'язку [190-193]. Одне з наближень розв'язку оберненої задачі можна знайти, обмежуючи кількість доданків у ряді Неймана, яким можна подати розв'язок інтегрального рівняння другого роду.

Альтернативним до описаного строгого методу розв'язання багатовимірної оберненої задачі розсіювання є метод, що базується на оберненій граничній задачі [194]. Відомо, що за діаграмою розсіювання можна єдиним чином встановити оператор, який реалізує відображення функцій для граничної умови Діріхле до Неймана (Dirichlet-to-Neumann map). Реконструкція потенціалу рівняння Шредінгера зі знайденого відображення може бути також зведена до тривіальних задач, які мають єдиний розв'язок. Цей напрям досліджень започаткував А.-Р.Салдерон, опублікувавши «піонерську» роботу [195] для випадку нульового значення енергії у багатовимірному рівнянні Шредінгера. Згодом теорія граничних обернених задач була суттєво розвинута у дослідженнях А.Нахман [196] на випадок ненульової енергії. Описаний підхід стосується тільки задач, в яких шукана величина потенціалу є неперервною функцією. Тут дельта-бар метод [189] став потужним математичним інструментом, спільним для обох теорій: обернених задач розсіювання та обернених граничних задач.

Вказаний альтернативний підхід до розв'язання багатовимірної оберненої задачі розсіювання також не дозволяє побудувати простий числовий алгоритм реконструкції, який би був прийнятним для практичного застосування.

1.4.2. Методи розв'язання обернених задач розсіювання для контрастних розсіювачів. Огляд робіт з теорії обернених задач розсіювання вказує на те, що переважна більшість строгих методів розв'язання розвинуто лише для випадків, які стосуються встановлення неперервних функцій параметрів середовищ. Виходячи з наведених прикладів можливого практичного використання методів оцінювання параметрів середовищ, можна засвідчити, що електричні властивості об'єктів інколи

суттєво відрізняються від властивостей середовища розповсюдження. Відповідно функціям, які шукають як розв'язок обернених задач, властиві розриви. Це додатково ускладнює пошук строгого розв'язку оберненої задачі. Описані вище методи розв'язання обернених задач розсіювання не можна застосувати через те, що умови щодо властивостей потенціалу не задовольняються. Спроби аналізу багатовимірних обернених задач розсіювання для розривних функцій можна знайти в [197-199].

У теорії граничних обернених задач має місце подібне розділення підходів до відновлення функції провідності для висококонтрастних та малозмінних неоднорідних провідних середовищ. Строгий метод, який базується на застосуванні оберненої задачі для рівняння Шредінгера з нульовим значенням енергії також втрачає свою дієвість, якщо його застосувати до реконструкції висококонтрастних провідних включень [208,209].

Існуючий поділ між оберненими задачами розсіювання для неперервних та кусково-неперервних середовищ є неприродним. Фактично, невідомо апріорно, до якого з типів середовищ відноситься об'єкт, параметри внутрішньої структури якого необхідно реконструювати, застосовуючи апарат обернених задач розсіювання. Тому знаходження більш загального строгого розв'язку обернених задач розсіювання залишається невирішеною проблемою.

Незважаючи на те, що загальні строгі розв'язки багатовимірної оберненої задачі розсіювання отримати не вдається, для ідентифікації форми поверхні контрастних розсіювачів розвинуто ряд методів [200-207], які дозволяють отримати прийнятні результати. До них відносяться методи «самплінгу», або «проб». Методи «самплінгу» реалізують на основі критерію про належність досліджуваної точки до границі розсіювача. При цьому у формулюванні такого критерію явно не входить апріорна інформація про те, чи належать сусідні точки до цього розсіювача, чи ні. Найбільш широкий огляд методів «самплінгу» зроблено в роботі [207].

Метод «самплінгу» започаткував нову хвилю досліджень у теорії обернених задач розсіювання, яку широко популяризували D.Colton та A.Kirsch [210]. Його адаптовано для електромагнітного випадку в роботі [202, 203] та узагальнено для

розв'язання багаточастотної оберненої задачі та оберненої задачі розсіювання у часовій області [212]. Відзначимо, що систематичне вивчення обернених задач розсіювання для контрастних розсіювачів здійснювали D.Colton, R.Kress [67, 185, 210, 211], A.Kirsch [204, 210], F.Sakoni [202,203] і інші [205]. Вони розглядали різні граничні умови як окремі випадки для задач розсіювання акустичних та електромагнітних хвиль.

Важливим є те, що метод лінійного «самплінгу» (linear sampling method) не має строгого теоретичного виведення. Існує лише складне математичне обґрунтування ефекту, що спостерігається. Таке обґрунтування базується лише на встановлених властивостях оператора розсіювання. Запропонований в [204, 213, 214] підхід, що використовує факторизацію оператора розсіювання, дає можливість істотно покращити точність розв'язку оберненої задачі методом лінійного «самплінгу». В свою чергу ідею «самплінгу» своєрідно реалізовано в методі [215, 216], що перевіряє належність розсіювача до кругової області з фіксованим центром та радіусом. Вибір різних координат центрів кругів та їх радіусів дозволяє наближено встановити опуклий супорт розсіювача. До альтернативних методів «самплінгу» можна віднести і розв'язок, що базується на ідентифікації «сингулярних джерел» [205].

Таке захоплення елегантністю методу «самплінгу» в теорії обернених задач розширило прогалину між задачами реконструкції для об'єктів з неперервною та кусково-неперервною зміною параметрів.

Внаслідок масовості досліджень у теорії обернених задач розсіювання встановлені особливості методу лінійного «самплінгу» привели до виокремлення нового наукового напрямку, що стосується трансмісійних власних значень [217] та асоційованих з ними обернених спектральних задач.

Інший аспект обернених задач розсіювання стає вкрай важливим, якщо об'єкти дослідження мають нескінченний розмір, або можуть розглядатися як безмежні за однією або двома координатами. Елементи конструкцій, складні структури та композиційні матеріали часто мають шарувату структуру і, відповідно, їх неруйнівна діагностика спрямована на ідентифікацію неоднорідностей структури.

Проаналізувавши існуючі підходи, можна стверджувати, що немає загальної теорії, яка б уможливила визначення параметрів шаруватого середовища та встановила форму локально-неоднорідних включень. Зазвичай використовують різноманітні наближення цієї задачі, в яких параметри шаруватого середовища не беруть до уваги взагалі, або встановлюють лише зовнішню границю розділу середовищ. Такі наближення призводять до значних втрат ефективності неруйнівної діагностики. З метою покращення реконструкції форми підповерхневих об'єктів у статтях Н.Нaddar [218] та F.Сakoni [219] розвинуто новий підхід. Він є модифікацією методу «смплінгу» для оберненої задачі розсіювання на перешкоді, що знаходиться у неоднорідному середовищі для акустичного та електромагнітного випадків, відповідно. Обидва підходи вимагають апіорно заданих параметрів шаруватого середовища.

L.Вorsea в своїй роботі [220] розглядала обернену задачу розсіювання для шаруватого неоднорідного середовища в рамках теорії розсіювання сейсмічних хвиль. Вона запропонувала метод усунення ехо-сигналів, що з'являються за рахунок розсіювання на поверхнях розділу. Інший дослідник, R.Griesmaier, використав високороздільний підхід до спектрального оцінювання для ідентифікації включень у відомому шаруватому середовищі [221].

Підходи [222-225], що розглядають розв'язок задачі мінімізації нев'язки між результатом вимірювання та синтетичними розсіяними даними різними числовими алгоритмами [226, 227], виходять за рамки дисертаційного дослідження і є практично не придатними.

1.4.3. Наближені методи розв'язання багатовимірних обернених задач розсіювання. З іншої сторони, щоб уникнути математичних труднощів, пов'язаних з пошуком строгого розв'язку оберненої задачі розсіювання, практично орієновані задачі формулюють та розв'язують, використовуючи різні наближення [228-240]. При цьому шукають компроміс між точністю та обчислювальною складністю.

Ці підходи, в основному, виведені завдяки спрощеній формі рівняння, яке визначає модель розсіювання хвиль та ґрунтуються на різних наближеннях [64, 236]:

- наближення Борна і Ритова;
- високочастотне наближення;
- наближення фізичної оптики.

Як правило, такі наближення дають неприйнятний результат, оскільки похибка, що виникає за рахунок вторинної дифракції, приводить до втрати розділення елементів поверхні розсіювача та появи спотворень, які можна трактувати як неіснуючі елементи поверхні.

Не дивлячись на складний характер обернених задач розсіювання, розвинуто кілька підходів, які широко використовують на практиці у засобах неруйнівної діагностики. До таких підходів можна віднести алгоритм зворотного проектування [235], метод радіального та сферичного перетворення Радона [233, 234], метод міграції [237], алгоритм SEABED [238], метод синтезованої апертури [239,240], методи високороздільного спектрального оцінювання [241, 242] і т.д. Через некоректність обернених задач розсіювання, вихідні дані для вказаних методів повинні бути перевизначеними. Однак у багатьох випадках навіть перевизначення не дозволяє досягнути стійкого та ефективного результату візуалізації.

Як приклад демонстрації можливостей та недоліків наближених методів оглядову частину завершимо виведенням методу розв'язання оберненої задачі, що базується на наближенні Борна для двовимірного випадку та подамо результати її числового розв'язку для проникних циліндричних розсіювачів.

Апроксимацію розв'язку оберненої задачі можна отримати, обмеживши розклад ряду Неймана лише першим додатком. Таке наближення розв'язку прямої задачі розсіювання називають наближенням Борна [55, 185]. Воно співпадає з високочастотним наближенням, якщо в підінтегральний вираз для рівняння Ліпмана-Швінгера (1.42) підставити значення розв'язку рівняння Шредінгера у вигляді

$$\psi^+(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = \exp(i(\mathbf{l}, \mathbf{x})) + o(1), \text{ для } |\mathbf{k}| \rightarrow \infty. \quad (1.71)$$

Тоді діаграму розсіювання можна зайти як

$$f(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \exp(i(\mathbf{k} - \mathbf{l}, \mathbf{x})) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + o(1). \quad (1.72)$$

Для фіксованої частоти вихідні дані в оберненій задачі, а саме - функція $F(\mathbf{p}) = f(\mathbf{k}, \mathbf{l})$, задані лише на крузі, радіуса $2k$ (рис. 1.6). Тому, використовуючи наближення Борна, можна знайти наближену оцінку потенціалу у вигляді

$$\hat{v}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2, |\mathbf{p}| \leq k} \exp(i(\mathbf{p}, \mathbf{x})) F(\mathbf{p}) d\mathbf{p}. \quad (1.73)$$

Відповідно, оцінка шуканої функції діелектричної проникності матиме вигляд

$$\hat{\epsilon}(\mathbf{x}) = \epsilon_0 \left(1 - \hat{v}(\mathbf{x})/k^2\right). \quad (1.74)$$

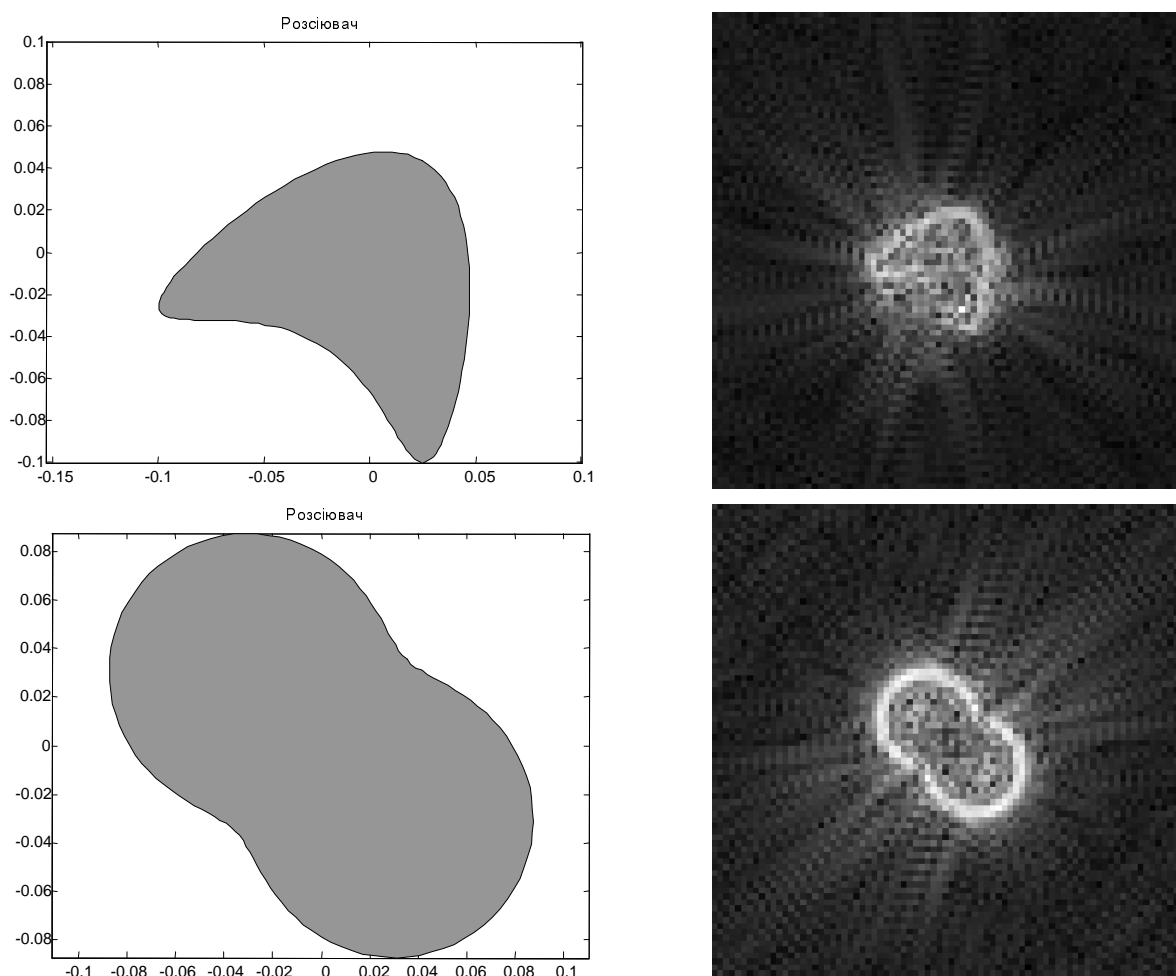


Рис.1.7. Приклади розв'язання оберненої задачі розсіювання на основі наближення Борна для однорідних діелектричних розсіювачів $\epsilon = 3$ та $f = 10\Gamma\Gamma\zeta$

На рис. 1.7 приведено приклади наближеної реконструкції діелектричної проникності однорідних циліндричних розсіювачів згідно з формулами (1.73) та (1.74), яку здійснено, використовуючи дискретне перетворення Фур'є. Як видно з рисунків, отриманий результат дає можливість грубо оцінити форму розсіювача.

Застосування описаного методу для різних циліндричних неоднорідних розсіювачів, які подано на рис. 1.8 та рис. 1.9, показує, що наближення Борна не дозволяє зробити оцінку внутрішньої структури об'єкта дослідження, адже контури, що відповідають границям внутрішньої неоднорідності, відтворені неоднозначно.

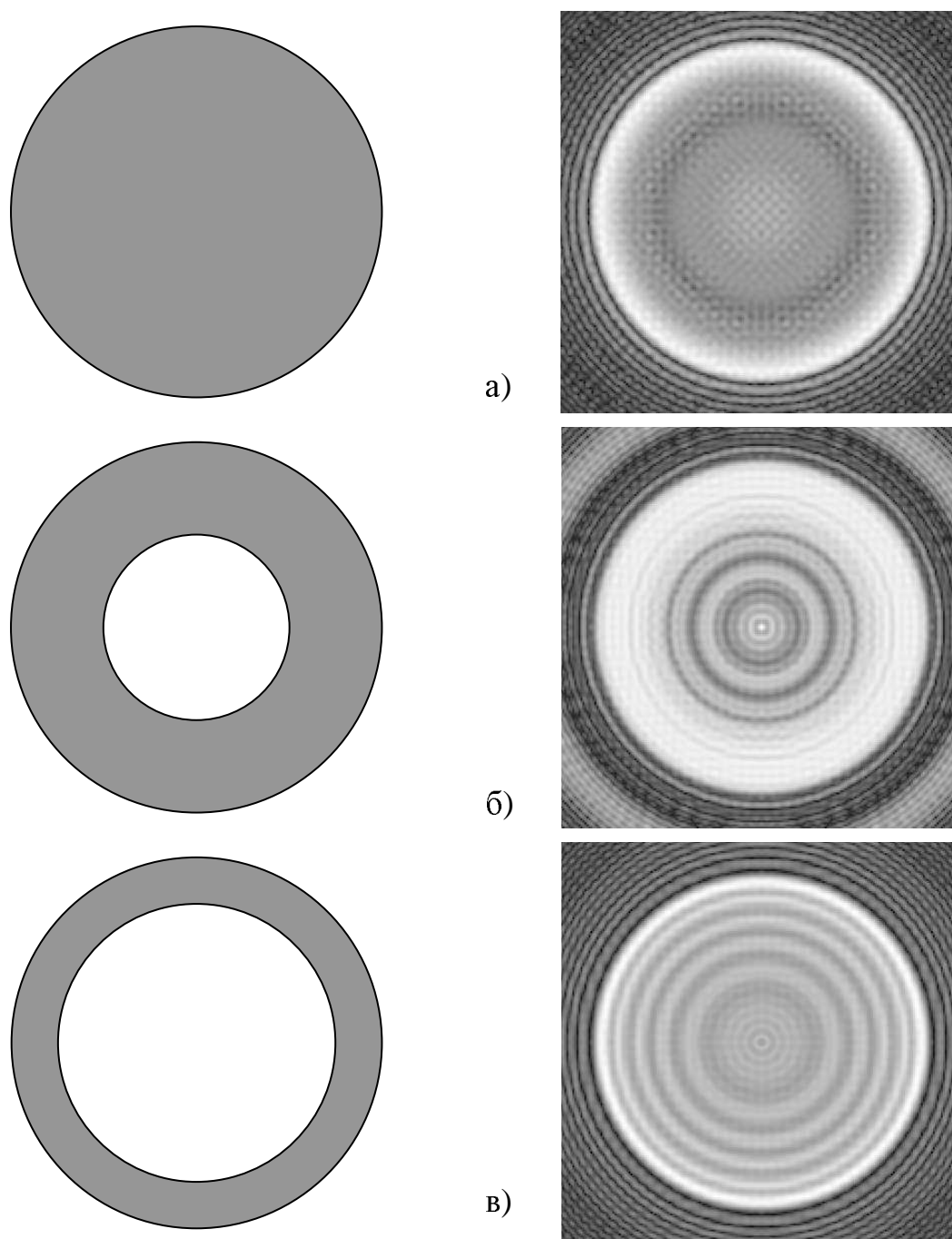


Рис. 1.8 Приклади розв'язання оберненої задачі розсіювання на основі наближення

Борна для круглого циліндра з порожниною $\varepsilon = 2$ та $f = 10\Gamma\gamma$, $R = 0.08$ для:

$r = 0$ - а), $r = 0.4$ - б), $r = 0.6$ - в)

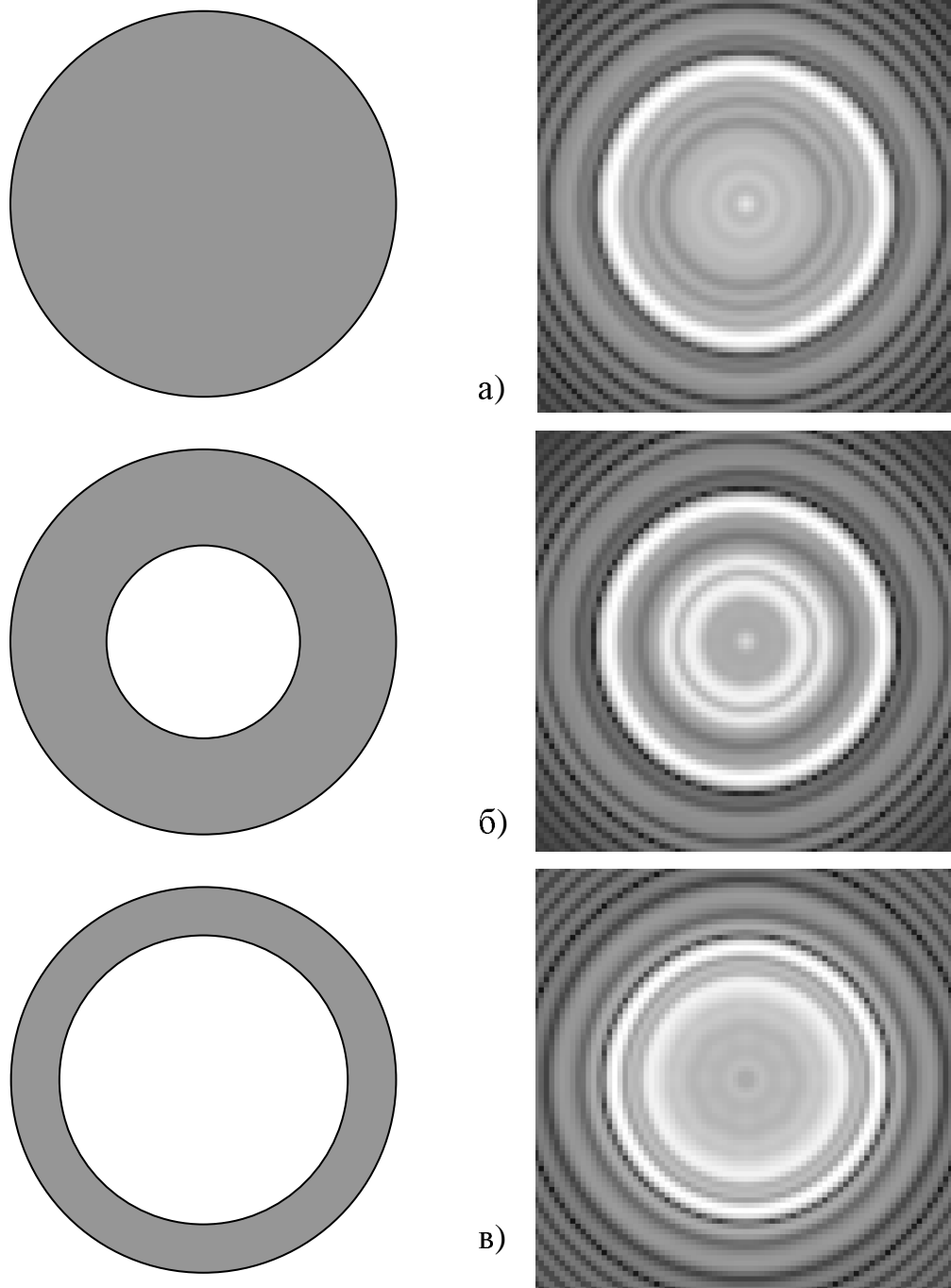


Рис. 1.9. Приклади розв'язання оберненої задачі розсіювання на основі наближення

Борна для круглого циліндра з порожниною $\varepsilon = 2$ та $f = 10\Gamma\Gamma\gamma$, $R = 0.8$ для:

$r = 0$ - а), $r = 0.4$ - б), $r = 0.6$ - в)

1.5. Висновок до першого розділу

Для забезпечення практичної цінності результатів досліджень проведено огляд прикладних науково-технічних задач та аспектів технічної реалізації вимірювань електромагнітного поля і підходів до обробки вимірювань, спрямованих на розв'язання сформульованої в дисертації проблеми встановлення параметрів неоднорідних середовищ. Показано, що відомі методи, розвинуті на основі наближених моделей розсіювання та грубих припущень про властивості розсіювачів, не дають можливості реалізувати достовірне оцінювання параметрів середовищ та не задовольняють сучасним вимогам. Також результати численних досліджень свідчать про те, що істотне підвищення ефективності оцінювання параметрів неоднорідних середовищ можна досягнути через удосконалення методів обробки вимірюваних складових електромагнітного поля. Строге математичне формулювання задачі оцінювання параметрів середовищ зводиться до оберненої задачі розсіювання для моделі розповсюдження електромагнітних хвиль у вигляді рівняння Максвелла. У загальному випадку така задача є надзвичайно складною, і загального підходу до її розв'язку не існує. Розв'язання такої задачі методом найменших квадратів вимагає знаходження глобального екстремуму багатоекстремального функціоналу. Такий підхід повністю втрачає свою ефективність при великій кількості невідомих, які необхідно оцінити за даними розсіювання. Саме тому основну частину першого розділу присвячено огляду основних підходів до розв'язання обернених задач та показано особливості їх розв'язків для різних моделей розсіювання.

Результати аналізу методів розв'язання обернених задач розсіювання подано у відповідності до характеру апріорних даних про неоднорідні середовища та особливості моделей, якими описано процес розсіювання хвиль. Окремо виділено огляд обернених задач розсіювання, які зводяться до одновимірних, багатовимірних обернених задач розсіювання та обернених задач, які використовують різні моделі розсіювання, у тому числі й високочастотне наближення.

За характером шуканої функції обернені задачі розсіювання для неоднорідних середовищ умовно розділено на два типи: обернені задачі, в яких шукані електричні параметри матеріалу описуються неперервною функцією, та обернені задачі для середовищ із кусково-постійними функціями матеріальних параметрів, які можна трактувати як середовища, що містять нелокальні контрастні включення. Розвиток методів розв'язання задач першого типу в основному пов'язаний з ідеями, покладеними в основу теорії обернених задач для стаціонарного рівняння Шредінгера. Останнє в даному випадку служить моделлю для розсіювання електромагнітних хвиль. Для прикладу дано стандартний підхід до розв'язання двовимірної оберненої задачі. Через складність числової реалізації та обмеження, при яких існує розв'язок оберненої задачі, він має невелике практичне значення. В одновимірному випадку цей підхід полягає у зведенні оберненої задачі до розв'язання інтегральних рівнянь Вольттери другого роду типу Гельфанда-Левітана та Марченка.

Результати аналізу показують, що відомі методи розв'язування обернених задач другого типу відносно кусково-постійних функцій матеріальних параметрів ґрунтуються на ідеї ідентифікації лише границі контрастного включення, встановлюючи таким чином форму розсіювача. Високу ефективність та простоту в реалізації продемонстрували методи, які визначають належність конкретної точки простору до границі розсіювача. Емпіричний характер виведення таких методів не дозволяє їх узагальнити на практично важливі випадки. В одновимірному випадку методи розв'язання обернених задач розсіювання другого типу базуються на дискретній моделі, що передбачає оцінювання параметрів шаруватих структур.

Зазначимо, що на практиці шукана функція матеріальних параметрів матеріалів, зокрема діелектрична проникність, може бути довільною. Наявність поверхонь розділу між матеріалами з різними властивостями вказує на присутність розривів діелектричної проникності. При цьому електричні параметри кожного середовища назагал можуть бути довільними неперервними функціями. Не зважаючи на важливість для практики, проведений аналіз існуючих методів показує, що оцінюванню параметрів при кусково-неперервних функціях матеріальних параметрів

увага приділялася недостатньо. Виходячи з умов практичної реалізації вимірювань, показано також, що вихідні дані про розсіяне електромагнітне поле, як правило, задані для дискретної множини точок, що належать обмеженому сектору кутів спостереження на скінченій смузі частот, а також можуть бути відомими лише абсолютні значення комплекснозначних величин. На додаток вихідні дані для сформульованої задачі оцінювання мають шумову складову. Результати аналізу показують, що більшість теоретично розроблених методів розв'язання обернених задач втрачають свою дієвість за наявності таких обмежень. Тому важливим є створення моделі процесів поширення електромагнітних хвиль у неоднорідних середовищах, яка (крім адекватності процесам розсіювання) була б прийнятною для знаходження розв'язку відповідної оберненої задачі. Методи розв'язання таких обернених задач повинні враховувати наявність перелічених вище обмежень щодо вихідних даних.

РОЗДІЛ 2

МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ОДНОВИМІРНИХ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ РОЗСІЮВАННЯ

Завдяки строгості математичного формулювання теорію обернених задач розсіювання розглядають як один із перспективних напрямів пошуку розв'язків багатьох прикладних задач - таких, як мікрохвильова візуалізація, дистанційне зондування, синтез елементів антенно-фідерної техніки, неруйнівний контроль і т.д.

Варто зазначити, що через значну математичну складність та своєрідність формулювання обернені задачі виділяють як окрему нову теорію у математиці. Як правило, ця теорія охоплює комплекс питань щодо розв'язання обернених задач для диференціальних рівнянь, які є моделями досліджуваних процесів взаємодії полів різної природи з середовищем. На важливість розвитку такої теорії вказує зростаюча кількість публікацій у зарубіжних журналах, зокрема ряд монографій з теорії обернених задач розсіювання [55-58, 62, 102, 103, 111, 122, 148, 184, 185, 194, 202, 203, 205].

Чільне місце в цій теорії посідає напрям, який стосується створення методів непрямого визначення геометричних та електричних параметрів плоскошаруватих середовищ. Зокрема, обернені задачі розсіювання електромагнітних хвиль на плоско-неоднорідних середовищах та шаруватих структурах часто можна привести до одновимірної форми, а отже трактувати як задачі встановлення коефіцієнтів у звичайних диференціальних рівняннях другого порядку. Вихідними даними для таких обернених задач є відомі асимптотична поведінка розв'язків або елементи матриці розсіювання. У дисертації розвинуто ідею побудови методів оцінювання параметрів неоднорідних плоских середовищ, що ґрунтуються на розв'язанні оберненої задачі розсіювання плоскої хвилі за відсутності спрощень про об'єкти дослідження.

Математичне формулювання обернених задач розсіювання та їх розв'язання з урахуванням обмежень, визначених умовами експерименту, складають складну проблему. Важливими є також аналітичне виведення тотожностей, які формують

метод розв'язання одновимірної оберненої задачі розсіювання, створення числово-аналітичного підходу до знаходження її стійкого розв'язку та встановлення умов його існування. Окрім того, для забезпечення стійкості розв'язку оберненої задачі до похибок доцільно формулювати обернену задачу статистично, що також передбачає оцінювання точності розв'язку та потенційно досяжного значення роздільної здатності для ідентифікації тонких шарів у структурі.

Застосування потужного математичного апарату для дослідження неоднорідних середовищ дозволяє розширити функціональні (експлуатаційні) можливості засобів підповерхневого зондування та неруйнівного контролю, оскільки такий підхід дозволяє знаходити найбільш загальні розв'язки та враховувати наявність багатьох ефектів, які супроводжують розсіювання. Без врахування таких ефектів оцінювання параметрів середовищ за розсіяним полем носило б наближений характер. Неруйнівні методи контролю дозволяють здійснювати ідентифікацію внутрішньої структури матеріалів, що в свою чергу відкриває можливості виявлення пошкоджень.

Про актуальність теми дисертації свідчить й те, що фізичними прототипами досліджуваних математичних об'єктів є плоскі елементи конструкцій, в яких під зовнішнім впливом змінюються підповерхневі фізико-механічні характеристики матеріалу. До таких змін можна віднести рівномірну у площині контакту деформацію тіла, корозію, пористість матеріалу. Очевидно, що неоднорідність перелічених впливів, що змінюються з глибиною, призведе до корельованої зміни електричних параметрів самих матеріалів. Отже, встановлення та ідентифікація електричних параметрів неруйнівними методами радіочастотного зондування відкриває можливість діагностувати наявність критичних змін та уможливорює оцінити ресурс елементів конструкцій. Використання математично обґрунтованих методів неруйнівного контролю, що базуються на розв'язках обернених задач розсіювання електромагнітних хвиль, уможливорює здійснення такого аналізу на якісно новому рівні та з суттєво кращими показниками ефективності.

Актуальність та важливість розвитку математично обґрунтованого підходу до неруйнівного контролю можна підкреслити існуванням у дистанційному зондуванні

та медичній діагностиці споріднених обернених задач, що знаходяться зараз на етапі активного опрацювання.

Як було показано у вступі, для реконструкції діелектричної проникності шаруватих матеріалів можна використати метод пошарового зрізання [62,146,243]. Він дає задовільний результат для випадку, коли шукана функція є кусково-постійною, а розриви діелектричної проникності знаходяться у вузлах деякої регулярної сітки. Вихідні дані при цьому повинні бути точно відомими для довільної частоти. Математична модель, яку покладено в основу методу пошарового зрізання, не передбачає неперервної зміни діелектричної проникності у досліджуваній структурі. Варто наголосити, що особливої уваги потребує задача реконструкції неперервного профілю діелектричної проникності за наявності поверхонь розділу, де функція діелектричної проникності має розриви. Така задача має велике практичне значення, оскільки більшість фізичних плоских структур не можна описати моделлю, де поперечна зміна матеріальних параметрів є неперервною функцією. Саме тому основну увагу в цьому розділі приділено створенню нового методу розв'язання обернених задач розсіювання відносно довільних невідомих функцій матеріальних параметрів (діелектричної проникності та провідності). Ці задачі належать до значно ширшого класу, ніж здатні розв'язати існуючі методи. Широке використання діелектричних матеріалів для ізоляції та корозійного захисту, а також розширення сфери застосування полімерних композитних матеріалів як елементів конструкцій визначають необхідність створення відповідних засобів неруйнівного контролю.

Модель, яка використана для формулювання оберненої задачі, базується на припущенні про нормальне падіння плоскої електромагнітної хвилі на осесиметричну плоску структуру. Публікації Марченка [99, 100] стали математичною основою строгого підходу до розв'язання одновимірних обернених задач. У цих роботах обернену задачу сформульовано в контексті теорії потенціального розсіювання. Відомо, що обернену задачу для випадку падіння плоскої хвилі на середовище з неперервною зміною діелектричної проникності вздовж напрямку розповсюдження хвилі можна розв'язати приведенням системи Максвелла до

рівняння Шредінгера [106]. Це спонукало до детального аналізу випадків, де напрацювання математичної теорії квантової механіки дають можливість знайти нові розв'язки електродинамічних задач. До основних інструментів, які використано для побудови методів розв'язання обернених задач, можна віднести теорію функцій комплексної змінної та теорію операторів. Задача Гільберта-Рімана [211, 186, 246] та оператори перетворення [98] тут відіграють ключову роль. Важливо зазначити, що безпосереднє використання підходів теорії потенціального розсіювання до розв'язання електродинамічних задач не завжди є математично коректним, оскільки встановлення відповідності між фізичними властивостями реальних об'єктів дослідження в електродинаміці та у квантовій теорії розсіювання не завжди є можливим. Пряме ототожнення призводить до появи абстрактних об'єктів у моделі потенціального розсіювання, які не мають фізичної інтерпретації і раніше не досліджувалися. Це пов'язано насамперед із наявністю розривів у функціях діелектричної проникності, яким у моделях потенціального розсіювання відповідають сингулярні потенціали. Критичним обмеженням у перелічених вище підходах є виконання умови неперервності шуканої функції діелектричної проникності. Тому окремою задачею є створення підходу, який можна застосувати як для реконструкції неперервних функцій матеріальних параметрів, так і для встановлення розривів у функціях, що описують місця розділу середовищ у багат шарових структурах. Подібні задачі сформульовано в роботах Актосана [139, 140], Грінберг [138] та інших дослідників [137, 141], але отриманий там розв'язок у вигляді сингулярного інтегрального рівняння [138] є малоприйнятним для практичного застосування.

Тому отримання принципово нових результатів відносно одновимірної оберненої задачі для плоско-неоднорідних середовищ та шаруватих структур матиме важливе значення для подальшого розвитку теорії обернених задач розсіювання та їх застосування до неруйнівного контролю матеріалів і підповерхневого зондування.

2.1. Рівняння типу Шредінгера та система типу Дірака як модель розсіювання електромагнітних хвиль в одновимірному випадку

Ідея, яку розвинуто в дисертації, полягає у застосуванні моделей теорії потенціального розсіювання до опису процесів розсіювання електромагнітних хвиль з метою побудови розв'язків обернених електродинамічних задач. Аргументами такого підходу є те, що

- асимптотика розв'язків деяких прямих задач в електродинаміці та теорії потенціального розсіювання співпадають;

- у теорії квантової механіки значний прогрес досягнуто через те, що розв'язок обернених задач є єдиним шляхом отримання інформації про частинки за відомими характеристиками розсіювання;

- у теорії потенціального розсіювання набули розвитку такі математичні інструменти, як теорія функцій комплексної змінної та теорія операторів, а також всесторонньо проаналізовано задачі Гільберта-Рімана та задачі для операторів перетворення, які є придатними для розв'язання електродинамічних обернених задач.

Для підтвердження приведених аргументів покажемо, що у багатьох випадках асимптотики розв'язків рівнянь, які є електродинамічними моделями та моделями потенціального розсіювання, співпадають. Параметри ж, які складають набір вихідних даних оберненої задачі, визначаються асимптотикою розв'язків відповідних рівнянь як в електродинамічному, так і в потенціальному (квантоводинамічному) формулюваннях.

2.1.1. Квантовомеханічні моделі. Відомо, що еволюцію квантовомеханічної системи можна описати розв'язками рівняння Шредінгера [75]

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = \hat{H} \Psi(\mathbf{r}, t), \quad (2.1)$$

де \hat{H} - гамільтоніан квантовомеханічної системи; \hbar - стала Планка; $\Psi(\mathbf{r}, t)$ - хвильова функція, яка визначає стан системи в момент часу t .

Згідно з засадами теорії квантового розсіювання, для відомої хвильової функції падаючої частинки $\Psi^{(in)}$ за розв'язком рівняння Шредінгера знаходять хвильову функцію $\Psi^{(out)}$ розсіяної частинки. Враховуючи те, що частинка може перебувати в одному з станів, достатньо розв'язати задачу розсіювання для частинки у кожному із станів $\psi_{\alpha}^{(in)}$. Тут α є квантовими числами, а функції $\psi_{\alpha}^{(in)}$ складають повний ортонормований базис. Обчислення результуючої хвильової функції ґрунтується на принципі суперпозиції, з урахуванням результату розсіювання для довільного стану падаючої частинки.

Розкладемо хвильові функції у вигляді $\Psi^{(in)} = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \psi_{\alpha}^{(in)}$ і відповідно, $\Psi^{(out)} = \sum_{\beta} b_{\beta} \psi_{\beta}^{(out)}$. Тут набір функцій $\psi_{\alpha}^{(in)}$ і $\psi_{\beta}^{(out)}$ складають повний базис, за допомогою якого можна описати довільний стан частинки, включаючи її характеристики як до моменту розсіювання, так і після нього. Тоді задача розсіювання зводиться до знаходження співвідношення між коефіцієнтами a_{α} та b_{β} . Таке співвідношення можна записати у вигляді

$$b_{\beta} = \sum_{\alpha} S_{\beta\alpha} a_{\alpha}, \quad (2.2)$$

де $S_{\beta\alpha}$ - елементи матриці розсіювання \mathbf{S} , які визначають квантовомеханічні амплітуди переходу (розсіювання) частинки з одного стану в інший.

Як відомо, матриця розсіювання є також зручною характеристикою для опису електродинамічних процесів у багатополіусниках і, зокрема, при розсіюванні електромагнітних хвиль на шаруватих структурах. Не зважаючи на те, що процеси мають різну фізичну природу, формальне визначення матриць \mathbf{S} для квантовомеханічних процесів та розсіювання хвиль на багат шарових структурах є однаковим.

Іншим аргументом на користь застосування єдиної моделі, яка описує результат спостереження квантовомеханічних та електродинамічних процесів, є випадок одноканального розсіювання безспінової частинки. Її поведінка в потенціальному полі описується стаціонарним рівнянням Шредінгера

$$E\Psi(\mathbf{r}) = \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right) \Psi(\mathbf{r}), \quad (2.3)$$

де E - енергія; $V(\mathbf{r})$ - потенціал; μ - маса частинки.

Сумістимо нерухомий розсіювальний центр із початком координат і візьмемо напрям падаючих частинок за вісь z . На великій відстані від розсіювального центра падаюча частинка рухається вільно, і її хвильова функція має вигляд плоскої хвилі $\exp(ikz)$. Біля силового центру частинка зазнає розсіювання і, відповідно, її хвильова функція змінюється. Після того, як розсіяна частинка віддалиться від розсіювального центра, вона знову набуде властивостей вільної частинки. Враховуючи, що потік вільних розсіяних частинок буде спрямований від розсіювального центра, їх рух можна описати хвилею, що розходить $f(\theta, \varphi) \exp(ikr)/r$. Звідси повну хвильову функцію, яку визначає рух падаючої та розсіяної частинок на великих відстанях від розсіювального центра, можна подати у вигляді

$$\psi = \exp(ikz) + f(\theta, \varphi) \frac{\exp(ikr)}{r}, \quad (2.4)$$

де $f(\theta, \varphi)$ - амплітуда розсіювання, що залежить від аргументів θ та φ , які в тривимірному випадку визначають напрям спостереження.

Як видно, подібну форму має розв'язок (1.41) рівняння Максвела в далекій зоні для скалярного випадку, який описано у першому розділі.

Окрім того, варто згадати інші дві фундаментальні моделі потенціального розсіювання квантовомеханічної теорії. Насамперед йдеться про стаціонарне рівняння Шредінгера для радіально-симетричного розсіювального потенціалу [55]:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - U(r) \right) u_l(r) = 0. \quad (2.5)$$

Коефіцієнти k та $U(r)$ цього рівняння визначають основні характеристик квантово-

механічної взаємодії: енергію $E = \frac{\hbar^2}{2\mu} k^2$ та потенціал $V = \frac{\hbar^2}{2\mu} U$.

У випадку $l=0$ фундаментальна система розв'язків дозволяє записати загальний розв'язок рівняння (2.5) через матрицю розсіювання, що є ідентичним до форми подання розв'язків прямої задачі розсіювання для електромагнітних та акустичних хвиль в одновимірному випадку.

По-друге матрицею розсіювання можна виразити також розв'язки рівняння Дірака [121], яке описує еволюцію частинки із спіном - $\frac{1}{2}$. В одновимірному випадку таку модель записують як

$$B \frac{d}{dx} \Phi + Q(x) \Phi = k^2 \Phi, \quad (2.6)$$

де $\Phi = [\varphi_1, \varphi_2]^T$ - векторнозначна двокомпонентна хвильова функція; $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ -

матриця Паулі; $Q = \begin{bmatrix} q_1(x) & q_2(x) \\ q_2(x) & -q_1(x) \end{bmatrix}$ - матриця потенціалів.

Модель (2.6) набула розвитку в теорії нелінійних диференціальних рівнянь, які належать до так званої AKNS-ZS ієрархії. Істотний доробок у цьому напрямі зробили В.Захаров і А.Шабат [124], а згодом узагальнили Ablowitz, Kaup, Newell та Segur [125]. Зокрема, їх результати дозволили отримати аналітичні вирази для моделювання процесу розповсюдження солітонів [126].

2.1.2. Електродинамічне формулювання задачі. Виходячи з того, що асимптотичний характер розв'язків рівнянь, які моделюють квантовомеханічні [75] та електродинамічні процеси [70,244], у деяких випадках співпадають, можна припустити, що між коефіцієнтами цих хвильових рівнянь існує певна залежність. Саме задачу про встановлення цієї залежності розв'язано у цьому пункті на прикладі одновимірних задач. В подальшому, вживаючи терміни «рівняння Шредінгера» та «система Дірака» матимемо на увазі рівняння типу Шредінгера та система типу Дірака.

Відомо, що за певних умов електродинамічну обернену задачу розсіювання можна привести до одновимірної. Для цього до системи рівнянь електромагнітного поля для плоскої хвилі, яка поширюється над осесиметричною шаруватою структурою, застосовують метод розділення змінних.

Розглянемо нормальне падіння плоскої електромагнітної хвилі на поверхню плоскої осесиметричної структури (рис. 2.1). Скористаємося припущенням про те, що плоскошарувате середовище не має розривів у функціях відносної діелектричної проникності $\varepsilon(z)$ та провідності $\sigma(z)$, а також є немагнітним з відносною магнітною проникністю $\mu=1$. Функції діелектричної проникності $(\varepsilon(z)-1)$ та провідності $\sigma(z)$ мають також компактний носій у правому напівпросторі $z > 0$. У цьому випадку рівняння електромагнітного поля для електричної $E(z)$ та магнітної $H(z)$ складової напруженості можна записати як

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} E(z) \\ H(z) \end{bmatrix} = -i\omega \begin{bmatrix} 0 & \mu_0 \\ (\varepsilon_0\varepsilon(z) - i\sigma(z)/\omega) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(z) \\ H(z) \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

де ε_0 і μ_0 - діелектрична та магнітна проникності вільного простору; ω - частота коливань, що визначає хвильовий коефіцієнт $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ у вільному просторі.

Асимптотичний розв'язок рівняння (2.7) можна записати через правосторонній $R(k_0)$ і лівосторонній $L(k_0)$ коефіцієнти відбиття, а також коефіцієнти пропускання $T_1(k_0)$ та $T_2(k_0)$:

$$E_r(z, k_0) = L(k_0)\exp(-ik_0z) + \exp(ik_0z) + o(1), z \rightarrow -\infty, \quad (2.8)$$

$$E_l(z, k_0) = R(k_0)\exp(ik_0z) + \exp(-ik_0z) + o(1), z \rightarrow \infty, \quad (2.9)$$

$$E_r(z, k_0) = T_1(k_0)\exp(ik_0z) + o(1), z \rightarrow \infty, \quad (2.10)$$

$$E_l(z, k_0) = T_2(k_0)\exp(-ik_0z) + o(1), z \rightarrow -\infty. \quad (2.11)$$

Коефіцієнти відбиття та пропускання є елементами матриці розсіювання

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} R & T_2 \\ T_1 & L \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Оскільки ці коефіцієнти можна виміряти експериментально, і вони, за певних умов, дозволяють повністю охарактеризувати невідоме плоскошарувате середовище, то їх прийнято вважати вихідними даними для оберненої задачі розсіювання.

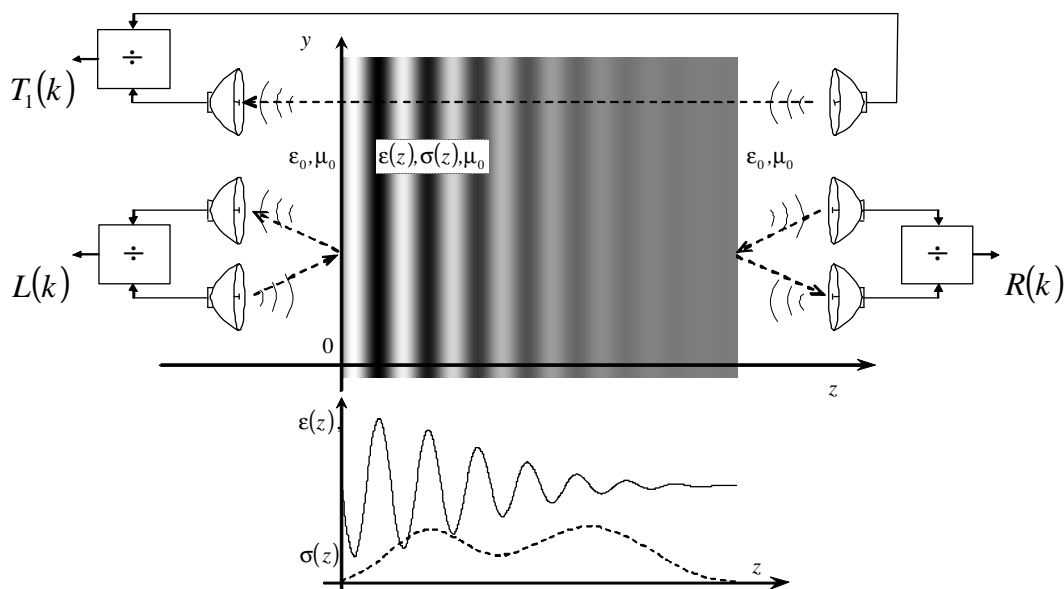


Рис. 2.1. Визначення елементів S-матриці плоско-неоднорідного середовища

2.1.3. Приведення системи Максвелла до рівняння Шредінгера.

Тривіальною моделлю опису хвильових процесів є рівняння Гельмгольца, яке записують відносно функції напруженості електричного поля. Підставивши перше рівняння в системі (2.7) у друге, отримаємо

$$\frac{d^2 E}{dz^2} + k^2 \varepsilon(z) E - ik \rho_o \sigma(z) E = 0. \quad (2.13)$$

Для приведення формули (2.13) до рівняння Шредінгера зроблено дві заміни змінних:

$$x(z) = \int_{-\infty}^z \sqrt{\varepsilon(z')} dz' \quad \text{та} \quad E(x) = \frac{\phi(x)}{\sqrt[4]{\varepsilon(x)}}. \quad (2.14) \text{ та } (2.15)$$

Заміну змінних згідно з виразом (2.14) називають перетворенням Ліувіля, яке дозволяє розглядати розв'язок у системі координат, що пропорційні часу проходження фронту хвилі. В результаті зазначених заміни у формулі (2.13) отримано рівняння

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} + \left[k^2 - \left(\frac{1}{\sqrt[4]{\varepsilon(x)}} \frac{d^2 \sqrt[4]{\varepsilon(x)}}{dx^2} + ik \rho_o \frac{\sigma(x)}{\varepsilon(x)} \right) \right] \phi = 0. \quad (2.16)$$

За структурою формула (2.16) відповідає рівнянню Шредінгера (2.3), в якому функція ϕ має зміст хвильової функції, а $W(x, k)$ - енергозалежного потенціалу:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + (k^2 - W(x, k))\phi = 0. \quad (2.17)$$

Дві складові потенціалу $W(x, k) = U(x) + 2kQ(x)$ такого рівняння можна виразити відповідно через функції

$$U(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\varepsilon(x)}} \frac{d}{dx} \left(\frac{d\sqrt[4]{\varepsilon(x)}}{dx} \right) \quad \text{та} \quad Q(x) = \rho_0 \frac{i}{2} \frac{\sigma(x)}{\varepsilon(x)}. \quad (2.18) \text{ та } (2.19)$$

За умови, що $U(x)$ та $Q(x)$ прямують до нуля на нескінченості, асимптоти розв'язків рівняння Шредінгера (2.3) відповідатимуть асимптотиці розв'язків системи рівнянь Максвела для складових електромагнітного поля (2.7). Відповідно, елементи матриці розсіювання можуть служити вихідними даними як для оберненої задачі розсіювання для рівняння Шредінгера, так і для оберненої задачі для рівнянь (2.7).

У частковому випадку безвтратного середовища $\sigma = 0$ розсіювання плоскої електромагнітної хвилі можна змоделювати рівнянням Шредінгера з енергонезалежним потенціалом $W(x, k)|_{\sigma=0} = U(x) \equiv V(x)$:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + (k^2 - V(x))\phi = 0. \quad (2.20)$$

Потенціал $V(x)$ такого рівняння можна також виразити через функцію діелектричної проникності

$$V(x) = \frac{d^2}{dx^2} \ln \left(\sqrt[4]{\varepsilon(x)} \right) + \left(\frac{d}{dx} \ln \left(\sqrt[4]{\varepsilon(x)} \right) \right)^2. \quad (2.21)$$

2.1.4. Приведення рівняння Максвела до системи Дірака з несиметричним потенціалом. Нехай систему рівнянь (2.7) для плоскої хвилі в неоднорідному середовищі записано у формі

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial z} + ik\mu\rho_0 H = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial z} + ik\varepsilon(z) \frac{1}{\rho_0} E + \sigma(z) E = 0, \end{cases} \quad (2.22)$$

де $\rho_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ - характеристичний імпеданс вільного простору; $\mu = 1$ - магнітна проникність.

Першим перетворенням, яке використаємо для приведення рівнянь електромагнітного поля (2.22) до системи рівнянь типу Дірака [121, 245], є заміна змінної Ліувіля згідно з виразом (2.14). Варто зазначити, що асимптотична поведінка розв'язків системи рівнянь (2.22) збігається з асимптотичною поведінкою розв'язків отриманої після згаданої заміни системи

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} E(x) \\ H(x) \end{bmatrix} + ik_0 \begin{bmatrix} 0 & \rho_0/\sqrt{\varepsilon(x)} \\ \sqrt{\varepsilon(x)}/\rho_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(x) \\ H(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\sigma/\sqrt{\varepsilon(x)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(x) \\ H(x) \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Введення двох нових змінних $V_1 = \sqrt[4]{\rho_0/\varepsilon(x)}H(x) - \sqrt[4]{\varepsilon(x)/\rho_0^3}E(x)$ і $V_2 = \sqrt[4]{\rho_0/\varepsilon(x)}H(x) + \sqrt[4]{\varepsilon(x)/\rho_0^3}E(x)$ в рівняння (2.23) дає змогу переписати його у формі канонічного рівняння Дірака, яке також називають рівнянням Захарова-Шабата [124]

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} - ik_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} iq_3 & q^+ \\ q^- & -iq_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

де $q_3 = -i \frac{1}{2} \frac{\sigma(x)\rho_0}{\varepsilon(x)}$ і $q^\pm = -\frac{1}{4} \frac{d \ln(\varepsilon(x))}{dx} \mp \frac{1}{2} \frac{\sigma(x)\rho_0}{\varepsilon(x)}$ - потенціали цього рівняння.

Для зручності аналізу, формулу (2.24) приводять до іншого вигляду:

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} - ik_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{q}^+ \\ \tilde{q}^- & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

де $F_1 = V_1 \exp\left(-i \int_{-\infty}^x q_3 dx'\right)$ і $F_2 = V_2 \exp\left(i \int_{-\infty}^x q_3 dx'\right)$ є змінними цього рівняння, тоді як потенціали можна подати в новій формі

$$\tilde{q}^\pm = \left(-\frac{1}{4} \frac{d \ln(\varepsilon(x))}{dx} \mp \frac{1}{2} \frac{\sigma(x)\rho_0}{\varepsilon(x)} \right) \exp\left(\pm \rho_0 \int_{-\infty}^x \frac{\sigma(x')}{\varepsilon(x')} dx' \right). \quad (2.26)$$

Асимптотичну поведінку розв'язку системи рівнянь Дірака (2.25) можна поставити у відповідність до асимптотичного розв'язку системи рівнянь Максвела

(2.7) за допомогою коефіцієнта відбиття $F_1(z, k_0)/F_2(z, k_0) \underset{z \rightarrow +\infty}{\approx} -R(k_0)\exp(2ik_0z)$. Це дає можливість використати асимптотичні розв'язки для формулювання оберненої задачі розсіювання відносно невідомих потенціалів \tilde{q}^\pm , визначених виразом (2.26).

Виходячи з тотожностей (2.26), функції діелектричної проникності та провідності виразимо через потенціали \tilde{q}^+ та \tilde{q}^- у системі Дірака як

$$\varepsilon(x) = \exp\left\{-2 \int_{-\infty}^x \left(\frac{\tilde{q}^+(x')}{L(x')} + \tilde{q}^-(x')L(x')\right) dx'\right\} \text{ та } \sigma(x) = -\frac{\varepsilon(x)}{\rho_0} \frac{d}{dx} \ln(L), \quad (2.27) \text{ та } (2.28)$$

де L - допоміжна функція, яка є розв'язком рівняння Рікатті

$$\frac{dL}{dx} + L^2 \tilde{q}^- - \tilde{q}^+ = 0. \quad (2.29)$$

Розповсюдження електромагнітної хвилі у безвтратному середовищі описано моделлю у вигляді системи Дірака з симетричним потенціалом $q = \tilde{q}^- = \tilde{q}^+$. У цьому випадку функція, яка є розв'язком рівняння (2.29), буде сталою величиною $L=1$. Звідси випливає тотожність, яка дозволяє виразити функцією діелектричної проникності через потенціал для безвтратного випадку

$$\varepsilon(x)|_{\sigma=0} = \exp\left\{-4 \int_{-\infty}^x q(x') dx'\right\}. \quad (2.30)$$

За результатами аналізу моделей у вигляді рівнянь Шредінгера та Дірака зроблено важливий висновок про те, що між потенціалами в системі Дірака \tilde{q}^+ і \tilde{q}^- та енергозалежним потенціалом $W(x, k) = U(x) + 2kQ(x)$ в рівнянні Шредінгера є взаємозв'язок. Його виразимо тотожностями

$$U(x) = \frac{3}{4} \left((\tilde{q}^+)^2 L^2 + (\tilde{q}^-)^2 \frac{1}{L^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{d\tilde{q}^-}{dx} \frac{1}{L} + \tilde{q}^- \tilde{q}^+ + \frac{d\tilde{q}^+}{dx} L \right) \quad (2.31)$$

та

$$Q(x) = \frac{i}{2} \frac{d}{dx} \ln(L), \quad (2.32)$$

де функція L є розв'язком рівняння Рікатті (2.29).

У частковому випадку для системи Дірака з симетричним потенціалом $q = \tilde{q}^- = \tilde{q}^+$ та рівнянням Шредінгера з потенціалом $W(x, k) = V(x)$, який не залежить від енергії, справедлива тотожність

$$V(z) = (q(z))^2 - dq(z)/dz. \quad (2.33)$$

Отже зафіксувавши граничні умови на нескінченості для заданих елементів матриці розсіювання, електродинамічні процеси, що описуються рівняннями Максвела в одновимірному випадку можна також описати моделями потенціального розсіювання, такими як стаціонарне рівняння Шредінгера (2.17) та рівняння Дірака (2.24) з несиметричним потенціалом.

2.2. Розв'язки Йоста як модель спостереження в оберненій задачі розсіювання

Дослідження одновимірних обернених задач розсіювання асоціюють з граничними умовами на нескінченості, які дозволяють описати матрицю розсіювання. Такі граничні умови, як правило, мають фізичну інтерпретацію, оскільки відбита хвиля має комплексну амплітуду, що відповідає коефіцієнту відбиття, а пройдена скрізь середовище хвиля – має амплітуду коефіцієнта проходження.

Крім вище приведених граничних умов при дослідженні звичайних диференціальних рівнянь другого порядку та в теорії потенціального розсіювання використовують й інші граничні умови на нескінченості.

Розглянемо рівняння Шредінгера (2.20), енергонезалежний потенціал якого задовольняє умові $V(x) \in L^1_2(\mathbb{R}) = \left\{ V(x) : \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |x|^2) V(x) dx < \infty \right\}$. Тоді розв'язками Йоста [55, 75] такого рівняння, називають функції f_1 та f_2 , що на нескінченості задовольняють умовам

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_1(x, k) \exp(-ikx) = 1; \quad (2.34)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_2(x, k) \exp(ikx) = 1. \quad (2.35)$$

За допомогою методу варіації сталої можна показати, що у протилежних напрямках на нескінченості розв'язки Йоста мають асимптотику, яка визначається виразами

$$f_1(x, k) = \begin{cases} \exp(-ikx) + o(1), x \rightarrow +\infty, \\ A_1(k) \exp(ikx) + B_1(k) \exp(-ikx) + o(1), x \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad (2.36)$$

та

$$f_2(x, k) = \begin{cases} B_2(k) \exp(ikx) + A_2(k) \exp(-ikx) + o(1), x \rightarrow +\infty, \\ \exp(-ikx) + o(1), x \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad (2.37)$$

де $A_1(k)$, $A_2(k)$, $B_1(k)$ та $B_2(k)$ - коефіцієнти розв'язків Йоста, або елементи матриць передачі.

Враховуючи попарну лінійну незалежність функцій $f(x, k)$ та $f(x, -k)$, одну з них можна виразити через другу:

$$\begin{cases} f_2(x, k) = A_2(k) f_1(x, k) + B_2(k) f_1(x, -k), \\ f_1(x, k) = A_1(k) f_2(x, -k) + B_1(k) f_2(x, k). \end{cases} \quad (2.38)$$

Подібні до (2.34) та (2.35) граничні умови можна застосувати до розв'язків системи Дірака (2.25) з несиметричним потенціалом, яку запишемо у вигляді

$$\begin{cases} dv_1/dx + i\zeta v_1 = q(x)v_2, \\ dv_2/dx - i\zeta v_2 = r(x)v_1, \end{cases} \quad (2.39)$$

де потенціали $q(x)$ та $r(x)$ задовольняють умовам $r(x) \rightarrow 0$ та $q(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Тоді дві пари розв'язків Йоста для рівняння (2.39) можна визначити, як

$$\phi \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \exp(-i\zeta x), x \rightarrow -\infty, \quad \bar{\phi} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \exp(i\zeta x), x \rightarrow -\infty, \quad (2.40) \text{ та } (2.41)$$

$$\psi \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \exp(i\zeta x), x \rightarrow +\infty \text{ та } \bar{\psi} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \exp(-i\zeta x), x \rightarrow +\infty, \quad (2.42) \text{ та } (2.43)$$

$$\text{де } \bar{\phi}(x, \zeta) = \begin{bmatrix} \phi_2^*(x, \zeta^*) \\ -\phi_1^*(x, \zeta^*) \end{bmatrix}.$$

Враховуючи попарну незалежність таких функцій, одну з них можна виразити через лінійну комбінацію інших

$$\begin{cases} \phi = a\bar{\psi} + b\psi, \\ \bar{\phi} = \bar{b}\bar{\psi} - \bar{a}\psi. \end{cases} \quad (2.44)$$

Звідси слідують два інші вирази, які описують поведінку розв'язків Йоста для системи Дірака на нескінченості

$$\phi \rightarrow \begin{bmatrix} a \exp(-i\zeta x) \\ b \exp(i\zeta x) \end{bmatrix}, x \rightarrow +\infty \text{ та } \bar{\phi} \rightarrow \begin{bmatrix} \bar{b} \exp(-i\zeta x) \\ -\bar{a} \exp(i\zeta x) \end{bmatrix}, x \rightarrow +\infty. \quad (2.45) \text{ та } (2.46)$$

З теорії обернених задач для потенціального розсіювання відомо, що розв'язки Йоста мають особливі аналітичні властивості. Саме ці аналітичні властивості відіграють ключову роль у розв'язанні оберненої задачі розсіювання. Окрім того, як буде показано нижче, приведення вихідних даних оберненої задачі до моделей у вигляді розв'язків Йоста дає можливість коректно розв'язувати обернені задачі розсіювання для випадків, де присутня контрастна зміна параметрів середовищ в околі поверхонь розділу.

2.2.1 Властивості розв'язків Йоста для плоскошаруватих середовищ. Для встановлення основних властивостей елементів матриці розсіювання та розв'язків Йоста насамперед розглянемо задачу розсіювання плоскої хвилі, що нормально падає на плоску шарувату діелектричну структуру. У цьому випадку напруженість поля e в довільній точці z можна визначити з хвильового рівняння

$$\frac{d^2 e(z)}{dz^2} + \omega^2 \mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon(z) e(z) = 0. \quad (2.47)$$

Розглядатимемо багатошарові чисто діелектричні структури, в яких функція діелектричної проникності $\varepsilon(z)$ є кусково-постійною, а магнітна проникність $\mu = 1$. При цьому вважаємо, що розсіяне на такій структурі поле, множина значень

якого складатиме вихідні дані для оберненої задачі, вимірюється у вільному просторі (рис. 2.2) з хвильовим числом $k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$.

Для шаруватої структури з однорідними електричними параметрами матеріалу розв'язок рівняння (2.47) має вигляд

$$e(z) = a_j(\omega)e^{-ik_j(z-d_j)} + b_j(\omega)e^{ik_j(z-d_j)}, \quad (2.48)$$

де $a_j(\omega)$ та $b_j(\omega)$ – коефіцієнти, що визначають співвідношення між хвилями, які розповсюджуються у протилежних напрямках; $k_j = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0\epsilon_j}$ – хвильове число у j -му шарі з діелектричною проникністю ϵ_j ; $j = 0, (N-1)$ – номер шару в структурі з N таких смуг.

Задовольняючи граничні умови на поверхні розділу між j -тим та $(j+1)$ -тим шарами, взаємозв'язок коефіцієнтів $a_j(\omega)$ та $b_j(\omega)$ можна визначити залежністю

$$\begin{bmatrix} a_j(\omega) \\ b_j(\omega) \end{bmatrix} = \frac{1}{2\rho_{j+1}} \begin{bmatrix} (\rho_{j+1} + \rho_j)e^{-ik_{j+1}d_{j+1}} & (\rho_{j+1} - \rho_j)e^{ik_{j+1}d_{j+1}} \\ (\rho_{j+1} - \rho_j)e^{-ik_{j+1}d_{j+1}} & (\rho_{j+1} + \rho_j)e^{ik_{j+1}d_{j+1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{j+1}(\omega) \\ b_{j+1}(\omega) \end{bmatrix}, \quad (2.49)$$

де $\rho_j = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0\epsilon_j}$ – характеристичний імпеданс; d_j – товщина j -го шару.

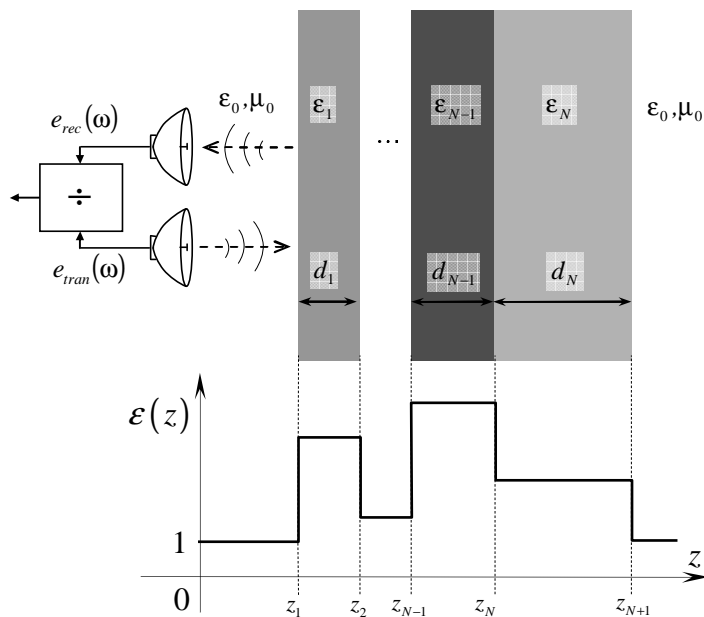


Рис. 2.2. Вимірювання коефіцієнта відбиття від багат шарової структури

Рекурентне перемноження згідно з формулою (2.49) дає можливість встановити такий взаємозв'язок для коефіцієнтів у матеріалах $j=0$ та $j=N+1$, що оточують багат шарову структуру

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_0(\omega) \\ b_0(\omega) \end{bmatrix} &= \prod_{j=0}^N \left(\frac{1}{2\rho_{j+1}} \begin{bmatrix} (\rho_{j+1} + \rho_j) e^{-ik_{j+1}d_{j+1}} & (\rho_{j+1} - \rho_j) e^{ik_{j+1}d_{j+1}} \\ (\rho_{j+1} - \rho_j) e^{-ik_{j+1}d_{j+1}} & (\rho_{j+1} + \rho_j) e^{ik_{j+1}d_{j+1}} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} a_{N+1}(\omega) \\ b_{N+1}(\omega) \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{2\rho_1} \begin{bmatrix} (\rho_1 + \rho_0) e^{-ik_1d_1} & (\rho_1 - \rho_0) e^{ik_1d_1} \\ (\rho_1 - \rho_0) e^{-ik_1d_1} & (\rho_1 + \rho_0) e^{ik_1d_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1(\omega) & B_1(\omega) \\ B_1(-\omega) & A_1(-\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{N+1}(\omega) \\ b_{N+1}(\omega) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} A_0(\omega) & B_0(\omega) \\ B_0(-\omega) & A_0(-\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{N+1}(\omega) \\ b_{N+1}(\omega) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.50)$$

де $A_0(\omega)$ та $B_0(\omega)$ – коефіцієнти розв'язків Йоста всієї структури; $A_j(\omega)$ та $B_j(\omega)$ – коефіцієнти розв'язків Йоста цієї структури без урахування впливу її перших j шарів. При цьому прийнято $d_N = 0$.

З рівності (2.50) видно, що коефіцієнти $A_0(\omega)$ та $B_0(\omega)$ задовольняють умовам симетрії та умові збереження енергії

$$A_0(-\omega) = \overline{A_0(\omega)}, \text{ та } B_0(-\omega) = \overline{B_0(\omega)}; \quad (2.51) \text{ та } (2.52)$$

$$A_0(-\omega)A_0(\omega) = 1 + B_0(-\omega)B_0(\omega). \quad (2.53)$$

Тут $\overline{A_0(\omega)}$ – комплексно-спряжена величина до $A_0(\omega)$.

Коефіцієнти розв'язків Йоста $A_0(\omega)$ та $B_0(\omega)$ всієї структури можна охарактеризувати співвідношенням між амплітудами хвиль, що розповсюджуються у протилежних напрямках за умови відсутності падаючої хвилі з однієї із сторін. Наприклад, при зондуванні структури з лівої сторони (рис. 2.2), відсутньою буде хвиля у правому півпросторі, що розповсюджується у напрямі на структуру $b_{N+1}(\omega) = 0$. Звідси рівність (2.50) набуває вигляду

$$\begin{bmatrix} a_0(\omega) \\ b_0(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0(\omega)a_{N+1}(\omega) \\ B_0(-\omega)a_{N+1}(\omega) \end{bmatrix}. \quad (2.54)$$

На основі формули (2.54) визначимо коефіцієнт пропускання та лівосторонній коефіцієнт відбиття

$$T(\omega) = \frac{a_{N+1}(\omega)}{a_0(\omega)} = \frac{1}{A_0(\omega)} \text{ та } L(\omega) = \frac{b_0(\omega)}{a_0(\omega)} = \frac{B_0(-\omega)}{A_0(\omega)}. \quad (2.55) \text{ та } (2.56)$$

У протилежному випадку, коли зондування багат шарової структури здійснюється тільки з правої сторони, матимемо $a_0(\omega) = 0$. Тоді співвідношення (2.50) можна привести до вигляду

$$\begin{bmatrix} A_0(\omega) & B_0(\omega) \\ B_0(-\omega) & A_0(-\omega) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_0(\omega) \\ b_0(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0(-\omega) & -B_0(\omega) \\ -B_0(-\omega) & A_0(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0(\omega) \\ b_0(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{N+1}(\omega) \\ b_{N+1}(\omega) \end{bmatrix}, \quad (2.57)$$

а отже

$$\begin{bmatrix} -B_0(\omega)b_0(\omega) \\ A_0(\omega)b_0(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{N+1}(\omega) \\ b_{N+1}(\omega) \end{bmatrix}. \quad (2.58)$$

Тоді коефіцієнт пропускання та правосторонній коефіцієнт відбиття можна визначити формулами

$$T(\omega) = \frac{b_0(\omega)}{b_{N+1}(\omega)} = \frac{1}{A_0(\omega)} \text{ та } R(\omega) = \frac{a_{N+1}(\omega)}{b_{N+1}(\omega)} = -\frac{B_0(\omega)}{A_0(\omega)}. \quad (2.59) \text{ та } (2.60)$$

Коефіцієнт пропускання $T(\omega)$, який для безвтратних матеріалів шарів не залежить від напрямку падіння хвилі: $T(\omega) = T_1(\omega) = T_2(\omega)$, та коефіцієнти відбиття $R(\omega)$, $L(\omega)$ є елементами матриці розсіювання діелектричної структури. З отриманих формул (2.55), (2.56), (2.59) та (2.60) видно, що всі елементи матриці розсіювання також задовольняють умові симетрії за аналогією до виразів (2.51) та (2.52):

$$\overline{T(\omega)} = T(-\omega), \quad \overline{L(\omega)} = L(-\omega) \text{ та } \overline{R(\omega)} = R(-\omega). \quad (2.61), (2.62) \text{ та } (2.63)$$

Наслідком виконання умов симетрії є те, що перетворення Фур'є від коефіцієнтів відбиття та пропускання є дійсними функціями. Крім того, з рівності (2.53) можна встановити інші важливі умови, яким задовольняють ці коефіцієнти:

$$R(\omega)T(-\omega) + L(-\omega)T(\omega) = 0, \quad (2.64)$$

$$|T(\omega)|^2 + |R(\omega)|^2 = 1 \text{ та } |T(\omega)|^2 + |L(\omega)|^2 = 1. \quad (2.65) \text{ та } (2.66)$$

Добуток матриць у виразі (2.50) свідчить, що коефіцієнти розв'язків Йоста $A_j(\omega)$ та $B_j(\omega)$ для $j = \overline{0, (N-1)}$ є скінченими сумами комплексних експонент

$$A_j(\omega) = \sum_{p=1}^{M_j} \alpha_j(p) \exp(iv_j(p)\omega); \quad (2.67)$$

$$B_j(\omega) = \sum_{p=1}^{M_j} \beta_j(p) \exp(iv_j(p)\omega), \quad (2.68)$$

де $\alpha_j(p)$ та $\beta_j(p)$ – комплексні коефіцієнти скінчених сум, $v_j(p)$ – дійсні коефіцієнти, які мають фізичний зміст часу запізнення при проходженні хвилі у багатошаровій структурі; параметр M_j є скінченим числом та визначається кількістю шарів в структурі та їх параметрами.

Варто зауважити, що під час експерименту для вимірювання доступні лише миттєві значення амплітуди випроміненого $e_{tran}(\omega)$ та прийнятого $e_{rec}(\omega)$ сигналів у точці, яка знаходиться на певній відстані d_0 від поверхні самої структури. Отже, коефіцієнт відбиття $L_m(\omega)$, що обчислено як відношення цих вимірних величин, матиме додатковий набіг фази

$$L_m(\omega) = \frac{e_{rec}(\omega)}{e_{tran}(\omega)}. \quad (2.69)$$

Цей набіг фази можна встановити з виразів (2.48) та (2.50), показавши відмінність між коефіцієнтами розв'язків Йоста $A_0(\omega)$, $B_0(\omega)$ шаруватої структури і значеннями коефіцієнтів $A_m(\omega)$, $B_m(\omega)$, які визначено шляхом перерахунку результатів вимірювань

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_m(\omega) & B_m(\omega) \\ B_m(-\omega) & A_m(-\omega) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e^{-ik_0 d_0} & 0 \\ 0 & e^{ik_0 d_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0(\omega) & B_0(\omega) \\ B_0(-\omega) & A_0(-\omega) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} A_0(\omega) e^{-ik_0 d_0} & B_0(\omega) e^{-ik_0 d_0} \\ B_0(-\omega) e^{ik_0 d_0} & A_0(-\omega) e^{ik_0 d_0} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.70)$$

З отриманого виразу (2.70) видно, що коефіцієнти розв'язків Йоста $A_m(\omega)$ та $B_m(\omega)$ можна розкласти у скінчений ряд, в якому значення аргументів комплексних

експонент відрізнятимуться від значень $\nu_0(p)$ у формулах (2.67) та (2.68) на величину запізнення $d_0\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ за рахунок проходження хвилею відстані d_0 у вільному просторі

$$\begin{aligned} A_m(\omega) &= A_0(\omega)\exp(-ik_0d_0) = \sum_{p=1}^{M_0} \alpha_0(p)\exp\left(i\omega\left(\nu_0(p) - d_0\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\right)\right) = \\ &= \sum_{p=1}^{M_0} \alpha_0(p)\exp(i\omega\tau_p); \end{aligned} \quad (2.71)$$

$$\begin{aligned} B_m(\omega) &= B_0(\omega)\exp(-ik_0d_0) = \sum_{p=1}^{M_0} \beta_0(p)\exp\left(i\omega\left(\nu_0(p) - d_0\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\right)\right) = \\ &= \sum_{p=1}^{M_0} \beta_0(p)\exp(i\omega\tau_p). \end{aligned} \quad (2.72)$$

Звідси можна визначити, який набіг фази присутній у вимірних коефіцієнтах відбиття та проходження:

$$L_m(\omega) = \frac{B_m(-\omega)}{A_m(\omega)} = L(\omega)\exp(i2k_0d_0); \quad (2.73)$$

$$T_m(\omega) = \frac{1}{A_m(\omega)} = T(\omega)\exp(ik_0d_0). \quad (2.74)$$

Твердження: Імпульсна характеристика будь-якої безвтратної багатошарової структури складається з нескінченної суми δ -функцій. Крім того, розташування цих δ -функцій на осі τ визначає лінійна комбінація $(lT_1 + mT_2 + \dots)$, де l та m є довільними цілими числами.

Доведення: З виразів (2.49), (2.50) та (2.60) можна встановити внесок, який робить перша поверхня розділу багатошарової структури між оточуючим середовищем та матеріалом першого шару з характеристичними імпедансами ρ_I та ρ_{II} , у загальний коефіцієнт R_N відбиття структури з N шарів

$$R_N(\omega) = \frac{-\kappa + R_{N-1}(\omega)e^{-2i\omega\Delta\tau}}{1 - \kappa R_{N-1}(\omega)e^{-2i\omega\Delta\tau}} = -1/\kappa + (1/\kappa - \kappa) \frac{1}{1 - \kappa R_{N-1}(\omega)e^{-2i\omega\Delta\tau}}, \quad (2.75)$$

де R_{N-1} є коефіцієнтом відбиття структури, без першого (зовнішнього) шару; $\Delta\tau$ - часова затримка у розповсюдженні електромагнітної хвилі у цьому шарі; $\kappa = (\rho_I - \rho_{II}) / (\rho_I + \rho_{II})$ - коефіцієнт відбиття від поверхні розділу.

Для дійсного значення кутової частоти $\omega \in \mathbb{R}$ множник $\kappa \exp(-2i\omega\Delta\tau) R_{N-1}(\omega)$ у виразі (2.75) є завжди меншим, ніж 1. Це дозволяє застосувати такий збіжний геометричний ряд для розкладу функції коефіцієнта відбиття:

$$\frac{1}{1-ax} = \sum_{k=0}^{\infty} (ax)^k = 1 + ax + a^2x^2 + a^3x^3 + \dots \quad (2.76)$$

Частотну залежність коефіцієнта відбиття $R_N(\omega)$ у вигляді ряду можна подати як

$$R_N(\omega) = -\kappa + (1/\kappa - \kappa) \left(e^{-2i\omega\Delta\tau} R_{N-1}(\omega) + e^{-4i\omega\Delta\tau} (R_{N-1}(\omega))^2 + e^{-6i\omega\Delta\tau} (R_{N-1}(\omega))^3 + \dots \right). \quad (2.77)$$

За допомогою Фур'є перетворення (1.13) можна визначити імпульсну характеристику структури з коефіцієнтом відбиття $R_N(\omega)$:

$$r_N(t) = -\delta(t)\kappa + (1/\kappa - \kappa) \left(r_{N-1}(t - 2\Delta\tau) + r_{N-1}(t - 2 \cdot 2\Delta\tau) \otimes r_{N-1}(t) + r_{N-1}(t - 3 \cdot 2\Delta\tau) \otimes r_{N-1}(t) \otimes r_{N-1}(t) + \dots \right), \quad (2.78)$$

де $r_{N-1}(t)$ є імпульсною характеристикою структури, без шару з характеристичним імпедансом ρ_{II} ; \otimes - позначення оператора згортки. Як можна зауважити, розрив у функції матеріальних параметрів середовища розповсюдження електромагнітних хвиль на межі між матеріалами з характеристичними імпедансами ρ_I та ρ_{II} спричиняє появу δ -особливостей в імпульсній характеристиці.

Розглянемо частковий випадок коефіцієнта відбиття електромагнітних хвиль на шарі у вільному просторі, тобто для структури з $N=1$. Для цього прийнято, що коефіцієнти $\kappa = \beta$ та $\Delta\tau = T_1$ мають відомі значення. Використовуючи вирази (2.49), (2.50) та (2.60), коефіцієнт відбиття R_0 від другої поверхні розділу середовищ при $\tau = \tau_2$ та відповідна імпульсна характеристика можуть бути визначені як

$$R_0 = (\rho_{III} - \rho_{II}) / (\rho_{III} + \rho_{II}) = \gamma \quad \text{та} \quad (2.79)$$

$$r_0 = \delta(t)\gamma. \quad (2.80)$$

Підставляючи вираз (2.80) у (2.78), імпульсну характеристику шару можна подати у вигляді збіжного нескінченного ряду періодичних δ -функцій

$$\begin{aligned} r_1(t) &= -\delta(t)\beta + (1/\beta - \beta)(\gamma\delta(t - 2T_1) + \gamma^2\delta(t - 2 \cdot 2T_1) + \gamma^3\delta(t - 3 \cdot 2T_1) + \dots) = \\ &= -\delta(t)\beta + (1/\beta - \beta) \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^k \delta(t - k \cdot 2T_1) \end{aligned} \quad (2.81)$$

Цей результат можна просто узагальнити на випадок двошарової структури $N = 2$. Для цього задамо параметри другого шару структури як $\kappa = \alpha$ та $\Delta\tau = T_2$. Узагальнений результат отримаємо подібною підстановкою виразу для імпульсної характеристики шару (2.81) у перетворення (2.78)

$$\begin{aligned} r_2(t) &= -\delta(t)\alpha + (1/\alpha - \alpha)(r_1(t - 2T_2) + r_1(t - 2 \cdot 2T_2) \otimes r_1(t) + \\ &+ r_1(t - 3 \cdot 2T_2) \otimes r_1(t) \otimes r_1(t) + r_1(t - 4 \cdot 2T_2) \otimes r_1(t) \otimes r_1(t) \otimes r_1(t) + \dots) = \\ &= -\delta(t)\alpha + (1/\alpha - \alpha) \left(\left(-\delta(t - 2T_2)\beta + (1/\beta - \beta) \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^k \delta(t - 2T_1 - k \cdot 2T_2) \right) + \right. \\ &+ \left(-\delta(t - 2 \cdot 2T_2)\beta + (1/\beta - \beta) \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^k \delta(t - 2 \cdot 2T_1 - k \cdot 2T_2) \right) \otimes \\ &\left. \otimes \left(-\delta(t)\beta + (1/\beta - \beta) \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^k \delta(t - k \cdot 2T_2) \right) + \dots \right). \end{aligned} \quad (2.82)$$

Імпульсну характеристику для структури з кількістю шарів, більшою за 2, також можна отримати на основі описаного вище підходу.

Використовуючи принцип математичної індукції, робимо висновок, що імпульсна характеристика для будь-якої багатшарової структури матиме безмежну кількість δ -функцій, оскільки згортка δ -функції з рядом у вигляді суми δ -функцій у виразі (2.82) дає цей самий ряд. З виразу (2.82) видно, що аргументи δ -функцій набувають дискретних значень $lT_1 + mT_2 + \dots$. Отже, у загальному вигляді така імпульсна характеристика є сумою безмежних рядів, які збігаються

$$r(t) = \sum_{l=1}^{\infty} h_l \delta(t - lT_1) + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{l,n} \delta(t - lT_1 - nT_2) + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \dots \quad (2.83)$$

Твердження доведено.

Приклад побудови розв'язку оберненої задачі розсіювання показує, що для того, щоб знайти всі невідомі параметри шарів, необхідно знати всі коефіцієнти

імпульсної характеристики (2.83) для багатошарової структури. За умови скінченного діапазону частот, в якому задано коефіцієнт відбиття, Фур'є перетворення не дає змоги точно здійснити їх оцінку. Це вказує на необхідність використання більш ефективних методів оцінювання аргументів та параметрів δ -функцій у виразі для $r_N(t)$. Ця проблема стає критичною, коли вимірювання коефіцієнта відбиття $R_N(\omega)$ здійснено у реальних умовах – за наявності шумової складової. Тобто у випадку, коли вихідні дані для оберненої задачі задано неточно. Тоді оцінка всіх коефіцієнтів у збіжних рядах, які складають імпульсну характеристику, стає неможливою. Для вирішення цієї проблеми запропоновано використовувати розв'язки Йоста, як модель, що описує процес розсіювання хвиль на багатошарових структурах, оскільки ці розв'язки мають скінчену кількість коефіцієнтів. Відповідно похибка оцінки цих коефіцієнтів за умови обмеженого діапазону частот та наявності випадкової складової є скінченою величиною.

2.2.2. Розповсюдження хвиль у середовищі з кусково-неперервною функцією діелектричної проникності. Математичну модель розсіювання електромагнітних хвиль на плоскому шаруватому середовищі за умови нормального падіння можна подати рівняннями Максвелла для тангенціальних компонент електричного $E(z)$ та магнітного $H(z)$ полів

$$\begin{cases} dE(z)/dz = -i\omega\mu_0 H(z), \\ dH(z)/dz = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon(z)E(z), \end{cases} \quad (2.84)$$

де ε_0 та μ_0 діелектрична та магнітна проникності вакууму; ω - кругова частота, яка пов'язана з хвильовим коефіцієнтом вакууму залежністю $k = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$.

Шарувате неоднорідне середовище характеризується діелектричною проникністю $\varepsilon(z)$, яка на загал є розривною функцією координати z . Розповсюдження хвиль відбувається вздовж осі Oz . Беручи до уваги те, що функція $\varepsilon(z)$ має скінчену кількість розривів у точках z_n , де $n = \overline{1, (N+1)}$, дійсну вісь можна

розділити на інтервали $\mathbf{R} = \bigcup_{n=1}^{N+2} (z_{n-1}, z_n)$ з кінцями $z_0 = -\infty$ і $z_{N+2} = +\infty$ на

нескінченості (рис. 2.3). Тоді на кожному з інтервалів (z_{n-1}, z_n) можна визначити неперервну функцію $\varepsilon_{n,n+1}(z) = \varepsilon(z)\chi_{(z_n, z_{n+1})}(z)$, де $\chi_I(z) = \begin{cases} 1, & z \in I \\ 0, & z \notin I \end{cases}$. Нехай значення діелектричної проникності на крайніх інтервалах є однаковими і рівними $\varepsilon_{0,1} = \varepsilon_{N+1,N+2} = 1$.

На відміну від прямої задачі, де для відомого значення діелектричної проникності $\varepsilon(z)$ знаходять розв'язок рівнянь (2.84) відносно функцій $E(z)$ та $H(z)$, обернену задачу сформульовано за умови, що функція $\varepsilon(z)$ є невідомою. Вихідними даними в оберненій задачі служать значення коефіцієнта відбиття $R(k)$, який визначається асимптотичною поведінкою розв'язку рівнянь (2.84)

$$\begin{aligned} E(z, k) &\underset{z \rightarrow -\infty}{\sim} \frac{1}{T(k)} \exp(-ikz) + \frac{R(k)}{T(k)} \exp(ikz) = \\ &= a(k) \exp(-ikz) + b(k) \exp(ikz) \end{aligned} \quad (2.85)$$

за умови, що у протилежному напрямі розв'язок цих рівнянь має асимптоту $E(z, k) \underset{z \rightarrow +\infty}{\sim} \exp(-ikz)$, де $T(k)$ - коефіцієнт проходження хвилі. Величини $a(k)$ та $b(k)$ є коефіцієнтами розв'язків Йоста.

Коефіцієнт відбиття $R(k)$ можна безпосередньо знайти за результатами вимірювання розсіяного поля на досліджуваній структурі. Як правило, практичні застосування накладають обмеження на область визначення функції $R(k)$ через те, що вимірювальні засоби мають скінчений діапазон частот, на якому для певної множини $\omega = k/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ з відрізка $\Omega_{\min} \leq \omega \leq \Omega_{\max}$ визначається ця функція. Попри це вимірювання супроводжує випадкова складова коефіцієнта відбиття, що ускладнює задачу реконструкції $\varepsilon(z)$. Очевидно, що висновки, зроблені щодо імпульсної характеристики багатошарової структури з однорідними шарами є непридатними для кусково-неоднорідних структур. Тому дослідження спрямоване на аналіз функції коефіцієнта відбиття та вирішення задачі встановлення кусково-неперервної функції $\varepsilon(z)$ за значеннями коефіцієнта відбиття $R(k)$, що задані лише для

скінченної множини дискретних k .

2.2.3. Асимптотичні властивості розв'язків рівнянь Максвелла у високочастотній області. Зауважено, що наявність розривів у функції діелектричної проникності визначає особливий характер частотної залежності коефіцієнта відбиття $R(k)$ саме на високих ($k \rightarrow \infty$) частотах (рис. 2.4). Очевидно, що важливим є порівняльний асимптотичний аналіз функції коефіцієнта відбиття на високих частотах для структур із неперервною діелектричною проникністю та для шаруватих структур, що мають розриви у $\varepsilon(z)$.

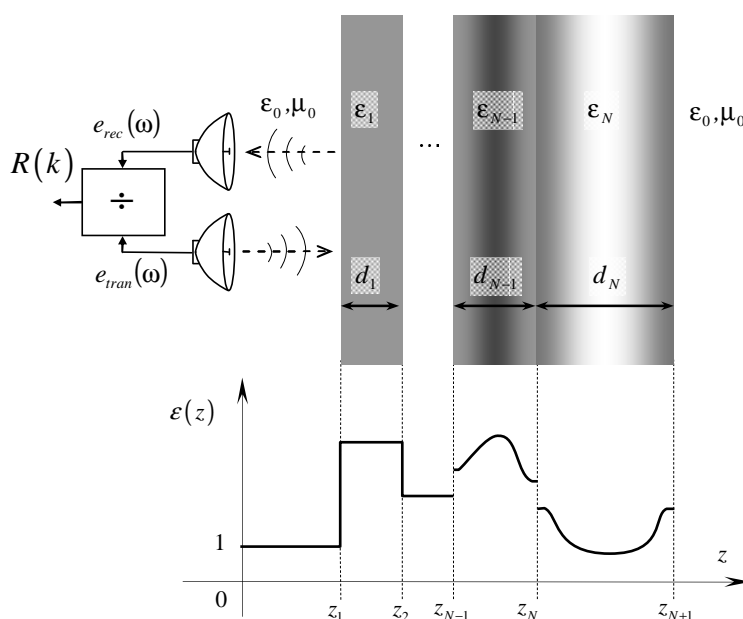


Рис. 2.3. Розсіювання плоскої електромагнітної хвилі на плоскій шаруватій діелектричній структурі з кусково-неперервною функцією діелектричної проникності

Визначення асимптотичної поведінки коефіцієнта відбиття на високих частотах здійснимо приведенням рівнянь Максвелла до системи Дірака. Як відомо, існує еквівалентність коефіцієнтів відбиття для таких моделей та взаємозв'язок між потенціалом у системі Дірака і діелектричною проникністю у випадку неперервної функції $\varepsilon(z) \in \mathcal{C}$.

Процедура приведення одних рівнянь до інших полягає у застосуванні

перетворення Ліувіля (2.14) та заміни змінних E та H у рівнянні Максвелла на дві нові змінні v_1 та v_2 :

$$H = \frac{1}{2} \sqrt[4]{\frac{\varepsilon(x)}{\rho_0}} (v_1 + v_2) \text{ та } E = \frac{\sqrt{\rho_0}}{2} \sqrt[4]{\frac{\rho_0}{\varepsilon(x)}} (v_1 - v_2), \quad (2.86) \text{ та } (2.87)$$

де $\rho_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ - хвильовий імпеданс вакууму.

У результаті таких перетворень отримаємо систему Дірака

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dx} + ikv_1 = v_2 q(x), \\ \frac{dv_2}{dx} - ikv_2 = v_1 q(x), \end{cases} \quad (2.88)$$

де $q(x)$ - дійсна функція потенціалу, яка безпосередньо визначається функцією діелектричної проникності

$$q(x) = -\frac{1}{4} \frac{d \ln(\varepsilon(x))}{dx}. \quad (2.89)$$

Фундаментальними розв'язками системи (2.88) є дві пари незалежних функцій (2.40)-(2.43). Детермінант Вронського для попарної комбінації цих функцій відмінний від нуля та не залежить від параметра x . Лінійна комбінація двох таких функцій дозволяє записати розв'язок системи Дірака для будь-яких початкових умов. Зокрема, одну з функцій (2.40)-(2.43), можна визначити лінійною комбінацією двох інших

$$\phi(k, x) = a_{reg}(k) \bar{\psi}(k, x) + b_{reg}(k) \psi(k, x) \rightarrow \begin{bmatrix} a_{reg}(k) \exp(-ikx) \\ b_{reg}(k) \exp(ikx) \end{bmatrix}, x \rightarrow +\infty; \quad (2.90)$$

$$\bar{\phi}(k, x) = b_{reg}^*(k) \bar{\psi}(k, x) - a_{reg}^*(k) \psi(k, x) \rightarrow \begin{bmatrix} b_{reg}^*(k) \exp(-ikx) \\ -a_{reg}^*(k) \exp(ikx) \end{bmatrix}, x \rightarrow +\infty, \quad (2.91)$$

для яких відношення коефіцієнтів $a_{reg}(k)$ та $b_{reg}(k)$ визначає коефіцієнт відбиття, як у вихідній задачі розсіювання: $R(k) = b_{reg}(k)/a_{reg}(k)$.

Варто зауважити, що для системи рівнянь Максвелла, а також для еквівалентних форм запису задачі розсіювання у випадку нормально падаючої плоскої електромагнітної хвилі для чисто діелектричного середовища (рівняння

Шредінгера та Дірака) виконується умова відсутності зв'язаних станів [2,247]. Це свідчить про те, що для дійснозначного потенціалу $q(x)$, який визначено функцією діелектричної проникності $\varepsilon(z) \in \mathcal{C}$ згідно з виразом (2.89), відсутні лінійно залежні розв'язки у виразах (2.90) та (2.91), коли $a_{reg}(k) = 0$ у верхній комплексній півплощині k , де $\text{Im}(k) \geq 0$.

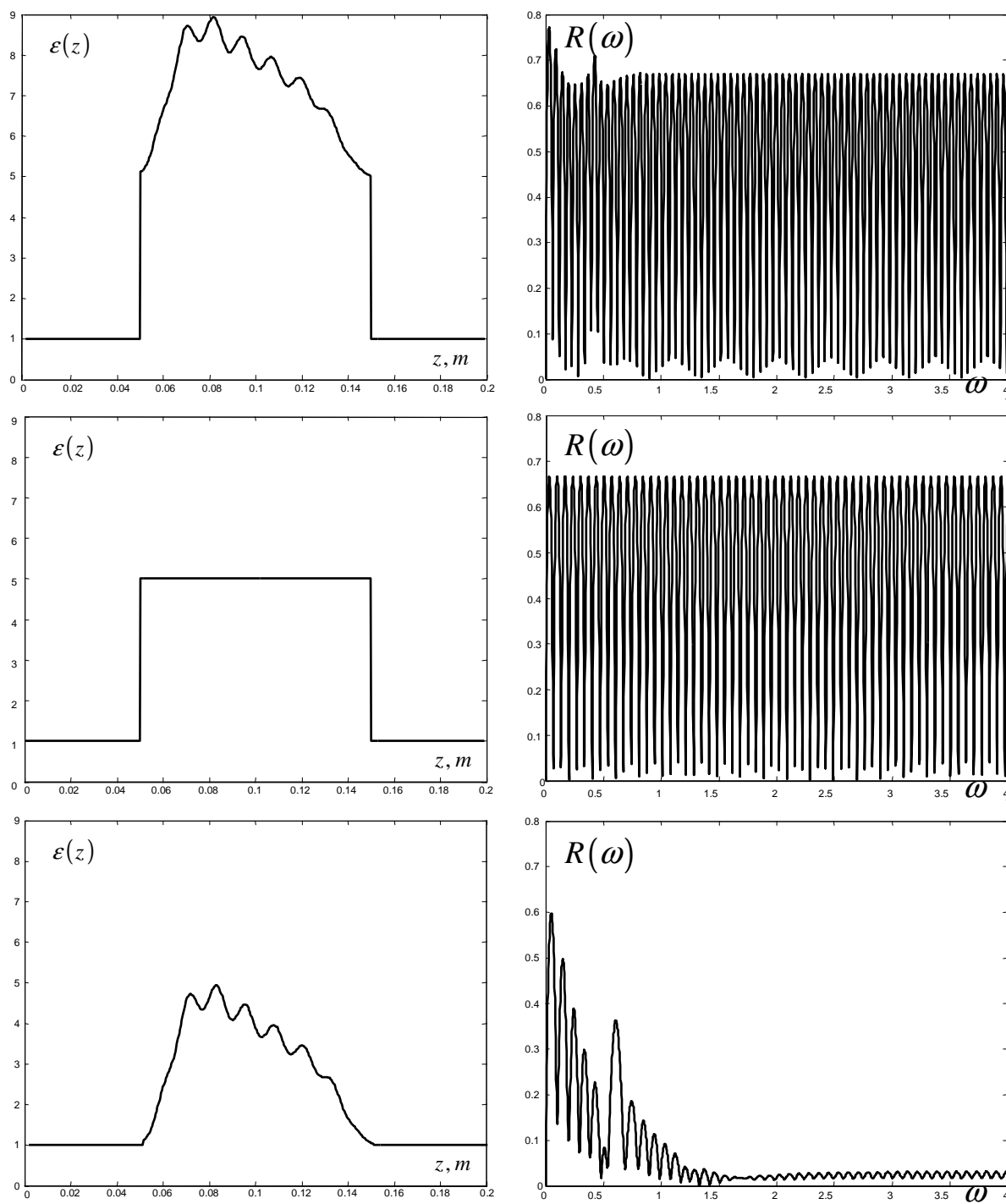


Рис. 2.4. Профілі плоскошаруватих структур із кусково-неперервними функціями діелектричних проникностей та їх частотні залежності коефіцієнта відбиття

Один із розв'язків системи рівнянь (2.88) можна отримати у формі інтегрального рівняння, що є більш зручним для подальшого аналізу:

$$\begin{cases} \psi_1(x) \exp(-ikx) = - \int_x^{+\infty} \exp(-2ik(x-y)) q(y) \exp(-iky) \psi_2(y) dy, \\ \psi_2(x) \exp(-ikx) = 1 + \int_x^{+\infty} M(k, x, y) \exp(-iky) \psi_2(y) dy, \end{cases} \quad (2.92)$$

де $M(k, x, y) = q(y) \int_x^y q(z) \exp(-2ik(z-y)) dz$ - допоміжна функція.

Розв'язки $\phi(x)$, $\bar{\phi}(x)$, $\psi(x)$ та $\bar{\psi}(x)$ мають подібну інтегральну форму, яку отримують інтегруванням вихідної системи диференціальних рівнянь (2.88).

Теорему про рівномірну збіжність ряду Неймана, у формі якого можна отримати розв'язок системи інтегральних рівнянь (2.92), доведено для випадку, коли $\int_{-\infty}^{+\infty} |q(y)| dy < \infty$ [125]. Використовуючи метод інтегрування за частинами, неважко показати, що при $|k| \rightarrow \infty$ у верхньому комплексному півпросторі має місце наступна асимптотична поведінка розв'язків для функції $\psi(x)$:

$$\psi_1(x) \exp(-ikx) \rightarrow \frac{1}{2ik} q(x) + O\left(\frac{1}{k^2}\right); \quad (2.93)$$

$$\psi_2(x) \exp(-ikx) \rightarrow 1 - \frac{1}{2ik} \int_x^{\infty} q^2(y) dy + O\left(\frac{1}{k^2}\right). \quad (2.94)$$

У нижньому півпросторі асимптоти функції $\bar{\psi}(x)$ мають вигляд

$$\bar{\psi}_1(x) \exp(ikx) \rightarrow 1 + \frac{1}{2ik} \int_x^{\infty} q^2(y) dy + O\left(\frac{1}{k^2}\right); \quad (2.95)$$

$$\bar{\psi}_2(x) \exp(ikx) \rightarrow -\frac{1}{2ik} q(x) + O\left(\frac{1}{k^2}\right). \quad (2.96)$$

Подібні співвідношення можна також визначити для функції $\phi(x)$ та $\bar{\phi}(x)$. У свою чергу можна показати, що коефіцієнт відбиття для структури з неперервною функцією діелектричної проникності зникає з частотою як $R_{reg}(k) = o(1/k)$ для $k \rightarrow +\infty$. При цьому асимптотичну поведінку коефіцієнтів у розв'язках Йоста можна

охарактеризувати як $a_{reg}(k) = 1 + o(1/k)$ та $b_{reg}(k) = o(1/k)$.

2.2.4. Розв'язки Йоста для кусково-неперервної функції діелектричної проникності. При встановленні асимптотичних властивостей коефіцієнта відбиття для плоскої діелектричної структури, що містить межі розділу, необхідно враховувати умову неперервності функцій електричної $E(z)$ та магнітної $H(z)$ складових поля на площинах розділу середовищ, або у точках розриву функції діелектричної проникності. Керуючись стратегією, вибраною у випадку неперервної функції діелектричної проникності, здійснимо перетворення системи рівнянь Максвелла у систему Дірака за умови, що функція діелектричної проникності є неперервною лише на інтервалах $\varepsilon(z) \in \mathbb{C} \mid z \in (z_{n-1}, z_n)$, а в точках $z_n, n = 1, (N+1)$ має розриви. Така особливість змушує по-новому записати перетворення Ліувіля

$$x(z) = x_n + \int_{z_{n-1}}^z \sqrt{\varepsilon(z')} dz', \quad z \in (z_{n-1}, z_n), \quad (2.97)$$

де $x_n = \sum_{l=1}^{n-1} \sqrt{\varepsilon_{l-1,l}} (z_l - z_{l-1})$ точки, у яких функція $\varepsilon(x)$ має розриви.

Характер функції (2.97), отриманої перетворенням Ліувіля, дає можливість зробити висновок, що вирази (2.88) і (2.89), як результат приведення системи Максвелла до системи Дірака, є чинними лише на кожному з інтервалів $z \in (z_{n-1}, z_n)$. Окремо варто зазначити, що потенціал в системі Дірака буде мати дельта-функції в точках, що відповідають поверхням розділу кусково-неоднорідної структури. Це слідує з (2.89). Інтегральну форму розв'язків системи Дірака визначимо для інтервалів (x_{n-1}, x_n) . При цьому граничні умови на кінцях інтервалів можна подати у формі, відповідно до того, як уведено асимптоти для фундаментальних розв'язків (2.40)-(2.44). Наприклад, інтегральне зображення розв'язку $\psi(x)$ на інтервалі $x \in (x_{n-1}, x_n)$ матиме вигляд

$$\begin{cases} \psi_1(x) \exp(-ikx) = - \int_x^{x_n} \exp(-2ik(x-y)) q(y) \exp(-iky) \psi_2(y) dy, \\ \psi_2(x) \exp(-ikx) = 1 + \int_x^{x_n} M(k, x, y) \exp(-iky) \psi_2(y) dy. \end{cases} \quad (2.98)$$

Форму розв'язку (2.98) системи Захарова-Шабата на кожному з інтервалів можна використати для встановлення високочастотних асимптотик усіх розв'язків, подібно до того, як це зроблено для функцій $\psi(x)$ та $\bar{\psi}(x)$ у виразах (2.93) - (2.96).

Розглянемо взаємозв'язок між розв'язками системи Дірака $\phi'(k, x)$ та $\phi''(k, x)$ на сусідніх інтервалах (x_{n-1}, x_n) та (x_n, x_{n+1}) . Для цього використаємо лінійну комбінацію фундаментальних розв'язків $\bar{\psi}'(k, x)$ та $\psi'(k, x)$ на інтервалі $x \in (x_{n-1}, x_n)$

$$\phi'(k, x) = a_1(k) \bar{\psi}'(k, x) + b_1(k) \psi'(k, x). \quad (2.99)$$

На інтервалі $x \in (x_n, x_{n+1})$ розв'язок запишемо виразом

$$\phi''(k, x) = a_2(k) \bar{\psi}''(k, x) + b_2(k) \psi''(k, x), \quad (2.100)$$

що є лінійною комбінацією фундаментальних розв'язків $\bar{\psi}''(k, x)$ та $\psi''(k, x)$.

Тут $a_1(k)$ та $b_1(k)$ - коефіцієнти розв'язків Йоста на інтервалі $x \in (x_{n-1}, x_n)$; $a_2(k)$ та $b_2(k)$ - відповідно, на інтервалі $x \in (x_n, x_{n+1})$.

Коефіцієнти розв'язків Йоста $a_2(k)$, $b_2(k)$, $n = \overline{1, (N+1)}$ визначають взаємозв'язок між функціями електричної і магнітної складових поля на кожному інтервалі та незалежними розв'язками системи Дірака. У відповідності до заміни змінних (2.86) та (2.87), для інтервалу (x_{n-1}, x_n) можна встановити співвідношення

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi'_2 & -\psi'_1 \\ -\bar{\psi}'_2 & \bar{\psi}'_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt[4]{\varepsilon'(x)/\rho_0} & -\sqrt[4]{\varepsilon'(x)/\rho_0^3} \\ \sqrt[4]{\varepsilon'(x)/\rho_0} & \sqrt[4]{\varepsilon'(x)/\rho_0^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E' \\ H' \end{bmatrix} = \Lambda(\varepsilon'(x), k) \begin{bmatrix} E' \\ H' \end{bmatrix}. \quad (2.101)$$

Зворотну залежність запишемо для інтервалу (x_n, x_{n+1})

$$\begin{bmatrix} E'' \\ H'' \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{\rho_0}}{2} \begin{bmatrix} \sqrt[4]{\varepsilon''(x)/\rho_0^3} & \sqrt[4]{\varepsilon''(x)/\rho_0^3} \\ -\sqrt[4]{\rho_0/\varepsilon''(x)} & \sqrt[4]{\rho_0/\varepsilon''(x)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\psi}''_1 & \psi''_1 \\ \bar{\psi}''_2 & \psi''_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \Lambda^{-1}(\varepsilon''(x), k) \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}. \quad (2.102)$$

Тут введено позначення $\Lambda(\varepsilon(x), k) \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ матриці з комплекснозначними коефіцієнтами, які для певного значення хвильового коефіцієнта визначаються функцією діелектричної проникності на інтервалах $\varepsilon'(x)|_{x \in (x_{n-1}, x_n)}$ та $\varepsilon''(x)|_{x \in (x_n, x_{n+1})}$, відповідно.

Залежність між коефіцієнтами розв'язків Йоста на суміжних інтервалах можна визначити з умови неперервності електричної та магнітної складових поля в точці x_n

$$\begin{bmatrix} E'(x) \\ H'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E''(x) \\ H''(x) \end{bmatrix} \Big|_{x=x_n}. \quad (2.103)$$

Переслідуючи мету дослідити асимптотичну поведінку ($k \rightarrow \infty$) розв'язків, скористаємося твердженням про характер високочастотних складових для коефіцієнтів у розв'язках Йоста для випадку $\varepsilon(z) \in \mathcal{C}$ на кожному з інтервалів та подамо ці коефіцієнти сумою високочастотної та зникаючої складових. Оскільки зникаючі складові мають асимптоти $a_{reg}(k) = 1 + o(1/k)$ та $b_{reg}(k) = o(1/k)$, то у високочастотній області коефіцієнти розв'язків Йоста можна охарактеризувати як

$$a(k) = \tilde{a}(k) + o(1), \quad k \rightarrow \infty \quad \text{та} \quad (2.104)$$

$$b(k) = \tilde{b}(k) + o(1), \quad k \rightarrow \infty. \quad (2.105)$$

Тут і надалі всі високочастотні асимптотичні значення параметрів позначатимемо тильдою.

З виразів (2.104), (2.105) випливає, що високочастотні складові коефіцієнтів розв'язків Йоста $\tilde{a}_1(k)$ та $\tilde{b}_1(k)$ на інтервалі (x_{n-1}, x_n) можна визначити матричним перетворенням високочастотних складових коефіцієнтів $\tilde{a}_2(k)$ та $\tilde{b}_2(k)$ на інтервалі (x_n, x_{n+1}) :

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{b}_1 \end{bmatrix} = \tilde{\Lambda}(\varepsilon'(z_n - 0), k) \tilde{\Lambda}^{-1}(\varepsilon''(z_n + 0), k) \begin{bmatrix} \tilde{a}_2 \\ \tilde{b}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} A_n & \delta_n^2 B_n \\ \delta_n^{-2} B_n & A_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{a}_2 \\ \tilde{b}_2 \end{bmatrix}, \quad (2.106)$$

де $\delta_n = \exp(-ikx_n)$ – набіг фази; $A_n = \left(\sqrt[4]{\frac{\varepsilon(z_n + 0)}{\varepsilon(z_n - 0)}} + \sqrt[4]{\frac{\varepsilon(z_n - 0)}{\varepsilon(z_n + 0)}} \right)$ та

$B_n = \left(\sqrt[4]{\frac{\varepsilon(z_n + 0)}{\varepsilon(z_n - 0)}} - \sqrt[4]{\frac{\varepsilon(z_n - 0)}{\varepsilon(z_n + 0)}} \right)$ – коефіцієнти, що визначаються діелектричною

проникністю матеріалу в околі точки розриву z_n .

Для узагальнення асимптотичного аналізу коефіцієнтів розв'язків Йоста на випадок з довільною кількістю розривів у функції діелектричної проникності введемо позначення добутку двох матриць у виразі (2.106)

$$\Gamma(x_n, \varepsilon(z_n + 0), \varepsilon(z_n - 0), k) := \tilde{\Lambda}(\varepsilon'(z_n - 0), k) \tilde{\Lambda}^{-1}(\varepsilon''(z_n + 0), k). \quad (2.107)$$

Послідовне перемноження матриць $\Gamma(x_n, \varepsilon(z_n + 0), \varepsilon(z_n - 0), k)$ для кожної наступної точки z_n дає змогу встановити взаємозв'язок між коефіцієнтами розсіювання на будь-яких двох інтервалах.

Беручи до уваги умову на нескінченості $E(k, z) \xrightarrow{z \rightarrow +\infty} \exp(-ikz)$ та сталий характер функції діелектричної проникності на крайніх інтервалах за умовами задачі, задамо значення коефіцієнтів розв'язків Йоста на крайньому правому інтервалі як $\tilde{a}_{N+2}(k) = 1$ та $\tilde{b}_{N+2}(k) = 0$. Послідовним перемноженням матриць (2.107) отримаємо тотожність, яка визначає коефіцієнти розв'язків Йоста на крайньому лівому інтервалі:

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_0(k) \\ \tilde{b}_0(k) \end{bmatrix} = \left(\prod_{n=1}^{N+1} \Gamma(x_n, \varepsilon(x_n + 0), \varepsilon(x_n - 0), k) \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.108)$$

Аналіз залежності (2.108) дає змогу зробити важливі висновки щодо характеру високочастотної поведінки складових розв'язків Йоста та коефіцієнта відбиття:

1). Оскільки регулярна складова діелектричної проникності має зникаючий асимптотичний характер коефіцієнтів у розв'язках Йоста $a_{reg}(k) = 1 + o(1/k)$ та $b_{reg}(k) = o(1/k)$, то коефіцієнт відбиття у високочастотній області має вигляд

$$R(k) = R_{as}(k) + o(1/k), \quad k \rightarrow \infty, \quad (2.109)$$

де високочастотна складова визначається відношенням $R_{as}(k) = \tilde{b}_0(k)/\tilde{a}_0(k)$.

Як видно з виразу (2.108), коефіцієнт $R_{as}(k)$ залежить тільки від наявності, розташування та характеру розривів у функції діелектричної проникності.

2). Високочастотні складові коефіцієнтів у розв'язках Йоста є скінченими тригонометричними рядами

$$\tilde{a}_0(k) = \sum_{l=1}^L \alpha_l \exp(ik\nu_l) \text{ та } \tilde{b}_0(k) = \sum_{l=1}^L \beta_l \exp(ik\nu_l), \quad (2.110) \text{ та } (2.111)$$

де L - кількість членів тригонометричного ряду, що визначається кількістю розривів у функції діелектричної проникності; α_l , β_l та ν_l - коефіцієнти тригонометричних рядів.

Крім того, складова $R_{as}(k)$ є нескінченим збіжним тригонометричним рядом

$$R_{as}(k) = \frac{\tilde{b}_0(k)}{\tilde{a}_0(k)} = \frac{\sum_{l=1}^L \beta_l \exp(ik\nu_l)}{\sum_{l=1}^L \alpha_l \exp(ik\nu_l)} = \sum_{m=1}^{\infty} r_m \exp(ik\tau_m), \quad (2.112)$$

де r_m та τ_m - коефіцієнти ряду.

3). За відсутності розривів у функції діелектричної проникності, коефіцієнт $R_{as}(k) = 0$, що означає рівність нулю коефіцієнта B_n у виразі (2.106). Неперервна частина функції діелектричної проникності на інтервалах між точками розриву визначає тільки низькочастотні швидкозникаючі компоненти коефіцієнта відбиття та коефіцієнтів у розв'язках Йоста. Тому коефіцієнт відбиття можна записати сумою цих двох компонент

$$R(k) = R_{reg}(k) + R_{as}(k), \quad (2.113)$$

де $R_{reg}(k)$ - складова, що визначена неперервною частиною діелектричної проникності.

2.3. Розв'язки одновимірної оберненої задачі розсіювання

Строгий математичний підхід до розв'язання оберненої задачі розсіювання став предметом детального вивчення після появи фундаментальних праць Марченка [99, 100], Гельфанда та Левітана [101]. Обернену задачу розсіювання в її

оригінальному формулюванні розв'язано для моделі потенціального розсіювання. Як показано в [96], одновимірну обернену задачу розсіювання для електромагнітних хвиль можна також розв'язати приведенням хвильового рівняння до рівняння Шредінгера. Аналіз різних підходів до розв'язання одновимірної оберненої задачі розсіювання електромагнітних хвиль можна знайти в [93, 106-109]. Обернена задача розсіювання для середовищ із втратами має особливе практичне значення [115, 117, 118]. Ця проблема є еквівалентною до оберненої задачі розсіювання для енергонезалежного потенціалу в рівнянні Шредінгера [55, 119, 120], а також у системі Дірака [121, 245]. Варто відзначити працю Jaulen [123], де цю проблему протрактовано як обернену задачу розсіювання для системи рівнянь типу Захарова-Шабата [124]. Крім того, розв'язок нелінійних еволюційних рівнянь [125, 127] є іншою областю застосування підходу оберненої задачі розсіювання, де система рівнянь Захарова-Шабата відіграє важливу роль.

Вибір методу розв'язання оберненої задачі залежить від апріорних даних про шукані матеріальні параметри плоскої структури – провідність σ , діелектричну ϵ та магнітну μ проникності. Для середовищ із неперервною функцією матеріальних параметрів $\epsilon(z)$, $\mu(z)$ та $\sigma(z)$ одновимірну обернену задачу розсіювання можна звести до розв'язання системи інтегральних рівнянь типу Вольтери згідно з підходами Марченка [102, 103], Гельфанда-Левітана [101] або Захарова-Шабата [124]. Для кусково-неоднорідних плоских середовищ застосування таких підходів є некоректними [114]. Відповідно побудова методу, який дозволяє коректно оцінити параметри багат шарових середовищ, шари в яких є однорідними матеріалами, є актуальною задачею. Очевидно, що більш загальне формулювання оберненої задачі розсіювання для середовищ з кусково-неперервними параметрами також потребує додаткового вивчення.

Саме такі три формулювання оберненої задачі розсіювання плоскої хвилі розглянуто в роботі.

2.3.1. Оцінювання параметрів шарів у шаруватій структурі через встановлення коефіцієнтів розв'язків Йоста. У першому розділі описано

процедуру реконструкції параметрів багатошарової структури, яка дозволяє точно ідентифікувати параметри шарів у випадку, коли поверхні розділу розташовані у вузлах регулярної сітки. Для забезпечення реконструкції необхідно, щоб вихідні дані у вигляді коефіцієнта відбиття було задано у всьому діапазоні частот. На практиці таку умову неможливо виконати. Ідея, яку розвинуто для усунення зазначених недоліків, полягає у параметризації вхідних даних в оберненій задачі розсіювання у вигляді скінченного ряду. Як показано у попередньому пункті, такою моделлю для параметризації можуть служити розв'язки Йоста [55, 75]. Аналіз виразів (2.59) та (2.60), а також (2.67) та (2.68) дає можливість зробити висновок, що коефіцієнти матриці розсіювання можна подати у вигляді скінчених тригонометричних сум наступним чином

$$\frac{R(\omega)}{T(\omega)} = -\sum_{p=1}^M \beta(p) \exp(iv(p)\omega) ; \quad (2.114)$$

$$\frac{1}{T(\omega)} = \sum_{p=1}^M \alpha(p) \exp(iv(p)\omega). \quad (2.115)$$

Однак одночасне визначення коефіцієнтів відбиття та пропускання потребує залучення складного вимірювального обладнання та ускладнює його калібрування. У деяких випадках вимірювання амплітуди відбитої хвилі та хвилі, що пройшла через досліджувану структуру, є принципово неможливим через специфічну конструкцію об'єктів дослідження. Тому важливим є визначення елементів всієї матриці розсіювання (коефіцієнтів відбиття та пропускання) на основі вимірюваних значень розсіяного поля тільки з однієї сторони від досліджуваної структури.

Якщо обернену задачу сформульовано як задачу реконструкції кусково-постійної функції діелектричної проникності $\varepsilon(z)$ багатошарової безвтратної діелектричної структури за коефіцієнтом відбиття $L(\omega)$ нормально падаючої плоскої електромагнітної хвилі, то її можна розділити на дві підзадачі. Метою першої підзадачі є встановлення всіх коефіцієнтів матриці розсіювання за комплексним значенням коефіцієнта відбиття, заданим дискретно на обмеженому діапазоні частот із певною випадковою похибкою, властивою результатам

експериментальних вимірювань. Друга підзадача полягає в оцінюванні параметрів шаруватої структури за відомими значеннями коефіцієнтів у розв'язках Йоста.

Одним із підходів до встановлення коефіцієнта проходження за відомим коефіцієнтом відбиття є метод реконструкції фази за модулем аналітичної функції [246]. З рівностей (2.114) та (2.115) видно, що коефіцієнти $A_0(\omega)$ та $B_0(\omega)$ розв'язків Йоста є аналітичними функціями. Використовуючи тотожності (2.53) та (2.56), можна обчислити значення коефіцієнта $A_0(\omega)$ у розв'язку Йоста

$$\frac{1}{|A_0(\omega)|^2} = 1 - |L(\omega)|^2 \Rightarrow |A_0(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 - |L(\omega)|^2}}. \quad (2.116)$$

Логарифм модуля $|A_0(\omega)|$ коефіцієнта у розв'язку Йоста є дійсною частиною деякої аналітичної функції, в якій уявна частина відповідає його фазі [246]. Беручи до уваги те, що перетворення Гільберта [248] дозволяє встановити взаємозв'язок між дійсною і уявною частинами аналітичної функції, реконструйоване комплексне значення коефіцієнта $A_0(\omega)$ розв'язку Йоста можна обчислити через його модуль

$$A_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 - |L(\omega)|^2}} \exp \left(\frac{i}{2\pi} \mathbf{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log |1 - |L(\omega')|^2|}{\omega - \omega'} d\omega' \right), \quad (2.117)$$

де $\mathbf{P} \int d\omega$ – головне значення інтегралу.

Числове інтегрування при встановленні комплексного значення коефіцієнта $A_0(\omega)$ у виразі (2.117) є складною математичною задачею, а отриманий при цьому результат може стати джерелом похибок для подальших обчислень. Останнє зумовлено двома обставинами. Перш за все, на практиці коефіцієнт відбиття $L(\omega)$ вимірюють в обмеженій смузі частот $0 < \omega_{\min} \leq \omega \leq \omega_{\max}$, що не дозволяє застосувати властивості Фур'є-перетворення [248] при обчисленні перетворення Гільберта у виразі (2.117). Окрім того, виміряні значення коефіцієнта відбиття $L(\omega)$ задані на скінченній множині частот, що вносить похибку дискретизації при безпосередньому інтегруванні. Більш ефективно обчислення значення всіх елементів

матриці розсіювання полягає у застосуванні підходу, який оперує лише з коефіцієнтами скінчених тригонометричних сум.

Обґрунтування нового алгоритму непрямого обчислення всіх елементів матриці розсіювання дає наступне твердження.

Якщо $L(\omega)$ є коефіцієнтом відбиття від плоскої шаруватої діелектричної структури у вільному просторі (рис. 2.2), то відповідну матрицю розсіювання структури з точністю до знаку можна визначити як

$$\mathbf{S} := \begin{bmatrix} R(\omega) & T(\omega) \\ T(\omega) & L(\omega) \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} -\overline{L(\omega)} e^{-\delta(\omega)} & \sqrt{1-|L(\omega)|^2} e^{\left(\frac{1}{2}\delta(\omega)\right)} \\ \sqrt{1-|L(\omega)|^2} e^{\left(-\frac{1}{2}\delta(\omega)\right)} & L(\omega) \end{bmatrix}, \quad (2.118)$$

де $\delta(\omega)$ – деяка функція, означення і властивості якої подано нижче.

Згідно з рівністю (2.66) відношення комплексно-спряженого значення $\overline{T(\omega)} = T(-\omega)$ коефіцієнта пропускання до його оригіналу $T(\omega)$ має вигляд

$$\frac{T(-\omega)}{T(\omega)} = \frac{|T(\omega)|^2}{(T(\omega))^2} = \frac{1-|L(\omega)|^2}{(T(\omega))^2}. \quad (2.119)$$

Звідси можна отримати вираз

$$\frac{1}{(T(\omega))^2} = \frac{1}{1-|L(\omega)|^2} \frac{T(-\omega)}{T(\omega)}, \quad (2.120)$$

квадратний корінь з якого дозволяє визначити $A_0(\omega)$ із розв'язку Йоста у формі

$$A_0(\omega) = \frac{1}{T(\omega)} = \pm \frac{1}{\sqrt{1-|L(\omega)|^2}} \sqrt{\frac{T(-\omega)}{T(\omega)}}. \quad (2.121)$$

Відношення комплекснозначної функції до спряженої до неї є комплекснозначною функцією з областю значень на колі одиничного радіуса. Отже, з тотожності (2.61) $\overline{T(\omega)} = T(-\omega)$ випливає, що

$$\left| \frac{T(-\omega)}{T(\omega)} \right| = 1 \quad \text{та} \quad \left| \sqrt{\frac{T(-\omega)}{T(\omega)}} \right| = 1. \quad (2.122) \text{ та } (2.123)$$

З іншої сторони, відношення комплексно-спряженого значення $\overline{T(\omega)} = T(-\omega)$ коефіцієнта відбиття до оригіналу $T(\omega)$ можна записати, використовуючи вираз (2.117)

$$\frac{T(-\omega)}{T(\omega)} = \frac{A_0(\omega)}{A_0(-\omega)} = \exp\left(\frac{i}{\pi} \mathbf{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log|1-|L(\omega')|^2|}{\omega-\omega'} d\omega'\right) = e^{\delta(\omega)}. \quad (2.124)$$

З умови (2.122) можна зробити висновок, що неперервна комплекснозначна функція $\delta(\omega)$ є чисто уявною і рівною

$$\delta(\omega) = \frac{i}{\pi} \mathbf{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log|1-|L(\omega')|^2|}{\omega-\omega'} d\omega'. \quad (2.125)$$

Таким чином, для відомої функції $\delta(\omega)$ коефіцієнти розв'язків Йоста $A_0(\omega)$ та $B_0(\omega)$ отримано з виразів (2.56) та (2.121) у формі

$$A_0(\omega) = \theta \frac{1}{\sqrt{1-|L(\omega)|^2}} \exp\left(\frac{1}{2}\delta(\omega)\right); \quad (2.126)$$

$$B_0(\omega) = \theta \frac{\overline{L(\omega)}}{\sqrt{1-|L(\omega)|^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\delta(\omega)\right), \quad (2.127)$$

де $\theta = \pm 1$ – коефіцієнт неоднозначності знаку.

На основі формул (2.55), (2.56), (2.59), (2.60), а також (2.126) та (2.127) матрицю розсіювання з точністю до знака можна записати через функцію $\delta(\omega)$ у вигляді (2.118). Тоді матрицю розсіювання, визначену за результатами вимірювань коефіцієнта відбиття на відстані d_0 від поверхні, згідно з виразами (2.71)-(2.74), запишемо як

$$S_m := \begin{bmatrix} R_m(\omega) & T_m(\omega) \\ T_m(\omega) & L_m(\omega) \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} -\overline{L_m(\omega)} e^{-\delta_m(\omega)} & \sqrt{1-|L_m(\omega)|^2} e^{\left(\frac{1}{2}\delta_m(\omega)\right)} \\ \sqrt{1-|L_m(\omega)|^2} e^{\left(\frac{1}{2}\delta_m(\omega)\right)} & L_m(\omega) \end{bmatrix}, \quad (2.128)$$

де реконструйовані коефіцієнти розв'язків Йоста мають вигляд

$$A_m(\omega) = \theta \frac{1}{\sqrt{1 - |L_m(\omega)|^2}} \exp\left(\frac{1}{2} \delta_m(\omega)\right); \quad (2.129)$$

$$B_m(\omega) = \theta \frac{\overline{L_m(\omega)}}{\sqrt{1 - |L_m(\omega)|^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \delta_m(\omega)\right) \quad (2.130)$$

відповідно.

Рекурентне оцінювання параметрів шарів у багатошаровій структурі. Ідея нового методу розв'язання оберненої задачі полягає у приведенні вихідних даних до форми (2.36) і (2.37) та визначенні характеристик багатошарової структури за значеннями коефіцієнтів у сумах, якими виражено коефіцієнти у розв'язках Йоста (2.71) та (2.72). Тому для конструктивної реалізації нового методу необхідно проаналізувати властивості коефіцієнтів сум (2.67), (2.68) та встановити взаємозв'язки між цими коефіцієнтами та параметрами шарів для фіксованої частоти ω . У Додатку А дисертації приведено результати такого аналізу.

Встановлені властивості коефіцієнтів у розв'язках Йоста дозволяють сформулювати таку процедуру розв'язання оберненої задачі для шаруватих структур.

1. На першому етапі згідно з виразами (2.73) та (2.74) обчислюємо $\hat{A}_m(\omega)$ та $\hat{B}_m(\omega)$ у розв'язках Йоста. Для цього використаємо значення коефіцієнта відбиття $L(\omega)$ від багатошарової діелектричної структури, який є результатом безпосередніх вимірювань на сітці частот $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_{N_m}$ з кроком $\Delta\omega$. Процедуру обчислення реалізовано згідно з формулами (2.125) та (2.128).

2. На другому етапі необхідно оцінити параметри $\hat{M}_0, \hat{\alpha}_0(p), \hat{\beta}_0(p)$ та $\hat{\mathbf{t}} = [\hat{t}_1, \hat{t}_2, \hat{t}_3, \dots, \hat{t}_{M_0}]$ за дискретними значеннями коефіцієнтів $\hat{A}_m(\omega)$ та $\hat{B}_m(\omega)$ в розв'язках Йоста (2.71) та (2.72).

3. Подальші обчислення спрямовані на визначення відстані d_0 від поверхні структури до фазового центру приймача. Їх результат дозволяє оцінити параметри

$\hat{v}_0(p)$ для $p = \overline{1, M_0}$ та оперувати ними при розв'язанні оберненої задачі для вихідних даних, заданих у формі (2.67) та (2.68), замість (2.71) та (2.72). Для цього використаємо властивість симетрії абсолютного значення аргументів, що описано в додатку А твердженням А.3.

Набіг фази $\exp(\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}d_0)$ у коефіцієнтах $\hat{A}_m(\omega)$ і $\hat{B}_m(\omega)$ розв'язків Йоста змінює аргументи експоненціальних функцій у моделях (2.71) та (2.72) на постійну величину. З властивості симетрії, яку встановлює твердження А.3, випливає тотожність

$$\omega(\tau_p - \tau_{M_0-p+1}) = 2\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}d_0 \quad (2.131)$$

для $p = \overline{1, M_0/2}$ у випадку парного M_0 і $p = \overline{1, (M_0 - 1)/2}$ для непарних M_0 .

Віддаль d_0 можна обчислити з (2.131), маючи значення будь-якої пари параметрів τ_p і τ_{M_0-p+1} :

$$d_0 = \frac{(\tau_p - \tau_{M_0-p+1})}{2\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}. \quad (2.132)$$

Оскільки параметри τ_p відомі лише наближено, то для підвищення точності виразу (2.132) здійснюємо усереднення результату для кожної з пар $\hat{\tau}_p$ і $\hat{\tau}_{M_0-p+1}$

$$\hat{d}_0 = \frac{1}{\text{round}(M_0/2)} \sum_{p=1}^{\text{round}(M_0/2)} \frac{(\hat{\tau}_p - \hat{\tau}_{M_0-p+1})}{2\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}, \quad (2.133)$$

де $\text{round}(\)$ – функція заокруглення до найближчого цілого числа.

З виразу (2.71) можна встановити аргументи всіх $p = \overline{1, M_0}$ експоненціальних доданків у сумах (2.67) та (2.68)

$$\hat{v}_0(p) = \hat{\tau}_p - \hat{d}_0. \quad (2.134)$$

Подальші процедури складають ядро рекурентного процесу для обчислення характеристик кожного $j = \overline{0, (N - 1)}$ із шарів діелектричної структури.

4. Тотожність (А.1) дозволяє виразити характеристичний імпеданс ρ_{j+1} поверхневого шару структури через значення ρ_j . Цю тотожність запишемо для

коефіцієнтів при експонентах з максимальним та мінімальним значеннями аргументу

$$\rho_{j+1} = \frac{\alpha_j(1) + \beta_j(1)}{\alpha_j(1) - \beta_j(1)} \rho_j; \quad (2.135)$$

$$\rho_{j+1} = \frac{\beta_j(M_j) + \alpha_j(M_j)}{\beta_j(M_j) - \alpha_j(M_j)} \rho_j. \quad (2.136)$$

Для зменшення похибок імпеданс ρ_{j+1} оцінюємо як середнє значення з (2.135) та (2.136):

$$\hat{\rho}_{j+1} = \left(\frac{\hat{\alpha}_j(1) + \hat{\beta}_j(1)}{\hat{\alpha}_j(1) - \hat{\beta}_j(1)} + \frac{\hat{\beta}_j(M_j) + \hat{\alpha}_j(M_j)}{\hat{\beta}_j(M_j) - \hat{\alpha}_j(M_j)} \right) \frac{\hat{\rho}_j}{2}. \quad (2.137)$$

Відповідно значення діелектричної проникності $(j+1)$ -го шару обчислюємо як

$$\hat{\varepsilon}_{j+1} = \frac{\mu_0}{\varepsilon_0 \hat{\rho}_{j+1}^2}. \quad (2.138)$$

5. Коефіцієнти $\alpha'_{j+1}(q)$ та $\beta'_{j+1}(q)$ для $q = \overline{1, M_j}$ обчислимо, застосувавши перетворення (А.3) для відомих параметрів середовищ $\hat{\rho}_j$ та $\hat{\rho}_{j+1}$ у j -му та $(j+1)$ -у шарі, а також за відомих параметрів моделі $\hat{\alpha}_j(p)$ та $\hat{\beta}_j(q)$ коефіцієнтів у розв'язках Йоста j -го шару.

6. У відповідності до твердження А.6, частина коефіцієнтів, обчислених згідно з (А.3), є нульовими. Отже задачею, що вирішується на цьому етапі, є знаходження елементів множини індексів $F = \{f_1, f_2, f_3, \dots, f_{M_{j+1}}\}$ ненульових коефіцієнтів $\alpha'_{j+1}(q) \neq 0$, $q \in F$ у векторі α'_{j+1} та множини $G = \{g_1, g_2, g_3, \dots, g_{M_{j+1}}\}$, для якої $\beta'_{j+1}(q) \neq 0$, $q \in G$ у векторі β'_{j+1} .

Наявні похибки в оцінках $\hat{\rho}_{j+1}$ та $\hat{\rho}_j$, а також $\hat{\alpha}_j(p)$ та $\hat{\beta}_j(q)$ можуть спричинити відмінність від нуля коефіцієнтів $\alpha'_{j+1}(q)$ та $\beta'_{j+1}(q)$, які насправді

мають бути нульовими. Тому ідентифікацію множин індексів $F := \{f_1, f_2, f_3, \dots, f_{M_{j+1}}\}$ та $G := \{g_1, g_2, g_3, \dots, g_{M_{j+1}}\}$ необхідно здійснювати, виходячи з умови перевищення коефіцієнтами певного порогу Σ_j . Вважатимемо коефіцієнт $\alpha'_{j+1}(q)$ чи $\beta'_{j+1}(q)$ нульовим, якщо виконується умова

$$|\alpha'_{j+1}(q)| < \Sigma_j \text{ та } |\beta'_{j+1}(q)| < \Sigma_j. \quad (2.139) \text{ та } (2.140)$$

Порядок моделей (2.71) та (2.72) для коефіцієнтів у розв'язках Йоста $(j+1)$ -го шару можна оцінити за кількістю елементів векторів α'_{j+1} та β'_{j+1} , що задовольняють умовам (2.139) та (2.140): $\hat{M}_{j+1} = \#F$ або $M_{j+1} = \#G$ (тут використано позначення $\#$ кількості елементів у множині).

7. З виразу (A.5) можна знайти оптичну товщину l_{j+1} шару з номером $(j+1)$. Збільшення точності оцінки оптичної довжини досягаємо усередненням результату обчислення l_{j+1} для всіх пар $\hat{v}_j(f_q)$ та $\hat{v}_j(g_q)$, $q = \overline{1, M_{j+1}}$

$$\hat{l}_{j+1} = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}M_{j+1}} \sum_{q=1}^{M_{j+1}} |\hat{v}_j(f_q) - \hat{v}_j(g_q)|. \quad (2.141)$$

Для відомих оптичної товщини та діелектричної проникності шару можна знайти його метричну товщину

$$\hat{d}_{j+1} = \hat{l}_{j+1} / \sqrt{\hat{\varepsilon}_{j+1}}. \quad (2.142)$$

8. На останньому етапі рекурентної процедури встановлюємо коефіцієнти у розв'язках Йоста для $(j+1)$ шару

$$\alpha_{j+1}(p) = \alpha'_{j+1}(f_p), \beta_{j+1}(p) = \beta'_{j+1}(f_p), \quad (2.143) \text{ та } (2.144)$$

$$\text{а також } \nu_{j+1}(p) = \nu_j(f_p) + \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}l_{j+1}, \text{ або } \nu_{j+1}(p) = \nu_j(g_p) - \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}l_{j+1}. \quad (2.145)$$

Рекурентну процедуру повторюємо з четвертого кроку, розглядаючи наступний шар, поки не виконається умова $M_{j+1} = 2$. Така умова свідчить про те, що в $(j+1)$ -му шарі будуть розповсюджуватися тільки ті хвилі, які перейшли поверхню

розділу середовищ між j -м та $(j+1)$ -м шаром, а проникнення хвиль із шару $(j+2)$ є відсутнім.

Статистичний аналіз точності та визначення порогу. Для впровадження розробленого методу розв'язання оберненої задачі розсіювання необхідно визначити значення порогу Σ_j , у відповідності до якого відбираються ненульові елементи векторів α'_{j+1} та β'_{j+1} за критеріями (2.139) та (2.140). Важливість цього кроку підтверджується тим, що при заниженому значенні порогу випадкова складова спричинятиме появу хибно ідентифікованих ненульових елементів у векторах α'_{j+1} та β'_{j+1} . У випадку завищеного порогу, «малі» елементи векторів α'_{j+1} та β'_{j+1} будуть вважатися нульовими. Така помилка може призвести до недостовірного розв'язку оберненої задачі або до втрати збіжності описаного рекурентного процесу.

Для встановлення значення порогу Σ_j здійснимо статистичний аналіз точності оцінок коефіцієнтів $\alpha_j(p)$ та $\beta_j(p)$ у сумах (2.67) та (2.68), які обчислюються на кожному циклі рекурентної процедури за формулами (А.3), (2.143) та (2.144). Такий аналіз базується на припущенні про гаусівський розподіл похибок оцінки параметрів. Для цього оцінки коефіцієнтів запишемо у вигляді адитивної моделі їх дійсних значень та випадкової складової

$$\hat{\alpha}_j(p) = \alpha_j(p) + n_{\alpha,j}; \quad (2.146)$$

$$\hat{\beta}_j(p) = \beta_j(p) + n_{\beta,j}, \quad (2.147)$$

де випадкові величини $n_{\alpha,j}$ та $n_{\beta,j}$, характеризуються нормальним законом розподілу $N(0, \sigma_j^2)$ з нульовим середнім та дисперсією σ_j^2 .

Припустимо, що параметр σ_0^2 є відомим, або оціненим за вихідними даними для оберненої задачі розсіювання. Підставляючи статистичні моделі похибок (2.146) і (2.147) у вираз (А.3), встановимо модель спостереження для коефіцієнтів $\hat{\alpha}'_{j+1}(p)$ та $\hat{\beta}'_{j+1}(p)$:

$$\hat{\alpha}'_{j+1}(q) = \frac{\rho_{j+1} + \rho_j}{2\rho_j} \alpha_j(p) - \frac{\rho_{j+1} - \rho_j}{2\rho_j} \beta_j(p) + \frac{\rho_{j+1} + \rho_j}{2\rho_j} n_{\alpha,j} - \frac{\rho_{j+1} - \rho_j}{2\rho_j} n_{\beta,j}; \quad (2.148)$$

$$\hat{\beta}'_{j+1}(q) = -\frac{\rho_{j+1} - \rho_j}{2\rho_j} \alpha_j(p) + \frac{\rho_{j+1} + \rho_j}{2\rho_j} \beta_j(p) - \frac{\rho_{j+1} - \rho_j}{2\rho_j} n_{\alpha,j} + \frac{\rho_{j+1} + \rho_j}{2\rho_j} n_{\beta,j}. \quad (2.149)$$

Зауважимо, що впливом похибок параметрів $\hat{\rho}_j$ та $\hat{\rho}_{j+1}$ на дисперсію оцінки $\hat{\alpha}'_{j+1}(p)$ та $\hat{\beta}'_{j+1}(p)$ у цьому дослідженні знехтувано.

Використовуючи правила сумування та множення випадкових величин із виразів (2.148) та (2.149), матимемо взаємозв'язок між значеннями дисперсії оцінки коефіцієнтів $\hat{\alpha}_j(p)$, $\hat{\beta}_j(p)$ та $\hat{\alpha}'_{j+1}(p)$, $\hat{\beta}'_{j+1}(p)$

$$\sigma_{j+1}^2 = \left(\frac{\rho_{j+1} + \rho_j}{2\rho_j} \right)^2 \sigma_j^2 + \left(\frac{\rho_{j+1} - \rho_j}{2\rho_j} \right)^2 \sigma_j^2 = \left(\frac{\rho_{j+1}^2 + \rho_j^2}{2\rho_j^2} \right) \sigma_j^2. \quad (2.150)$$

Оскільки замість нульових коефіцієнтів у векторах α'_{j+1} та β'_{j+1} при обчисленнях буде спостерігатися випадкова величина з дисперсією σ_{j+1}^2 , то значення порогу Σ_j можна вибрати у відповідності до значення середньоквадратичного відхилення σ_{j+1} . Числові експерименти підтвердили прийнятність такого значення порогу

$$\Sigma_j = 1.5 \sqrt{\left(\frac{\rho_{j+1}^2 + \rho_j^2}{2\rho_j^2} \right) \sigma_j^2}. \quad (2.151)$$

2.3.2. Числові розв'язки оберненої задачі для плоско-неоднорідних середовищ. Не зважаючи на наявність багатьох аналітично обґрунтованих методів розв'язання оберненої задачі розсіювання для електромагнітних хвиль, числовий аспект розв'язання цієї проблеми вимагає детального дослідження. Більшість числових методів дають змогу отримати розв'язок оберненої задачі для рівняння Шредінгера та систем Дірака або Захарова-Шабата, використовуючи розклад у ряд Неймана разом з вибором найкращої апроксимації початкового наближення [94, 249-254]. Тому отриманий розв'язок є нічим іншим як уточненою

апроксимацією оригінального розв'язку. Метою досліджень, результати яких подано у цьому пункті, є розвиток нового числового методу розв'язання одновимірної оберненої задачі розсіювання, якому не властиві недоліки існуючих методів, а також узагальнення методу розв'язання оберненої задачі розсіювання на випадки, де плоско-неоднорідне середовище має контрастні поверхні розділу.

Аналітичний характер розв'язків системи Дірака відіграє ключову роль при розв'язанні оберненої задачі для випадку неперервної функції потенціалу. Властивість аналітичності можна використати, розкладаючи в ряд Неймана розв'язки рівняння Дірака, подані в інтегральній формі за аналогією до формули (2.92). Так, $\exp(ikz)\phi(k, x)$ та $\exp(-ikz)\psi(k, x)$ є аналітичними функціями у верхній комплексній півплощині $\text{Im}(k) \geq 0$, а їх спряжені аналоги $\exp(-ikz)\bar{\phi}(k, x)$ та $\exp(ikz)\bar{\psi}(k, x)$ - у нижній півплощині $\text{Im}(k) \leq 0$ [55].

Взаємозв'язок між функціями, що є аналітичними у верхній та нижній комплексних півплощинах, дає можливість використати задачу Гільберта-Рімана [186, 246], яку у цьому випадку запишемо у вигляді системи рівнянь

$$\begin{cases} \exp(-ikz)\bar{\phi} - b^*(k)\exp(-2ikz)\exp(ikz)\bar{\psi} = -a^*(k)\exp(-ikz)\psi, \\ -a(k)\exp(ikz)\bar{\psi} = -\exp(ikz)\phi + b(k)\exp(2ikz)\exp(-ikz)\psi. \end{cases} \quad (2.152)$$

Тут у лівій частині записано функції, що є аналітичними у нижній комплексній півплощині, а з правої сторони – функції, які можуть бути аналітично продовжені у верхню півплощину.

Розв'язок задачі Гільберта-Рімана відносно функцій $\psi(x, k)$ та $\bar{\psi}(x, k)$ можна записати через оператори перетворення [125]

$$\psi(k, x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(ikx) + \int_{-\infty}^x K_1(x, s) \exp(iks) ds; \quad (2.153)$$

$$\bar{\psi}(k, x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(-ikx) + \int_{-\infty}^x K_2(x, s) \exp(-iks) ds. \quad (2.154)$$

Ядра $K_1(x, s)$ та $K_2(x, s)$ операторів перетворення, існування яких доведено в [98], є розв'язком системи інтегральних рівнянь [124, 125]

$$\begin{cases} K_2(x, y) = \int_{-y}^x G(y+t) K_1(x, t) dt, \\ K_1(x, y) = G(x+y) + \int_{-y}^x G(y+t) K_2(x, t) dt, \end{cases} \quad (2.155)$$

де $G(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R(k) \exp(ikx) dk$ - перетворення Фур'є від коефіцієнта відбиття.

Шуканий потенціал у системі Дірака можна обчислити за розв'язком $K_1(x, x)$ системи інтегральних рівнянь (2.155)

$$q(x) = -2K_1(x, x). \quad (2.156)$$

Використовуючи формулу (2.26), невідому функцію діелектричної проникності для безвтратного середовища $\sigma(x) = 0$ можна явно виразити через знайдений потенціал $q(x)$:

$$\varepsilon(x) = \exp\left(-4 \int_{-\infty}^x q(x') dx'\right). \quad (2.157)$$

У загальному випадку, коли $\sigma(x) \neq 0$, і в середовищі плоска електромагнітна хвиля зазнає втрат, задача стає не самоспряженою. За відомими коефіцієнтами відбиття $R(k_0)$, $L(k_0)$ і пропускання $T(k_0)$, які є результатами експерименту, обчислюють приведені параметри розсіювання $r^+(k_0) = R(k_0)$ та $r^-(k_0) = (r^-(k_0))^* = L(k_0) / (R(k_0)L(k_0) - (T(k_0))^2)$, що характеризують розв'язки асиметричної системи рівнянь Дірака (2.25).

За аналогією з безвтратним випадком, із розв'язку відповідної задачі Гільберта-Рімана можна знайти розв'язок оберненої задачі розсіювання, який приведено до системи інтегральних рівнянь типу Гельфанда-Левітана-Марченка [124, 125]:

$$\begin{cases} K_2^\pm(x, y) = \int_{-y}^x G^\mp(y+t) K_1^\mp(x, t) dt, \\ K_1^\pm(x, y) = G^\mp(y+t) + \int_{-y}^x G^\mp(y+t) K_2^\mp(x, t) dt, \end{cases} \quad (2.158)$$

де $G^\pm(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} r^\pm(k_0) \exp(jk_0 x) dk_0$ є відомими функціями. Ці функції отримано застосуванням перетворення Фур'є до приведених даних розсіювання. У цьому випадку використано припущення про те, що сформульована задача (2.25) не має так званих зв'язаних станів [55] (або розв'язків рівняння у комплексній площині k_0 , інтегрованих у квадраті).

Шукані потенціали \tilde{q}^\pm можна знайти з розв'язку системи інтегральних рівнянь (2.158), використовуючи тотожність $\tilde{q}^\pm(x) = -2K_1^\pm(x, x)$.

Як показано вище, обернена задача розсіювання зводиться до розв'язання системи інтегральних рівнянь (2.158). Отже, від точності, яку досягнуто на етапі розв'язання цієї системи рівнянь, буде, в основному, залежати точність отриманого розв'язку оберненої задачі розсіювання відносно функцій $\varepsilon(x)$ та $\sigma(x)$. Незважаючи на те, що теорему існування розв'язку для системи інтегральних рівнянь (2.158) доведено в [103], числова схема повинна гарантувати отримання наближеного розв'язку, який якомога краще апроксимує точний розв'язок оберненої задачі розсіювання.

Серед великої кількості підходів до розв'язання оберненої задачі (2.158) для системи рівнянь типу Дірака варто відмітити два взаємодоповнюючі числові алгоритми її розв'язку - [250] і [251]. Саме ці числові алгоритми використано для порівняння та підтвердження ефективності розвинутого числового методу.

Подальше обговорення розкриватиме основні ідеї, покладені в основу запропонованого числового методу розв'язання системи рівнянь Гельфанда-Левітана-Марченка. Для спрощення обчислень введено нову систему характеристичних координат. Ядро рівняння (2.155) можна подати в новій формі $K_{1,2}(x, y) = B_{1,2}(x + y, x - y) = B_{1,2}(v, w)$, тоді як невідомий потенціал (2.156) визначено згідно з виразом $q(x) = -2K_1(x, x) = -2B_1(2x, 0)$. Зміна меж інтегрування дає змогу переписати рівняння у такому вигляді

$$\begin{cases} B_2(v, w) = \int_0^v G^+(t) B_1(w+t, v-t) dt, \\ B_1(v, w) = G^-(v) + \int_0^v G^-(t) B_2(w+t, v-t) dt. \end{cases} \quad (2.159)$$

Цю систему рівнянь можна безпосередньо подати у дискретному вигляді. Для цього інтеграли замінимо сумою дискретних значень підінтегральних функцій

$$\begin{cases} b_{l,m}^2 = \Delta \sum_{n=1}^l g_n^+ b_{m+n,l-n}^1, \\ b_{l,m}^1 = g_l^- + \Delta \sum_{n=1}^l g_n^- b_{m+n,l-n}^2, \end{cases} \quad (2.160)$$

де l та m є цілими числами; Δ є кроком дискретизації; $b_{l,m}^1 = B_1(\Delta l, \Delta m)$, $b_{l,m}^2 = B_2(\Delta l, \Delta m)$ та $g_n^\pm = G^\pm(\Delta n)$ є позначеннями дискретних значень ядер $B_{1,2}$ та функції G^\pm .

Система (2.160) є нічим іншим як лінійними алгебраїчними рівняннями, які можна переписати у матричній формі

$$\left[\begin{array}{c|c} -\mathbf{I} & \Delta \mathbf{C}^+ \\ \hline \Delta \mathbf{C}^- & -\mathbf{I} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix}, \quad (2.161)$$

де \mathbf{I} є одиничною матрицею, а $\mathbf{0}$ є нульовим вектором. Дискретні величини обох ядер $B_{1,2}$ та функції G^\pm є елементами матриці і векторів в системі рівнянь (2.161), відповідно до того, як це подано на рис. 2.5.

Числовий розв'язок оберненої задачі розсіювання для системи типу Дірака вимагає визначення тільки невідомого вектора $\boldsymbol{\beta}$. Це можна здійснити множенням оберненої матриці на вектор відомих коефіцієнтів \mathbf{f} : $\boldsymbol{\beta} = -(\mathbf{I} - \Delta^2 \mathbf{C}^- \mathbf{C}^+)^{-1} \mathbf{f}$. Запропонований числовий метод полягає у новому підході до обчислення оберненої матриці $\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \Delta^2 \mathbf{C}^- \mathbf{C}^+)$.

З рис. 2.5 видно, що матриця $\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \Delta^2 \mathbf{C}^- \mathbf{C}^+)$ має блочну структуру. Кожний блок матриці \mathbf{X}_d має контрадіагональну симетричну форму. Варто зазначити, що кожен наступний блок \mathbf{X}_{d+1} охоплює попередній \mathbf{X}_d

$$\mathbf{X}_{d+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_d & \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2^\top & h \end{bmatrix}, \quad (2.162)$$

де \mathbf{g}_1 та \mathbf{g}_2^T є векторами, а h – скаляр, який можна визначити згідно з відомими величинами g_n^\pm . Це вказує на те, що обчислення всієї оберненої матриці \mathbf{X}^{-1} можна реалізувати рекурентно для кожного наступного блоку меншої розмірності. Повна інформація про обернений блок \mathbf{X}_d^{-1} дає можливість визначити наступний за індексом обернений блок матриці \mathbf{X}_{d+1}^{-1}

$$\mathbf{X}_{d+1}^{-1} = \begin{bmatrix} \left(\mathbf{X}_d^{-1} + s(\mathbf{X}_d^{-1}\mathbf{g}_1)(\mathbf{g}_2^T\mathbf{X}_d^{-1}) \right) & -s(\mathbf{X}_d^{-1}\mathbf{g}_1) \\ -s(\mathbf{g}_2^T\mathbf{X}_d^{-1}) & s \end{bmatrix}, \quad (2.163)$$

де $s = (h - \mathbf{g}_2^T\mathbf{X}_d^{-1}\mathbf{g}_1)^{-1}$ є скалярною величиною. Можна показати, що обчислювальна складність операції обертання блоку ($\mathbf{X}_d^{-1} \in \mathbb{R}^{(d+1) \times (d+1)}$) є порядку $(d+4)$ разів множення вектора ($\mathbb{R}^{1 \times (d+1)}$) на вектор ($\mathbb{R}^{(d+1) \times 1}$). Звідси рекурентне обчислення послідовності обернених блоків \mathbf{X}_d , $d = 2, 3, 4, \dots$ можна здійснювати, починаючи з другого блоку $\mathbf{X}_1 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, обертання якого не вимагає складних обчислень.

$$\mathbf{C}^\pm = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_1^\pm & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_1^\pm & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_1^\pm & g_2^\pm & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_1^\pm \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_1^\pm & g_2^\pm \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_1^\pm & g_2^\pm & g_3^\pm \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{matrix} \left. \begin{matrix} \} d=0 \\ \} d=1 \\ \} d=2 \\ \} d=3 \end{matrix} \right\} \\ \dots \end{matrix} \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} b_{0,0}^2 \\ b_{0,1}^2 \\ b_{1,0}^2 \\ b_{0,2}^2 \\ b_{1,1}^2 \\ b_{2,0}^2 \\ b_{0,3}^2 \\ b_{1,2}^2 \\ b_{2,1}^2 \\ b_{3,0}^2 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} b_{0,0}^1 \\ b_{0,1}^1 \\ b_{1,0}^1 \\ b_{0,2}^1 \\ b_{1,1}^1 \\ b_{2,0}^1 \\ b_{0,3}^1 \\ b_{1,2}^1 \\ b_{2,1}^1 \\ b_{3,0}^1 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} g_0^- \\ g_0^- \\ g_1^- \\ g_0^- \\ g_1^- \\ g_2^- \\ g_0^- \\ g_1^- \\ g_2^- \\ g_3^- \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Рис. 2.5. Структура підматриць \mathbf{C}^\pm і векторів $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ та \mathbf{f} у системі рівнянь (2.161)

Результат обчислення оберненої матриці \mathbf{X} можна використати для знаходження вектора $\boldsymbol{\beta} = -\mathbf{X}^{-1}\mathbf{f}$, елементи якого містять усі необхідні величини для визначення дискретних відліків шуканого потенціалу $q_n = q(\Delta n) = -2b_{2n,0}^1$.

Оцінювання неперервних функцій діелектричної проникності та провідності. Ефективність запропонованого методу можна визначити порівнянням отриманого числового розв'язку оберненої задачі розсіювання з аналітичним. Відомо, що існує можливість [255] аналітичного розв'язання оберненої задачі для симетричної системи типу Захарова-Шабата. Для цього коефіцієнт відбиття повинен бути раціональною функцією. Для прикладу, вважаємо, що таку функцію можна подати у формі

$$R(k_0) = \frac{1}{(k_0 - \lambda_1)(k_0 - \lambda_2)}, \quad (2.164)$$

де $\lambda_1 = \sqrt{2}(1 - j)/2$ та $\lambda_2 = -\sqrt{2}(1 + j)/2$ є полюсами коефіцієнта відбиття.

Симетричне рівняння ($q^\pm = \tilde{q}^- = \tilde{q}^+$) типу Дірака (2.25) є моделлю процесу розсіювання електромагнітних хвиль на безвтратному $\sigma(z) = 0$ діелектрику. Звідси випливає, що коефіцієнти відбиття, які визначають вихідні дані для розв'язку системи рівнянь типу Гельфанда-Левітана-Марченка (2.158), співвідносяться як $r^+(k_o) = r^-(k_o) = R(k_o)$. Крім того, особливість симетрії системи рівнянь (2.25) дає змогу записати вираз (2.27) для оцінки невідомої функції діелектричного профілю

$$\hat{\varepsilon}(x) = \exp\left(-4 \int_{-\infty}^x q^\pm dx'\right). \quad (2.165)$$

Для відомої функції діелектричної проникності $\varepsilon(x)$ знаходження розв'язку задачі визначення відповідності між величинами z та x не становить жодних труднощів, так як його можна реалізувати числовим інтегруванням відповідно до зазначеного вище перетворення Ліувіля (2.14).

З метою порівняння обернену задачу розсіювання для безвтратного середовища розв'язано запропонованим методом числово. Результати моделювання подано на рис. 2.6. Середньоквадратична похибка між аналітично отриманою функцією діелектричної проникності (суцільна лінія на рис. 2.6) та результатом отриманим запропонованим числовим методом (пунктирна лінія з довгими штрихами на рис. 2.6), становить $3,93 \cdot 10^{-3}$.

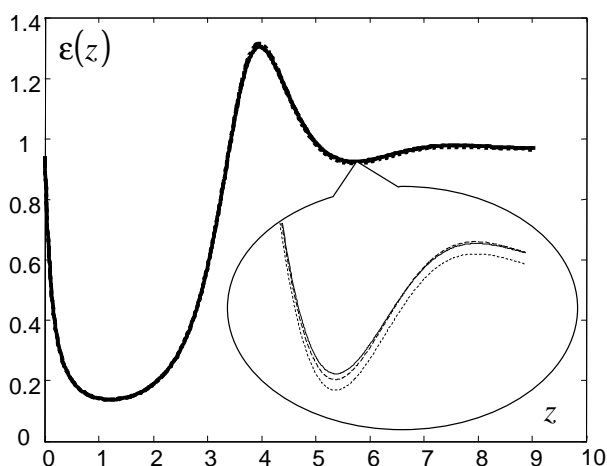


Рис. 2.6. Реконструкція діелектричного профілю для коефіцієнта відбиття (2.164): суцільна лінія –аналітично отриманий результат [255]; пунктирна лінія з довгими штрихами – результат, отриманий запропонованим методом; пунктирна лінія з короткими штрихами – числовий метод в [251]

Інший числовий метод [251], який базується на ітераційній апроксимації розв’язку оберненої задачі розсіювання, також реалізовано з метою порівняння. Середньоквадратична похибка різниці цього результату (пунктирна лінія з короткими штрихами, отримана після 5-ти ітерацій) з аналітичним складає $4,26 \cdot 10^{-3}$.

Ефективність розвинутого числового методу підтверджено й у більш складних випадках, що охоплюють розсіювання на плоских шарах із неперервними функціями діелектричної проникності чи провідності.

Як приклад розглянемо плоску діелектричну структуру без втрат із неперервною вздовж координати z функцією діелектричної проникності (рис. 2.7.а). Для такої структури числово розв’язано пряму задачу розсіювання, що дало можливість визначити частотну залежність коефіцієнта відбиття $R(k_0)$. У цьому числовому експерименті функцію $R(k_0)$ вважатимемо вихідними даними оберненої задачі розсіювання. Таку обернену задачу розв’язано розвинутим методом за наявності у вихідних даних випадкової похибки з різною дисперсією. Енергетичне співвідношення точних вихідних даних до величини похибки охарактеризовано параметром «сигнал-шум», обчисленим у децибелах. Як видно з рис. 2.7,б, де

подано також розв'язки оберненої задачі, за відсутності похибки у вихідних даних, відновлена функція діелектричної проникності повністю відповідає оригіналу (рис. 2.7,а). Саме наявність похибки у вихідних даних є причиною спотворень у реконструйованому профілі. Похибка призводить до того, що окремі елементи шуканої функції діелектричної проникності $\varepsilon(z)$ ідентифікувати неможливо.

Аналогічно на рис. 2.8 подано результати числового експерименту, метою якого є перевірка ефективності розвинутого методу розв'язку оберненої задачі у випадку чисто втратного середовища, де $\varepsilon(z) = 1$. З виразу (2.27) можна визначити, що має місце тотожність $L = \sqrt{-\tilde{q}^+ / \tilde{q}^-}$, яка дає змогу записати розв'язок оберненої задачі відносно провідності середовища у вигляді

$$\hat{\sigma}(x) = -\frac{1}{2\rho_0} \frac{d}{dx} \ln(-\tilde{q}^+ / \tilde{q}^-). \quad (2.166)$$

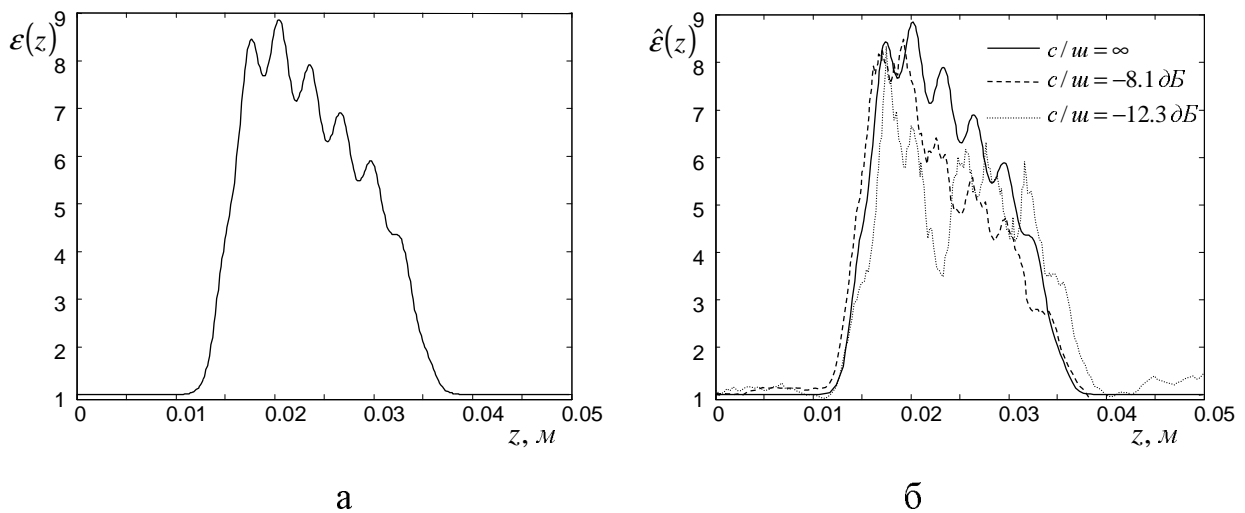


Рис. 2.7. Функція діелектричної проникності безвтратного середовища ($\sigma = 0$) - а) та реконструйовані профілі діелектричної проникності - б), отримані числовим розв'язком оберненої задачі розсіювання для різних значень дисперсії похибки у вихідних даних

Розв'язки задачі реконструкції профілю провідності свідчать про можливість точного розв'язання оберненої задачі тільки за умови відсутності похибки у вихідних даних (рис. 2.8,б, суцільна лінія). Наявність похибки суттєво спотворює

розв'язок, що свідчить про високу чутливість параметра $\sigma(z)$ до збурень у вихідних даних. Зауважимо також, що на відміну від чисто діелектричних структур, розв'язок оберненої задачі розсіювання для втратного середовища вимагає знання як частотних характеристик відбиття $R(k_0)$ і $L(k_0)$, так і частотної характеристики пропускання $T(k_0)$.

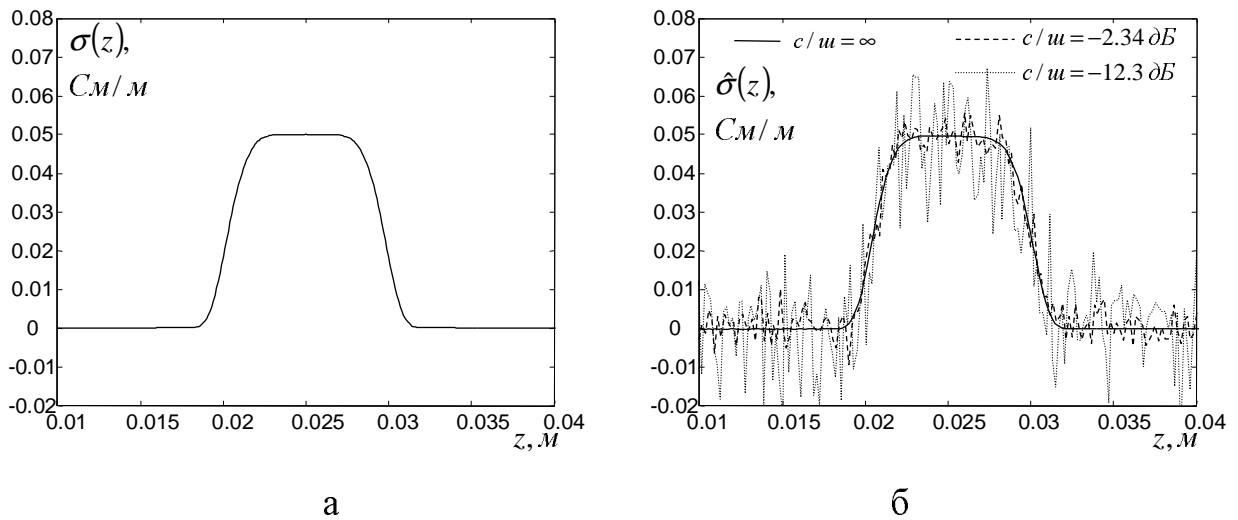


Рис. 2.8. Функція провідності $\sigma(z)$ - а) плоского шару з $\varepsilon = 1$ та реконструйовані функції провідності - б), отримані числовим розв'язком оберненої задачі розсіювання для різних значень дисперсії похибки у вихідних даних

Оцінювання кусково-неперервних функцій діелектричної проникності.

Задача встановлення кусково-неперервної функції діелектричної проникності $\varepsilon(z) \in C | z \in (z_{n-1}, z_n)$, що має скінчене число розривів у точках $z_n, n = \overline{1, (N+1)}$, потребує додаткового вивчення. У цьому пункті описані вище процедури розв'язання обернених задач для неперервних та кусково-постійних функцій діелектричної проникності узагальнено на випадок кусково-неперервних функцій.

Беручи до уваги, що високочастотна складова $R_{as}(k)$ коефіцієнта відбиття для задачі з кусково-неперервною функцією $\varepsilon(z) \in C | z \in (z_{n-1}, z_n)$ є безмежним тригонометричним рядом (2.109), результат перетворення Фур'є при обчисленні ядра $G(x)$ міститиме ряд із нескінченим числом дельта-функцій

$$G(x) = G_{reg}(x) + \sum_{m=1}^{\infty} r_m \delta(x - \tau_m), \quad (2.167)$$

де $G_{reg}(x) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{reg}(k) \exp(ikx) dk$ - перетворення Фур'є від зникаючої складової коефіцієнта відбиття.

Розв'язання системи інтегральних рівнянь (2.158) з ядром у формі (2.167) вимагає оцінки інтегралу, в якому підінтегральна функція містить дельта-функцію із змінним аргументом. При цьому межі інтегрування є також змінними

$$\int_{-y}^x \delta(y+t-\tau) K(x,t) dt. \quad (2.168)$$

Однозначне знаходження такого інтегралу є неможливим [114]. Це, у свою чергу, вказує на неможливість розв'язання оберненої задачі методом інтегральних рівнянь (2.158), (2.156) та (2.157) у випадках, коли шукана функція діелектричної проникності має розриви.

Згідно з умовою задачі, область визначення коефіцієнта відбиття завжди обмежена відрізком частот $\Omega_{\min} \leq \omega \leq \Omega_{\max}$, на якому здійснюють вимірювання. Тому ядро $G(x)$ можна знайти лише наближено

$$\hat{G}_{low}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_{\min} \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}^{\Omega_{\max} \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} R(k) \exp(ikx) dk. \quad (2.169)$$

Таке наближення ядра $G(x)$ міститиме лише неперервну апроксимацію дельта-функцій. Тому використання апроксимації (2.169) при розв'язанні оберненої задачі методом інтегральних рівнянь має теоретичне підґрунтя. Як приклад, на рис. 2.9 наведено оригінал функції діелектричної проникності (рис. 2.9,а) та результат її реконструкції (рис. 2.9,б) безпосереднім застосуванням методу інтегральних рівнянь. Вихідними даними у цьому прикладі є коефіцієнт відбиття, заданий на дискретній сітці частот $f = 2\pi\omega$ від 0 до 60 ГГц із кроком 200 МГц.

Як видно з рис.2.9,б, при встановленні діелектричної проникності значні спотворення проявляються у точках її розриву. Тому пошук кращої апроксимації ядра $G(x)$ неперервною функцією представляє собою окрему задачу.

Для цього замінимо ядро $G(x)$ його апроксимацією у формі

$$\hat{G}_{high}(x) = G_{reg}(x) + \sum_{m=1}^{\infty} r_m \delta_a(x - \tau_m), \quad (2.170)$$

де $\delta_a(x) = (s\sqrt{\pi})^{-1} \exp(-x^2/s^2)$ при $s \rightarrow 0$ - неперервне наближення дельта-функцій,

яке можна задати з контрольованою точністю залежно від параметра s .

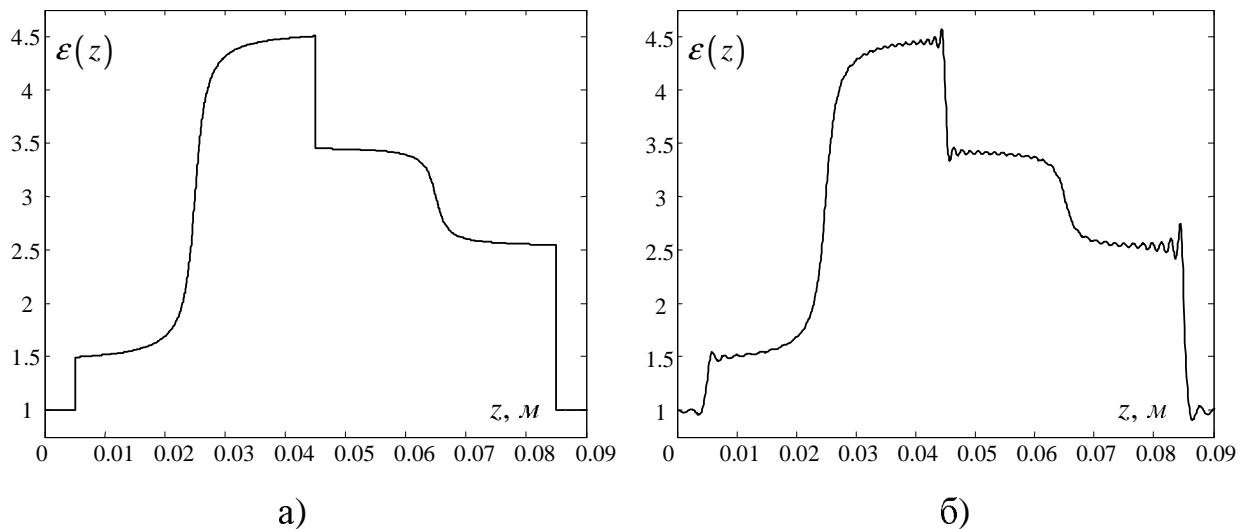


Рис. 2.9. Оригінал кусково-неперервної функції діелектричної проникності – а) та розв'язок оберненої задачі розсіювання, отриманий прямим застосуванням методу інтегральних рівнянь – б)

Для реалізації такого апроксимаційного підходу необхідно оцінити значення всіх параметрів r_m та τ_m за високочастотною поведінкою коефіцієнта відбиття $R_{as}(k)$. Оскільки кількість цих параметрів є нескінченною, а r_m є коефіцієнтами збіжного ряду, то задача визначення всіх таких коефіцієнтів є некоректною, зважаючи на наявність похибки у вихідних даних. Тому в апроксимації (2.170) використаємо параметризацію високочастотної частини коефіцієнта відбиття у відповідності до виразу (2.112), де коефіцієнт відбиття представлено відношенням двох скінчених тригонометричних сум. Таку апроксимацію можна реалізувати у вигляді фільтраційної схеми

$$\hat{G}_{high}(x) = G_{reg}(x) + \delta_a(x) * \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sum_{l=1}^L \beta_l \exp(ikv_l)}{\sum_{l=1}^L \alpha_l \exp(ikv_l)} \exp(ikx) dk \right), \quad (2.171)$$

де * - оператор згортки.

Перевагою такого підходу є те, що числове інтегрування у виразі (2.171) можна здійснювати, вибравши межі інтегрування довільно великими, оскільки підінтегральна функція задана параметрично і може бути обчислена для будь-якого значення k .

Як видно з формули (2.171), оцінювання нескінченної кількості коефіцієнтів r_m та τ_m в (2.167) зведено до тривіальної проблеми спектрального оцінювання [241], яка полягає у визначенні скінченної кількості коефіцієнтів α_l , β_l та ν_l за функціями $\tilde{a}_0(k) = \sum_{l=1}^L \alpha_l \exp(ik\nu_l)$ та $\tilde{b}_0(k) = \sum_{l=1}^L \beta_l \exp(ik\nu_l)$.

За умовою задачі відомі лише значення високочастотної складової коефіцієнта відбиття як відношення цих функцій $R_{as}(k) = \tilde{b}_0(k)/\tilde{a}_0(k)$. Отже запропонований підхід передбачає обчислення функцій $\tilde{a}_0(k)$ та $\tilde{b}_0(k)$, оскільки вони явно не задані. Знаходження цих функцій можна реалізувати за аналогією до оцінювання коефіцієнтів розв'язків Йоста для шаруватих структур з кусково-постійною функцією діелектричної проникності. В основі цього методу покладено властивість аналітичності коефіцієнта розсіювання $\tilde{a}_0(k)$ у верхній комплексній півплощині, де він не має нулів. Знаходження $\tilde{a}_0(k)$ реалізовано за допомогою виразу (2.117). Обчислені комплексні значення коефіцієнта розсіювання $\tilde{a}_0(k)$ дозволяють визначити інший коефіцієнт розсіювання - $\tilde{b}_0(k) = R_{as}(k)\tilde{a}_0(k)$. Числова реалізація процедури знаходження коефіцієнтів розсіювання $\tilde{a}_0(k)$ та $\tilde{b}_0(k)$ не вимагає інтегрування при обчисленні інтеграла (2.117) і приведена до простих арифметичних операцій з коефіцієнтами тригонометричних рядів.

Підтвердженням достовірності отриманих результатів та ефективності запропонованого підходу до встановлення кусково-неперервної функції діелектричної проникності можуть служити дані числового моделювання (рис. 2.10). Для встановлення діелектричної проникності використано апроксимацію ядра $G(x)$ у системі рівнянь (2.158), що базується на параметризованому

зображенні високочастотної складової коефіцієнта відбиття. Як видно з рис. 2.10, розриви діелектричної проникності встановлені з більшою точністю, ніж у випадку безпосереднього застосування методу інтегральних рівнянь до розв'язання оберненої задачі (рис. 2.9.б). Середньоквадратична похибка такого методу в порівнянні з методом, що не враховує високочастотну асимптотику коефіцієнта відбиття менша в 7.6 раз.

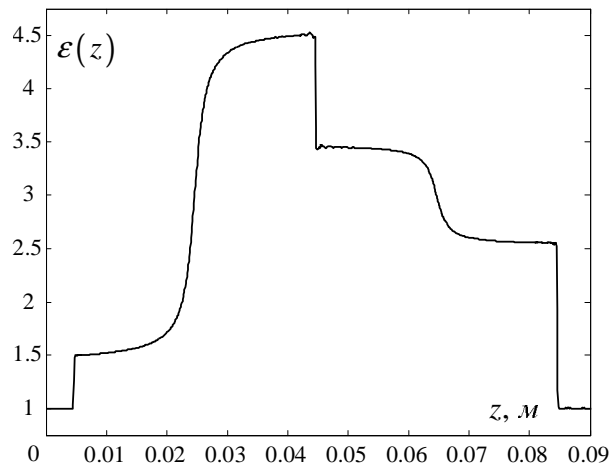


Рис. 2.10. Розв'язок оберненої задачі розсіювання, отриманий застосуванням запропонованого апроксимаційного підходу до визначення ядра $G(x)$ у системі інтегральних рівнянь (2.158)

2.4. Висновки до другого розділу

Усесторонній аналіз розв'язків одновимірних обернених задач розсіювання, які аналітично та числово характеризують результат взаємодії електромагнітних хвиль із плоско-неоднорідними середовищами, дає підставу стверджувати, що в якості моделей такої взаємодії формально можна використати моделі потенціального розсіювання, такі як рівняння Шредінгера та система рівнянь Дірака. Між коефіцієнтами відбивання та змінними в таких моделях встановлено однозначний взаємозв'язок. Вагомою перевагою моделей потенціального розсіювання є доступність математичних інструментів, розвинутих у теорії операторів та теорії функцій комплексної змінної, які дозволяють побудувати нові розв'язки обернених задач розсіювання. Адекватність моделей потенціального розсіювання процесам розповсюдження

електромагнітних хвиль у плоско-неоднорідних середовищах можна підтвердити існуванням однозначних аналітичних перетворень між розв'язками відповідних диференціальних рівнянь в обох моделях.

Окрім того, запропоновано підхід, який полягає у приведенні вихідних даних оберненої задачі розсіювання до моделей у вигляді розв'язків Йоста для відповідних рівнянь. Це дозволяє, зокрема, в одновимірному випадку коректно враховувати наявність розривів у функціях матеріальних параметрів кусково-неперервного неоднорідного середовища, які мають місце на поверхнях розділу.

Аналіз властивостей коефіцієнтів у розв'язках Йоста дає можливість побудувати рекурентну процедуру оцінювання параметрів безвтратної багатосарової структури. Такий підхід дозволяє скористатися аналітичними властивостями розв'язків Йоста в електродинамічному формулюванні оберненої задачі розсіювання та знаходити оцінки параметрів середовищ, оперуючи зі скінченими тригонометричними сумами. У цьому полягає основна відмінність запропонованого методу від методу пошарового зрізання, в якому вихідні дані задано імпульсною характеристикою, що має нескінчену кількість тригонометричних доданків. Окрім того, високу точність запропонованого у роботі методу отримано за рахунок впровадження статистично обґрунтованих методів оцінювання параметрів тригонометричного полінома, як моделі розв'язків Йоста, та вибором порогу для виявлення значущих коефіцієнтів цього полінома. Підхід, що полягає у використанні скінчених рядів для розв'язання оберненої задачі розсіювання, дав можливість уникнути ідентифікації хибних поверхонь розділу середовищ, які є характерними для методу пошарового зрізання. В результаті досягнуто зменшення середньоквадратичної похибки оцінювання у 1.4 разів в порівнянні з відомим методом.

Аналітичні властивості розв'язків Йоста дозволяють виробити єдиний підхід до розв'язання обернених задач розсіювання, зводячи задачу оцінки параметрів неоднорідних середовищ до задачі Гільберта-Рімана. У випадку одновимірної задачі такий підхід дає змогу отримати систему інтегральних рівнянь типу Гельфанда-Левітана-Марченка, розв'язок якої визначає неперервну функцію потенціалу

моделі потенціального розсіювання, а отже дозволяє обчислити шукані параметри електродинамічної моделі.

З урахуванням апроксимацій ядер у системі інтегральних рівнянь розроблено новий числовий метод розв'язання оберненої задачі розсіювання для втратних середовищ. Запропонований підхід до обчислення оберненої матриці на основі рекурентної процедури дав можливість відмовитися від етапу безпосередньої апроксимації розв'язку оберненої задачі розсіювання, що можна виділити як основну його перевагу. Завдяки цьому отримано високу точність розв'язку оберненої задачі, що підтверджено порівнянням з аналітичними розв'язками для простих моделей розсіювання. Крім того, запропонований метод дає можливість розв'язати обернену задачу розсіювання для двопотенціального рівняння типу Захарова-Шабата та Дірака, що також є його перевагою над альтернативними алгоритмами. Ефект від впровадження запропонованої числової схеми розв'язку можна оцінити у 8 % покращення точності розв'язку у порівнянні з найкращим відомим методом. Запропонований підхід, на відміну від оптимізаційних методів розв'язання оберненої задачі, не потребує апріорних даних про розв'язок, що суттєво розширює множину класів досліджуваних діелектричних структур. Розв'язки обернених задач розсіювання можна просто адаптувати до вирішення багатьох прикладних задач, включаючи реконструкцію матеріальних параметрів середовищ, побудову мікрохвильових та оптичних фільтрів, розв'язання нелінійних еволюційних рівнянь і т.д.

Асимптотичний аналіз розв'язків системи Дірака, яка є еквівалентною моделлю поширення плоскої електромагнітної хвилі у шаруватому діелектричному матеріалі, демонструє можливість розділення елементів матриці розсіювання та розв'язків Йоста на дві складові. Встановлено, що високочастотну складову, яка спричинена розривами функції діелектричної проникності, можна виразити скінченим тригонометричним рядом. Зникаюча з частотою складова залежить лише від характеру поведінки діелектричної проникності на інтервалах між точками розриву. Виділення високочастотної складової коефіцієнта відбиття та її параметризація відношенням двох скінчених тригонометричних поліномів дозволяє

екстраполювати вихідні дані для довільно великого значення частоти. Це дозволяє отримати кращу апроксимацію Фур'є-перетворення коефіцієнта відбиття, а також уникнути наявності дельта-функцій в ядрі системи інтегральних рівнянь. Цю апроксимацію використано для розв'язання оберненої задачі розсіювання для кусково-неоднорідних середовищ.

Некоректність задачі, зумовлена характером вихідних даних (коефіцієнт відбиття задано для обмеженого діапазону частот), вказує на неможливість знаходження її точного розв'язку та доцільність пошуку його наближень. Запропонований підхід до апроксимації ядра у системі інтегральних рівнянь і числова реалізація її розв'язку можна трактувати як ефективний спосіб регуляризації такої задачі.

Висока точність оцінки параметрів плоско-неоднорідних середовищ у розвинутому підході дає можливість стверджувати, що запропонований підхід можна ефективно використати для обробки результатів вимірювань у засобах неруйнівного контролю діелектричних матеріалів та системах підповерхневого зондування.

РОЗДІЛ 3

ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ СЕРЕДОВИЩ ЧЕРЕЗ РОЗВ'ЯЗОК ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ РОЗСІЮВАННЯ ДЛЯ ХВИЛЬОВИХ РІВНЯНЬ НА ПІВОСІ

Визначення електричних параметрів та товщини покриттів, що застосовуються для електричної ізоляції та захисту від корозії металічних поверхонь, є однією з найважливіших задач неруйнівного контролю. Висока проникна здатність, компактність вимірювальної апаратури та помірна ціна вказує на перспективність радіохвильового неруйнівного контролю діелектриків. Запорукою підвищення ефективності такого контролю є впровадження нових методів обробки результатів вимірювань розсіяного поля, які дозволяють визначати параметри ізоляційного покриття з високою точністю. Доцільність використання теорії обернених задач для оцінювання невідомих параметрів діелектриків за вимірними даними є безсумнівною, що не раз підтверджено на практиці.

Як правило, нанесення ізоляційних покриттів приводить до формування шаруватої структури, поверхні розділу матеріалів якої є плоско-паралельними, а електричні характеристики постійними для кожного шару. Очевидно, що кусково-постійна функція діелектричної проникності є найбільш простою і водночас прийнятною моделлю шаруватого діелектрика (рис. 3.1).

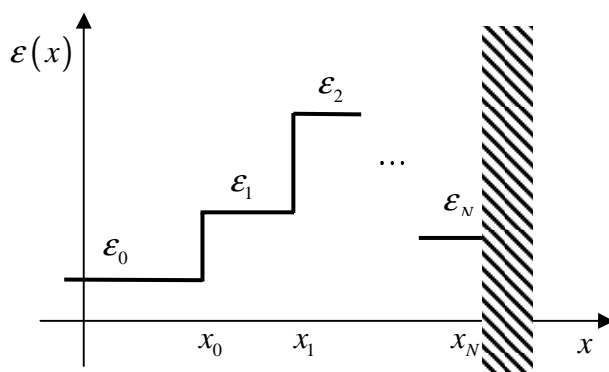


Рис. 3.1. Функція діелектричної проникності шаруватого діелектрика на ідеально провідній основі

Наявність у досліджуваній структурі діелектричної частини та металічної основи, що має високу провідність і характеризується значним загасанням електромагнітного поля, не дозволяє безпосередньо застосувати інструменти класичної теорії обернених задач [93, 106, 107, 109, 111], які розвинуті за умови відсутності втрат у середовищі розповсюдження. З іншої сторони, математичній моделі такого розсіювання не відповідає самоспряжений оператор, що суттєво ускладнює загальний розв'язок обернених задач із втратами [115,117]. Тому нижче розглянуто модельну задачу, у якій металічна основа має ідеально провідну плоску поверхню з нульовими граничними умовами для тангенціальних складових сумарного електромагнітного поля на ній. Обернені задачі для схожих структур сформульовано в роботах [256-258]. Математичною моделлю такої задачі є хвильове рівняння на півосі. Аналіз обернених задач на півосі для рівняння Шредінгера можна знайти в [103, 259, 260]. Недоліком відомих підходів до розв'язання цієї задачі є те, що вони втрачають точність, якщо коефіцієнт відбиття задано на обмеженій смузі частот.

Таким чином, задачу неруйнівного контролю шаруватих ізоляційних покривів на металічній основі змодельємо оберненою задачею розсіювання електромагнітних хвиль на плоских шаруватих діелектриках з ідеально провідною основою та оберненою спектральною задачею для заданих трансмісійних власних значень. Тому метою дослідження, викладеного у цьому розділі, є створення математично обґрунтованого методу визначення товщини шарів та діелектричних проникностей покривів як основних електричних параметрів ізоляційних матеріалів.

Окрім того встановлено [28, 261, 262], що обернена спектральна задача для радіально-симетричної проникної шаруватої структури є еквівалентною до задачі розсіювання плоских хвиль на плоскій структурі з ідеально провідним екраном [32]. Підхід до знаходження розв'язку оберненої задачі розсіювання можна застосувати для доведення єдиності розв'язку оберненої спектральної задачі та створення конструктивної процедури оцінювання параметрів радіально-сферичних структур за множиною відомих трансмісійних власних значень.

3.1. Визначення параметрів плоскошаруватої структури на ідеально провідному екрані

Розсіювання плоскої електромагнітної хвилі, що падає нормально на плоску діелектричну структуру зі змінною діелектричною проникністю та плоским екраном (рис. 3.1) описує рівняння Гельмгольца (2.47), записане відносно напруженості електричного поля

$$d^2 E(x)/dx^2 + \omega^2 \mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon(x) E(x) = 0, \quad x \in (-\infty, x_N], \quad (3.1)$$

де $\varepsilon(x)$ - відносна діелектрична проникність, яка у даному випадку є кусково-постійною функцією, $\mu = 1$ - відносна магнітна проникність.

Наявність ідеально провідної підкладки, яка обмежує діелектричну структуру, приводить до того, що напруженість електричного поля $E(x)$ задовольняє додаткову граничну умову $E(x_N) = 0$ окрім умови неперервності електричної $E(x_j - 0) = E(x_j + 0)$ та магнітної $dE(x)/dx|_{x=x_j-0} = dE(x)/dx|_{x=x_j+0}$ складових поля на всіх поверхнях розділу шарів, для кожного $j = \overline{0, N}$. Без втрати загальності моделі (3.1), точку x_N можна перенести у початок координат, тоді електромагнітна хвиля буде розповсюджуватися лише в лівому півпросторі. Саме цей факт дає можливість трактувати вихідну задачу, як задачу, сформульовану на півосі.

У відповідності до (2.48) розв'язок рівняння (3.1) у вільному просторі ліворуч від діелектричної структури ($x \leq x_0$) можна записати у вигляді

$$E(x) = a_0(\omega) \exp(ix\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}) + b_0(\omega) \exp(-ix\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}), \quad (3.2)$$

де $a_0(\omega)$ та $b_0(\omega)$ - коефіцієнти, які визначають співвідношення між хвилями частоти ω , що розповсюджуються у протилежних напрямках. Їх відношення безпосередньо дорівнює коефіцієнту відбиття $\tilde{L}(\omega) := b_0(\omega)/a_0(\omega)$. Аналогічні до виразу (3.2) залежності між амплітудами хвиль, які розповсюджуються у протилежних напрямках, є справедливими для будь-якого шару. Так, у точці x_N напруженість поля є рівною $E(x_N) = a_N(\omega) \exp(i\omega x_N) + b_N(\omega) \exp(-i\omega x_N)$, де

товщини шарів $d_j = (x_j - x_{j-1})$ визначають час проходження хвилі

$$t_N = \sum_{j=0}^N d_j \sqrt{\varepsilon_j \varepsilon_0 \mu_0}.$$

Як показано в [7], співвідношення між $a_0(\omega)$ і $b_0(\omega)$ та $a_N(\omega)$ і $b_N(\omega)$ задає матриця коефіцієнтів у розв'язках Йоста

$$\begin{bmatrix} a_0(\omega) \\ b_0(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\omega) & B(-\omega) \\ B(\omega) & A(-\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_N(\omega) \\ b_N(\omega) \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

елементи якої є скінченними тригонометричними рядами

$$A(\omega) := \sum_{p=1}^M \alpha_p \exp(iv_p \omega); \quad (3.4)$$

$$B(\omega) := \exp(id_0 \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}) \sum_{p=1}^M \beta_p \exp(iv_p \omega). \quad (3.5)$$

Тут α_p , β_p та v_p є дійсними величинами, що залежать від параметрів середовища ε_j та d_j , причому $0 = v_0 < v_1 < \dots < v_M$ [7]. Число M визначається кількістю шарів у структурі та співвідношенням між їх параметрами; зокрема, для попарно неспівмірних оптичних товщин шарів $d_j \sqrt{\varepsilon_j}$ має місце рівність $M = 2^N$.

Елементи у рівності (3.3) залежать від діелектричної проникності шарів ε_j та товщини шарів d_j . Цю залежність у матричному вигляді описує вираз (2.50)

$$\begin{pmatrix} A(\omega) & B(-\omega) \\ B(\omega) & A(-\omega) \end{pmatrix} = \prod_{j=0}^N \frac{1}{2\rho_{j+1}} \begin{pmatrix} (\rho_{j+1} + \rho_j) & (\rho_{j+1} - \rho_j) e^{-i2\omega\tau_j} \\ (\rho_{j+1} - \rho_j) e^{i2\omega\tau_j} & (\rho_{j+1} + \rho_j) \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

де $\tau_j = \tau(x_j) = \sum_{n=0}^j d_n \sqrt{\varepsilon_n \varepsilon_0 \mu_0}$ - значення змінної τ на поверхнях розділу шарів.

У випадку, коли діелектрична шарувата структура розглядається без ідеально провідної підкладки, коефіцієнт відбиття можна встановити з (3.3) як відношення $L(\omega) = b_0(\omega)/a_0(\omega)|_{b_N(\omega)=0} = B(\omega)/A(\omega)$, припустивши, що з правої сторони від структури ($x \geq x_N$) відсутня падаюча хвиля, тобто $b_N(\omega) = 0$.

Розглядаючи пряму задачу розсіювання для діелектричної структури з металічною основою (рис. 3.1), з граничної умови $E(x_N) = 0$ на поверхні ідеального провідника можна встановити співвідношення коефіцієнтів розсіювання в точці x_N

як $a_N(\omega) = -b_N(\omega)\exp(-2i\omega t_N)$. Звідси слідує, що коефіцієнти розсіювання у точці реєстрації поля мають вигляд

$$\begin{bmatrix} a_0(\omega) \\ b_0(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_N(\omega)\exp(-2i\omega t_N)A(\omega) + b_N(\omega)B(-\omega) \\ -b_N(\omega)\exp(-2i\omega t_N)B(\omega) + b_N(\omega)A(-\omega) \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

а коефіцієнт відбиття $\tilde{L}(\omega)$ від усієї діелектричної структури з ідеально провідною підкладкою визначається як

$$\tilde{L}(\omega) = -\frac{\exp(i\omega t_N)A(-\omega) - \exp(-i\omega t_N)B(\omega)}{\exp(-i\omega t_N)A(\omega) - \exp(i\omega t_N)B(-\omega)}. \quad (3.8)$$

Якщо вираз (3.8) дає розв'язок прямої задачі розсіювання, то відповідна обернена задача полягає у визначенні параметрів ε_j та d_j діелектричної структури за заданою частотною залежністю коефіцієнта відбиття $\tilde{L}(\omega)$.

Запис коефіцієнта відбиття у вигляді виразу (3.8) є зручним для подальшого аналізу оберненої задачі розсіювання. Її можна трактувати як задачу Гільберта-Рімана [186, 246] та шукати розв'язок оберненої задачі через виділення з коефіцієнта відбиття $\tilde{L}(\omega)$ окремо коефіцієнтів $A(\omega)$ та $B(\omega)$.

3.1.1. Оцінювання електричної товщини діелектричної структури на екрані. Наступна теорема слугуватиме теоретичною базою для створення методу оцінювання часу t_N розповсюдження хвилі від джерела випромінювання до ідеально провідної підкладки у досліджуваній багат шаровій структурі.

Теорема 3.1. Коефіцієнт відбиття $\tilde{L}(\omega) = |\tilde{L}(\omega)|\exp(i\varphi(\omega)) = \exp(i\varphi(\omega))$ хвилі від шаруватої діелектричної структури на ідеально провідному плоскому екрані має фазову характеристику у вигляді

$$\varphi(\omega) = 2\omega t_N - 2\sum_{n=1}^{\infty} s_n \sin(\vartheta_n \omega) + \pi. \quad (3.9)$$

Доведення. Розглянемо функцію

$$F(\omega) := -\tilde{L}(\omega)\exp(-2i\omega t_N) = \frac{A(-\omega) - \exp(-2i\omega t_N)B(\omega)}{A(\omega) - \exp(2i\omega t_N)B(-\omega)}. \quad (3.10)$$

Як видно, вона обернена відношенню деякої функції $A(\omega) - \exp(2i\omega t_N) B(-\omega)$ до спряженої до неї. Для того, щоб окреслити розташування нулів функції (3.10), зауважимо, що має місце факторизація

$$A(\omega) - \exp(2i\omega t_N) B(-\omega) = A(\omega) \left(1 - \exp(2i\omega t_N) \frac{B(-\omega)}{A(\omega)} \right) = A(\omega) g(\omega). \quad (3.11)$$

Спектральні властивості самоспряжених операторів дозволяють стверджувати, що $A(\omega)$ не має нулів у верхній півплощині $\omega \in \mathbb{C}^+$ та на дійсній осі $\omega \in \mathbb{R}$ [2, 247]. Аналіз функції $g(\omega) = 1 - \exp(2i\omega t_N) B(-\omega)/A(\omega)$ проведемо, оцінюючи окремо поведінку її на дійсній осі $\omega \in \mathbb{R}$ та на безмежності у верхній комплексній півплощині $\omega \in \mathbb{C}^+$.

Функцію $g(\omega)$ можна виразити через коефіцієнт відбиття $L(\omega)$ для безвтратної структури

$$g(\omega) = 1 - \exp(2i\omega t_N) \frac{B(-\omega)}{A(-\omega)} \frac{A(-\omega)}{A(\omega)} = 1 - \exp(2i\omega t_N) L(-\omega) \exp(i\zeta(\omega)). \quad (3.12)$$

Як відомо, коефіцієнт відбиття для безвтратного шаруватого діелектрика завжди менший від одиниці $|L(\omega)| < 1$ на дійсній осі $\omega \in \mathbb{R}$, а функція $\zeta(\omega)$ є дійснозначною, тобто множники $\exp(i\zeta(\omega))$ та $\exp(2i\omega t_N)$ не перевищують одиниці за модулем. Звідси можна зробити висновок, що функція $g(\omega)$ на множині $\omega \in \mathbb{R}$ не перетворюється в нуль.

З другого боку, у верхній комплексній півплощині $\omega \in \mathbb{C}^+$ функція $g(\omega)$ має границю

$$\lim_{\text{Im } \omega \rightarrow +\infty} \left(1 - \exp(2i\omega t_N) \frac{B(-\omega)}{A(\omega)} \right) = 1, \quad (3.13)$$

оскільки множник $\exp(2i\omega t_N)$ зникає значно швидше, ніж функція $B(-\omega)$ зростає. Останнє випливає з нерівності $(\nu_M + \tau_0) < 2t_N$ для аргументів тригонометричних рядів (3.5).

При встановленні (3.13) використано також властивість, що функція $A(\omega)$ не перетворюється в нуль у верхній півплощині $\omega \in \mathbb{C}^+$, включаючи дійсну вісь $\omega \in \mathbb{R}$. Відповідно, функцію $1/A(\omega)$ можна розкласти в ряд, скориставшись формулою

$$\frac{1}{1-r(\omega)} = 1 + r(\omega) + r^2(\omega) + r^3(\omega) + \dots \quad (3.14)$$

Для ряду (3.14) виконується умова $|r(\omega)| < 1$, а функцію $A(\omega)$ можна виразити як $A(\omega) = C(1-r(\omega))$, де C - деяка стала. Звідси отримуємо, що шукана функція $1/A(\omega)$ є безмежним тригонометричним рядом

$$\frac{1}{A(\omega)} = \frac{1}{\alpha_1} + \sum_{n=1}^{\infty} q_n \exp(i\omega\eta_n), \quad (3.15)$$

в якому всі коефіцієнти в аргументах експонент є додатними: $\eta_n > 0$. Очевидно, що у верхній комплексній півплощині $\omega \in \mathbb{C}^+$ функція $1/A(\omega)$ прямує до константи $1/\alpha_1$ при $\text{Im}\omega \rightarrow +\infty$.

Для завершення доведення теореми треба встановити характер аргумента $\lambda(\omega)$ функції $A(\omega) - \exp(2i\omega t_N)B(-\omega) = |A(\omega) - \exp(2i\omega t_N)B(-\omega)| \exp(i\lambda(\omega))$. З виразів (3.4), (3.5) та (3.11) випливає, що така функція є аналітичною, а відсутність нулів у верхній півплощині вказує на можливість однозначного відновлення її фази за модулем $|A(\omega) - \exp(2i\omega t_N)B(-\omega)|$:

$$\lambda(\omega) = \frac{1}{\pi} \mathbf{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log |A(\omega') - \exp(2i\omega' t_N)B(-\omega')|}{\omega - \omega'} d\omega', \quad (3.16)$$

де $\mathbf{P} \int d\omega$ - головне значення інтеграла типу Коші [246].

Очевидно, що $|A(\omega) - \exp(2i\omega t_N)B(-\omega)|^2 = u_0 + \sum_{p=1}^P u_p \cos(\gamma_p \omega)$ є скінченним тригонометричним рядом, який не перетворюється в нуль на дійсній осі. Тому логарифм такої функції можна розкласти у ряд згідно з формулою

$$\log(1 + \tilde{r}(\omega)) = \tilde{r}(\omega) - \frac{\tilde{r}(\omega)^2}{2} + \frac{\tilde{r}(\omega)^3}{3} - \frac{\tilde{r}(\omega)^4}{4} + \dots \quad (3.17)$$

Отже, функція $\log\left(|A(\omega) - \exp(2i\omega t_N)B(-\omega)|^2\right) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(\vartheta_n \omega)$ є безмежним тригонометричним рядом з постійним коефіцієнтом c_0 .

Базуючись на властивостях головного значення інтеграла типу Коші (3.16), можна стверджувати, що аргумент функції $A(\omega) - \exp(2i\omega t_N)B(-\omega)$ матиме вигляд $\lambda(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \sin(\vartheta_n \omega)$, де $\vartheta_n > 0$. Звідси робимо висновок, що досліджувана функція $F(\omega)$, яка визначається відношенням $A(-\omega) - \exp(-2i\omega t_N)B(\omega)$ до $A(\omega) - \exp(2i\omega t_N)B(-\omega)$ у виразі (3.10), матиме фазу $\arg F(\omega) = -2\lambda(\omega) = -2\sum_{n=1}^{\infty} s_n \sin(\vartheta_n \omega)$.

З добутку $L(\omega) = -F(\omega)\exp(2i\omega t_N)$ випливає, що $\varphi(\omega) = 2\omega t_N - 2\sum_{n=1}^{\infty} s_n \sin(\vartheta_n \omega) + \pi$. Теорему доведено.

Зауваження. На основі теореми 3.1 можна побудувати конструктивний алгоритм знаходження оптичної товщини шаруватої структури $t_N/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ або часу проходження t_N хвилі крізь діелектрик, оцінивши параметр t_N за відомою функцією $\varphi(\omega)$.

З формули (3.9) випливає, що друга похідна функції $\varphi(\omega)$ є тригонометричним рядом з нульовим постійним коефіцієнтом $d^2\varphi(\omega)/d\omega^2 = 2\sum_{n=1}^{\infty} s_n \vartheta_n^2 \sin(\vartheta_n \omega)$. Параметри \hat{s}_n та $\hat{\vartheta}_n$ цього ряду можна оцінити методами спектрального аналізу з великою роздільною здатністю [241, 263]. Таким чином, задачу знаходження t_N приведено до стандартної задачі регресивного аналізу [263]. За відомою функцією $y(\omega) = \varphi(\omega) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \hat{s}_n \sin(\hat{\vartheta}_n \omega)$ знаходження оцінок \hat{t}_N для моделі у вигляді лінійної частотної залежності $2\omega t_N + \pi + \xi = y(\omega)$ не представляє труднощів. Тут введено припущення, що ξ є випадковою величиною з нульовим середнім, а функція $y(\omega)$ - заданою функцією, бо її отримано

перерахунком вихідних даних оберненої задачі розсіювання, а саме фази коефіцієнта відбиття $\tilde{L}(\omega)$.

3.1.2. Факторизація коефіцієнта відбиття та перша задача Гільберта-Рімана. Оскільки значення часу t_N , за який хвиля розповсюджується у шаруватій структурі, є відомим, то доцільним буде сформулювати задачу, яка б приводила визначений коефіцієнт відбиття для діелектричної структури з ідеально провідною основою до сумарного коефіцієнта відбиття для такої ж структури, але без провідної основи. Як виявилось, математичною основою для таких перетворень є задача Гільберта-Рімана [186, 246].

Формулу (3.8) можна розглядати як однорідну задачу Гільберта-Рімана, оскільки коефіцієнт відбиття є відношенням двох функцій з характерними аналітичними властивостями. Перепишемо функцію (3.8) у факторизованому вигляді

$$-\tilde{L}(\omega)\exp(-2i\omega t_N) = \frac{A(-\omega) - \exp(-2i\omega t_N)B(\omega)}{A(\omega) - \exp(2i\omega t_N)B(-\omega)}. \quad (3.18)$$

Згідно з твердженнями, доведеними у теоремі 3.1, чисельник (знаменник) правої частини виразу (3.18) є функцією, яка не має нулів у нижній (верхній) півплощині. Ця властивість свідчить про однозначність розв'язку задачі Гільберта-Рімана. Прологарифмувавши вираз (3.18), отримуємо

$$i\pi + \log(\tilde{L}(\omega)) - 2i\omega z = \log(\sigma(-\omega)) - \log(\sigma(\omega)), \quad (3.19)$$

де введено нову функцію

$$\sigma(\omega) := A(\omega) - \exp(2i\omega z)B(-\omega). \quad (3.20)$$

Логарифм такої функції позначено як

$$Z(\omega) := \log(\sigma(\omega)) = \operatorname{Re} Z(\omega) + i \operatorname{Im} Z(\omega). \quad (3.21)$$

Права частина виразу (3.19) є подвоєним значенням уявної частини функції $Z(\omega)$:

$$\begin{aligned} i\phi(\omega) &= \log(\sigma(-\omega)) - \log(\sigma(\omega)) = \\ &= \operatorname{Re} Z(\omega) - i \operatorname{Im} Z(\omega) - \operatorname{Re} Z(\omega) - i \operatorname{Im} Z(\omega) = -2i \operatorname{Im} Z(\omega). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Враховуючи, що коефіцієнт відбиття залежить тільки від фази $\tilde{L}(\omega) = \exp(-i\phi(\omega))$, можна записати, що ліва частина виразу (3.22) визначається лише фазовою характеристикою відбивання

$$\phi(\omega) = \pi - \varphi(\omega) - 2\omega t_N. \quad (3.23)$$

Це свідчить про те, що вихідні дані оберненої задачі дають можливість безпосередньо встановити уявну частину невідомої функції (3.21) згідно з формулою

$$\operatorname{Im} Z(\omega) = -(\pi - \varphi(\omega) - 2\omega t_N)/2. \quad (3.24)$$

Для аналітичних функцій, що не мають полюсів та зникають на півколі безмежного радіусу у верхній комплексній півплощині, справедлива тотожність, що задає співвідношення між дійсною та уявною частинами цих функцій

$$\operatorname{Re} f(a) = \frac{1}{\pi} \operatorname{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} f(z)}{z-a} dz \quad \text{та} \quad \operatorname{Im} f(a) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} f(z)}{z-a} dz. \quad (3.25) \quad \text{та} \quad (3.26)$$

Ці тотожності можна отримати з властивостей інтеграла Коші або формули Шварца [246].

Підставивши вираз (3.24) для уявної частини невідомої функції $Z(\omega)$ у формулу (3.25), отримуємо

$$\operatorname{Re} Z(\omega) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\omega') + 2\omega' t_N}{\omega' - \omega} d\omega'. \quad (3.27)$$

Відповідно, шукану функцію можна повністю встановити за відомою уявною частиною та знайденою дійсною:

$$Z(\omega) = \operatorname{Re} Z(\omega) + i \operatorname{Im} Z(\omega) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\omega') + 2\omega' t_N}{\omega' - \omega} d\omega' - i \frac{\pi - \varphi(\omega) - 2\omega t_N}{2}. \quad (3.28)$$

Отже, з виразу (3.21) визначено невідому функцію $\sigma(\omega)$ як розв'язок сформульованої задачі (3.28) Гільберта-Рімана:

$$\sigma(\omega) = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\omega') + 2\omega' t_N}{\omega' - \omega} d\omega' - i \frac{\pi - \varphi(\omega) - 2\omega t_N}{2}\right). \quad (3.29)$$

Насправді розв'язком цієї задачі Гільберта-Рімана може бути будь-яка функція, яку отримано множенням функції (3.29) на ненульовий дійсний коефіцієнт λ . Тому можна стверджувати, що знайдена функція в загальному випадку матиме вигляд

$$\sigma(\omega) = \lambda \exp\left(\frac{1}{2\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\omega') + 2\omega' t_N}{\omega' - \omega} d\omega' - i \frac{\pi - \varphi(\omega) - 2\omega t_N}{2}\right). \quad (3.30)$$

3.1.3. Друга задача Гільберта-Рімана відносно коефіцієнтів у розв'язках Йоста. Оскільки функцію $\sigma(\omega)$ знайдено з точністю до невідомого коефіцієнта, то наступним кроком у вирішенні оберненої задачі розсіювання є встановлення коефіцієнтів $A(\omega)$ та $B(\omega)$ у розв'язках Йоста за відомою $\sigma(\omega)$. В основу доведення покладено тотожність

$$A(\omega)A(-\omega) - B(\omega)B(-\omega) = k, \quad (3.31)$$

де k - постійна, яка визначається відношенням хвильового опору першого та останнього шару досліджуваного середовища.

З формул (3.20) та (3.30) виразимо один із невідомих коефіцієнтів

$$B(-\omega) = A(\omega) \exp(-2i\omega t_N) - \sigma(\omega) / \lambda \exp(-2i\omega z). \quad (3.32)$$

Підставивши цей вираз у тотожність (3.31), отримуємо рівняння

$$A(\omega)A(-\omega) - A(-\omega)A(\omega) + A(\omega) \frac{\sigma(-\omega)}{\lambda} + A(-\omega) \frac{\sigma(\omega)}{\lambda} - \frac{\sigma(-\omega)\sigma(\omega)}{\lambda^2} = k, \quad (3.33)$$

яке можна записати як неоднорідну задачу Гільберта-Рімана

$$\frac{A(\omega)}{\sigma(\omega)} + \frac{A(-\omega)}{\sigma(-\omega)} = \frac{k\lambda^2 + \sigma(-\omega)\sigma(\omega)}{\lambda\sigma(\omega)\sigma(-\omega)}. \quad (3.34)$$

Розв'язок такої задачі Гільберта-Рімана шукатимемо як невідому комплекснозначну функцію

$$Y(\omega) := \frac{A(\omega)}{\sigma(\omega)} = \text{Re}Y(\omega) + i \text{Im}Y(\omega). \quad (3.35)$$

Аналіз виразу (3.34) дозволяє зробити висновок, що значення заданої функції $\sigma(\omega)$ дозволяє безпосередньо встановити лише дійсну частину невідомої функції (3.35):

$$\operatorname{Re}Y(\omega) = \frac{k\lambda^2 + \sigma(-\omega)\sigma(\omega)}{2\lambda\sigma(\omega)\sigma(-\omega)}. \quad (3.36)$$

Аналітичні властивості такої функції дають можливість застосувати формулу Коші (3.26) для реконструкції уявної частини функції за її дійсною частиною. Знайдену в цей спосіб уявну частину подамо у вигляді

$$\operatorname{Im}Y(\omega) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{P} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{k\lambda}{2\sigma(\omega')\sigma(-\omega')} \right) \frac{1}{\omega' - \omega} d\omega'. \quad (3.37)$$

Звідси отримаємо комплексне значення всієї шуканої функції

$$\frac{A(\omega)}{\sigma(\omega)} = Y(\omega) = \frac{k\lambda}{2\sigma(\omega)\sigma(-\omega)} + \frac{1}{2\lambda} - i \frac{k\lambda}{2\pi} \operatorname{P} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sigma(\omega')\sigma(-\omega')} \right) \frac{d\omega'}{\omega' - \omega}. \quad (3.38)$$

Оскільки функція $\sigma(\omega)$ є відомою, то з виразів (3.38) та (3.32) можна знайти шукані коефіцієнти у розв'язках Йоста невідомої шаруватої діелектричної структури

$$A(\omega) = \left(\frac{k\lambda}{2\sigma(-\omega)} - i \frac{k\lambda\sigma(\omega)}{2\pi} \operatorname{P} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sigma(\omega')\sigma(-\omega')} \right) \frac{d\omega'}{\omega' - \omega} \right) + \frac{\sigma(\omega)}{2\lambda}; \quad (3.39)$$

$$B(-\omega) \exp(2i\omega t_N) = \left(\frac{k\lambda}{2\sigma(-\omega)} - i \frac{k\lambda\sigma(\omega)}{2\pi} \operatorname{P} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sigma(\omega')\sigma(-\omega')} \right) \frac{d\omega'}{\omega' - \omega} \right) - \frac{\sigma(\omega)}{2\lambda}. \quad (3.40)$$

Отже, другу задачу Гільберта-Рімана розв'язано у припущенні, що значення дійсних коефіцієнтів k та λ є відомими.

3.1.4. Усунення неоднозначності оцінки параметрів шарів плоскої структури. Як було відзначено, вихідними даними для сформульованої оберненої задачі є лише комплексне значення коефіцієнта відбиття $\tilde{L}(\omega)$, з якого вдається обчислити значення часу t_N проходження хвилі скрізь діелектричну частину структури. При цьому параметри k та λ , які дозволяють встановити точні коефіцієнти у розв'язках Йоста, є невідомими. Це свідчить, що знайдений розв'язок

задачі Гільберта-Рімана згідно з формулами (3.30), (3.39) та (3.40) для невідомих k та λ є неоднозначним. Для аналізу причин та усунення цієї неоднозначності сформулюємо задачу про знаходження функцій $A'(\omega)$ та $B'(\omega)$, де $\sigma(\omega) = \eta\sigma'(\omega)$; η - невідома дійсна постійна; $\sigma'(\omega) = A'(\omega) - \exp(2i\omega t_N)B'(-\omega)$, за обчисленими значеннями коефіцієнтів $A_s(\omega)$ та $B_s(\omega)$ згідно з формулами (3.39) та (3.40) при умові, що $k=1$ та $\lambda=1$.

Виразимо коефіцієнти $A_s(\omega)$ та $B_s(\omega)$ формулами

$$A_s(\omega) = \left(\frac{1}{\sigma(\omega)\sigma(-\omega)} - i \frac{1}{\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sigma(\omega')\sigma(-\omega')} \right) \frac{d\omega'}{\omega' - \omega} + 1 \right) \frac{\sigma(\omega)}{2}; \quad (3.41)$$

$$B_s(-\omega)\exp(2i\omega t_N) = \left(\frac{1}{\sigma(\omega)\sigma(-\omega)} - i \frac{1}{\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sigma(\omega')\sigma(-\omega')} \right) \frac{d\omega'}{\omega' - \omega} - 1 \right) \frac{\sigma(\omega)}{2}. \quad (3.42)$$

Для повного розв'язку оберненої задачі необхідно знайти

$$A'(\omega) = \left(\frac{k}{\sigma'(\omega)\sigma'(-\omega)} - i \frac{k}{\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sigma'(\omega')\sigma'(-\omega')} \right) \frac{d\omega'}{\omega' - \omega} + 1 \right) \frac{\sigma'(\omega)}{2}; \quad (3.43)$$

$$B'(-\omega)\exp(2i\omega t_N) = \left(\frac{k}{\sigma'(\omega)\sigma'(-\omega)} - i \frac{k}{\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sigma'(\omega')\sigma'(-\omega')} \right) \frac{d\omega'}{\omega' - \omega} - 1 \right) \frac{\sigma'(\omega)}{2}. \quad (3.44)$$

Виділенням інтеграла у виразах (3.41) та (3.44) вдається отримати тотожності, які взаємно пов'язують два розв'язки оберненої задачі через невідомі коефіцієнти k та η . Така система тотожностей має вигляд

$$A'(\omega) = A_s(\omega) \frac{1 + \eta^2 k}{2\eta} - B_s(-\omega)\exp(2i\omega t_N) \frac{1 - \eta^2 k}{2\eta}; \quad (3.45)$$

$$B'(-\omega)\exp(2i\omega t_N) = B_s(-\omega)\exp(2i\omega t_N) \frac{1 + \eta k^2}{2\eta} - A_s(\omega) \frac{1 - \eta k^2}{2\eta}. \quad (3.46)$$

Варто звернути увагу, що на підставі виразів (3.4) та (3.5) функцію $\sigma(\omega)$ також можна подати скінченим тригонометричним рядом

$$\sigma(\omega) = \sum_{j=0}^N \psi_j \exp(i\omega \zeta_j). \quad (3.47)$$

При цьому вважаємо, що має місце упорядкованість $0 < \zeta_0 < \dots < \zeta_{N-1} < \zeta_N$. Коефіцієнт ψ_0 при першому доданку цього ряду визначатиметься лише функцією $A(\omega)$, а останній ψ_N – функцією $B(\omega)$, оскільки $(\nu_M + \tau_0) < 2t_N$. Очевидно, що відношення коефіцієнтів при експонентах у цих доданках ряду (3.47) не буде залежати від невідомого коефіцієнта η . Позначимо це відношення через

$$r_0 = \frac{\psi_N}{\psi_0}. \quad (3.48)$$

Аналізуючи формулу $\sigma'(\omega) = A'(\omega) - \exp(2i\omega t_N) B'(-\omega)$, можна показати, що коефіцієнт r_0 безпосередньо задає співвідношення між першими коефіцієнтами рядів (3.4) та (3.5):

$$\beta_0 = r_0 \alpha_0. \quad (3.49)$$

Значення самих коефіцієнтів можна подати виразами

$$\alpha_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} A'(\omega') \exp(-i\omega'0) d\omega'; \quad (3.50)$$

$$\beta_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} B'(\omega') \exp(-i\omega'\tau_0) d\omega'. \quad (3.51)$$

Отже, для того щоб, усунути неоднозначність розв'язку задачі Гільберта-Рімана дослідимо відношення

$$r_0 = \frac{\beta_0}{\alpha_0} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \left(B_s(\omega')(1 + \eta^2 k) - A_s(-\omega') \exp(2i\omega' t_N) (1 - \eta^2 k) \right) \exp(-i\omega' \tau_0) d\omega'}{\int_{-\infty}^{+\infty} \left(A_s(\omega')(1 + \eta^2 k) - B_s(-\omega') \exp(2i\omega' t_N) (1 - \eta^2 k) \right) \exp(-i\omega' 0) d\omega'}. \quad (3.52)$$

Вважаючи, що r_0 є однозначно відомим із розв'язку (3.47) першої задачі Гільберта-Рімана, який обчислено за формулою (3.29), виразимо з (3.52) невідомі значення коефіцієнтів

$$c := \frac{1 + \eta^2 k}{1 - \eta^2 k} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} A_s(-\omega') \exp(2i\omega' t_N) \exp(-i\omega' \tau_0) d\omega' - r_0 \int_{-\infty}^{+\infty} B_s(-\omega') \exp(2i\omega' t_N) d\omega'}{\int_{-\infty}^{+\infty} B_s(\omega') \exp(-i\omega' \tau_0) d\omega' - r_0 \int_{-\infty}^{+\infty} A_s(\omega') d\omega'} \quad (3.53)$$

Звідси випливає, що кожне із значень невідомих коефіцієнтів не можна визначити окремо, але можна знайти їх комбінацію у вигляді

$$\eta^2 k = \frac{c - 1}{c + 1}. \quad (3.54)$$

Підставляючи ліву частину формули (3.54) у вирази (3.45) та (3.46), можна переконатися, що обчислені спектральні коефіцієнти $A'(\omega)$ та $B'(\omega)$ будуть визначатись лише з точністю до невідомого дійсного постійного коефіцієнта $1/\eta$. Як показано в [7], розв'язок оберненої задачі для шаруватої структури за відомими коефіцієнтами $A'(\omega)$ та $B'(\omega)$ у розв'язках Йоста не залежить від постійного коефіцієнта при них, оскільки шукані значення діелектричної проникності визначаються лише відношенням функцій $A'(\omega)$ і $B'(\omega)$, або відношенням їх лінійних комбінацій. В першому розділі встановлено процедуру розв'язання оберненої задачі, коли вихідними даними є коефіцієнти $A'(\omega)$ та $B'(\omega)$.

Розв'язок оберненої задачі можна також шукати, привівши заданий коефіцієнт відбиття $\tilde{L}(\omega)$ до коефіцієнта відбиття $L(\omega)$, для якого процедура розв'язку оберненої задачі є відомою. Вважаючи, що коефіцієнт відбиття для чисто діелектричної структури обчислюється як відношення $L(\omega) = B'(\omega)/A'(\omega)$, з виразів (3.45) та (3.46) знаходимо

$$L(\omega) = \frac{\frac{1}{\sigma(\omega)\sigma(-\omega)} + \frac{1}{\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sigma(\omega')\sigma(-\omega')} \right) \frac{d\omega'}{\omega' - \omega} - \frac{1}{\eta^2 k}}{\frac{1}{\sigma(\omega)\sigma(-\omega)} - i \frac{1}{\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sigma(\omega')\sigma(-\omega')} \right) \frac{d\omega'}{\omega' - \omega} + \frac{1}{\eta^2 k}} \tilde{L}(\omega) \exp(2i\omega t_N). \quad (3.55)$$

Варто зазначити, що для обчислення цього виразу необхідно попередньо знайти функцію $\sigma(\omega)\sigma(-\omega)$ з рівняння (3.29), а саме

$$\sigma(\omega)\sigma(-\omega) = \exp\left(\frac{1}{\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\omega') + 2\omega't_N}{\omega' - \omega} d\omega'\right). \quad (3.56)$$

Оскільки коефіцієнти $A'(\omega), B'(\omega)$ та функція $\sigma(\omega)$ є скінченими тригонометричними сумами, то обчислення за формулами (3.56) та (3.55) можна реалізувати, оперуючи лише коефіцієнтами та аргументами тригонометричних функцій. При обчисленні таким способом зникає необхідність інтегрування у виразах (3.55) та (3.56), оскільки Фур'є перетворення інтеграла типу Коші можна визначити лише множення на сталу $\pm i$ відповідних коефіцієнтів ряду. Точність обчислення таким методом буде визначатися кількістю значущих коефіцієнтів у розкладі функції $1/\sigma(\omega)\sigma(-\omega)$ у тригонометричний ряд.

3.2. Наближений розв'язок оберненої задачі розсіювання для шаруватої структури на плоскому екрані

Для розв'язання оберненої задачі розсіювання та доведення єдиності отриманого розв'язку оберемо іншу стратегію: зведемо обернену задачу до аналогічної задачі без екрану, розглядаючи вихідні дані у вигляді імпульсної характеристики. Для цього покажемо, що на інтервалі часу $[0, 2t_N)$ перетворення Фур'є від коефіцієнта відбиття $\tilde{L}(\omega)$ співпадає з перетворенням Фур'є від коефіцієнта відбиття $L(\omega)$ для безвтратної задачі. Результат такого перетворення – визначена на інтервалі $[0, 2t_N)$ імпульсна характеристика – містить достатні вихідні дані для розв'язання оберненої задачі відносно функції $\tilde{\varepsilon}(\tau) := \varepsilon(x)$ з інтервалу $\tau \in [0, t_N)$, де $\tau(x) = \int_0^x \sqrt{\varepsilon(x')\varepsilon_0\mu_0} dx'$ [3].

Як видно з формул (3.55) та (3.56), знаходження коефіцієнта відбиття $L(\omega)$ вимагає складних обчислень. Тому шукатимемо наближений розв'язок оберненої задачі розсіювання.

Відмінність між системами координат, в яких задають вихідні дані та шукають розв'язок оберненої задачі, вказує на те, що при розв'язанні оберненої задачі неминучим є перехід до спільної системи координат. У теорії одновимірних задач [93, 103], де коефіцієнт відбиття задають частотною залежністю (або залежністю від енергії у теорії потенціального розсіювання [97, 55]), для встановлення імпульсної характеристики використовують перетворення Фур'є. Ця імпульсна характеристика, як і параметри середовища, в якому відбувається розсіювання, є функцією часу запізнення хвилі вздовж шляху розповсюдження.

Теорема 3.2. Імпульсна характеристика діелектричної структури за умови повного відбиття у правому півпросторі від ідеально провідної підкладки співпадає на інтервалі $[0, 2t_N)$ з імпульсною характеристикою такої ж діелектричної структури у вільному просторі $\tilde{h}(t) = h(t)$, $t \in [0, 2t_N)$.

Доведення. Твердження про ідентичність імпульсних характеристик на початковому інтервалі передбачає, що для будь-якого значення часу $t \in (-\infty, +\infty)$ справедлива рівність

$$\tilde{h}(t) = h(t) - \delta(t - 2t_N) * k(t), \quad (3.57)$$

де $*$ - оператор згортки; $\delta(t)$ - дельта-функція Дірака; $k(t)$ – деяка дійснозначна функція, для якої $k(t) = 0$ при $t \leq 0$.

Подальше доведення спрямовано на підтвердження тотожності, яка є перетворенням Фур'є від виразу (3.57), а саме

$$\tilde{L}(\omega) = L(\omega) - \exp(2i\omega t_N) K(\omega), \quad (3.58)$$

де $K(\omega) := \mathcal{F}(k(t))(\omega)$ – пряме перетворення Фур'є від функції $k(t)$. Саму ж функцію $K(\omega)$ можна записати нескінченим тригонометричним рядом

$$K(\omega) = \kappa_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n \exp(i\gamma_n \omega), \text{ в якому } \gamma_n > 0, \text{ а } \kappa_n - \text{дійсні коефіцієнти.}$$

Позначивши коефіцієнт відбиття від шаруватого діелектрика у вільному просторі як $L(\omega) = B(\omega)/A(\omega)$, перепишемо формулу (3.57) для коефіцієнта відбиття $\tilde{L}(\omega)$ від структури на ідеально провідній основі у вигляді

$$\tilde{L}(\omega) = L(\omega) - \exp(2i\omega t_N) \frac{1}{A(\omega)(A(\omega) - \exp(2i\omega t_N)B(-\omega))}. \quad (3.59)$$

Залишається довести, що встановлену у виразі (3.59) функцію $K(\omega)$:

$$K(\omega) = \frac{1}{A(\omega)(A(\omega) - \exp(2i\omega t_N)B(-\omega))}. \quad (3.60)$$

можна розкласти, як припущено вище, у безмежний тригонометричний ряд із додатніми коефіцієнтами $\gamma_n > 0$ в аргументах комплексних експонент. Для цього використаємо властивість відсутності нулів на дійсній осі у двох функцій $A(\omega)$ та $A(\omega) - \exp(2i\omega t_N)B(-\omega)$, що складають знаменник виразу (3.60). Аналогічно до функції $1/A(\omega)$, функцію $1/(A(\omega) - \exp(2i\omega t_N)B(-\omega))$ також можна розкласти у безмежний тригонометричний ряд згідно з формулою (3.17). Про додатність всіх аргументів у комплексних експонентах цих рядів можна судити з того, що $A(\omega)$ та $A(\omega) - \exp(2i\omega t_N)B(-\omega)$ є скінченими тригонометричними поліномами, в яких всі комплексні експоненти мають додатні коефіцієнти в аргументах, і перемноження таких поліномів не змінює зазначеної властивості.

Крім того, можна показати, що імпульсна характеристика має властивість $\tilde{h}(t) = 0$ при $t < 0$, оскільки $h(t) = 0$, що безпосередньо видно з властивостей добутку спектрального коефіцієнта $B(\omega)$, записаного у вигляді ряду (3.5), та функції $1/A(\omega)$, яку подано виразом (3.15). Теорему доведено.

Друга теорема пояснює фізичний ефект розсіювання плоскої хвилі у шаруватому діелектрику на інтервалі часу $[0, 2t_N)$; для більших значень часу розсіяне поле міститиме складові як від розсіювання хвилі на поверхнях розділу шарів діелектрика, так і від взаємодії хвилі з ідеально провідною поверхнею основи.

В теорії прийнято розділяти дискретне [62, 66] та неперервне [106, 108] формулювання одновимірних задач розсіювання електромагнітних хвиль залежно від характеру діелектричної проникності, яку необхідно знайти за частотною функцією коефіцієнта відбиття. Наприклад, підхід Гільберта-Рімана покладено в основу знаходження неперервних функцій, як розв'язку оберненої потенціальної задачі [125, 187]. Цей підхід показав свою ефективність при пошуку наближених розв'язків задачі для розривної діелектричної проникності в електродинамічному формулюванні [5]. Дискретний варіант задачі Захарова-Шабата [146] та метод пошарового зрізання [62, 143] працюють за умови, якщо розриви шуканої кусково-постійної функції діелектричної проникності розташовані у вузлах деякої регулярної сітки. Наближений розв'язок неперервної задачі також можна отримати методами, що базуються на дискретній моделі.

Спільним для вказаних вище неперервного та дискретного підходів є те, що реконструкцію діелектричної проникності на інтервалі $[0, t_N)$ можна здійснити, знаючи імпульсну характеристику на інтервалі $[0, 2t_N)$. Така властивість дає можливість застосувати отримані у попередніх теоремах результати для створення методу визначення кусково-постійної функції діелектричної проникності на ідеально провідній основі.

Оскільки значення коефіцієнта відбиття $\tilde{L}(\omega)$, як вихідні дані задачі розсіювання, задано в обмеженому діапазоні частот $\omega \in [\Omega_{\min}, \Omega_{\max}]$, то його імпульсну характеристику можна знайти лише наближено. Розглянемо окремо два випадки, застосувавши неперервний та дискретний підходи до знаходження наближеного розв'язку оберненої задачі.

У першому випадку за вихідними даними в обмеженому діапазоні частот знайдемо наближення імпульсної характеристики в класі неперервних функцій

$$\tilde{h}_{cont}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_{\min}}^{\Omega_{\max}} \tilde{L}(\omega) \exp(i\omega\tau) d\omega, \text{ для } \tau \in [0, 2t_N). \quad (3.61)$$

Взаємозв'язок між рівняннями Гельмгольца (3.1) та системою Дірака дозволяє застосувати розв'язок однієї оберненої задачі до іншої при однакових спектральних

даних, якими в електродинамічному випадку є коефіцієнт відбиття $\tilde{L}(\omega)$. Для системи Захарова-Шабата обернена задача розсіювання зводиться до розв'язання інтегральних рівнянь

$$\begin{cases} Z_2(v, w) = \int_{-w}^v \tilde{h}_{cont}(w+t') Z_1(v, t') dt', \\ Z_1(v, w) = \tilde{h}_{cont}(w+t') + \int_{-w}^v \tilde{h}_{cont}(w+t') Z_2(v, t') dt'. \end{cases} \quad (3.62)$$

Потенціал $Q(v) = -2Z_1(v, v)$ системи Дірака, знайдений з розв'язку системи (3.62), дозволяє безпосередньо визначити шукану функцію діелектричної проникності

$$\hat{\varepsilon}(\tau) = \exp\left(-4 \int_{-\infty}^{\tau} Q(v) dv\right), \text{ для } \tau \in [0, t_N). \quad (3.63)$$

Розв'язок оберненої задачі у дискретному випадку базується на тому, що імпульсна характеристика шаруватої діелектричної структури є безмежною сумою дельта-функцій

$$\tilde{h}_{disc}(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \delta(\tau - \tau_n), \quad (3.64)$$

де c_n - коефіцієнти деякого збіжного ряду.

Використовуючи методи спектрального аналізу [241, 263], коефіцієнти c_n та τ_n ряду (3.64) можна оцінити за відомою в обмеженому частотному діапазоні функцією коефіцієнта відбиття $\tilde{L}(\omega)$. Оскільки кількість членів ряду (3.64) є безмежною, то розв'язок такої задачі можна знайти лише наближено.

З іншого боку, розв'язок дискретної оберненої задачі, як еквівалента неперервної оберненої задачі Дірака, встановлено для випадку, коли всі значення τ_n належать деякій регулярній сітці [66]. Введення незначних поправок з метою приведення значень τ_n до вузлів регулярної сітки ($c_n \neq 0$, $|\tau_n - \Delta n| < e$, де e - задана похибка; Δ - крок сітки) вказує на наближений характер отриманого таким підходом розв'язку. Як показано в роботі [42], приведення до регулярної сітки з коректно вибраним кроком Δ не вносить суттєвих похибок у розв'язок. Це дає можливість застосовувати метод пошарового зрізання до розв'язання оберненої

задачі для чисто діелектричної шаруватої структури з довільними параметрами шарів.

У дискретному випадку аналогія між системою Дірака та рівнянням Гельмгольца також має місце. Нехай імпульсна характеристика визначена лише в точках, які відповідають вузлам регулярної сітки з кроком Δ . Відповідно система рівнянь (3.62) у даному випадку набуває скінченновимірної форми

$$\begin{cases} z_{l,m}^2 = \sum_{n=1}^l c_n z_{m+n,l-n}^1, \\ z_{l,m}^1 = c_l + \sum_{n=1}^l c_n z_{m+n,l-n}^2, \end{cases} \quad (3.65)$$

де l та $m \in \mathbb{Z}$ є цілими числами; $z_{l,m}^1$ та $z_{l,m}^2$ - елементами скінченновимірних матриць.

Особливістю такого підходу та важливою його відмінністю від класичного методу дискретизації інтегральних рівнянь при переході від (3.62) до (3.65) є залежність між шуканим дискретним потенціалом системи Дірака та кусково-постійною діелектричною проникністю. В роботі [149] встановлено, що значення діелектричної проникності в околі розривів у вузлах регулярної сітки можна визначити з розв'язку системи (3.65) за допомогою формули

$$\varepsilon(t_j + 0) = \varepsilon(t_j - 0) \left(\frac{1 + z_{2j,0}^1}{1 - z_{2j,0}^1} \right)^2. \quad (3.66)$$

Як видно, такий розв'язок не впливає безпосередньо з тотожності (3.63).

Описані неперервний та дискретний підходи до наближеного визначення діелектричної проникності за імпульсною характеристикою реалізовано числово. Для порівняння з точним розв'язком результати реконструкції подано на рис. 3.2. На рис. 3.2.б зображено розв'язок, отриманий з використанням неперервного підходу (3.62) та (3.63). При цьому вихідні дані - коефіцієнт відбиття $\tilde{L}(\omega)$ - задано у діапазоні ω від 0 до $2\pi \cdot 6 \cdot 10^{10}$ рад/с для дискретних значень, взятих з кроком $2\pi \cdot 1 \cdot 10^7$ рад/с. На відміну від неперервного підходу, дискретний випадок дозволяє знаходити розв'язок без низькочастотної складової коефіцієнта відбиття, що є більш прийнятним з точки зору практичного застосування. Так, на рис. 3.2.в подано

розв'язок дискретної оберненої задачі (3.65) для вихідних даних, заданих дискретно в діапазоні частот ω від $2\pi \cdot 2 \cdot 10^{10}$ до $2\pi \cdot 6 \cdot 10^{10}$ рад/с з кроком $5\pi \cdot 10^7$ рад/с.

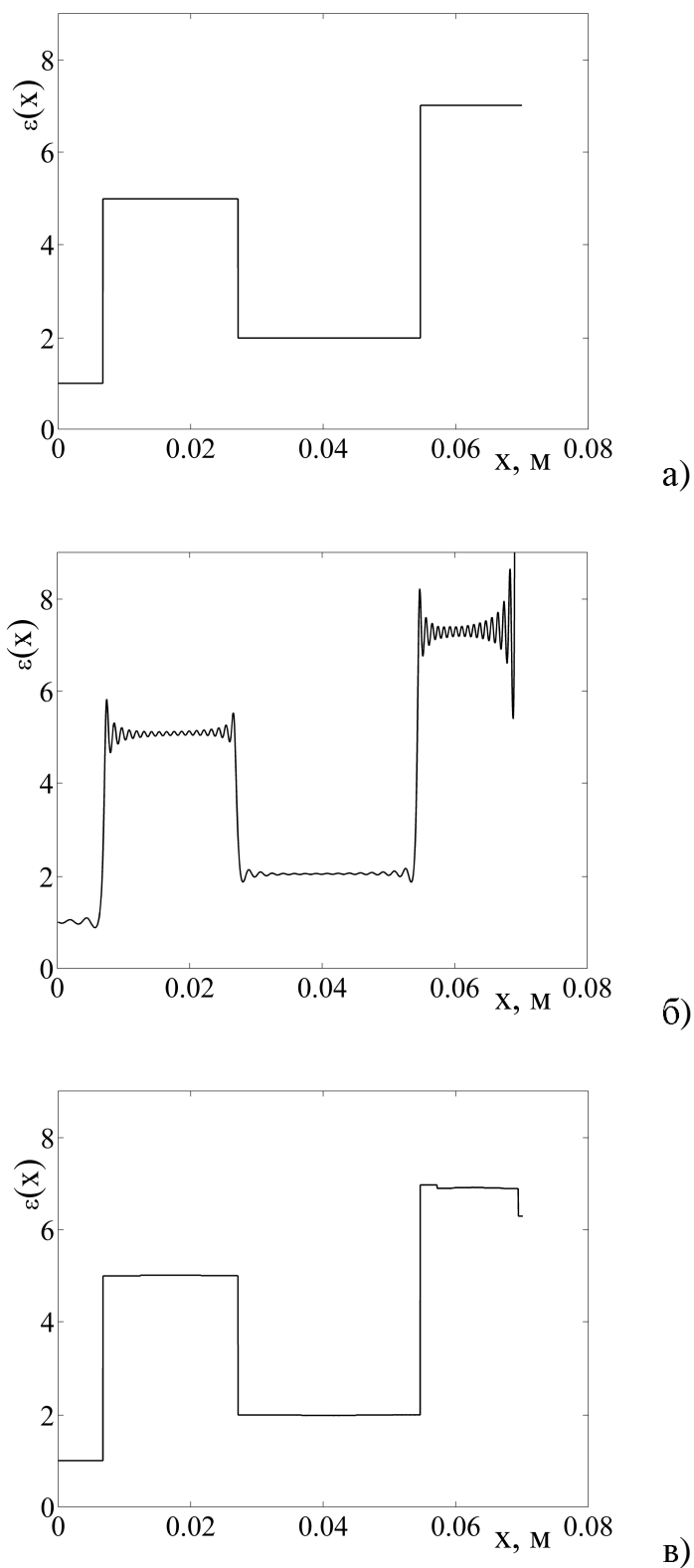


Рис. 3.2. Оригінал функції діелектричної проникності – а); розв'язок оберненої задачі методом інтегральних рівнянь – б) і дискретним варіантом цього методу – в)

3.3. Розв'язок оберненої спектральної задачі для сферично-шаруватої проникної структури за відомими трансмісійними власними значеннями

Останні роки в теорії розсіювання акустичних, електромагнітних та пружних хвиль виокремився окремий напрям, який стосується спектральних властивостей розсіювальних об'єктів та встановлення частот, для яких об'єкти не змінюють структуру падаючої хвилі, а точніше не розсіюють хвилі. Для проникних тіл такі частоти асоціюють із трансмісійними власними значеннями. Ці частоти можна визначити за структурою розсіяного поля, застосовуючи метод лінійного саплінгу [210]. Важливим є те, що трансмісійні власні значення визначаються лише неоднорідністю матеріалу об'єкта і не залежать від умов реєстрації, як це спостерігається при дослідженні розсіяного поля. Цьому питанню присвячено тематичний випуск журналу *Inverse problems* у 2013 році [217]. Показано також, що теорія трансмісійних власних значень може стати підґрунтям для вирішення прикладних проблем неруйнівного контролю.

В цьому параграфі розв'язано обернену спектральну задачу реконструкції профілю проникного сферичного радіально-симетричного об'єкта (рис. 3.3) за відомим набором трансмісійних власних значень.

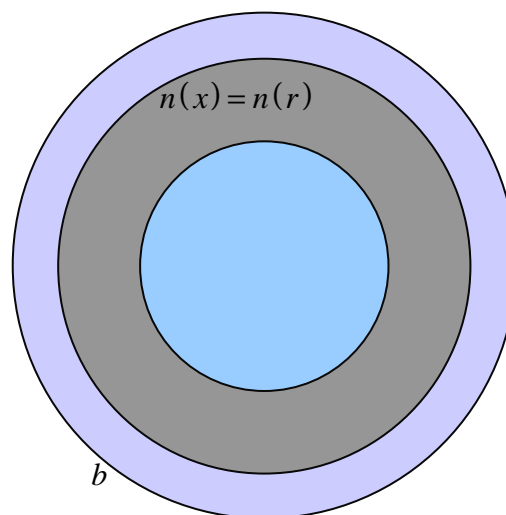


Рис. 3.3. Сферична радіально-симетрична структура, трансмісійні власні значення якої досліджуються

3.3.1. Формулювання оберненої спектральної задачі. Визначення

трансмісійних власних значень довільного проникного тіла Ω в $x \in \mathbb{R}^3$ пов'язують із розв'язками системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \Delta\Psi + \lambda^2\varepsilon(x)\Psi = 0, & x \in \Omega, \\ \Delta\Psi_0 + \lambda^2\Psi_0 = 0, & x \in \Omega, \end{cases} \quad (3.67)$$

що задовольняють граничним умовам

$$\Psi = \Psi_0, \quad \frac{\partial\Psi}{\partial n} = \frac{\partial\Psi_0}{\partial n}, \quad x \in \partial\Omega. \quad (3.68)$$

Нетривіальні розв'язки системи рівнянь (3.67), які задовольняють граничним умовам (3.68), можуть існувати лише для дискретної множини значень параметра $\lambda = \lambda_m$, які називаються трансмісійними власними значеннями. Розглянемо модельну скалярну акустичну задачу для сферично радіально-симетричної шаруватої структури, де швидкість розповсюдження хвилі $c(x) = c_0 / \sqrt{\mu\varepsilon(x)}$ є дійсною і кусково-постійною $c(x) = c(r)$. Цю функцію можна виразити через параметри середовища. В електродинамічному формулюванні ці параметри мають зміст діелектричної ε та магнітної $\mu = 1$ проникності, а константа c_0 є швидкістю розповсюдження хвилі у вільному просторі.

Визначення трансмісійних власних значень можна подати у простішій формі за рахунок лише радіальної залежності швидкості розповсюдження хвиль $c(x) = c(r)$. У радіально-симетричному шаруватому середовищі функція $c(r)$ матиме стрибки в N точках для радіусів $r := 0 < r_1 < \dots < r_N = b$ і набуватиме постійних значень c_j на інтервалах (r_{j-1}, r_j) . Тоді систему рівнянь (3.67) можна звести до системи звичайних диференціальних рівнянь, використовуючи метод розділення змінних: $\Psi = f(r)g(\varphi)y(\theta)$. Ввівши нову змінну $rf(r) = \Phi(r)$ для сферичних радіально-симетричних розв'язків, що відповідають сферичним функціям нульового порядку $n = 0$, рівняння (3.67) та граничні умови (3.68) можна привести до вигляду

$$\begin{cases} \Phi''(r) + \lambda^2 \varepsilon(r) \Phi(r) = 0, & 0 < r < b, \\ \Phi_0''(r) + \lambda^2 \Phi_0(r) = 0, & 0 < r < b, \end{cases} \quad (3.69)$$

$$\Phi = \Phi_0, \Phi' = \Phi_0', \quad r = b; \quad (3.70)$$

$$\Phi = \Phi_0 = 0, \quad r = 0. \quad (3.71)$$

Знаходження трансмісійних власних значень для заданої структури є прямою задачею. Для радіального розсіювача в \mathbb{R}^2 (рис. 3.4.а) такі трансмісійні власні значення можна обчислити, знаходячи нулі детермінанта [185]

$$\det \begin{pmatrix} J_n(k_0 R) & -J_n(k_1 R) \\ (J_{n-1}(k_0 R) - J_{n+1}(k_0 R))/2 & -\sqrt{\varepsilon_1} (J_{n-1}(k_1 R) - J_{n+1}(k_1 R))/2 \end{pmatrix}, \quad (3.72)$$

де $k_1 = k_0 \sqrt{\varepsilon_1}$ - хвильовий коефіцієнт матеріалу розсіювача.

Приклад «спектру» трансмісійних власних значень, який обчислено як обернену величину до виразу (3.72), подано на рис. 3.4.в. Для цього ж розсіювача (рис. 3.4.а) трансмісійні власні значення знайдено методом лінійного саплінгу за діаграмою розсіювання, а результат зображено індикаторною функцією на рис. 3.4.б. Як видно з рис. 3.4.б та рис. 3.4.в, числові результати підтверджують можливість знаходження дійсних трансмісійних власних значень за розсіяним полем.

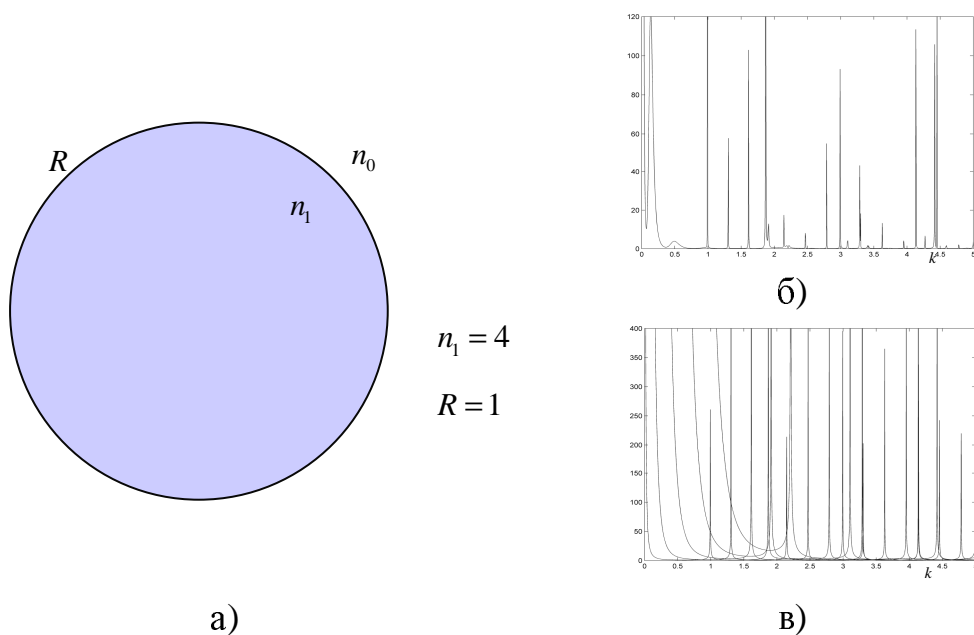


Рис. 3.4. Радіально-симетричний проникний однорідний розсіювач – а) та спектри трансмісійних власних значень – б) та – в)

невідомої швидкості розповсюдження хвиль $c(r)$, що у даному випадку еквівалентно визначенню всіх параметрів r_j та c_j , виходячи з заданого набору трансмісійних власних значень. Питання єдиності розв'язку такої задачі висвітлено в роботі [261] для випадку неперервної функції швидкості розповсюдження, яка є до того ж визначеною на компактi. Отримані в [261] результати показують, що обернену спектральну задачу можна розв'язати єдиним чином, якщо параметри b та $a = \int_0^b \sqrt{\varepsilon(r)} dr$ задовольняють умові $a < b$. Подібний результат отримано у статті [262], де на основі конструктивної процедури розв'язку оберненої спектральної задачі доведено умову єдиності розв'язку при $a < b$.

Умову єдності розв'язку встановлено незалежно для сферично-радіальної структури з кусково-постійною швидкістю розповсюдження хвилі у середовищі [28]. Як показано в [28], єдиний розв'язок оберненої спектральної задачі можна знайти для ширшого класу кусково-постійних швидкостей розповсюдження хвиль, ніж це визначено співвідношенням параметрів a та b , яке є ключовою умовою єдиності розв'язку при формулюванні оберненої спектральної задачі у неперервному випадку.

Обернена спектральна задача для трансмісійних власних значень безпосередньо пов'язана з одновимірною оберненою задачею розсіювання для плоского шаруватого середовища на ідеально провідному екрані. Розв'язок останньої для нормально падаючих плоских хвиль запропоновано в роботі [32]. Приведення оберненої задачі розсіювання до двох задач Гільберта-Рімана дозволяє однозначно реконструювати параметри шаруватого середовища за коефіцієнтом відбиття чисто діелектричної структури, який отримано перерахунком із коефіцієнта відбиття від ідентичної діелектричної структури з провідним екраном. Подібну ідею використано для доведення єдності досліджуваної оберненої спектральної задачі, яку за допомогою задачі Гільберта-Рімана можна привести до оберненої задачі розсіювання еквівалентної плоскошаруватої структури. Єдиність розв'язку оберненої спектральної задачі визначено з умови, для якої вихідні спектральні дані можна трансформувати у характеристики розсіювання хвиль плоскою структурою,

що є достатніми даними для однозначного відновлення функції $c(r)$ шляхом розв'язку відповідної оберненої одновимірної задачі розсіювання [7].

3.3.2. Приведення оберненої спектральної задачі до задачі Гільберта-Рімана. В одновимірному випадку розглянемо розв'язок рівняння Гельмгольца, яке отримано з рівняння (3.69) підстановкою $\lambda = \omega/c_0$. На кожному інтервалі (r_{j-1}, r_j) розв'язки цього рівняння можна записати у формі

$$E_n(s) = a_n(\omega) \exp(i\omega s) + b_n(\omega) \exp(-i\omega s), \quad (3.74)$$

де $s = c_0^{-1} \int_0^b \sqrt{\varepsilon(r)} dr$ є новою змінною, яка визначає час розповсюдження хвилі у середовищі. Співвідношення коефіцієнтів, які визначають розв'язок (3.74) в точках $r = 0$ та $r = b$ можна встановити через граничні умови на всіх поверхнях розділу між шарами структури. Так, співвідношення для розв'язків рівняння Гельмгольца у середовищах справа та зліва, що оточують структуру, можна зобразити матричною тотожністю

$$\begin{bmatrix} a_0(\omega) \\ b_0(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0(\omega) & B_0(-\omega) \\ B_0(\omega) & A_0(-\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_N(\omega) \\ b_N(\omega) \end{bmatrix}, \quad (3.75)$$

де $A_0(\omega) = \alpha_0 + \sum_k \alpha_k \prod_j \exp(i2\omega d_j)$ та $B_0(\omega) = \beta_0 + \sum_k \beta_k \prod_j \exp(i2\omega d_j)$ є скінченні суми комплексних експоненційних функцій. Як показано в [7], коефіцієнти α_k та β_k є дійсними числами і $d_j = \sqrt{\varepsilon_j} (r_j - r_{j-1})/c_0$ - час проходження хвилі через шар з індексом j .

Варто зауважити, що розв'язок оберненої задачі розсіювання для шаруватого середовища та оберненої спектральної задачі для сферичного радіально-шаруватого тіла зводиться до визначення коефіцієнтів цих сум. Тоді простим рекурентним способом можна встановити всі параметри шарів r_j та c_j . Очевидно, що основною проблемою при розв'язанні оберненої задачі розсіювання є встановлення коефіцієнтів $A_0(\omega)$ та $B_0(\omega)$ з вихідних даних. В оберненій задачі розсіювання ці коефіцієнти можна знайти з коефіцієнта відбиття $R(\omega) = B_0(\omega)/A_0(\omega)$, що

характеризує властивості розсіювання для різних часто ω . Вирішення цієї проблеми реалізовано через реконструкцію фази [246] за абсолютним значенням коефіцієнта $A_0(\omega)$, яке можна знайти з $R(\omega)$.

Ідея розв'язання оберненої спектральної задачі полягає у визначенні коефіцієнтів $A_0(\omega)$ та $B_0(\omega)$ за множиною заданих трансмісійних значень.

Якщо граничну умову (3.71) переписати у вигляді $a_0(\omega) = (2i\omega)^{-1}$ та $b_0(\omega) = -(2i\omega)^{-1}$, то розв'язок рівняння Гельмгольца у зовнішньому шарі з індексом N буде визначатися коефіцієнтами $a_N(\omega) = -(A_0(-\omega) + B_0(-\omega))(2i\omega)^{-1}$ та $b_N(\omega) = (A_0(\omega) + B_0(\omega))(2i\omega)^{-1}$. Крім того, на основі граничної умови (3.70) можна сформулювати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} L(a_N(\omega)\exp(i\omega a) + b_N(\omega)\exp(-i\omega a)) - M(\exp(i\omega b) - \exp(-i\omega b)) = 0, \\ L(i\omega a_N(\omega)\exp(i\omega a) - i\omega b_N(\omega)\exp(-i\omega a)) - M(i\omega\exp(i\omega b) + i\omega\exp(-i\omega b)) = 0. \end{cases} \quad (3.76)$$

Якщо змінна ω відповідає трансмісійному власному значенню $\omega_m = c_0\lambda_m$, то система (3.76) відносно двох сталих L та M матиме нетривіальний розв'язок. Відомо, що детермінант матриці, яку утворюють постійні коефіцієнти в системі рівнянь (3.76), дорівнює нулю лише для множини дискретних трансмісійних власних значень. Цей факт використовують для знаходження трансмісійних власних значень при розв'язанні прямої спектральної задачі.

Розглядаючи обернену спектральну задачу, де всі трансмісійні власні значення задано як вихідні дані, детермінант матриці коефіцієнтів в системі (3.76) можна визначити як поліно

$$(A_0(\omega) + B_0(\omega))\exp(-i\omega(a-b)) - (A_0(-\omega) + B_0(-\omega))\exp(i\omega(a-b)) = ik\omega D(\omega), \quad (3.77)$$

де k - невідома дійсна константа, а $D(\omega) = \omega^d \prod_{m=1}^{\infty} (1 - \omega/(c_0\lambda_m))$ - деяка функція, яку записано згідно з теоремою Адамара про факторизацію цілих функцій. Всі комплексні корені $D(\omega)$, включаючи їх мультиплікативність, безпосередньо пов'язані з трансмісійними власними значеннями.

При розв'язанні оберненої спектральної задачі вираз (3.77) можна розглядати як задачу Гільберта-Рімана відносно невідомої функції $Z(\omega) = A_0(\omega) + B_0(\omega)$, яка є аналітичною у всій комплексній площині та обмеженою у верхній комплексній півплощині, включаючи дійсну вісь. Перепишемо дану функцію у вигляді

$$Z(\omega) = A_0(\omega) + B_0(\omega) = v + F(\omega) = \alpha_0 + \beta_0 + \sum_{n=1}^K S_n \exp(i\omega\delta_n), \quad (3.78)$$

де $v = \alpha_0 + \beta_0$ та $\delta_K = 2a$.

3.3.3. Теорема про єдиність розв'язку оберненої спектральної задачі.

Перший висновок щодо єдиності розв'язку задачі Гільберта-Рімана можна зробити з рівності нулю виразу $Z(\omega)\exp(-i\omega(a-b))$ на півколі безмежного радіуса у верхній комплексній півплощині. Умова $(a-b) < 0$ є ідентичною до умови єдиності, яку встановлено в працях [261] та [262] інших авторів. Але варто зазначити, що шукана функція $Z(\omega)$ для кусково-постійної швидкості розповсюдження хвиль є скінченою сумою комплексних експонент. Ця властивість дає можливість спростити умову єдиності. Розглянемо окремо три різні випадки співвідношення величин a та b , припускаючи, що одна з цих констант є заданою, а іншу можна знайти за максимальним аргументом тригонометричної функції $\text{Im}(Z(\omega)\exp(-i\omega(a-b)))$:

1. $(a-b) < 0$. Всі коефіцієнти S_n та δ_n суми (3.78) можна знайти з виразу, який безпосередньо впливає з (3.77):

$$v \sin(\omega(b-a)) + \sum_{n=1}^K S_n \sin(\omega\delta_n + \omega(b-a)) = k\omega D(\omega). \quad (3.79)$$

2. $a = b$. Оцінка першого доданку виразу (3.78) $v = \alpha_0 + \beta_0$ є неможливою, так як для будь-якого значення константи v справедлива тотожність

$$F(\omega) - F(-\omega) = ik\omega D(\omega). \quad (3.80)$$

Звідси впливає, що обернена спектральна задача не має єдиного розв'язку.

3. $(b-a) < 0$. Цей випадок потребує спеціальної уваги, так як задачу Гільберта-Рімана (3.77) необхідно записати у новій формі

$$\frac{F(\omega)}{1 - \exp(2i\omega(a-b))} + \frac{F(-\omega)}{1 - \exp(-2i\omega(a-b))} = -\frac{k\omega D(\omega)}{2\sin(\omega(a-b))} - kv. \quad (3.81)$$

Розв'язок цієї задачі можна знайти, визначаючи коефіцієнти тригонометричного поліному у правій частині виразу

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^K S_n \left(\cos(\delta_n \omega) - \cos(2\omega(\delta_n + (b-a))) \right) = \\ = -\omega kd(\omega) \sin(\omega(b-a)) - v 2 \sin^2(\omega(b-a)). \end{aligned} \quad (3.82)$$

Шукані коефіцієнти S_n та δ_n можна обчислити за допомогою рекурентної процедури, яка випливає з розв'язку еквівалентної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, матриця яких є сильно розрідженою.

Перший доданок $v = \alpha_0 + \beta_0$ виразу (3.78) можна однозначно встановити, якщо величина $(a-b)$ не є рівною жодному з аргументів комплексних експонент у функції $F(\omega)$ або коли виконується умова $\delta_n \neq (a-b)$. Відповідно, можна сформулювати наступну теорему.

Теорема 3.3: Всі коефіцієнти рівняння (3.67) можна однозначно встановити за заданими комплексними трансмісійними власними значеннями, враховуючи їх мультиплікативність, а також наперед відомим значенням одного з параметрів a або b , тільки якщо для комплексного тригонометричного полінома $Z(\omega) = \alpha_0 + \beta_0 + \sum_{n=1}^K S_n \exp(i\omega\delta_n)$ задовольняється умова $\delta_n \neq (a-b)$.

У частковому випадку розв'язок оберненої спектральної задачі можна отримати у значно простішій формі. Цей випадок передбачає, що величини $d_j = \sqrt{\varepsilon_j} (r_j - r_{j-1}) / c_0$ задовольняють умові належності значень $d_n = l\Delta_r, l \in \mathbb{Z}, n = \overline{0, N}$ та $b = m\Delta_r, m \in \mathbb{Z}$ деякій регулярній сітці. Приклад розподілу власних трансмісійних значень для двох структур приведено на рис. 3.6, де одна з структур задовольняє приведеній вище умові, а інша – ні. Як видно, трансмісійні значення повторюються з певною періодичністю вздовж дійсної осі. Якщо апріорно відомо, що $d_n = l\Delta_r, l \in \mathbb{Z}$ та $b = m\Delta_r, m \in \mathbb{Z}$, то тригонометричний поліном $Z(\omega)$ можна

подати у вигляді комплексного многочлена $Z(\omega) = \sum_{h=0}^H v_h z^h$, де $z = \exp(i\omega\Delta_r \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0})$.

3.3.4 Оцінка коефіцієнтів у розв'язках Йоста еквівалентної плоско-шаруватої структури. Щоб повністю завершити доведення теореми про єдиність розв'язку оберненої спектральної задачі, необхідно показати, що обидві функції $A_0(\omega)$ та $B_0(\omega)$ можна однозначно знайти із суми $Z(\omega) = A_0(\omega) + B_0(\omega)$. Для цього використаємо відому тотожність

$$A_0(\omega)A_0(-\omega) - B_0(\omega)B_0(-\omega) = g, \quad g = \text{const}, \quad (3.83)$$

яка випливає з незалежності Вронскіана від змінної ω . Підстановка виразу (3.78) у (3.83) дозволяє сформулювати другу задачу Гільберта-Рімана

$$\frac{A_0(\omega)}{Z(\omega)} + \frac{A_0(-\omega)}{Z(-\omega)} = \frac{g}{Z(\omega)Z(-\omega)} + 1. \quad (3.84)$$



а)



б)

Рис. 3.6. Розподіл трансмісійних власних значень у комплексній площині \mathbb{C} для двох подібних структур, де значення $d_n = l\Delta_r$, $l \in \mathbb{Z}$ належать - а) та не належать - б) до регулярної сітки

Така задача має єдиний розв'язок, який знайдено та проаналізовано в роботі [3, 32]. Можна також показати, що коефіцієнт відбиття $R(\omega) = B_0(\omega)/A_0(\omega)$ еквівалентної шаруватої структури дозволяє однозначно встановити її параметри

структури, навіть якщо константи k та g є невідомими. Беручи до уваги однозначність розв'язку одновимірної задачі розсіювання [7], де значення функції $R(\omega)$ служать вихідними даними, можна стверджувати, що сформульована в цій роботі обернена спектральна задача має єдиний розв'язок, якщо виконується умова вище приведеної теореми.

3.4. Розв'язок оберненої задачі розсіювання за результатом двох експериментів

Як зазначено у другому розділі, розв'язок одновимірної оберненої задачі для плоско-шаруватої структури доцільно здійснювати через реконструкцію всієї матриці розсіювання за коефіцієнтом відбиття. Ця процедура вимагає обчислення головного значення інтеграла у виразі (2.125). Для того, щоб уникнути числового інтегрування, запропоновано метод, який базується на перевизначеності оберненої задачі. Для цього в якості вихідних даних, крім коефіцієнта відбиття плоских хвиль від шаруватої діелектричної структури, додатково задано значення коефіцієнта відбиття цієї ж структури на ідеально провідній підкладці. Така стратегія реконструкції матриці розсіювання за коефіцієнтами відбиття передбачає проведення подвійного експерименту. Спочатку коефіцієнт відбиття $L(\omega)$ визначаємо для шаруватої структури, яка знаходиться у вільному просторі, як показано на рис. 3.7.а. Друге вимірювання спрямоване на визначення коефіцієнта відбиття $\tilde{L}(\omega)$ цієї ж структури за умови відсутності поля у півпросторі справа. Останнє забезпечується встановленням підкладки з безмежною провідністю $\sigma \rightarrow \infty$ (рис. 3.7.б). У засобах неруйнівного контролю, на відміну від дистанційного зондування, проведення експерименту з метою такого перевизначення задачі, як правило, не викликає особливих труднощів.

Твердження. Якщо $L(\omega)$ є коефіцієнтом відбиття від плоскої шаруватої діелектричної структури у вільному просторі (рис. 3.7.а), а $\tilde{L}(\omega)$ – коефіцієнт

відбиття цієї ж структури на ідеально провідній підкладці (рис. 3.7.б), то відповідну матрицю розсіювання структури з точністю до знаку можна визначити як

$$S := \begin{bmatrix} R(\omega) & T(\omega) \\ T(\omega) & L(\omega) \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} -\overline{L(\omega)}e^{-\delta(\omega)} & \sqrt{1-|L(\omega)|^2}e^{\left(\frac{1}{2}\delta(\omega)\right)} \\ \sqrt{1-|L(\omega)|^2}e^{\left(\frac{1}{2}\delta(\omega)\right)} & L(\omega) \end{bmatrix}, \quad (3.85)$$

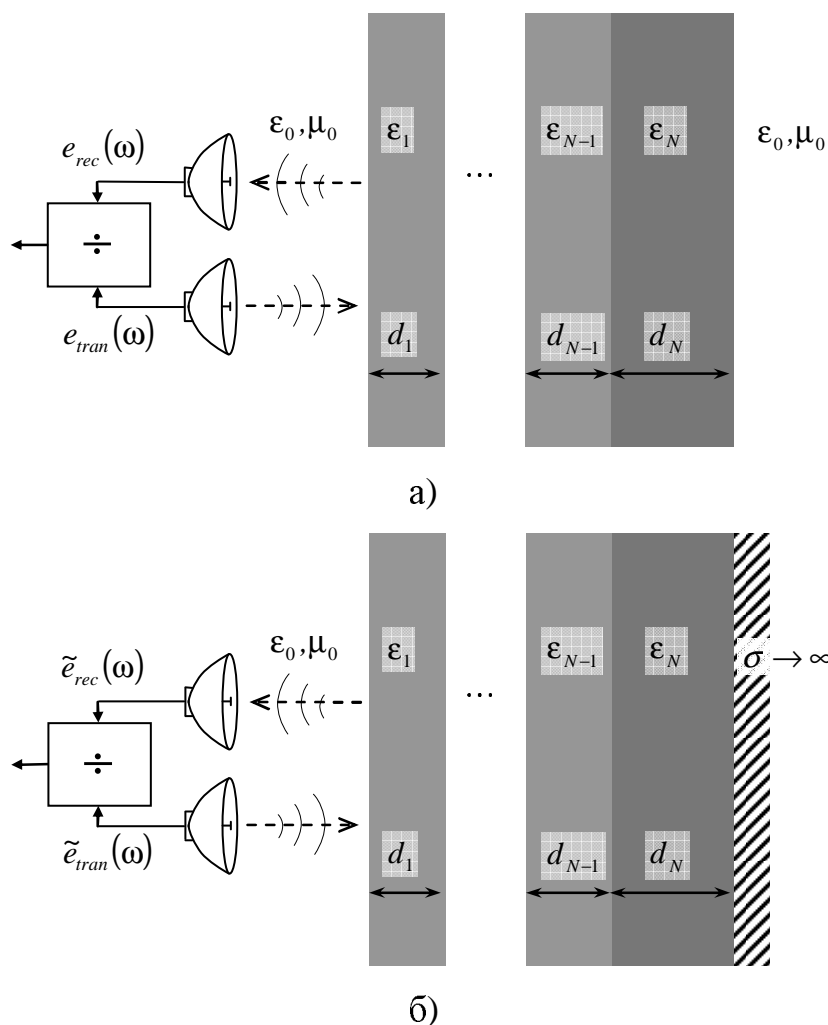


Рис. 3.7. Схема вимірювання коефіцієнта відбиття від багат шарової структури, яка знаходиться у вільному просторі – а) та від цієї ж структури на ідеально провідній підкладці – б)

де $\delta(\omega)$ – неперервна чисто уявна функція, яку отримано розгортанням фази аргумента функції комплексної змінної з областю значень на колі одиничного радіуса

$$\delta(\omega) = i \cdot \text{unwrap} \left[\arg \left(\frac{\overline{L(\omega)} \tilde{L}(\omega) - 1}{\tilde{L}(\omega) - L(\omega)} \right) \right]. \quad (3.86)$$

Тут $\text{unwrap}[f] \in \mathbb{C}$ позначає розгортання фази функції, що має область значень $f \in [-\pi, \pi]$ [264].

Доведення цього твердження можна побудувати, виразивши коефіцієнти $B_0(\omega)$ через $A_0(\omega)$ у рівняннях (3.8) та (2.56). Підставивши один вираз в інший, отримаємо

$$\frac{A_0(-\omega)}{A_0(\omega)} = \frac{T(\omega)}{T(-\omega)} = \frac{\tilde{L}(\omega) - L(\omega)}{L(-\omega) \tilde{L}(\omega) - 1}. \quad (3.87)$$

Отже, рівняння щодо невідомої функції $\delta(\omega)$ можна безпосередньо записати, прирівнявши відношення (3.87) та (2.124)

$$\exp(\delta(\omega)) = \frac{\overline{L(\omega)} \tilde{L}(\omega) - 1}{\tilde{L}(\omega) - L(\omega)}. \quad (3.88)$$

Оскільки функція $\delta(\omega)$ є чисто уявною, то логарифмування виразу (3.88) у правій частині дасть аргумент комплекснозначної функції

$$\log \left(\frac{\overline{L(\omega)} \tilde{L}(\omega) - 1}{\tilde{L}(\omega) - L(\omega)} \right) = i \cdot \left(\arg \left(\frac{\overline{L(\omega)} \tilde{L}(\omega) - 1}{\tilde{L}(\omega) - L(\omega)} \right) + 2\pi n \right), \quad (3.89)$$

де n – довільне ціле число.

Як відомо, для функції $\arg(\cdot)$ інтервал $[-\pi, \pi]$ є областю значень. Тому для знаходження неперервної функції $\delta(\omega)$ необхідно взяти $\text{unwrap}[f] : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ [264]. Звідси розв'язок рівняння (3.88) можна записати у вигляді

$$\delta(\omega) = i \cdot \text{unwrap} \left[\arg \left(\frac{\overline{L(\omega)} \tilde{L}(\omega) - 1}{\tilde{L}(\omega) - L(\omega)} \right) \right]. \quad (3.90)$$

Варто зауважити, що виміряні значення коефіцієнтів відбиття $L_m(\omega)$ та $\tilde{L}_m(\omega)$ матимуть набіг фази $\exp(i2k_0 d_0)$ у відповідності до виразу (2.70). Тому за аналогією з формулами (2.128) та (3.90) значення допоміжної функції $\delta(\omega)$ обчислимо як

$$\delta_m(\omega) = i \cdot \text{unwrap} \left[\arg \left(\frac{\overline{L_m(\omega)} \tilde{L}_m(\omega) - 1}{\tilde{L}_m(\omega) - L_m(\omega)} \right) \right]. \quad (2.91)$$

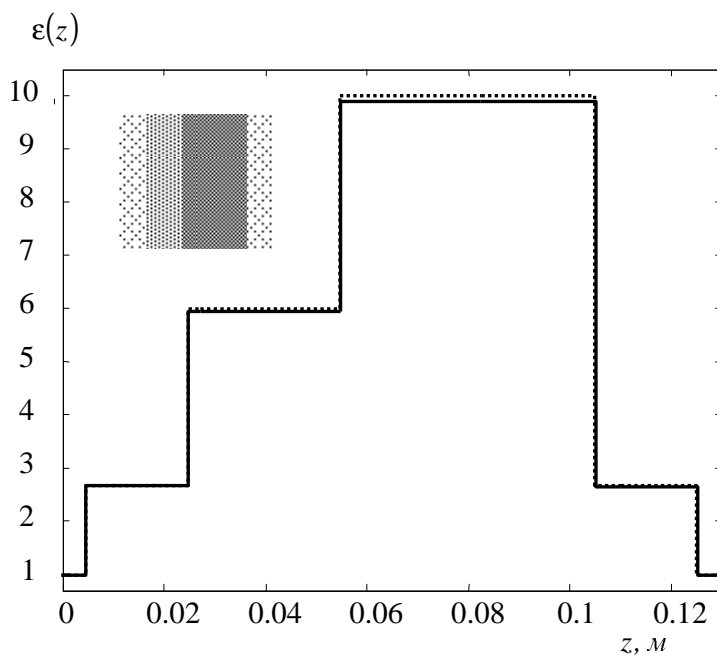
Знаходження $\delta_m(\omega)$ у такий спосіб частково усуває причину похибок обчислення при знаходженні коефіцієнтів $A_m(\omega)$ та $B_m(\omega)$ за матрицею розсіювання, реконструйованою згідно з приведеним твердженням.

Результати числового моделювання розсіювання плоскої хвилі на діелектричних шаруватих структурах та розв'язання відповідної оберненої задачі підтверджують справедливість розроблених теоретичних положень та свідчать про дієвість підходу до непрямого визначення характеристик таких структур. Як видно з рис. 3.8, де порівняно результати реконструкції багатошарової структури запропонованим алгоритмом (рис. 3.8.а) та методом пошарового зрізання (рис. 3.8.б) з оригінальною функцією діелектричної проникності (пунктирна лінія на рисунках), точність нового методу є суттєво вищою.

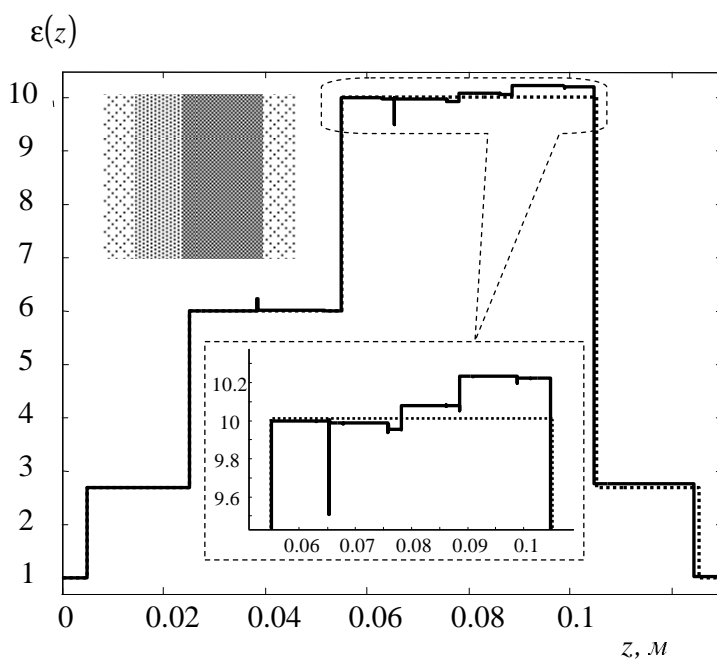
Зазначимо, що реконструкцію матриці розсіювання та розв'язання оберненої задачі здійснено за коефіцієнтами відбиття, заданими у смузі частот від 20 ГГц до 70 ГГц з кроком 50 МГц, а у вихідні дані введено випадкову складову з дисперсією $\sigma_n^2 = 0.013^2$. Висока точність реконструкції параметрів шаруватої структури за таких умов дає можливість стверджувати, що запропонований підхід можна ефективно використати як новий метод обробки результатів вимірювання у засобах неруйнівного контролю діелектричних матеріалів.

3.5. Висновки до третього розділу

В третьому розділі з єдиних позицій проведено аналіз оберненої задачі розсіювання для шаруватої діелектричної структури на ідеально плоскому екрані та оберненої спектральної задачі для сферично-симетричної шаруватої структури. Таким задачам відповідає модель хвильового рівняння на півосі.



a)



б)

Рис. 3.8. Порівняння результатів розв'язання оберненої задачі запропонованим методом – а) та методом пошарового зрізання [62] – б). Пунктирною лінією на рисунках показано точний розв'язок, а суцільною лінією – числові результати

Показано, що функцію коефіцієнта відбиття плоскої шаруватої структури на ідеальному провідному екрані, яку записано через коефіцієнти розв'язків Йоста для

чисто діелектричної структури, вдається факторизувати. Така факторизація дала можливість привести розв'язок оберненої задачі для відомого коефіцієнта відбиття від діелектрика на провідному екрані до розв'язання тривіальної оберненої задачі для такої ж діелектричної структури у вільному просторі за допомогою двох задач Гільберта-Рімана. Показано можливість числового розв'язання таких задач, де використовуються лише алгебраїчні операції з коефіцієнтами та аргументами тригонометричних функцій. Останні є шуканими величинами.

Аналіз прямої задачі розсіювання плоскої електромагнітної хвилі на шаруватій діелектричній структурі з ідеально провідним шаром в основі показав, що обернену задачу для встановлення параметрів такого діелектрика за частотною залежністю коефіцієнта відбиття можна привести до стандартної одновимірної оберненої задачі розсіювання іншим способом. Показано, що така обернена задача є ідентичною до оберненої задачі для чисто діелектричної структури, якщо в якості вихідних даних розглядати імпульсну характеристику на інтервалі часу, впродовж якого фронт хвилі розповсюджується у діелектрику і не зазнає впливу провідної основи. Для цього математично обґрунтовано підхід до визначення інтервалу часу розповсюдження електромагнітної хвилі у шаруватому діелектрику без втрат. Визначену на цьому інтервалі імпульсну характеристику досліджуваної структури, як перетворення Фур'є від коефіцієнта відбиття, можна вважати достатньою для розв'язання оберненої задачі. Для підтвердження достовірності теоретичних положень цю ж обернену задачу числово розв'язано методом інтегральних рівнянь та його дискретним варіантом, які розвинуті у першому розділі дисертації. Отримані розв'язки є наближеними, оскільки за вихідні дані взято різні апроксимації імпульсної характеристики, які обчислено, виходячи з дискретно заданих комплексних значень коефіцієнта відбиття на обмеженому діапазоні частот.

Розвинутий підхід дає можливість здійснювати оцінювання параметрів шаруватої структури з середньоквадратичною похибкою, що в 11.4 раз є меншою в порівнянні з відомим методом.

Розв'язок оберненої акустичної спектральної задачі для сферичної радіально-симетричної шаруватої структури з однорідними шарами зведено до задачі

Гільберта-Рімана за аналогією з задачею для плоскої діелектричної структури на ідеально провідному екрані. Вихідними даними тут є набір комплексних трансмісійних власних значень. Показано, що умова єдиності розв'язку цієї задачі задовольняється для ширшого класу кусково-постійних функцій швидкості розповсюдження хвиль, ніж при формулюванні оберненої спектральної задачі у неперервному випадку. Запропоновано конструктивну процедуру, що дозволяє встановити швидкості розповсюдження хвиль у кожному шарі структури, виходячи з заданих трансмісійних власних значень нульового порядку з урахуванням їх мультиплікативності.

Поєднавши результати односторонніх вимірювань коефіцієнта відбиття від діелектричної структури та коефіцієнта відбиття від цієї ж структури на ідеально провідному екрані, розв'язано задачу реконструкції всіх елементів матриці розсіювання для обмеженого діапазону частот. Запропонований у роботі підхід дозволив досягнути кращої точності розв'язку оберненої задачі розсіювання для плоских діелектричних структур за рахунок перевизначення вихідних даних. Цей результат можна застосувати на практиці при проведенні високочастотних вимірювань та обробці даних для неруйнівного контролю діелектричних шаруватих матеріалів.

РОЗДІЛ 4

РОЗВ'ЯЗАННЯ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ РОЗСІЮВАННЯ ДЛЯ ШАРУВАТОГО ДИЕЛЕКТРИКА ЗА АБСОЛЮТНИМ ЗНАЧЕННЯМ ВИМІРЯНИХ ПАРАМЕТРІВ

Високу ефективність сучасних засобів неруйнівного контролю та дистанційного зондування в основному досягають за рахунок упровадження належної обробки результатів вимірювань. При діагностиці неоднорідних середовищ використовують властивості розсіювання пружних та електромагнітних хвиль, а обробку вимірних значень напруженості розсіяного поля здійснюють на основі розв'язання відповідної оберненої задачі щодо параметрів середовища. У випадку плоских шаруватих середовищ для розв'язання таких задач використовують одновимірну модель. У теорії обернених задач розроблено багато методів [7, 62, 93, 96, 106-111], для яких вихідними даними є комплекснозначна залежність коефіцієнта відбиття від частоти, або імпульсна характеристика, що визначається перетворенням Фур'є комплексної функції коефіцієнта відбиття. Розв'язки задач про оцінювання параметрів шаруватих середовищ, отримані у попередніх розділах, базуються на тому, що вихідними даними є комплексно значні залежності параметрів розсіяного поля від частоти.

Вимірювання комплексних значень параметрів електромагнітного поля і, зокрема, коефіцієнта відбиття [169, 170, 265-268] у широкому частотному діапазоні є доволі складною задачею. Водночас точне векторне подання параметрів у комплексній площині є однією з передумов коректного формулювання обернених задач. У вимірювальних засобах використовують мостові [169] та гетеродинні [268] схеми порівняння значень напруженості поля у точці вимірювання з полем від еталонного джерела гармонічних коливань. За фазовими і амплітудними відмінностями визначають вимірювальну комплексну величину. Створення засобів високочастотних широкосмугових вимірювань є дуже затратним. Вони вимагають прецизійного калібрування та контролю параметрів упродовж експлуатації, що суттєво обмежує сферу застосування таких приладів. Тому для пристроїв

неруйнівного контролю, що випускаються серійно, більш придатними є методики високочастотних широкосмугових вимірювань, які не потребують визначення комплекснозначних параметрів. Це вимагає розвитку нового напрямку досліджень, метою якого є розв'язання оберненої задачі при частково відомих вихідних даних. Одним із можливих варіантів є формулювання задачі, коли за вихідні дані беруть абсолютні значення вимірних параметрів, на відміну від їх комплексних аналогів у традиційному формулюванні. При цьому необхідно довести однозначність розв'язку та сформулювати процедуру його отримання.

Зазначимо, що зображення вимірних даних аналітичною функцією дає можливість встановити фазу цієї функції за її модулем [150]. У роботі [269] показано, що коефіцієнт проходження хвиль є достатнім інформативним параметром для розв'язання оберненої задачі за певних граничних умов, яким задовольняє хвиля на межі розділу. Відомий метод розв'язання такої задачі для шаруватого пружного середовища, функція шуканих параметрів якого є кусково-постійною та має розриви на регулярній сітці [270]. У праці [159] обґрунтовано однозначність розв'язку гіперболічної задачі про розповсюдження пружних хвиль у середовищах з неперервною зміною параметрів. Забезпечуючи певні характеристики збудження такого пружного середовища, описано методи розв'язання оберненої задачі, коли вихідними даними є залежність амплітуди пройденної хвилі від часу розповсюдження [157, 158]. Створення методів синтезу багат шарових структур із заданими енергетичними характеристиками розсіювання плоских електромагнітних хвиль базуються на мінімізаційних підходах [271] і тому виходить за межі досліджень представлених в роботі.

Метою дослідження, результати якого описано в цьому розділі є всесторонній аналіз обернених задач розсіювання монохроматичних хвиль для побудови процедури оцінювання параметрів плоского шаруватого діелектрика за відомими абсолютними значеннями коефіцієнта відбиття, або коефіцієнта проходження.

4.1. Розв'язання оберненої задачі розсіювання за модулем коефіцієнта відбивання плоскої хвилі

Пряма задача розсіювання формулюється відносно невідомих параметрів матриці (2.12). Вона полягає у знаходженні коефіцієнтів $R(\omega)$, $L(\omega)$, $T(\omega)$ для заданих параметрів середовища, тобто для відомої функції $\varepsilon(z)$. На відміну від прямої, в оберненій задачі розсіювання діелектрична проникність ε_j , товщина d_j шарів $j = \overline{1, N}$ та число N є невідомими величинами. В даному випадку, обернену задачу розсіювання сформульовано як задачу визначення дійсних параметрів ε_j , d_j , N за абсолютними значеннями коефіцієнта відбиття $|L(\omega)|$, у припущенні, що матеріали шаруватої структури є безвтратними.

Керуючись стратегією використання моделей потенціального розсіювання для опису розсіювання електромагнітних хвиль, з метою вирішення поставленої задачі використано підхід, який полягає у заміні вихідних даних коефіцієнтами $A_0(\omega)$ та $B_0(\omega)$ в розв'язках Йоста (2.36) та (2.37). В роботі розвинуто ідею розв'язання оберненої задачі розсіювання за абсолютними значеннями $|A_0(\omega)|$, $|B_0(\omega)|$. Згідно з результатами другого розділу відомо, що для заданих комплекснозначних функцій $A_0(\omega)$ та $B_0(\omega)$ параметри діелектричного шаруватого середовища можна обчислити згідно з запропонованою у першому розділі рекурентною процедурою, здійснивши попередньо оцінку всіх параметрів (α_0 , β_0 , ν_0 та M_0) скінчених тригонометричних сум:

$$A_0(\omega) := \sum_{p=1}^{M_0} \alpha_0(p) \exp(-i\nu_0(p)\omega); \quad (4.1)$$

$$B_0(\omega) := \sum_{p=1}^{M_0} \beta_0(p) \exp(-i\nu_0(p)\omega). \quad (4.2)$$

Тому сформульована обернена задача розсіювання зводиться до визначення комплекснозначних функцій $A_0(\omega)$ та $B_0(\omega)$ за їх абсолютними значеннями. Останні безпосередньо обчислюються за вихідними даними задачі - модулем

частотної залежності коефіцієнта відбиття $|L(\omega)| = |R(\omega)|$ згідно з тотожностями $|A_0(\omega)| = 1/\sqrt{1-|L(\omega)|^2}$ та $|B_0(\omega)| = |L(\omega)|/\sqrt{1-|L(\omega)|^2}$.

4.1.1 Відновлення функції $A_0(\omega)$ за її абсолютним значенням. З теорії операторів відомо, що спектральна задача (2.47) для оператора $H := -1/(\mu_0\mu\epsilon_0\epsilon(z)e(z))d^2e(z)/dz^2$ має неперервний спектр на додатній частині дійсної півосі [93]. З цього слідує, що у верхній комплексній півплощині ω і на дійсній осі функція $A_0(\omega)$ не дорівнює нулю. Крім цього, властивість аналітичності у верхній півплощині дає можливість формулювати задачу реконструкції фази цієї функції за її модулем.

Теорема 4.1: Комплексне значення коефіцієнта $A_0(\omega) = |A_0(\omega)|\exp(i\varphi_A(\omega))$ можна відновити за його абсолютним значенням $|A_0(\omega)| = 1/\sqrt{1-|L(\omega)|^2}$, визначаючи аргумент комплексної експоненти за формулою

$$\varphi_A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\vartheta_n \omega) + \omega v_0(M_0), \quad (4.3)$$

де коефіцієнти c_n та ϑ_n можна обчислити аналітично за коефіцієнтами α_0 та v_0 ряду (4.1).

В основі доведення теореми покладено властивості інтеграла Коші [246], які встановлюють залежність між дійсною і уявною частинами аналітичної функції. Беручи до уваги те, що функція $A_0(\omega)\exp(i\omega v_0(M_0))$ є аналітичною і не має нулів у верхній півплощині, її логарифм є також однозначною аналітичною функцією

$$\log(A_0(\omega)) = \log|A_0(\omega)| + i\varphi_A(\omega). \quad (4.4)$$

Співвідношення між дійсною та уявною складовими у формулі (4.4) можна виразити через інтеграл Коші. Провівши контур через дійсну вісь і замкнувши його у безмежності у верхній півплощині, результуюче співвідношення набуває вигляду

$$\varphi_A(\omega) = \frac{1}{\pi} \mathbf{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log|A_0(\omega')|}{\omega - \omega'} d\omega' + \omega v_0(M_0), \quad (4.5)$$

де $\mathbf{P} \int d\omega$ - головне значення інтеграла.

У результаті перемноження тригонометричних многочленів (4.1) із скінченною кількістю доданків отримуємо також многочлен із скінченною кількістю доданків

$$|A_0(\omega)|^2 = A_0(\omega)A_0(-\omega) = \sum_{p=1}^K u_p \exp(i\gamma_p \omega), \quad (4.6)$$

де коефіцієнти u_p , γ_p та K можна обчислити безпосередньо за значеннями α_0 , ν_0 та M_0 .

Поліном (4.6) завжди додатньо визначений, і його можна зобразити як $|A_0(\omega)|^2 = \sigma(1+r(\omega))$, де σ - деяка стала, а $r(\omega)$ - функція, що задовольняє умову $|r(\omega)| < 1$.

Можливість зазначеного зображення дозволяє скористатися розкладом логарифма функції у вигляді збіжного ряду

$$\log(1+r(\omega)) = r(\omega) - \frac{r(\omega)^2}{2} + \frac{r(\omega)^3}{3} - \frac{r(\omega)^4}{4} + \dots \quad (4.7)$$

У свою чергу логарифм функції у чисельнику підінтегральної функції виразу (4.5) матиме вигляд

$$\log(A_0(\omega)A_0(-\omega)) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(\vartheta_n \omega), \quad (4.8)$$

де коефіцієнти c_n та ϑ_n можна обчислити з коефіцієнтів u_p та γ_p , належним чином сумуючи косинуси з однаковими аргументами при перемноженні тригонометричних рядів у виразі (4.7).

Доведення теореми 4.1 можна завершити, підставляючи ряд (4.8) в інтеграл (4.5). Вираз (4.3) отримуємо, скориставшись тотожністю

$$\sin(\omega t) = \frac{1}{\pi} \mathbf{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\omega t')}{t-t'} dt'. \quad (4.9)$$

Отже, за відомою абсолютною величиною $|A_0(\omega)| = 1/\sqrt{1-|L(\omega)|^2}$ процедура реконструкції фази (4.3) коефіцієнта розсіювання зводиться до знаходження

коефіцієнтів скінченного та безмежного рядів, якими можна записати $|A_0(\omega)|^2$ і $\log(A_0(\omega)A_0(-\omega))$, відповідно.

Виділимо окремо частковий випадок, коли значення оптичних товщин $d_j\sqrt{\varepsilon_j}$ шаруватої структури належать деякій регулярній сітці з кроком $(\delta/2)$. Тоді, ввівши позначення $\tau = \exp(i\delta\omega)$, можна стверджувати, що $\forall p \in \overline{1, M_0} \exists t_p \in \mathbb{N} : w_0(p) = t_p \delta$, а $A_0(\omega)$ є тригонометричним поліномом

$$A_0(\omega) = (w_0(1)\tau^0 + w_0(2)\tau^1 + \dots + w_0(N)\tau^{N-1} + w_0(N+1)\tau^N)\tau^{-N/2}, \quad (4.10)$$

де $w_0(t_p) = \alpha_0(p)$ у відповідності до виразу (4.1).

Аналогічно можна записати тригонометричний поліном для виразу (4.6)

$$|A_0(\omega)|^2 = (W_0(1)\tau^0 + W_0(2)\tau^1 + \dots + W_0(2N+1)\tau^{2N} + W_0(2N+1)\tau^{2(N+1)})\tau^{-(N+1)}, \quad (4.11)$$

де $W_0(q)$, $q = \overline{1, (2N+1)}$ - коефіцієнти полінома.

З виразу (4.10) слідує, що при належності оптичних товщин шарів до регулярної сітки, нулі функції $A_0(\omega) \in 2\pi$ -періодичними і розташованими у нижній комплексній півплощині вздовж дійсної осі частот ω . У цьому випадку реконструкцію комплекснозначної функції $A_0(\omega)$ за її модулем $|A_0(\omega)|$ можна здійснити, знаходячи та належним чином відбираючи корені тригонометричного полінома (4.11).

Теорема 4.2. Шуканий комплексний коефіцієнт розсіювання $A_0(\omega)$ можна визначити за формулою

$$A_0(\omega) = w_0(N+1)\tau^{-N/2} \prod_{n=1}^N (\tau - \exp(i\delta f_n)), \quad (4.12)$$

де коефіцієнт $w_0(N+1)$ та нулі f_n функції $A_0(\omega)$ визначаються з коефіцієнтів та коренів відомого модуля $|A_0(\omega)|$, записаного у вигляді тригонометричного полінома

$$|A_0(\omega)|^2 = A_0(\omega)A_0(-\omega) = W_0(2N+1)\tau^{-(N+1)} \prod_{q=1}^{2N} (\tau - \exp(i\delta g_q)). \quad (4.13)$$

Тут коефіцієнти многочленів $w_0(N+1)$ та $W_0(2N+1)$ співвідносяться як $w_0(N+1) = \sqrt{W_0(2N+1)/\chi_1}$, де $\chi_1 = (-1)^N \prod_{n=1}^N \exp(i\delta f_n)$. Значення f_n , $n = \overline{1, N}$ вибираємо серед коренів $g_q = g'_q + ig''_q$ тригонометричного полінома (4.12) таким чином, що $f_n = g_l$, де l належить множині індексів F , яка містить індекси коренів g_q , що лежать у нижній комплексній півплощині, або $F : l \in F | g''_l < 0$.

Для доведення цієї теореми використаємо властивість відсутності нулів функції $A_0(\omega)$ у верхній комплексній півплощині ω . Тобто, $A_0(f_n) = 0$, коли $\omega = f_n$, де $f_n = f'_n + if''_n$ є коренями тригонометричного полінома (4.10), для яких виконується умова $f''_n < 0$. Крім того, нулі володіють властивістю симетрії відносно уявної осі $f'_q = -f'_{N/2+q}$ для парних N , де $q = \overline{1, N/2}$. У випадку, коли N - непарне число, один із коренів буде чисто уявний $f''_N = 0$, а решта коренів є симетричними $f'_q = -f'_{(N-1)/2+q}$, де $q = \overline{1, (N-1)/2}$.

Якщо кожному нулю функції $A_0(\omega)$ відповідає симетричний відносно початку координат нуль функції $A_0(-\omega)$, то добуток цих функцій $A_0(\omega)A_0(-\omega) = |A_0(\omega)|^2$ матиме нулі як у верхній, так і в нижній півплощинах. Тому для встановлення комплексної функції $A_0(\omega)$ за її модулем $|A_0(\omega)|$ необхідно знайти значення полінома $|A_0(\omega)|^2$ та оцінити його коефіцієнти $W_0(q)$, $q = \overline{1, (2N+1)}$. Це дає можливість знайти корені g_q полінома (4.11) та вибрати з них лише ті, що належать до нижньої комплексної півплощини, оскільки всі корені з верхньої півплощини відповідають функції $A_0(-\omega)$.

Нехай відношення коефіцієнтів многочлена (4.10) при доданках із найменшим і найбільшим степенями рівне $\chi_1 = w_0(1)/w_0(N+1)$. З виразів (4.10) та (4.11) слідує, що добуток цих коефіцієнтів рівний $W_0(2N+1) = w_0(1)w_0(N+1)$. Відношення χ_1 можна знайти з виразу (4.12), знаючи корені функції $A_0(\omega)$ $\chi_1 = (-1)^N \prod_{n=1}^N \exp(i\delta f_n)$.

Отже, для відомого значення $W_0(2N+1)$ постійний множник у виразі (4.12) обчислюємо як $w_0(N+1) = \sqrt{W_0(2N+1)/\chi_1}$. Теорему доведено.

4.1.2. Встановлення функції $B_0(\omega)$ за її абсолютним значенням. На відміну від коефіцієнта розсіювання $A_0(\omega)$, область розташування нулів коефіцієнта $B_0(\omega)$ у комплексній площині не є обмеженою. Тому розв'язок задачі про встановлення комплексного коефіцієнта $B_0(\omega)$ за його абсолютним значенням $|B_0(\omega)| = |L(\omega)| / \sqrt{1 - |L(\omega)|^2}$ не є єдиним. Наступна теорема вказує причину неоднозначності розв'язку такої задачі та характеризує його природу.

Теорема 4.3: Кожен нуль ω_0 функції $B_0(\omega)$ з ненульовою уявною частиною $\Im(\omega_0) \neq 0$ є причиною двозначності розв'язку задачі про встановлення комплекснозначної функції $B_0(\omega)$ за її модулем $|B_0(\omega)|$. Ці розв'язки $B_{0,1}(\omega) = |B_0(\omega)| \exp(i\varphi_B(\omega))$ та $B_{0,2}(\omega) = |B_0(\omega)| \exp(i\varphi_B(\omega) + i\varphi_\eta(\omega))$ відрізняються фазовим множником $\exp(i\varphi_\eta(\omega))$, де

$$\varphi_B(\omega) = \frac{1}{\pi} \mathbf{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log |B_0(\omega')|}{\omega - \omega'} d\omega' + \omega_{v_0}(M_0) \quad (4.14)$$

та

$$\varphi_\eta(\omega) = \begin{cases} 2 \arctan \left(\frac{\Im(\omega_0)}{\omega - \Re(\omega_0)} \right), & \omega - \Re(\omega_0) > 0; \\ \pi \operatorname{sign}(\Im(\omega_0)), & \omega - \Re(\omega_0) = 0; \\ 2 \arctan \left(\frac{\Im(\omega_0)}{\omega - \Re(\omega_0)} \right) + 2\pi \operatorname{sign}(\Im(\omega_0)), & \omega - \Re(\omega_0) < 0. \end{cases} \quad (4.15)$$

Для доведення використаємо теорему Веєрштрасса, яка говорить, що будь-яку цілу функцію $B_0(\omega) = |B_0(\omega)| \exp(i\varphi_B(\omega))$ можна записати у факторизованому вигляді, виділивши у ній множник, який при $\omega = \omega_0$ набуває нульового значення. Тобто, завжди має місце рівність $B_0(\omega) = S(\omega)(\omega - \omega_0)$.

Якщо достеменно відомо, що для $\omega_0 = \Re(\omega_0) + i\Im(\omega_0)$, $\Im(\omega_0) < 0$, то фазу $\varphi_B(\omega)$ можна обчислити згідно з (4.14), як результат інтеграла Коші від аналітичної функції, оскільки $\log(B_0(\omega)) = \log|B_0(\omega)| + i\varphi_B(\omega)$ не матиме точок галуження, які треба враховувати при інтегруванні у верхній півплощині.

У випадку, коли існують нулі у верхній комплексній півплощині $\Im(\omega_0) > 0$, функцію $B_0(\omega)$ необхідно домножити на функцію Бляшке $\frac{(\omega - \bar{\omega}_0)}{(\omega - \omega_0)}$. Це дозволить

зберегти значення модуля $|B_0(\omega)| = \left| B_0(\omega) \frac{(\omega - \bar{\omega}_0)}{(\omega - \omega_0)} \right|$ на дійсній осі та застосувати до

$|B_0(\omega)| = \left| B_0(\omega) \frac{(\omega - \bar{\omega}_0)}{(\omega - \omega_0)} \right|$ метод контурного інтегрування у верхній півплощині.

Тому у випадку $\omega_0 = \Re(\omega_0) + i\Im(\omega_0)$, $\Im(\omega_0) > 0$ маємо

$$\log(B_0(\omega)) = \log \left(B_0(\omega) \frac{(\omega - \bar{\omega}_0)}{(\omega - \omega_0)} \right) = \log|B_0(\omega)| + i\varphi_B(\omega) + \log \left(\frac{(\omega - \bar{\omega}_0)}{(\omega - \omega_0)} \right), \quad (4.16)$$

де доданок $\log \left(\frac{(\omega - \bar{\omega}_0)}{(\omega - \omega_0)} \right)$ визначає фазу $\varphi_\eta(\omega)$ множника Бляшке.

Взаємозв'язок між дійсною і уявною частинами виразу (4.16) для $\omega \in \mathbb{R}$ можна встановити як

$$\varphi_B(\omega) + \log \left(\frac{(\omega - \bar{\omega}_0)}{(\omega - \omega_0)} \right) = \frac{1}{\pi} \mathbf{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log|B_0(\omega')|}{\omega - \omega'} d\omega' + \omega v_0(M_0). \quad (4.17)$$

Для того, щоб знайти фазу $\varphi_\eta(\omega)$ множника Бляшке, здійснимо такі перетворення

$$\frac{(\omega - \bar{\omega}_0)}{(\omega - \omega_0)} = \frac{(\omega - \Re(\omega_0) + i\Im(\omega_0))}{(\omega - \Re(\omega_0) - i\Im(\omega_0))} = \frac{|\omega - \bar{\omega}_0| \exp(i\eta)}{|\omega - \omega_0| \exp(-i\eta)} = \exp(2i\eta), \quad (4.18)$$

де η є аргументом деякої комплекснозначної функції з дійсною $(\omega - \Re(\omega_0))$ та уявною $\Im(\omega_0)$ частинами.

Враховуючи багатозначність функції арктангенс у комплексній площині, з виразу (4.18) можна встановити, що фаза множника Бляшке має вигляд (4.15).

До появи нулів як у верхній, так і в нижній комплексних півплощинах призводить те, що вихідними даними (за умовами задачі) є функція

$$|B_0(\omega)| = |L(\omega)| / \sqrt{1 - |L(\omega)|^2}, \text{ або її квадрат}$$

$$|B_0(\omega)|^2 = B_0(\omega)B_0(-\omega) = \sum_{p=1}^K y_p \exp(i\gamma_p \omega). \quad (4.19)$$

Крім того, ідентифікувати належність кореня ω_0 функції $B_0(\omega)$ до однієї з півплощин комплексної площини є неможливо. Тому задача про відновлення фази за модулем функції $|B_0(\omega)|$ матиме два розв'язки $\varphi_B(\omega)$ та $(\varphi_B(\omega) + \varphi_\eta(\omega))$.

Як частковий випадок розглянемо задачу про встановлення за абсолютною величиною $|B_0(\omega)|$ фази функції

$B_0(\omega) = S(\omega)(\omega - \omega_0 - \Delta_\omega)(\omega - \omega_0 - 2\Delta_\omega)(\omega - \omega_0 - 3\Delta_\omega)\dots$, яка має безмежну кількість дійсних коренів $\omega_0 \in \mathbb{R}$, що періодично розташовані з кроком Δ_ω . Таку функцію можна записати у вигляді $B_0(\omega) = S(\omega)(\exp(i2\pi\omega/\Delta_\omega) - \exp(i2\pi\omega_0/\Delta_\omega))$. Квадрат модуля цієї функції, заданий як вихідні дані у задачі відновлення, подамо у вигляді

$$\begin{aligned} |B_0(\omega)|^2 &= B_0(\omega)B_0(-\omega) = \\ &= |S(\omega)|^2 (\exp(i2\pi\omega/\Delta_\omega) - \exp(i2\pi\omega_0/\Delta_\omega)) (\exp(-i2\pi\omega/\Delta_\omega) - \exp(-i2\pi\omega_0/\Delta_\omega)) = \\ &= 4|S(\omega)|^2 \sin^2(\pi(\omega_0 - \omega)/\Delta_\omega). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Фазу такої функції можна обчислити за допомогою інтеграла Коші

$$\begin{aligned} \varphi_B(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \mathbf{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log |B_0(\omega')|^2}{\omega - \omega'} d\omega' + \omega v_0(M_0) = \\ &= \varphi_S(\omega) + \omega v_0(M_0) + \frac{1}{2\pi} \mathbf{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log |4\sin^2(\pi(\omega_0 - \omega')/\Delta_\omega)|}{\omega - \omega'} d\omega'. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Останній вираз визначає фазовий доданок, що вносять періодично розташовані на дійсній осі корені

$$\begin{aligned}\varphi_{\sin}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \mathbf{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log \left| 4 \sin^2 \left(\pi (\omega_0 - \omega') / \Delta_\omega \right) \right|}{\omega - \omega'} d\omega' = \\ &= \frac{1}{\pi} \mathbf{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log \left| \sin \left(\pi (\omega_0 - \omega') / \Delta_\omega \right) \right|}{\omega - \omega'} d\omega'.\end{aligned}\quad (4.22)$$

У роботі [272] аналітично встановлено результат перетворення Гільберта такого класу функцій

$$\frac{1}{\pi} \mathbf{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log |\sin(\omega')|}{\omega - \omega'} d\omega' = -\pi \left[\frac{\omega}{\pi} \right], \quad (4.23)$$

де $[]$ - позначення оператора, що виділяє ціле число дробового аргументу.

З виразів (4.22) та (4.23) слідує, що фазовий доданок вносить лише періодичні стрибки у фазу коефіцієнта $B_0(\omega)$

$$\varphi_{\sin}(\omega) = -\pi \left[\frac{\omega + \omega_0}{\Delta_\omega} \right]. \quad (4.24)$$

Отже, проведений аналіз випадку, коли коефіцієнт $B_0(\omega)$ має періодично розташовані корені на дійсній осі вказує на те, що ці корені не призводять до неоднозначності розв'язку задачі встановлення фази за абсолютним значенням $|B_0(\omega)|$. При відомому розташуванні дійсних коренів функції $|B_0(\omega)|^2$ з періодом Δ_ω : $\omega_0 \pm n\Delta_\omega, n \in \mathbb{N}$ відповідний фазовий доданок $\varphi_{\sin}(\omega)$ можна встановити аналітично згідно з виразом (4.24).

У випадку, коли оптичні товщини шарів досліджуваної структури є співмірними з вузлами регулярної сітки, взятої з кроком $(\delta/2)$, процедуру знаходження комплексного значення $B_0(\omega)$ за абсолютними значеннями $|B_0(\omega)|$ розроблено з використанням властивості періодичності розташування нулів функції $B_0(\omega)$. За аналогією до аналізу, здійсненого для коефіцієнта розсіювання $A_0(\omega)$ при

умові періодичності його нулів, коефіцієнт розсіювання $B_0(\omega)$ можна подати тригонометричним поліномом

$$B_0(\omega) = (v_0(1)\tau^0 + v_0(2)\tau^1 + \dots + v_0(N)\tau^{N-1} + v_0(N+1)\tau^N)\tau^{-N/2}, \quad (4.25)$$

де $v_0(t_p) = \beta_0(p)$ згідно з виразом (4.2) $\forall p \in \overline{1, M_0} \quad \exists t_p \in \mathbb{N} : v_0(p) = t_p \delta$.

Аналогічно можна записати тригонометричний поліном для виразу (4.19)

$$|B_0(\omega)|^2 = (V_0(1)\tau^0 + V_0(2)\tau^1 + \dots + V_0(2N+1)\tau^{2N} + V_0(2N+1)\tau^{2(N+1)})\tau^{-(N+1)}. \quad (4.26)$$

Тоді має місце теорема про ідентифікацію всіх неоднозначних розв'язків сформульованої задачі.

Теорема 4.4: Всі можливі варіанти функцій шуканого комплексного коефіцієнта розсіювання $B_0(\omega)$ можна визначити формулою

$$B_{0,m}(\omega) = v_{0,m}(N+1)\tau^{-N/2} \prod_{n=1}^N (\tau - \exp(i\delta h_{n,m})), \quad (4.27)$$

де коефіцієнти $v_{0,m}(N+1)$ та нулі $h_{n,m}$ визначаються коефіцієнтами та коренями відомого модуля $|B_0(\omega)|$, записаного у вигляді тригонометричного полінома

$$|B_0(\omega)|^2 = B_0(\omega)B_0(-\omega) = V_0(2N+1)\tau^{-(N+1)} \prod_{q=1}^{2N} (\tau - \exp(i\delta s_q)). \quad (4.28)$$

Тут коефіцієнти многочленів $v_{0,m}(N+1)$ та $V_0(2N+1)$ співвідносяться як

$$v_{0,m}(N+1) = \sqrt{V_0(2N+1)/\chi_{2,m}}, \quad \text{де } \chi_{2,m} = (-1)^N \prod_{n=1}^N \exp(i\delta h_{n,m}).$$

Значення $h_{n,m}$, $n = \overline{1, N}$ вибираємо серед коренів $s_q = s'_q + is''_q$ виразу (4.28) таким чином, що $h_{n,m} = s'_l + i\psi_{n,m}|s''_l|$, де l належить множині індексів H , яка містить індекси коренів s_q з нижньої комплексної півплощини, або $H : l \in H | s''_l < 0$. Для заданого розташування коренів $s_q = s'_q + is''_q$ вся множина розв'язків формується комбінаціями знакозмінних коефіцієнтів $\Psi_m = (\psi_{1,m}, \psi_{2,m}, \dots, \psi_{N,m})$, де $\psi_n \in \{-1, 1\}$.

На відміну від функції $A_0(\omega)$, у даному випадку доведення базується на твердженні про можливість розташування коренів $B_0(\omega)$ в усій комплексній

площині. Кожному нулю $h_{n,m}$ функції $B_0(\omega)$ відповідає симетричний відносно початку координат комплексної площини нуль функції $B_0(-\omega)$. Отже, добуток функцій $B_0(\omega)B_0(-\omega) = |B_0(\omega)|^2$ матиме нулі s_q як у верхній, так і в нижній півплощинах, при цьому належність певного нуля s_q до $B_0(\omega)$ чи до $B_0(-\omega)$ встановити неможливо.

Як і у випадку з коефіцієнтом $A_0(\omega)$, для коренів функції $B_0(h_n) = 0$, які є комплексними величинами $\omega = h_n$ з $h_n = h'_n + ih''_n$, спостерігається симетрія відносно уявної осі. Для парних N має місце рівність $h'_q = -h'_{N/2+q}$, де $q = \overline{1, N/2}$. У випадку непарного N один із коренів буде чисто уявним $h''_N = 0$, а інші матимуть симетрію $h'_q = -h'_{(N-1)/2+q}$, де $q = \overline{1, (N-1)/2}$.

З теореми 4.3 бачимо, що за наявності нуля функції $B_0(\omega)B_0(-\omega) = |B_0(\omega)|^2$ у точці $s_q = s'_q + is''_q$, існує два розв'язки задачі про встановлення комплексного значення $B_0(\omega)$. Один із розв'язків матиме нуль в точці $s_q = s'_q + is''_q$, а інший – в $s_q = s'_q - is''_q$. Тому процедура встановлення комплексної функції $B_0(\omega)$ за модулем $|B_0(\omega)|$ полягає у знаходженні значення полінома $|B_0(\omega)|^2$ та оцінці його коефіцієнтів $V_0(q)$, $q = \overline{1, (2N+1)}$. Вибравши серед комплексних коренів s_q полінома (4.28) лише ті, які належать до нижньої комплексної півплощини, та сформувавши всі їх комбінації $\Psi_m = (\psi_{1,m}, \psi_{2,m}, \dots, \psi_{N,m})$, що відповідають знакозмінній уявній частині $\pm s''_q$, можна визначити всі корені можливих розв'язків $B_{0,m}(\omega)$ для $m = \overline{1, C}$.

Відношення коефіцієнтів $\chi_2 = v_0(1)/v_0(N+1)$ знайдемо згідно з процедурою, описаною для χ_1 у доведенні теореми 4.2. З виразів (4.25) та (4.26) слідує, що добуток цих коефіцієнтів рівний $V_0(2N+1) = v_0(1)v_0(N+1)$. Тоді, знаючи корені функції $B_{0,m}(\omega)$, з виразу (4.27) встановлюємо $\chi_2 = (-1)^N \prod_{n=1}^N \exp(i\delta f_n)$. Отже, для

відомого значення $V_0(2N+1)$, постійний множник у виразі (4.27) обчислюємо як $v_0(N+1) = \sqrt{V_0(2N+1)/\chi_2}$.

Кількість C можливих розв'язків задачі про встановлення комплексної величини $B_0(\omega)$ за її модулем можна визначити безпосередньо з властивостей симетрії нулів функції $|B_0(\omega)|^2$. Для парного значення N ця кількість є рівною $C = 2^{N/2}$, а для непарного - $C = 2^{(N-1)/2}$. Теорему доведено.

Як приклад, на рис. 4.1.а наведемо вихідні дані $|B_0(\omega)|$ для оберненої задачі, яку розв'язано числово. Відповідна функція $B_0(\omega)B_0(-\omega)$, продовжена аналітично на всю комплексну площину, має у смузі Π три пари (рис. 4.1.б) недійсних симетричних відносно уявної осі нулів, а тому породжує $2^3 = 8$ різних структур. Нижче (рис. 4.2) наводимо чотири структури; інші чотири отримано із них зміною напрямку z на протилежний.

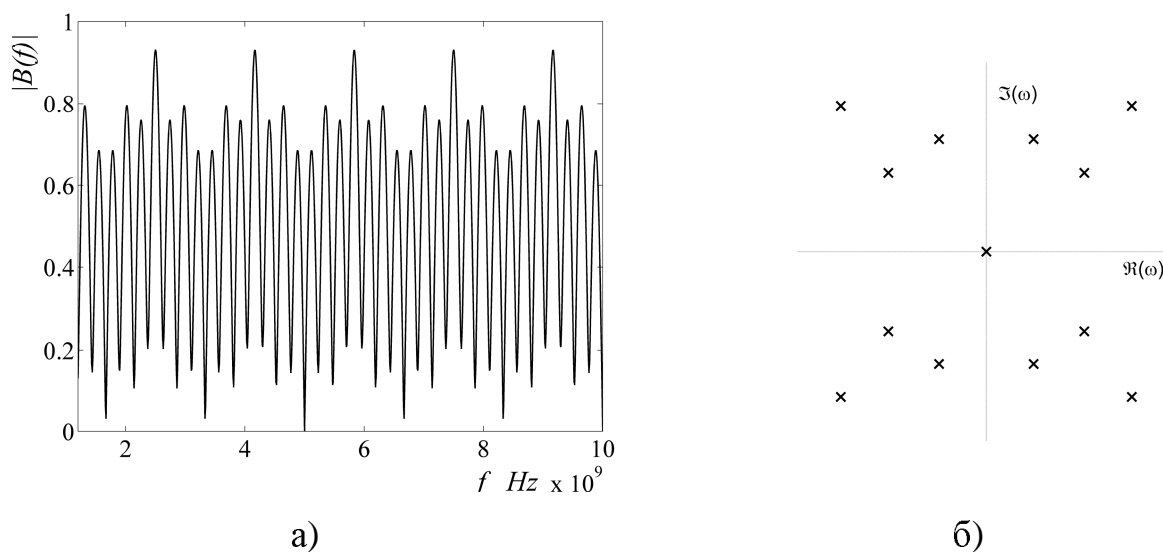


Рис. 4.1. Частотна залежність $f = \omega/(2\pi)$ абсолютного значення коефіцієнта $B_0(f)$ – а), який описується тригонометричним поліномом з шістьма періодичними серіями недійсних нулів, та розподіл однієї серії цих нулів у комплексній площині – б)

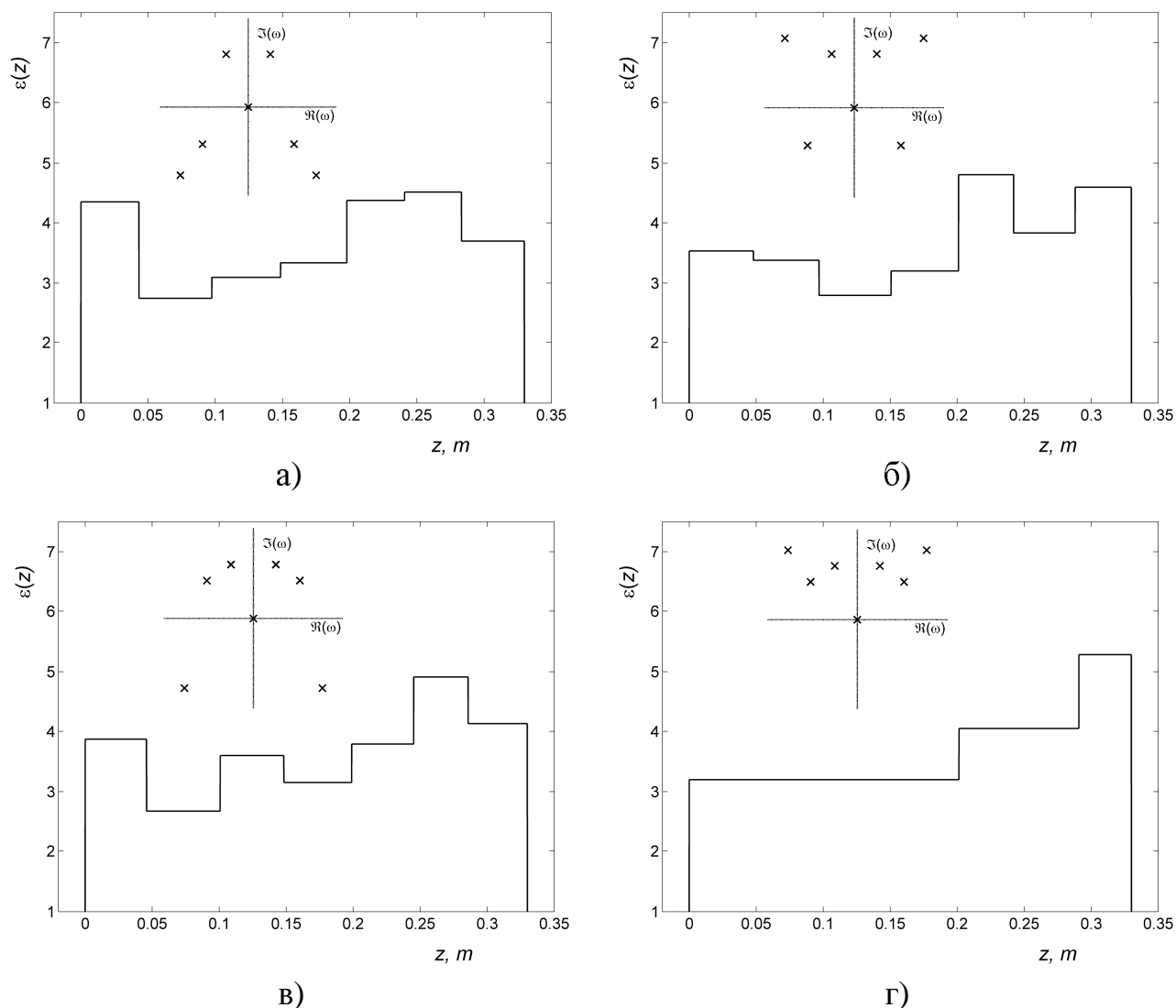


Рис. 4.2. Приклад шаруватих структур та відповідне розташування коренів функції $B_0(\omega)$ у смузі Π , які отримано як розв'язки оберненої задачі для заданого модуля

$$|B_0(\omega)|, \text{ зображеного на рис. 4.1}$$

За відомим абсолютним значенням $|L(\omega)|$ коефіцієнта відбиття (рис. 4.3.б) розв'язано обернену задачу розсіювання, яка включає встановлення комплекснозначних функцій коефіцієнтів розсіювання $A_0(\omega)$ та $B_0(\omega)$, а також визначення параметрів кожного з шарів багат шарової структури. Оскільки розв'язок такої задачі є не єдиним, для заданих вихідних даних знайдено множину розв'язків (рис. 4.4). Серед цієї множини буде той, що відповідає оригінальному (рис. 4.3.а). Можна перевірити, що діелектричні структури, які формують множину

розв'язків оберненої задачі, матимуть коефіцієнт відбиття, ідентичний до того, який подано на рис. 4.3.б. Це свідчить про правильність тверджень, які покладено в основу запропонованого методу вирішення оберненої задачі та забезпечення єдиності її розв'язку.

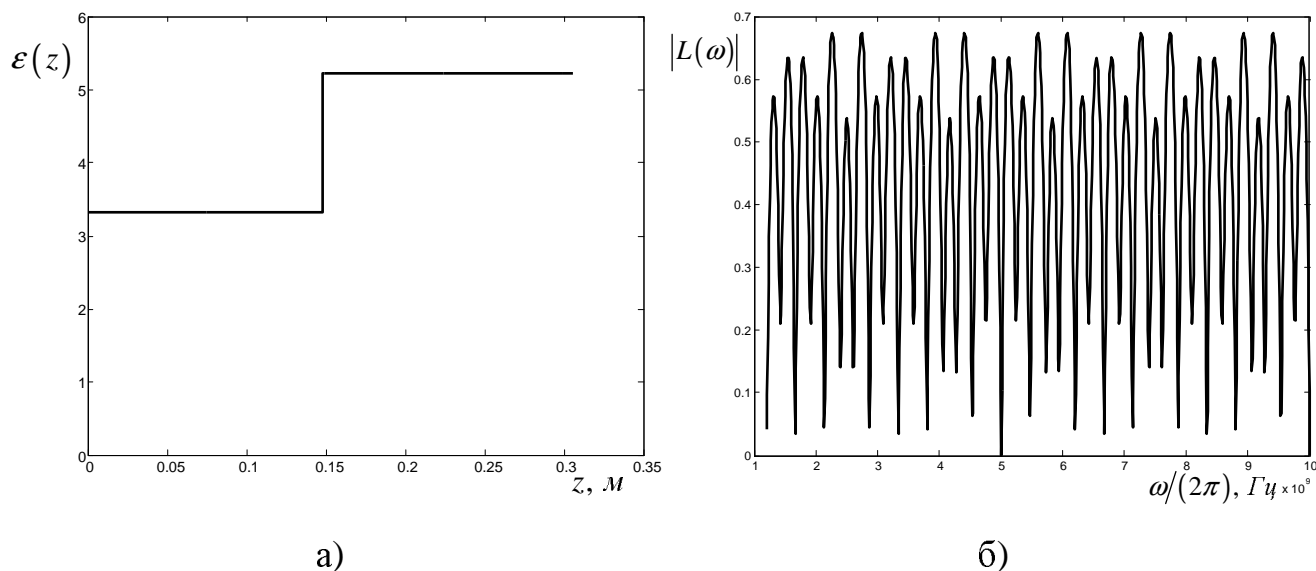


Рис. 4.3. Оригінальна функція діелектричної проникності – а) та модуль коефіцієнта відбиття – б), який використано як вихідні дані для оберненої задачі

4.1.3. Взаємозв'язок задачі проходження плоскої хвилі з оберненою задачею для модуля коефіцієнта відбиття. Питання про взаємозв'язок оберненої задачі розсіювання та проходження хвиль у шаруватих пружних середовищах висвітлене в роботі [4]. У випадку розповсюдження плоскої електромагнітної хвилі у чисто діелектричному середовищі має місце наступна теорема:

Теорема 4.5: Обернена задача розсіювання про знаходження кусково-постійної функції діелектричної проникності $\varepsilon(z)$ при відомому модулі коефіцієнта відбиття $|L(\omega)|$ та обернена задача, де вихідними даними є модуль коефіцієнта проходження $|T(\omega)|$, є еквівалентними.

Доведення слідує з тотожності, яку запишемо у вигляді $|T(\omega)| = \sqrt{1 - |L(\omega)|^2}$.

Крім того, можна показати, що для відомої функції $|T(\omega)|$ можна знайти модулі обох коефіцієнтів розсіювання

$$|A_0(\omega)| = 1/|T(\omega)| \text{ та } |B_0(\omega)| = \sqrt{1 - |T(\omega)|^2} / |T(\omega)|. \quad (4.29) \text{ та } (4.30)$$

Знаючи абсолютні значення функцій $|A_0(\omega)|^2$ та $|B_0(\omega)|^2$, можна встановити всі можливі значення їх комплексозначних оригіналів $A_0(\omega)$ та $B_{0,m}(\omega)$. Це, у свою чергу, дозволяє для кожної з таких пар сформулювати однозначну обернену задачу та знайти функцію діелектричної проникності методом, запропонованим у другому розділі роботи.

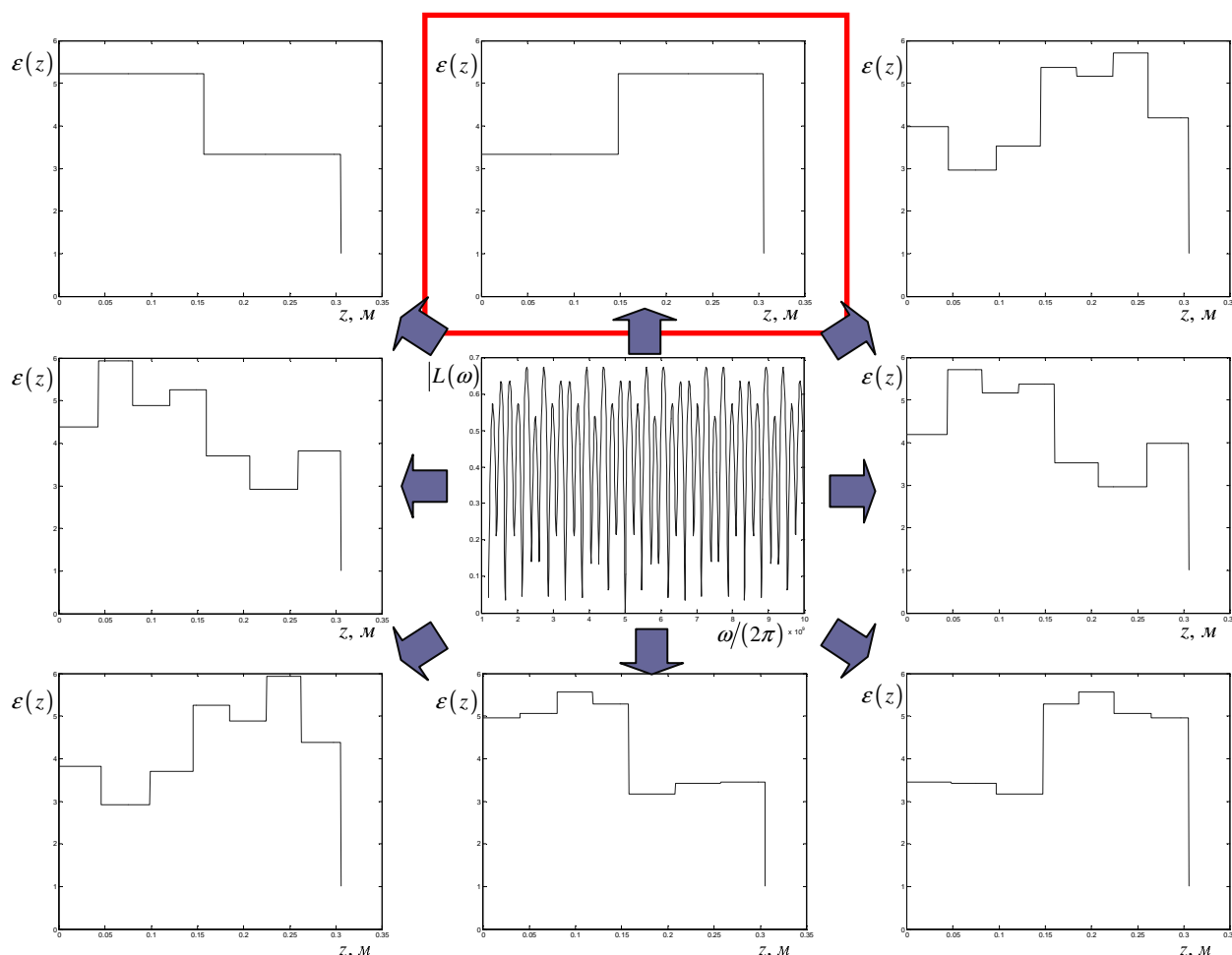


Рис. 4.4. Множина розв'язків оберненої задачі розсіювання, отриманих за модулем коефіцієнта відбиття у центрі рисунку

4.2. Забезпечення єдиності розв'язку одновимірної оберненої задачі проходження та розсіювання плоских хвиль шляхом її перевизначення

Описана в попередньому параграфі процедура знаходження багатозначного розв'язку оберненої задачі має опосередковану практичну цінність, оскільки не дозволяє єдиним чином охарактеризувати досліджувану структуру за вимірними амплітудними характеристиками розсіювання або проходження електромагнітної хвилі. Тому важливою проблемою є регуляризація цієї задачі шляхом накладання додаткових умов, які дозволяють однозначно її розв'язати.

Аналіз формули (2.50) показує, що діелектрична проникність ε_1 та товщина d_1 першого шару є достатніми параметрами для однозначного розв'язання оберненої задачі проходження при заданому $|T(\omega)|$ тільки тоді, коли всі значення оптичних товщин $d_j \sqrt{\varepsilon_j \varepsilon_0 \mu_0}$ є неспівмірними (не належать вузлам будь-якої регулярної сітки). Зауважимо, що за значеннями параметрів γ_p у виразі (4.6), які визначаються вихідними даними $1/|T(\omega)|^2$ оберненої задачі проходження, можна встановити оптичні товщини всіх шарів досліджуваної структури. Отже, за результатами вимірювань можна підтвердити або заперечити можливість однозначного розв'язання оберненої задачі проходження при апріорно відомих параметрах першого шару. На жаль, наявні похибки у вимірних значеннях коефіцієнта проходження $|T(\omega)|$ та похибки оцінювання параметрів моделі (4.6) для коефіцієнта розсіювання $|A(\omega)|^2 = 1/|T(\omega)|^2$ перекреслюють практичне значення такого розв'язку задачі, бо не дають змоги гарантувати неспівмірність оптичних довжин шаруватої структури за неточними даними. Це вказує на необхідність використання додаткової інформації.

Одним із підходів до визначення задачі є формування множини вихідних даних за результатами двох експериментів (рис. 4.5 або рис. 4.6). Ідею такого підходу для визначення неперервних потенціалів в оберненій задачі розсіювання розвинуто в праці [152]. У випадку кусково-постійних функцій діелектричної проникності

постають нові перспективи застосування такого підходу для розв'язання оберненої задачі проходження електромагнітних хвиль. Наступна теорема висвітлює сутність такого підходу.

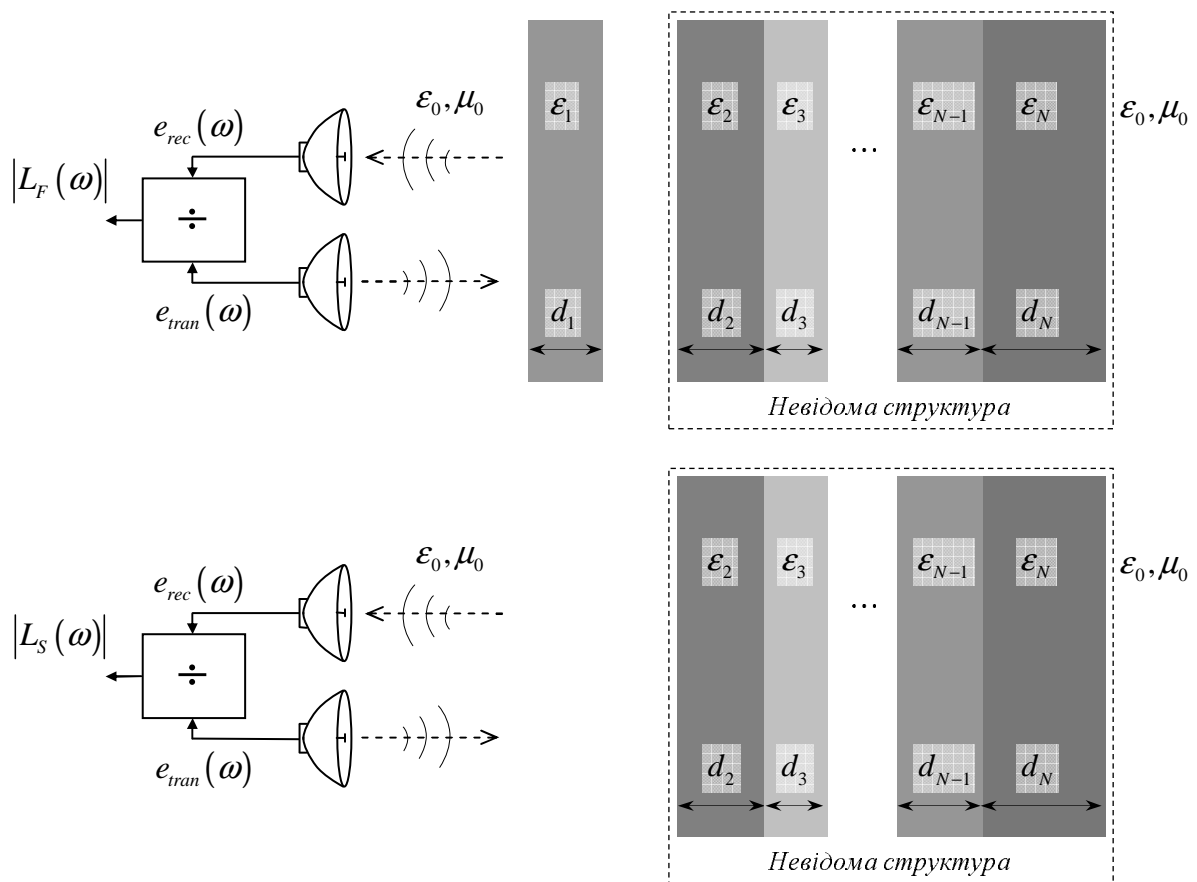


Рис. 4.5. Схеми вимірювання абсолютних значень коефіцієнтів відбиття $|R_F(\omega)|$ та $|R_S(\omega)|$ з метою однозначного визначення параметрів шаруватої діелектричної структури

Теорема 4.6. Для відомих діелектричної проникності ϵ_1 та товщини d_1 першого шару, однозначний розв'язок оберненої задачі проходження відносно параметрів шаруватої структури можна отримати за заданими абсолютними значеннями коефіцієнта проходження крізь всю структуру $|T_F(\omega)| = 1/|A_F(\omega)|$ та коефіцієнта проходження $|T_S(\omega)| = 1/|A_S(\omega)|$ крізь структуру без першого відомого шару.

Для доведення теореми розглянемо моделі проходження хвилі через досліджувану структуру в обох експериментах. Вираз (2.50) дає можливість

записати матриці коефіцієнтів у розв'язках Йоста для повністю невідомої структури та для структури з першим відомим шаром у вигляді

$$\begin{pmatrix} A_F(\omega) & B_F(-\omega) \\ B_F(\omega) & A_F(-\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1(\omega) & B_1(-\omega) \\ B_1(\omega) & A_1(-\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_S(\omega) & B_S(-\omega) \\ B_S(\omega) & A_S(-\omega) \end{pmatrix}, \quad (4.31)$$

де $A_1(\omega)$ та $B_1(\omega)$ - коефіцієнти розв'язків Йоста для діелектричного шару товщиною d_1 з діелектричною проникністю ϵ_1 у вільному просторі з проникністю ϵ_0 . Їх можна виразити як

$$\begin{pmatrix} A_1(\omega) \\ B_1(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (4\rho_1\rho_0)^{-1} \left((\rho_1 + \rho_0)^2 - (\rho_1 - \rho_0)^2 \exp(2i\omega d_1 \sqrt{\epsilon_0\mu_0\epsilon_1}) \right) \\ (4\rho_1\rho_0)^{-1} (\rho_1^2 - \rho_0^2) (1 - \exp(2i\omega d_1 \sqrt{\epsilon_0\mu_0\epsilon_1})) \end{pmatrix}. \quad (4.32)$$

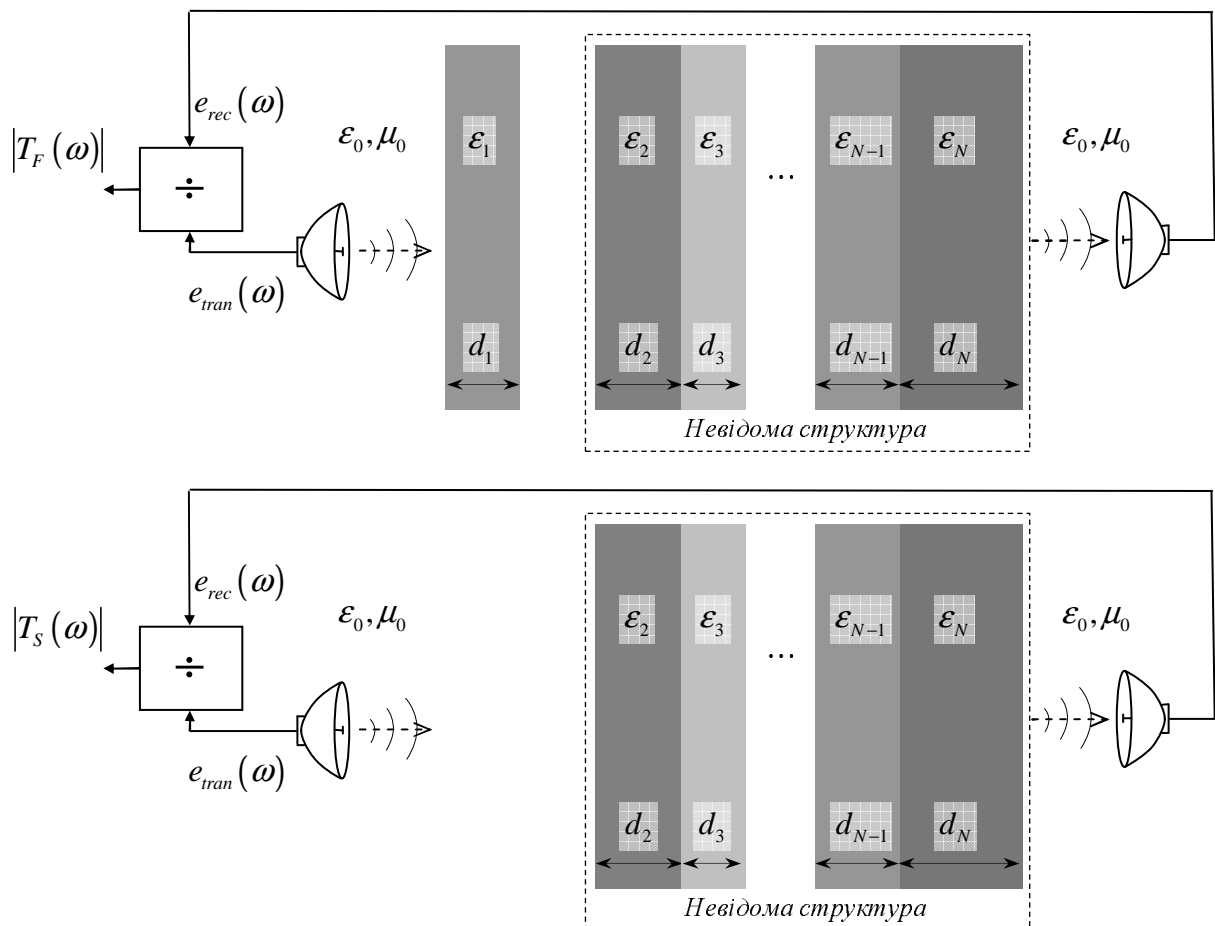


Рис. 4.6. Схеми вимірювання абсолютних значень коефіцієнтів проходження $|T_F(\omega)|$ та $|T_S(\omega)|$ з метою однозначного визначення параметрів шаруватої діелектричної структури

Вважаємо, що результатами двох експериментів є частотні залежності коефіцієнтів проходження $|T_F(\omega)| = 1/|A_F(\omega)|$ та $|T_S(\omega)| = 1/|A_S(\omega)|$, за якими можна обчислити комплексні величини $A_S(\omega)$ та $A_F(\omega)$. Виразивши реконструйовані комплексні значення $A_S(\omega)$ та $A_F(\omega) = A_1(\omega)A_S(\omega) + B_1(-\omega)B_S(\omega)$ згідно з виразом (4.31), знайдемо невідомий коефіцієнт розсіювання шаруватої структури

$$B_S(\omega) = \frac{A_F(\omega) - A_1(\omega)A_S(\omega)}{B_1(-\omega)}. \quad (4.33)$$

Звідси визначимо комплексний коефіцієнти відбиття $R_S(\omega) = B_S(\omega)/A_S(\omega)$ для досліджуваної структури без першого відомого шару

$$R_S(\omega) = \frac{1}{B_1(-\omega)} \left(\frac{A_F(\omega)}{A_S(\omega)} - A_1(\omega) \right). \quad (4.34)$$

Доведення теореми можна завершити посиланням на теорію обернених задач розсіювання [93], де стверджується, що комплексна частотна залежність коефіцієнта відбиття дає достатні вихідні дані для єдиності розв'язку оберненої задачі. Більше того, за комплексними коефіцієнтами розсіювання $A_S(\omega)$ та $B_S(\omega)$, заданими у обмеженому діапазоні частот, можна реконструювати параметри невідомої шаруватої структури, як показано в другому розділі дисертації.

Варто зазначити, що для числових обрахунків вираз (4.33) краще записати як рівняння $B_S(\omega)B_1(-\omega) = A_F(\omega) - A_1(\omega)A_S(\omega)$ відносно невідомого значення $B_S(\omega)$, а його розв'язок шукати, застосувавши один із регуляризаційних підходів, наприклад

$$\tilde{B}_S(\omega) = \frac{(A_F(\omega) - A_1(\omega)A_S(\omega))B_1(\omega)}{B_1(-\omega)B_1(\omega) + \alpha_{reg}}, \quad (4.35)$$

де α_{reg} - коефіцієнт регуляризації, який визначено з розв'язку екстремальної задачі

$$\alpha_{reg} = \arg \min_{\alpha_{reg}} |A_S(\omega)A_S(-\omega) - \tilde{B}_S(\omega)\tilde{B}_S(-\omega) - 1|.$$

Регуляризований розв'язок дає можливість зменшити чутливість знаходження $B_S(\omega)$ до похибок у вихідних даних. Аналогічну процедуру регуляризації можна

застосувати до встановлення комплексного коефіцієнта відбиття $R_S(\omega)$, що визначеного виразом (4.34).

З доведення теореми можна зробити висновок, що розвинутий метод розв'язання оберненої задачі проходження, є «дискретним» варіантом підходу «двох шарів», описаним у роботі [152]. За рахунок того, що параметри першого шару безпосередньо визначають за його відомими характеристиками розсіювання, підхід «двох шарів» [152] зведено до реконструкції фази за модулем аналітичних функцій $|A_S(\omega)|$ та $|A_F(\omega)|$. У випадку кусково-постійного потенціалу це вимагає лише оцінки параметрів скінченних тригонометричних рядів та операцій з їх коефіцієнтами.

Як частковий випадок розглянуто задачу про встановлення параметрів діелектричного шару у вільному просторі за характеристиками проходження плоскої нормально падаючої електромагнітної хвилі. Розв'язок такої оберненої задачі для вихідних даних, визначених абсолютним значенням коефіцієнта проходження та коефіцієнтом відбиття, описано у додатку Б.

Вище наведені теоретичні результати покладемо в основу опрацювання результатів вимірювання для систем неруйнівного контролю шаруватих структур.

На рис. 4.6 приведено схеми експериментів для визначення частотних залежностей абсолютних значень коефіцієнта проходження, за якими потрібно встановити параметри шаруватої структури. У першому експерименті визначається абсолютне значення коефіцієнта проходження $T_F(\omega)$ для всієї структури, а в другому – для структури без першого шару з відомими параметрами $T_S(\omega)$. Результати вимірювань дають можливість обчислити абсолютні значення коефіцієнтів розв'язків Йоста $|A_F(\omega)| = 1/|T_F(\omega)|$ та $|A_S(\omega)| = 1/|T_S(\omega)|$, за якими можна знайти регуляризований розв'язок оберненої задачі. Для проведення одного з експериментів використовують вірцевий плоский однорідний діелектричний лист із відомими діелектричною проникністю ϵ_1 та товщиною d_1 . Якщо такі параметри є невідомими, то проводять окремий експеримент, який дозволить визначити параметри такого діелектричного листа згідно з формулами додатку Б.

Для підтвердження достовірності результатів, отриманих теоретично, проведено числовий експеримент, у якому змодельовано проходження електромагнітної хвилі крізь діелектричну структуру. Перший шар структури має відомі параметри (таблиця 4.1). На рис. 4.7.а показано частотну залежність модуля коефіцієнта проходження крізь таку структуру, а на рис. 4.7.б - коефіцієнт проходження для структури без першого шару. Регуляризований розв'язок задачі про знаходження коефіцієнтів розсіювання $A_s(\omega)$ та $\tilde{B}_s(\omega)$ використано як вихідні дані для оберненої задачі розсіювання. Останню розв'язано відомим методом [7], а результати наведено у таблиці 4.1 у порівнянні з точними параметрами діелектричної проникності та товщини шарів. Незначну відмінність між оригінальними та відновленими параметрами структури можна пояснити процесом регуляризації, який спрямований на знаходження наближеного розв'язку. Загалом, результати числового експерименту свідчать про правильність тверджень, покладених в основу запропонованого методу вирішення оберненої задачі та забезпечення єдиності її розв'язку.

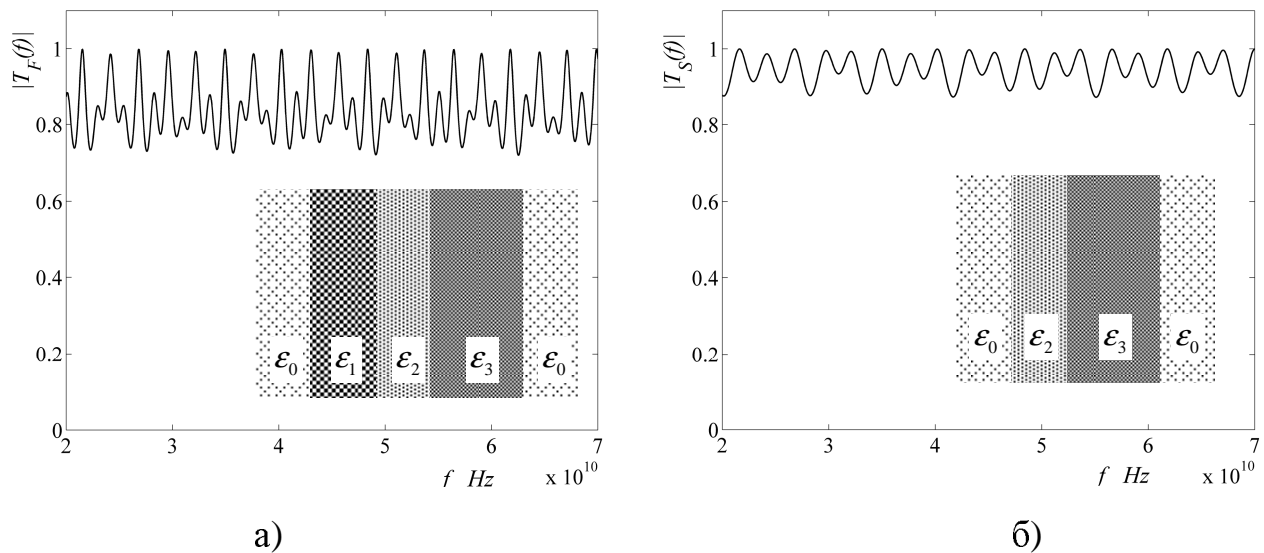


Рис. 4.7. Функції модуля коефіцієнта проходження для шаруватої структури - а) та для цієї ж структури без першого шару - б)

Таблиця 4.1

Значення ε_j / d_j (мм)	Номер шару		
	1	2	3
Точні	7.8000 / 20	2.9000 / 20	2.1000 / 15
Обчислені	7.8000 / 20	2.8933 / 20.023	2.0960 / 15.014

Не зважаючи на те, що теорему 4.6 сформульовано для коефіцієнтів проходження, її результат можна безпосередньо використати у випадку, якщо вихідні дані для оберненої задачі сформульовано за результатами вимірювання модуля коефіцієнтів відбиття, оскільки мають місце тотожності

$$|A_F(\omega)| = 1/|T_F(\omega)| = 1/\left|\sqrt{1-|R_F(\omega)|^2}\right| \quad \text{та} \quad |A_S(\omega)| = 1/|T_S(\omega)| = 1/\left|\sqrt{1-|R_S(\omega)|^2}\right|.$$

Для підтвердження достовірності цього твердження, проведено числовий експеримент. На рис. 4.8 показано частотну залежність модуля коефіцієнта відбиття від шаруватої структури, що досліджується, та від такої ж структури з додатковим діелектричним шаром. Порівняння розв'язку оберненої задачі розсіювання (рис. 4.9.б), вихідними даними якої є вказані вище частотні залежності, з точно відомою діелектричною проникністю досліджуваної структури (рис. 4.9.а) дає підстави стверджувати про ефективність запропонованого методу і для випадку розсіювання.

4.3. Виявлення локальних підповерхневих неоднорідностей у діелектричних матеріалах радіохвильовим надвисокочастотним методом

Останнім часом значно розширилися галузі використання діелектричних та композитних матеріалів, насамперед в авіації, космічній галузі та машинобудуванні, трубопроводному транспорті. Такі матеріали використовуються у несучих конструкціях, захисних та ізоляційних покриттях. У процесі виготовлення та експлуатації цих виробів можуть виникати дефекти типу розшарувань, не проклеїв та інших пошкоджень. Радіохвильові методи неруйнівного контролю є ефективними

для дослідження таких об'єктів. Порушення цілісності або однорідності структури виробів призводить до зміни параметрів електромагнітної хвилі, відбитої від об'єкта контролю. Суттєвими перевагами радіохвильового методу є його проникність та можливість безконтактного дослідження з одностороннім доступом до виробу. Серед широкого частотного спектру радіовипромінювання перспективним є міліметровий діапазон довжин хвиль, оскільки із зменшенням довжини хвилі зондувального сигналу покращується просторова вибірковість неруйнівного контролю.

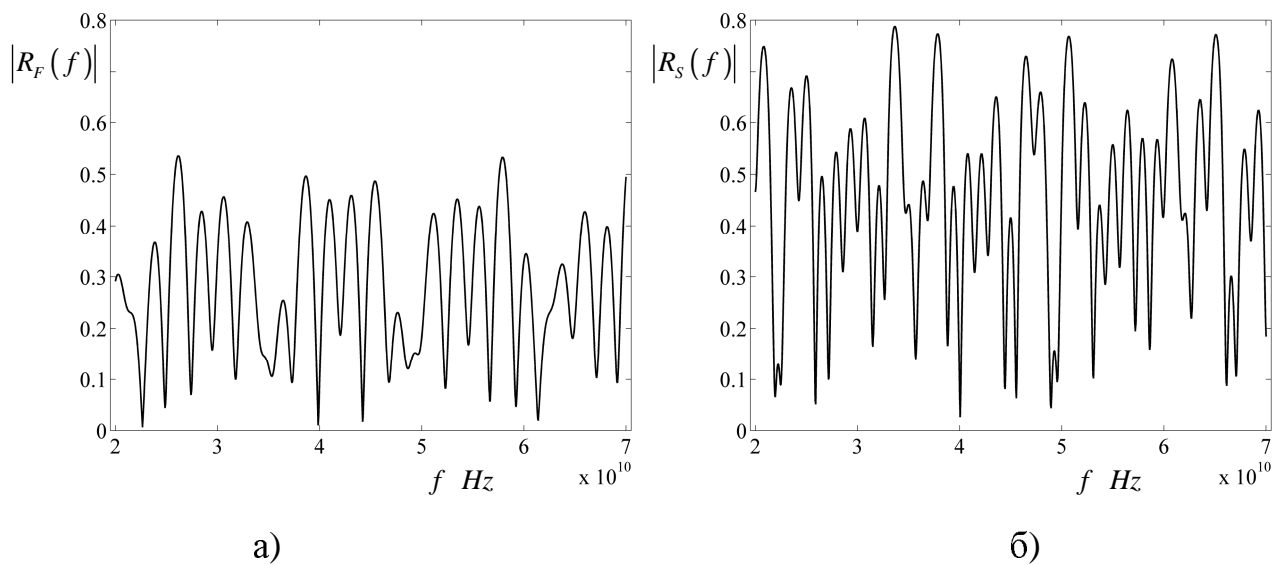


Рис. 4.8. Функції модуля коефіцієнта відбиття для шаруватої структури – а) та для цієї ж структури без першого шару – б)

В основі надвисокочастотного електромагнітного неруйнівного контролю лежить ефект домінуючого розсіювання електромагнітних хвиль на внутрішніх неоднорідностях діелектриків [54, 59, 169, 170, 266, 273, 274]. Проблеми неруйнівного контролю вирішують інструментами теорії вимірювань [267], теорії обробки сигналів [263] та теорії обернених задач [56,62]. Обробка вимірянних даних при цьому полягає у здобутті інформації про внутрішню структуру об'єктів дослідження.

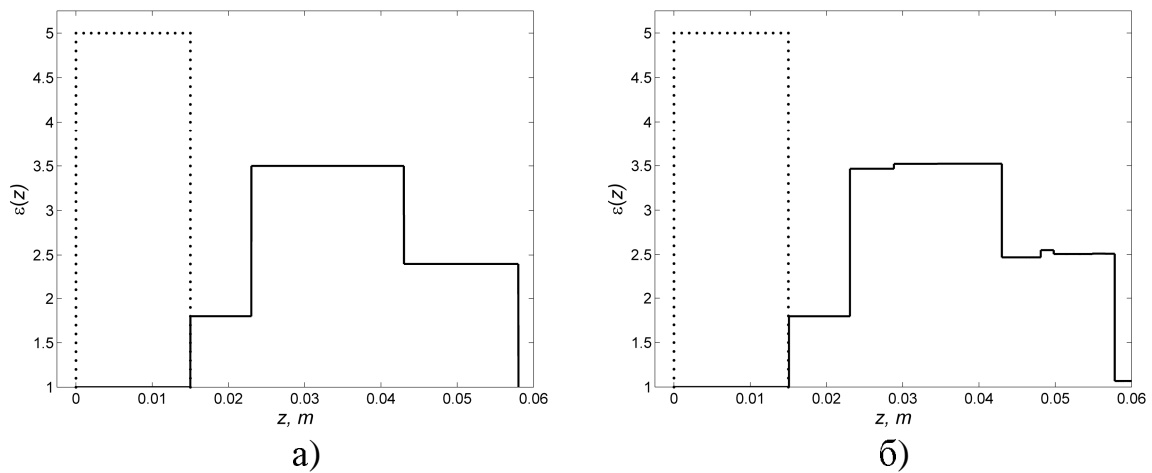


Рис. 4.9. Профіль тришарового діелектрика з тестовим шаром – а) та реконструкція його діелектричної проникності – б), отримана з використанням двох функцій модуля коефіцієнта відбиття структури – з та без тестового шару

Розсіяне поле вимірюють багаточастотним зондуванням або у часовій області. Для неруйнівного контролю діелектричних матеріалів прийнятне багаточастотне зондування [266], коли монохроматичну хвилю вимірюють на кожній окремій частоті з визначеної сітки частот. Відомо, що роздільна здатність та точність надвисокочастотного методу неруйнівного контролю безпосередньо залежить від ширини смуги частот. Вартість вимірювальних засобів залежить від типу детектора та (знову ж) ширини частотної смуги. Для фазових вимірювань детектор будують за квадратурною схемою [268], що досить коштовно та вимагає складної калібрації. Використовуючи квадратичний детектор, визначають лише амплітуду, тоді як фазові взаємозв'язки розсіяного електромагнітного поля залишаються втраченими. Розвиваючи теорію обернених задач розсіювання [3, 5-9], виявили можливість встановлювати параметри багатошарових діелектриків за наявності лише енергетичних даних про розсіяне поле [2].

У цьому розділі наведено теоретичне обґрунтування розв'язку обернених задач неруйнівного контролю діелектричних об'єктів на основі запропонованого підходу за відносно простої конфігурації схеми вимірювання, а також математично обґрунтовано метод обробки даних, який дає можливість ідентифікувати підповерхневі неоднорідності у діелектриках.

4.3.1. Опис схеми вимірювань. У дослідженні обмежено клас досліджуваних матеріалів і сконцентровано увагу лише на плоских шаруватих діелектриках, що мають діелектричні та провідні включення. У процесі вимірювань аналізуємо лиш розсіяне поле (рис. 4.10). При цьому фіксуємо значення випроміненого і розсіяного сигналів квадратичними детекторами. Вважатимемо, що підповерхневі неоднорідності мають поверхні розділу, паралельні до зовнішньої поверхні діелектрика, і їх вклад у розсіяне зворотнє поле істотний. Випромінювальну та приймальну антени сумістило (елемент 7 на рис. 4.10), а для розділення випроміненої енергії та енергії розсіяного поля використаємо подвійний Т-міст. Така схема дає можливість калібрувати вимірювальний пристрій відбивним фазоповертачем та додатковим вимірювачем потужності [169, 170].

Під час вимірювання послідовно визначали енергію електромагнітного поля детекторами для скінченної множини частот із діапазону 58...76 ГГц:

$$u_{\text{ex}}(\omega) = \frac{U_{\text{ref}}(\omega)}{U_{\text{inc}}(\omega)}. \quad (4.36)$$

Множина значень $u_{\text{ex}}(\omega)$ для різних частот ω визначатиме вихідні дані для розв'язання обернених задач неруйнівного контролю.

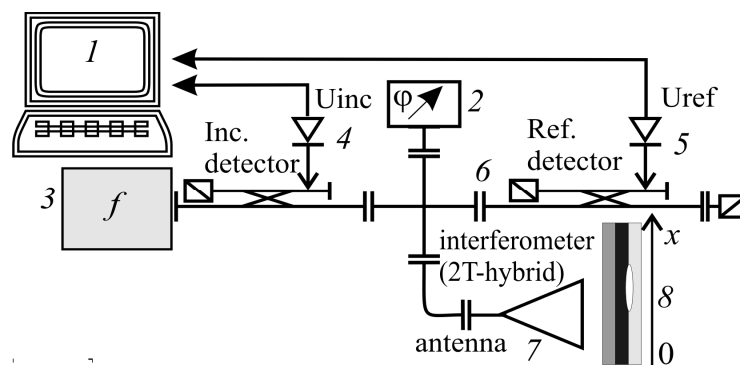


Рис. 4.10. Схема автоматизованого вимірювального пристрою для надвисокочастотного неруйнівного контролю діелектриків:

- 1 – персональний комп'ютер; 2 – відбивний фазоповертач; 3 – керований генератор частот; 4, 5 – детектори випроміненого і розсіяного сигналів; 6 – подвійний Т-міст; 7 – антена; 8 – діелектрична структура з механізмом переміщення

Вимірювання повторювали для кожної заданої точки над поверхнею досліджуваного об'єкта. Сканування реалізовували, переміщаючи об'єкт відносно нерухомої антени у площині, паралельній поверхні. Очевидно, вплив елементів об'єкта на розсіяне поле залежатиме від спрямовувальних властивостей антени. Для спрощення аналізу використаємо припущення, що у кожній точці спостереження середовище описує модель плоскошаруватого діелектрика.

4.3.2. Математична модель вимірювального сигналу. Метою даного параграфу є встановлення математичної моделі вимірюваного сигналу, яка впливає з конструктивних особливостей вимірювальної системи. Ця модель слугуватиме базисом для математичного формулювання обернених задач про визначення параметрів шаруватого діелектрика.

Оскільки строгий аналіз поля у хвилевідному тракті вимірювальної системи дуже складний, використаємо сигнальну модель, яка загалом добре описує процеси розповсюдження хвилі у надвисокочастотних колах. Вважатимемо, що генератор збуджує у хвилеводі гармонічний сигнал $S_{\text{osc}}(\omega) = 2 \exp(i\omega t)$, де $\omega = 2\pi f$ – радіальна частота, а t – час. Згенерована хвиля розділяється навпіл, потрапляючи у два плеча 2Т-моста, які навантажені антеною та відбивним фазовертачем. У плечі з фазовертачем загальне поле визначатиме сума прямої та зсунутої за фазою відбитої хвилі

$$S_{\text{phase}}(\omega) = \exp(i\omega t) - \exp(i\varphi) \exp(-i\omega t). \quad (4.37)$$

Поле в антенному плечі моста формуватиме хвиля, відбита від поверхні досліджуваного об'єкта

$$S_{\text{ant}}(\omega) = \exp(i\omega t) - G(\omega) \exp(-i\omega t), \quad (4.38)$$

де множник $G(\omega)$ можна трактувати як коефіцієнт відбиття від плоскошаруватої структури: $G(\omega) \approx R(\omega)$, нехтуючи діаграмоспрямовувальними ефектами антени, а також припускаючи повне узгодження хвильового опору антени з опором середовища та нормальне падіння плоскої хвилі на поверхню шаруватої структури.

У плечі детектора розсіяного сигналу хвилі з амплітудою $S_{\text{ant}}(\omega)$ та $S_{\text{phase}}(\omega)$ будуть у протифазі. Потужність електромагнітної хвилі у цьому плечі можна визначити за напругою на виході детектора розсіяного сигналу

$$\begin{aligned} u(\omega) &= |S_{\text{phase}}(\omega) - S_{\text{ant}}(\omega)|^2 = \\ &= |\exp(i\varphi)\exp(-i\omega t) - G(\omega)\exp(-i\omega t)|^2 = |\exp(i\varphi) - R(\omega)|^2. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Забезпечивши відсутність фазового зсуву ($\varphi = 0$) у відбивному фазовертачі під час калібрації, отримаємо значення напруги на детекторі

$$u(\omega) = |1 - R(\omega)|^2. \quad (4.40)$$

Комплексний коефіцієнт відбиття нормально падаючої плоскої хвилі $R(\omega)$, що входить у модель спостереження (4.40), залежить від параметрів шаруватої структури, зокрема, хвильових опорів $\rho_j = \sqrt{\mu_j \mu_v / \varepsilon_j \varepsilon_v}$ кожного з шарів та їх товщин h_j . Тут через μ_v і ε_v позначено абсолютну магнітну та діелектричну проникності вакууму. Введено припущення, що середовища шарів ізотропні, немагнітні ($\mu_j = 1$) та безвтратні (відносні значення діелектричної проникності ε_j - дійсні).

У відповідності до тверджень, сформульованих у другому розділі, коефіцієнт відбиття від діелектричної шаруватої структури запишемо у вигляді

$$R(\omega) = \frac{B_0(\omega)}{A_0(\omega)}. \quad (4.41)$$

За наявності у структурі плоскої ідеально провідної поверхні умову відсутності падіння хвилі на одну з поверхонь необхідно замінити на умову про нульове тангенціальне значення напруженості поля на цій поверхні в точці s_N . Тоді, згідно з результатами, отриманими у третьому розділі, коефіцієнт відбиття багат шарової діелектричної структури з ідеально провідною основою матиме вигляд

$$\tilde{R}(\omega) = \frac{B_0(\omega) - \bar{A}_0(\omega)\exp(2i\omega s_N)}{A_0(\omega) - \bar{B}_0(\omega)\exp(2i\omega s_N)}. \quad (4.42)$$

Вирази (4.42) та (4.41) для коефіцієнтів відбиття $\tilde{R}(\omega)$ та $R(\omega)$ є розв'язками прямої задачі розсіювання, яка відповідає одновимірному рівнянню Гельмгольца. Разом з моделлю спостереження (4.41) вирази для $\tilde{R}(\omega)$ або $R(\omega)$ дають змогу визначити хвильові опори ρ_j та товщини h_j шарів структури.

Для заданої комплекснозначної частотної залежності коефіцієнта відбиття обернену задачу розсіювання можна точно розв'язати як для шаруватої діелектричної структури [7], так і шаруватої структури на ідеально провідній поверхні [3]. Тому логічно сформулювати задачу про визначення коефіцієнта відбиття за вимірними даними $u(\omega) = |1 - \tilde{R}(\omega)|^2$ або $u(\omega) = |1 - R(\omega)|^2$, що передбачає реконструкцію фази деякої комплекснозначної функції $(1 - R(\omega))$ за її модулем $|1 - R(\omega)|$. Враховуючи аналітичність шуканої функції $(1 - R(\omega))$, а також її відмінність від нуля на дійсній осі та у комплексній півплощині, задачу реконструкції фази, в принципі, можна розв'язати, використовуючи інтеграл Коші. На відміну від задачі реконструкції фази за модулем коефіцієнта відбиття $|R(\omega)|$ [2] вона має єдиний розв'язок. Але похибки вимірювань та ідеалізація моделі вимірювального сигналу (4.40) призведуть до втрати точності під час реконструкції фази, що також робить строгий розв'язок оберненої задачі неприйнятним для практичної імплементації.

Тому прийнято рішення встановити множину параметрів досліджуваних структур, які можна робастно визначити за умови, що вимірні значення сигналу (4.40) задано з похибкою у скінченному діапазоні робочих частот вимірювального пристрою.

4.3.3. Наближена оцінка параметрів діелектричної структури. Через неможливість застосувати процедуру знаходження точного розв'язку оберненої задачі виникає потреба встановити наближений, який трактуватимемо як оцінку деяких параметрів досліджуваної структури. Обґрунтування цієї ідеї містить додаток В.

В основі використаного там підходу покладено факт, що функції $\text{Re}(R(\omega))$ та $|R(k)|^2$ можна виразити у вигляді тригонометричного ряду (В.8) та (В.9). Коефіцієнти цих рядів можна наближено виділити з ряду, в який розкладено вихідну функцію $u(\omega)$

$$\begin{aligned} u(\omega) &= 1 + |R(\omega)|^2 - 2\text{Re}(R(\omega)) = \\ &= v_0 + \sum_{n=1}^{\infty} v_n \cos(\omega\chi_n) = 1 + \eta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \cos(\omega\vartheta_n) - 2 \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_l \cos(\omega\tau_l), \end{aligned} \quad (4.43)$$

де v_n та $0 < \chi_1 < \chi_2 < \dots < \chi_n < \dots$ – додатні величини.

Аналогічну до (4.43) форму запису моделі вимірювань можна застосувати до аналізу поля, розсіяного на шаруватій структурі з ідеально провідною поверхнею: $u(\omega) = 1 + |\tilde{R}(\omega)|^2 - 2\text{Re}(\tilde{R}(\omega)) = 2 - 2\text{Re}(\tilde{R}(\omega))$. Оскільки тут має місце рівність $|\tilde{R}(\omega)|^2 = 1$, модель (4.43) має більш загальний вигляд.

За результатами вимірювань функції $u_{\text{ex}}(\omega)$ для скінченної множини частот $\omega \in [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_K]$ необхідно оцінити коефіцієнти v_n ряду (4.43) та аргументи косинусів χ_n . Це можна реалізувати методами спектрального аналізу.

Як показано у додатку В, для відомих параметрів v_n та χ_n можна наближено встановити значення перших коефіцієнтів σ_n , $\tilde{\sigma}_n$, τ_n та $\tilde{\tau}_n$, $n = [0, 1]$ ряду, яким зображено коефіцієнти відбиття $\text{Re}(R(\omega))$ та $\text{Re}(\tilde{R}(\omega))$. Знайдені значення дозволяють оцінити перші шари досліджуваних структур, оскільки перші два доданки рядів (В.8) та (В.9) дають повну інформацію про розсіювання плоскої хвилі на перших двох поверхнях розділу.

Розглянемо задачу про визначення параметрів матеріалів, що формують перші дві поверхні розділу, та розташування цих поверхонь відносно фазового центра антени. Знаючи хвильовий опір середовища ρ_0 , за відомими коефіцієнтами ряду σ_0 та σ_1 можна встановити хвильові опори ρ_1 та ρ_2 перших двох шарів структури:

$$\rho_1 = \rho_0(1 + \sigma_0)/(1 - \sigma_0) = \rho_0(1 + \tilde{\sigma}_0)/(1 - \tilde{\sigma}_0), \quad (4.44)$$

$$\rho_2 = \rho_1(r_{0,1}r_{0,1} - 1 - \sigma_1)/(r_{0,1}r_{0,1} - 1 + \sigma_1), \quad (4.45)$$

де параметр $r_{0,1} = (\rho_0 - \rho_1) / (\rho_0 + \rho_1)$ визначено за оцінкою параметра ρ_1 у виразі (4.44).

Якщо другим шаром структури є ідеально провідна поверхня, хвильовий опір першого діелектричного шару можна встановити за формулою (4.44), тоді як оцінка (4.45) не має змісту. Не зважаючи на це, ідеально провідну поверхню у структурі можна ідентифікувати, використавши умову $\tilde{\sigma}_1^I = -(1 - r_{0,1} r_{0,1})$, встановлену під час вимірювань.

За значеннями аргументів τ_0 та τ_1 першого та другого косинусів у рядах (В.8) та (В.9) можна оцінити електричну відстань до досліджуваної структури: $s_0 / \sqrt{\epsilon_v \mu_v} = \tau_0 / (2\sqrt{\epsilon_v \mu_v}) = \tilde{\tau}_0 / (2\sqrt{\epsilon_v \mu_v})$ та електричну товщину $d_0 / \sqrt{\epsilon_v \mu_v} = (\tau_1 - \tau_0) / (2\sqrt{\epsilon_v \mu_v}) = (\tilde{\tau}_1 - \tilde{\tau}_0) / (2\sqrt{\epsilon_v \mu_v})$ першого шару. Визначити метричні значення цих параметрів не важко, оскільки електричні параметри відповідних середовищ відомі. Зокрема, товщина першого шару $h_0 = d_0 / \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_v \mu_v} = (\tilde{\tau}_1 - \tilde{\tau}_0) \rho_1 / (2\mu_v)$.

Таким чином, можна стверджувати про можливість оцінювання параметрів шаруватої структури за дійсними значеннями коефіцієнтів відбиття $\text{Re}(R(\omega))$ або $\text{Re}(\tilde{R}(\omega))$. Відповідна процедура не потребує апріорних даних про наявність чи відсутність ідеально провідної поверхні у шаруватій структурі. Крім того, такий підхід вкладається у загальну теорію одновимірних обернених задач для рівняння Гельмгольца, оскільки отримані оцінки для хвильових опорів (4.44) та (4.45) збігаються з розв'язками, які можна одержати методом пошарового зрізання [9, 62, 149]. Останній добре себе зарекомендував, коли комплексний коефіцієнт відбиття заданий точно для всіх дійсних значень частоти.

4.3.4. Аналіз та інтерпретація результатів експериментів. Для підтвердження достовірності теоретично сформульовані вище висновки підтверджено експериментально. Експерименти реалізовано на автоматизованому стенді надвисокочастотної діагностики у смузі частот 53-78 ГГц. Зразки для

дослідження розміщено на платформі, яка може переміщатися у площині апертури антени ХУ (див. рис.4.11), розміри якої 10×20 мм. Побудову профілю внутрішньої структури об'єкта контролю здійснено поздовжнім скануванням зразка з кроком 2 мм.

Скануючи об'єкт контролю та здійснюючи високороздільне спектральне оцінювання імпульсного відгуку за результатами вимірювань, можна побудувати розподіл значень деякої індикаторної функції. Один із параметрів x цієї функції змінюється з відносним переміщенням антени вздовж поверхні структури, а інший відповідає глибині z . Прийнято також, що для кожної величини z індикаторна функція обчислюється на основі методу Сапон [242]. Залежність величини від параметрів x та z називатимемо профілем структури та подамо його у вигляді зображення, де яскравість кожного пікселя є обернено пропорційною до значення індикаторної функції.

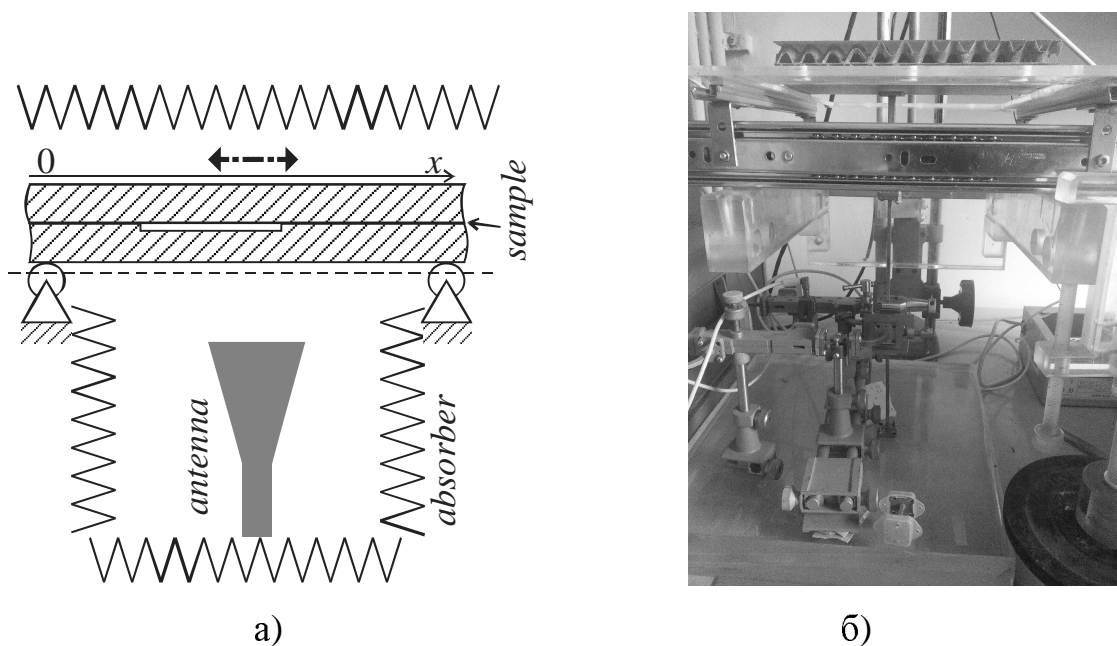


Рис. 4.11. Сканування об'єкта дослідження:
схема – а) та фотографія – б) вимірювального стенду

В якості експериментальних зразків використано діелектрики з внутрішньою структурою, що містить неоднорідності. Досліджені випадки відповідають двом найбільш поширеним типам неоднорідностей діелектричних конструкційних матеріалів: перший – модель дефекта типу розшарування у пластині товщиною

0,5 мм, другий – металічне включення у діелектрику (рис. 4.12.а та 4.13.б). До нижньої поверхні структур прикладено металеву балку, яку можна розглядати як елемент конструкції. Результати сканування та обробки вимірних значень напруги на детекторі розсіяного поля подано у вигляді профілю (рис. 4.12.б і 4.13.в).

Як бачимо, максимум індикаторної функції зафіксовано у точках, що відповідають поверхням розділу матеріалів. Найчіткішою є візуалізація першої поверхні розділу та поверхні між діелектриком та провідною основою. Інтенсивність другої - значно менша, що можна пояснити нерівністю $|\sigma_0| > |\sigma_1|$. Натомість, поверхні розділу між діелектриком і провідником є інтенсивнішими, що відповідає нерівності $|\tilde{\sigma}_1| > |\sigma_1|$.

На рис. 4.12.б вдалося виділити розшарування між пластинами. Це можна пояснити так: дійсне значення коефіцієнта відбиття є результатом сумування великої кількості тригонометричних функцій, аргументи яких відрізняються несуттєво. Метод Сарон не дає змогу розділити окремо ці тригонометричні функції, а усереднює енергію всіх коефіцієнтів на виході побудованого фільтра. З рисунка можна однозначно оцінити електричну глибину розшарування та електричну товщину однорідної діелектричної пластини.

Другий зразок (рис. 4.13.а та рис. 4.13.б) містить металічні циліндричні включення в однорідній діелектричній пластині. Не зважаючи на те, що в основі моделі та запропонованого методу обробки лежить припущення про плоский характер хвилі та поверхонь розділу середовищ, за результатами обробки можна стверджувати, що метод також придатний для ідентифікації неплоских металічних включень (рис. 4.13.в). Такий ефект пояснюється відбиттям хвилі від елементів включень, нормалі яких паралельні поверхні структури. Таким чином, за максимумом інтенсивності на побудованих профілях можна встановити електричну глибину залягання провідного включення.

Як видно з рис. 4.13.в, завдяки просторовій неоднорідності поля антени, роздільна здатність вздовж координати x є достатньою достатня для розділення циліндричних металічних включень.

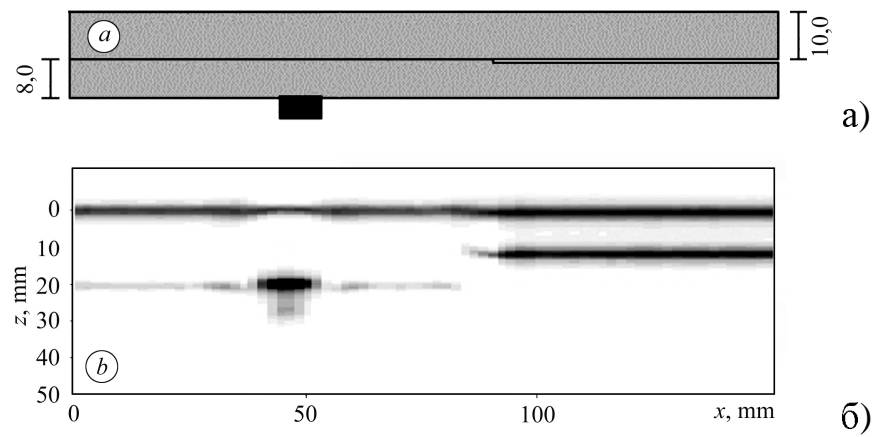


Рис. 4.12. Модель розшарування – а) та побудований за вимірними даними профіль структури – б).

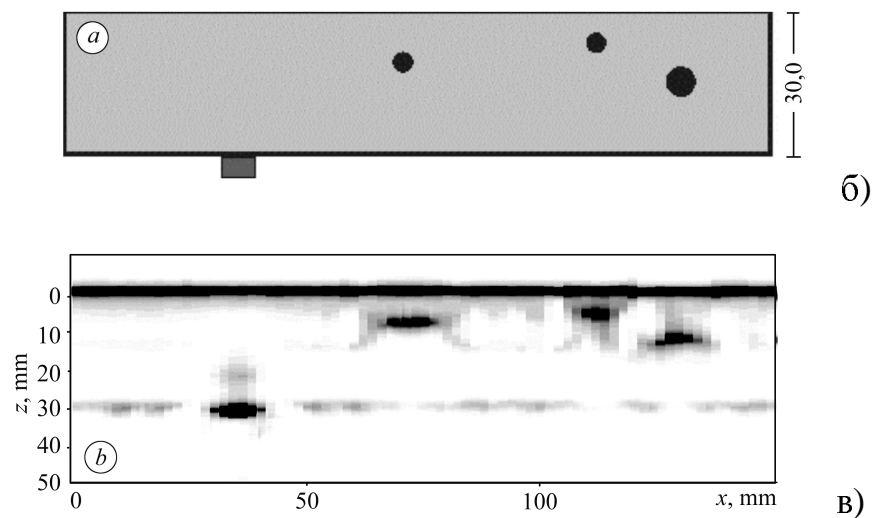
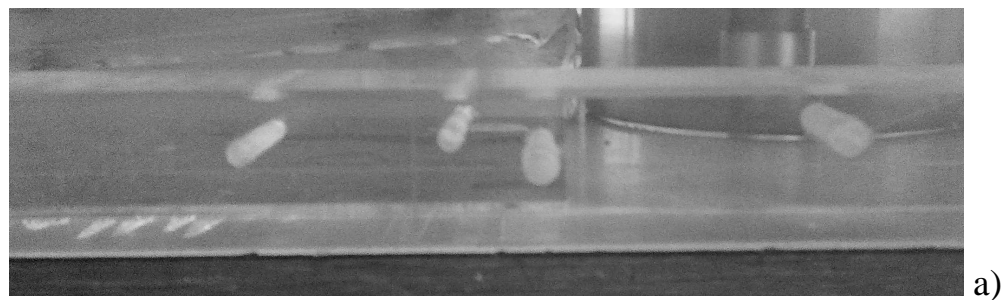


Рис. 4.13. Фотографія діелектричного шару з провідними включеннями – а), його схематичне зображення – б) та побудований за вимірними даними профіль – в)

На рис. 4.14 і 4.15 показано результати дослідження структури, що моделює пошкодження металевого листа під діелектричним покривом. Структура складається з діелектричної пластини і металеві основи з отвором (рис. 4.14) та частковим пошкодженням типу каверни (рис. 4.15)

З рисунків 4.14.б і 4.15.б видно, що за результатами одно- і двовимірного сканування можна оцінити товщину покриву, а також величину і форму пошкодження металевого листа під ним (4.15.в).

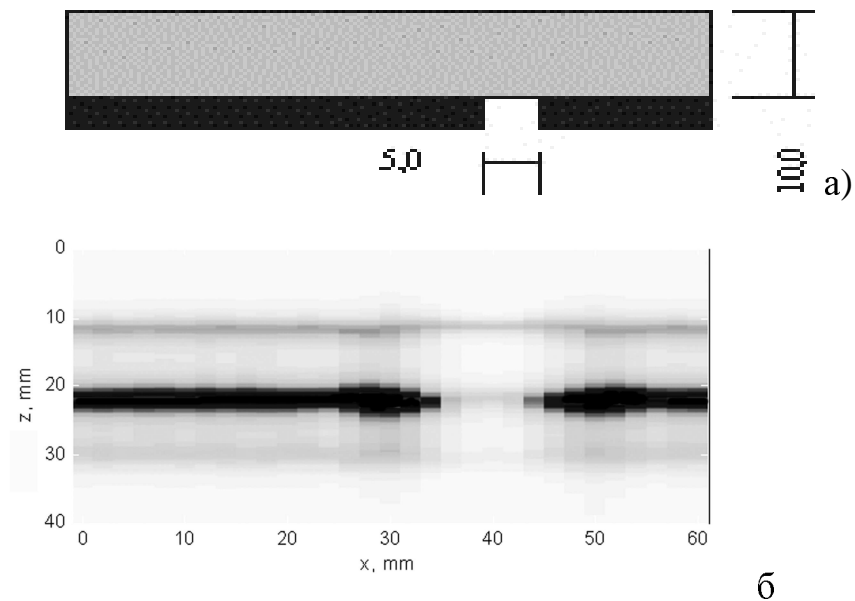


Рис. 4.14. Металічна основа з наскрізним отвором під діелектричним шаром –а) та побудований за вимірними даними профіль структури – б)

На рис. 4.16 показано результат дослідження зразка композитного матеріалу, який використовується в обтічниках носової радіолокаційної системи літака АН-124. Такий композит є п'ятишаровою структурою, що складається з трьох склопластикових листів із встановленими між ними ребрами жорсткості. Такі ребра утворюють подвійну чарункувату структуру. Загальна товщина структури складає 30 мм (рис. 4.16.а), а довжина області сканування – 140 мм. При $x > 90$ мм має місце повний відрив верхнього листа від склопластикової структури, що утворює ребра жорсткості. На профілі структури, побудованому за результатами сканування (рис. 4.16.б) можна розрізнити бездефектну і дефектну ділянки. На рис. 4.16.в зображено результат двовимірного сканування зразка антенного обтічника, який відповідає зареєстрованому коефіцієнту відбивання від поверхні у кожній точці сканування. На зображенні можна частково спостерігати внутрішню структуру зразка та ідентифікувати місця склеювання ребер жорсткості з верхнім листом.

З приведених результатів видно, що побудовані зображення несуть інформацію про внутрішню структуру зразків. Це ще раз підтверджує, що радіохвильовий метод є ефективним для здійснення неруйнівного контролю композитних матеріалів, оскільки дозволяє виявляти пошкодження та дефекти, а запропонований підхід до опрацювання вимірних сигналів дозволяє оцінити параметри перших двох поверхонь розділу.

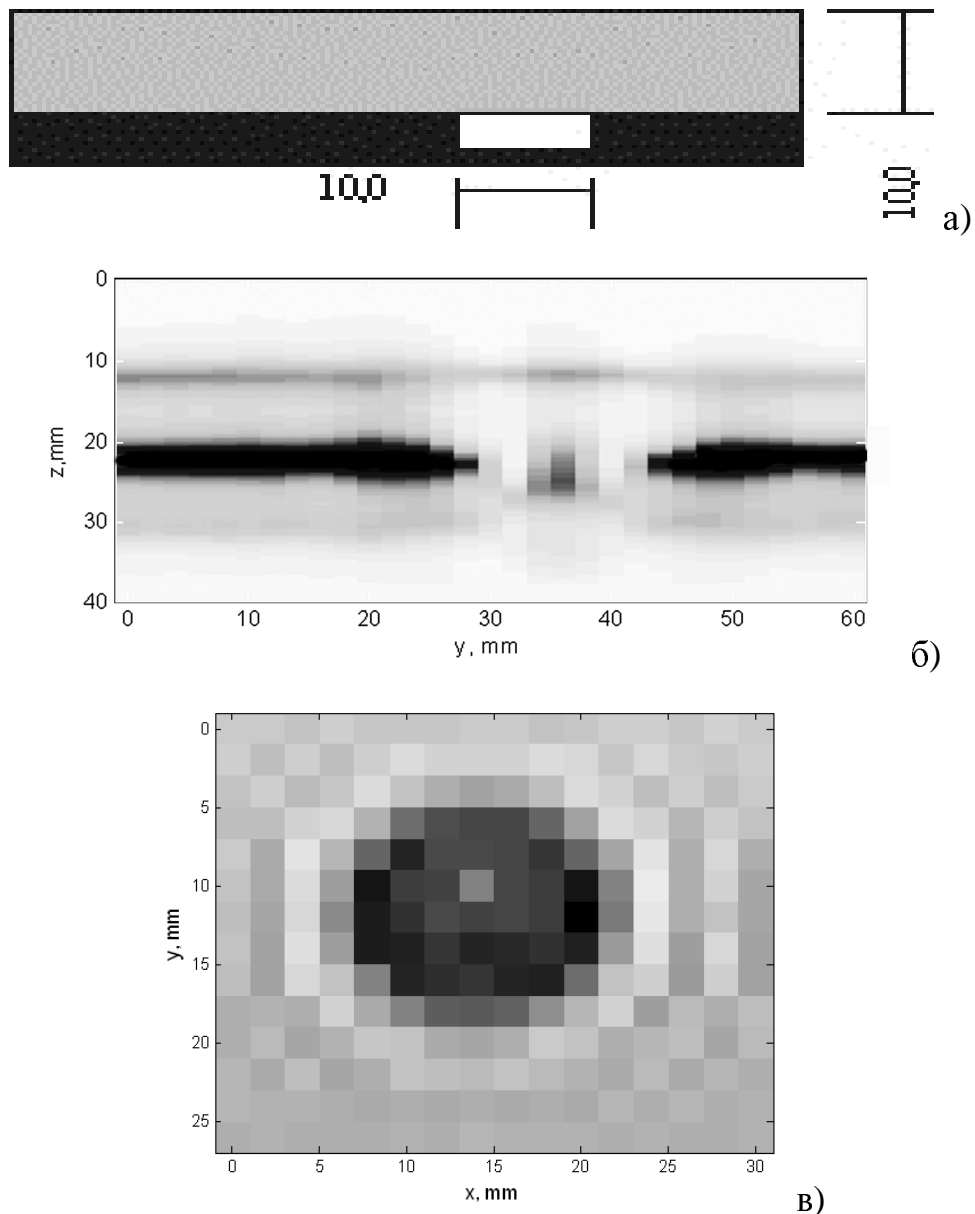
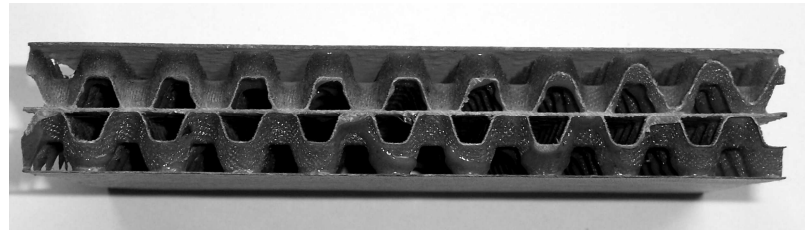
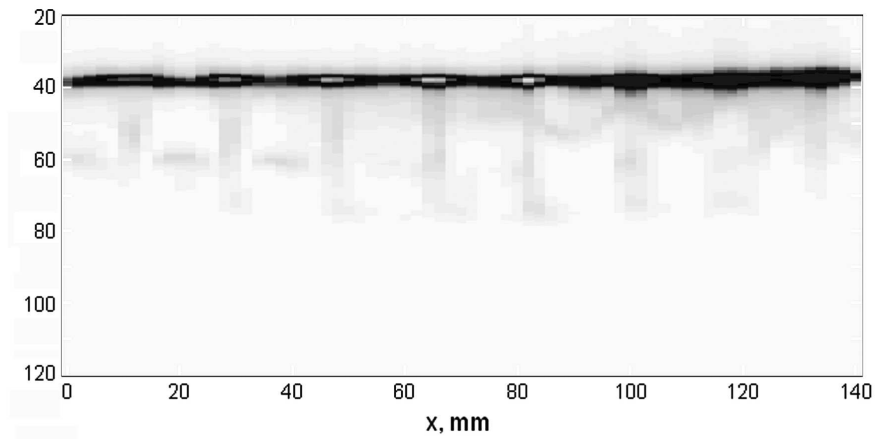


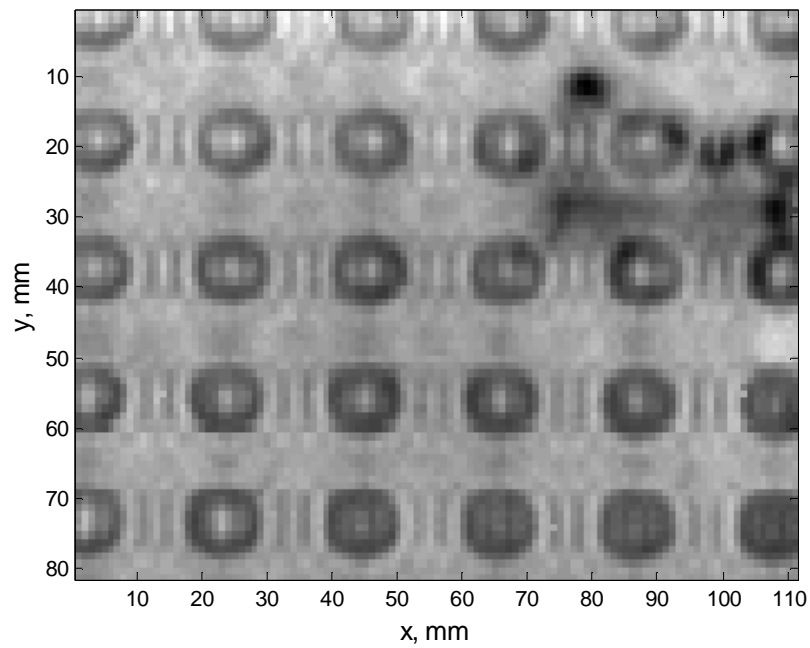
Рис. 4.15. Металічна основа з каверною під діелектричним шаром – а), побудований за вимірними даними профіль структури – б) та зображення каверни побудоване за результатами двовимірного сканування, вигляд зверху – в)



а)



б)



в)

Рис. 4.16. Чарункувата структура обтічника: зовнішній вигляд - а); побудований за виміряними профіль структури - б) при відриві верхнього листа від заповнювача $x > 90$ мм; вигляд зверху за результатами двовимірного сканування - в)

4.4. Висновки до четвертого розділу

Основним результатом усестороннього аналізу одновимірної оберненої задачі розсіювання для багат шарових діелектричних структур, вихідними даними для якої є абсолютні значення коефіцієнта відбиття нормально падаючої плоскої електромагнітної хвилі, є встановлення причини неоднозначності розв'язку. Показано, що кожен нуль коефіцієнта відбиття у верхній комплексній півплощині визначає двозначність розв'язку оберненої задачі. При цьому відмінність знайдених розв'язків визначається тільки фазою множника Бляшке. У загальному випадку кількість нулів у коефіцієнті відбиття є безмежною. Відповідно, така обернена задача розсіювання також матиме безмежну кількість розв'язків. Відсутність фазової інформації у вихідних даних для оберненої задачі розсіювання робить цю задачу еквівалентною до оберненої задачі проходження.

Особливими є випадки, коли нулі коефіцієнта відбиття розташовані періодично. Тоді кількість розв'язків є скінченою, а в синтезованих шаруватих структурах ординати поверхонь розділу співпадатимуть із вузлами деякої регулярної сітки. В основі методу розв'язання відповідної оберненої задачі покладено твердження про можливість вираження елементів матриці розсіювання через скінчені тригонометричні суми, співвідношення між коефіцієнтами яких визначає параметри розривів шуканої функції діелектричної проникності, а аргументи комплексних експонент – відстань між розривами, або товщину шарів структури.

Крім того, розвинуто підхід до здійснення вимірювань та обробки отриманих даних, що дозволяє однозначно ідентифікувати параметри багат шарової структури за частотною залежністю абсолютного значення коефіцієнтів відбиття або проходження. Особливістю запропонованого підходу є використання для вимірювань додаткового однорідного діелектричного шару.

Строгий аналіз розсіяного поля та його перетворень у високочастотному тракті вимірювального пристрою продемонстрував можливість відновлення комплексних значень коефіцієнта відбиття плоскої хвилі від плоскошаруватого

матеріалу за значеннями виміряного сигналу на виході квадратичного детектора. Щоб уникнути методів реконструкції, які є чутливими до похибок вимірювання, запропоновано підхід, який полягає у зображенні виміряного сигналу рядом і виділенні коефіцієнтів, що відповідають розкладу комплексного коефіцієнта відбиття. Показано, що перші два коефіцієнти такого ряду характеризують дві перші поверхні розділу шаруватої структури. При цьому допускається присутність у структурі ідеально провідної поверхні. Для підвищення точності оцінки коефіцієнтів тригонометричного ряду застосовано принцип високороздільного спектрального аналізу, на якому базується метод роботи Сарон [242]. Це забезпечило високу роздільну здатність виявлення неоднорідностей у діелектричному середовищі за наявності шумового складника у виміряному сигналі.

РОЗДІЛ 5

ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ ПЛОСКОШАРУВАТИХ СЕРЕДОВИЩ ЗА ЗАДАНОЮ ДІАГРАМОЮ РОЗСІЮВАННЯ НА ФІКСОВАНІЙ ЧАСТОТІ

У цьому розділі основну увагу приділено дослідженню розсіювання монохроматичних хвиль у середовищах, які мають шарувату структуру з неперервною зміною діелектричної проникності вздовж однієї осі. При цьому аналіз не обмежується лише випадками розсіювання плоскої хвилі, так як з точки зору практичної доцільності більш адекватними моделями випромінюваних/приймальних елементів є точкові та апертурні антени. Припущення про плоский характер хвилі від таких джерел електромагнітної енергії у ближній зоні не є вірним.

Окрім того, забезпечення селективних властивостей у часовій та частотній областях є однією з переваг застосування багатошарових структур в оптиці та мікрохвильовій техніці [278, 279]. Відомо, що селективні властивості багатошарових структур також проявляються у просторовій області. Тому важливою є задача синтезу шаруватих структур за заданою діаграмою розсіювання. Цю задачу можна трактувати як ідентифікацію параметрів багатошарової структури, яку, в даному випадку, приведено до розв'язання одновимірної оберненої задачі дифракції для вихідних даних, заданих кутовою залежністю коефіцієнта відбиття (або залежністю від кута падіння плоскої хвилі на поверхню структури).

Отже, метою цього дослідження є встановлення ефектів, які виникають при взаємодії неплоскої хвилі з плоскими неоднорідностями діелектричних структур, їх математичний опис та оцінка можливості розв'язання оберненої задачі розсіювання.

5.1. Розподіл розсіяного поля над плоско-неоднорідним діелектриком із неперервною функцією діелектричної проникності

Для досягнення поставленої мети дослідження, логічно встановити те, як плоскі хвилі у загальному випадку взаємодіють зі структурою, параметри якої змінюються неперервно вздовж однієї координати. Тому розглянемо моделі

розповсюдження хвиль у випадках двох поляризацій, які визначимо відносно площини падіння. Відомо, що напруженість поля можна подати двома ортогональними векторами, оскільки в напрямі \vec{V} розповсюдження плоскої хвилі вектори напруженості поля рівні нулю $(\vec{V} \cdot \vec{E}) = 0$ та $(\vec{V} \cdot \vec{H}) = 0$. Тоді напруженість електричного поля записують векторною сумою

$$\vec{E} = \vec{E}_{TM} + \vec{E}_{TE}. \quad (5.1)$$

Відповідно, для напруженості магнітного поля маємо

$$\vec{H} = \vec{H}_{TM} + \vec{H}_{TE}. \quad (5.2)$$

Для випадку плоскошаруватих структур коефіцієнт відбиття є основним параметром, що характеризує розв'язок системи Максвела [70]

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{E}(\vec{r}) = -i\omega\mu\mu_0 \vec{H}(\vec{r}), \\ \text{rot} \vec{H}(\vec{r}) = i\omega\varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}). \end{cases} \quad (5.3)$$

У даному випадку розглядають коефіцієнти відбиття плоскої хвилі для різних поляризацій R_{TE} та R_{TM} . Очевидно, що ці коефіцієнти $R_{TE} := R_{TE}(\omega, \theta_0)$ та $R_{TM} := R_{TM}(\omega, \theta_0)$ залежать від частоти ω та кута падіння θ_0 .

Подальше дослідження полягає у розв'язанні прямої задачі розсіювання відносно невідомих функцій коефіцієнта відбиття, якщо припустити, що діелектрична проникність змінюється неперервно $\varepsilon := \varepsilon(z)$.

5.1.1. Випадок розсіювання плоских хвиль TE поляризації. Розглянемо випадок поляризації, в якій вектор напруженості електричного поля є перпендикулярним до площини падіння хвилі. Остання співпадає з площиною zOx (див. рис. 5.1).

Електричну та магнітну складові поля подамо у формі

$$E_{TE}(\vec{r}) = \vec{e}_y \left(B_+ \exp(-i(\vec{k}_+ \cdot \vec{r})) + B_- \exp(-i(\vec{k}_- \cdot \vec{r})) \right); \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned}
H_{TE}(\vec{r}) = & -\frac{1}{\eta}(\vec{e}_x \cos \theta - \vec{e}_z \sin \theta) B_+ \exp(-i(\vec{k}_+ \cdot \vec{r})) + \\
& + \frac{1}{\eta}(\vec{e}_x \cos \theta + \vec{e}_z \sin \theta) B_- \exp(-i(\vec{k}_- \cdot \vec{r})).
\end{aligned}
\tag{5.5}$$

Тут \vec{e}_x , \vec{e}_y та \vec{e}_z - елементарні вектори декартової системи координат; $\vec{k} = \omega\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}$, θ та $\eta = \sqrt{\mu\mu_0/\epsilon\epsilon_0}$ - хвильове число, кут між напрямом розповсюдження хвилі \vec{V} і віссю Oz та характеристичний імпеданс, які залежать від координат, оскільки параметри середовища є також функцією координат $\epsilon := \epsilon(z)$ при постійній магнітній проникності $\mu = 1$.

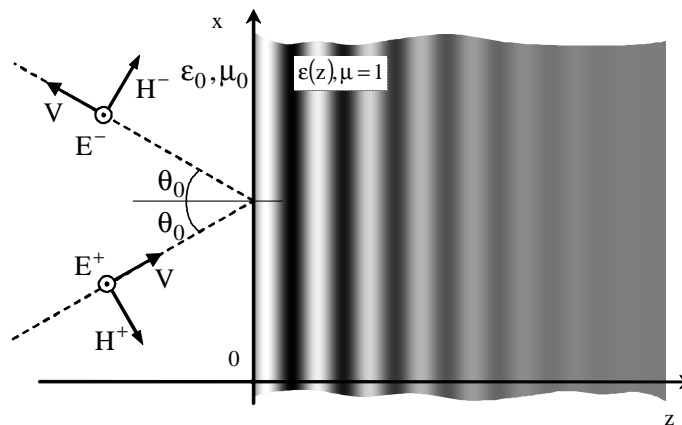


Рис. 5.1. Розповсюдження плоскої ТЕ хвилі у середовищі з неперервною зміною діелектричної проникності вздовж координати z

Задачею є встановлення співвідношення між коефіцієнтами B_+ та B_- , яке у вільному просторі відповідає коефіцієнту відбиття $R_{TE} = B_+/B_-$. Для цього спростимо систему рівнянь Максвела (5.3), використавши умови $E_x = 0$, $E_z = 0$ та $H_y = 0$, яким задовольняє ТЕ хвиля. В результаті видалення з системи рівнянь похідних від сталих коефіцієнтів та нульових складових напруженості поля отримаємо

$$\begin{cases} \frac{\partial H_x(\vec{r})}{\partial z} - \frac{\partial H_z(\vec{r})}{\partial x} = i\omega\epsilon\epsilon_0 E_y(\vec{r}), \\ \frac{\partial E_y(\vec{r})}{\partial z} = i\omega\mu\mu_0 H_x(\vec{r}), \\ \frac{\partial E_y(\vec{r})}{\partial x} = -i\omega\mu\mu_0 H_z(\vec{r}). \end{cases} \quad (5.6)$$

Зробимо заміну змінних $b_+ := B_+ \exp(-i(\vec{k}_+ \cdot \vec{r}))$ і $b_- := B_- \exp(-i(\vec{k}_- \cdot \vec{r}))$ та визначимо складові поля з виразів (5.4) та (5.5) як

$$\begin{cases} E_y = b_+ + b_-, \\ H_x = \cos\theta(-b_+ + b_-)/\eta, \\ H_y = \sin\theta(b_+ + b_-)/\eta. \end{cases} \quad (5.7)$$

Тоді приведену систему рівнянь Максвела (5.6) можна записати у вигляді

$$\begin{cases} \frac{\partial(b_+ + b_-)}{\partial z} = ik \cos\theta(-b_+ + b_-), \\ \frac{\partial(b_+ + b_-)}{\partial x} = -ik \sin\theta(b_+ + b_-), \\ \eta \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\cos\theta}{\eta} \right) (-b_+ + b_-) + \cos\theta \frac{\partial(-b_+ + b_-)}{\partial z} - \sin\theta \frac{\partial(b_+ + b_-)}{\partial x} = ik(b_+ + b_-). \end{cases} \quad (5.8)$$

Щоб уникнути похідної по координаті x , виражаємо її з другого рівняння в системі (5.8) $\partial(b_+ + b_-)/\partial x = -ik \sin\theta(b_+ + b_-)$ і підставляємо в третє рівняння цієї ж системи

$$\begin{cases} \frac{\partial(b_+ + b_-)}{\partial z} = ik \cos\theta(-b_+ + b_-), \\ \frac{\partial(-b_+ + b_-)}{\partial z} = ik \frac{(b_+ + b_-)}{\cos\theta} - ik \frac{(b_+ + b_-)\sin^2\theta}{\cos\theta} - (-b_+ + b_-) \frac{\partial}{\partial z} \ln \left(\frac{\cos\theta}{\eta} \right). \end{cases} \quad (5.9)$$

Як видно, в рівняння (5.9) входить тригонометричні функції кута θ , який є функцією координати. Таку залежність можна замінити залежністю від хвильового числа при фіксованому куті падіння на поверхню плоскої неоднорідності. Для цього використаємо формулу, що відповідає закону Снеліуса

$$k \sin\theta = k_0 \sin\theta_0. \quad (5.10)$$

Для спрощення записів, уведемо також нову змінну

$$\gamma := k \sin \theta = \sqrt{k^2 - k_0^2 \sin^2 \theta_0}. \quad (5.11)$$

Відповідно, похідна від логарифма у другому рівнянні системи (5.9) матиме вигляд

$$\frac{\partial \ln(\cos \theta)}{\partial z} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial z} - \frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial z}. \quad (5.12)$$

Тоді систему (5.9) при записі з новою γ змінною можна подати як

$$\begin{cases} \frac{\partial(b_+ + b_-)}{\partial z} = i\gamma(-b_+ + b_-), \\ \frac{\partial(-b_+ + b_-)}{\partial z} = i \frac{k^2 - k_0^2 \sin^2 \theta_0}{\gamma} (b_+ + b_-) - (-b_+ + b_-) \frac{k\eta}{\gamma} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\gamma}{k\eta} \right). \end{cases} \quad (5.13)$$

Визначивши локальний коефіцієнт відбиття співвідношенням

$$b_- = \rho b_+, \quad (5.14)$$

із системи диференціальних рівнянь (5.13) отримуємо рівняння Ріккати

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} - 2i\gamma\rho - \frac{1}{2}(1 - \rho^2) \frac{\partial}{\partial z} \ln(\gamma) = 0. \quad (5.15)$$

Повернувшись до змінної $\varepsilon(z)$, рівняння (5.15) перепишемо у вигляді

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} - 2i\rho \sqrt{k_0^2 \varepsilon(z) - k_0^2 \sin^2 \theta_0} - \frac{1}{2}(1 - \rho^2) \frac{\partial}{\partial z} \ln \left(\sqrt{k_0^2 \varepsilon(z) - k_0^2 \sin^2 \theta_0} \right) = 0. \quad (5.16)$$

Задавши граничну умову на безмежності $\rho = 0|_{z \rightarrow +\infty}$, розв'язок цього рівняння дає можливість встановити шуканий коефіцієнт відбиття

$$\begin{aligned} R_{TE}(\omega, \cos \theta) &= \frac{B_+}{B_-} = \frac{b_+ \exp(-i(\vec{k}_+ \cdot \vec{r}))}{b_- \exp(-i(\vec{k}_+ \cdot \vec{r}))} = \\ &= \rho \frac{\exp(-i(k_0 \cos \theta_0 z + k_0 \sin \theta_0 x))}{\exp(-i(-k_0 \cos \theta_0 z + k_0 \sin \theta_0 x))} = \rho \exp(-2ik_0 \cos \theta_0 z). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Нелінійний характер рівняння (5.16) спричинено введенням нелінійного співвідношення (5.14) для параметрів лінійної задачі, якою є рівняння Максвела (5.6).

5.1.2. Випадок розсіювання плоских хвиль ТМ поляризації. Існує відмінність між рівняннями Ріккати для випадку ТЕ-поляризації та ТМ-поляризації

електромагнітної хвилі, яка розповсюджується у шаруватому середовищі з неперервною зміною параметрів, як показано на рис. 5.2.

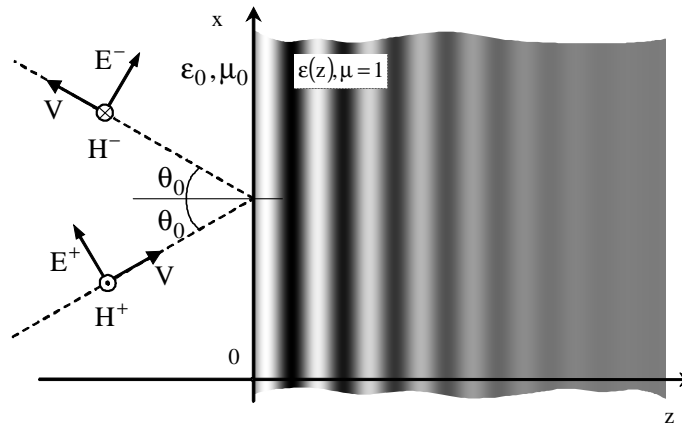


Рис. 5.2. Розповсюдження плоскої ТМ хвилі у середовищі з неперервною зміною діелектричної проникності вздовж координати z

У випадку ТМ поляризації будуть відсутні такі компоненти електромагнітного поля: $H_x = 0$, $H_z = 0$ та $E_y = 0$. Ненульові значення складових поля можна подати у вигляді суми плоских хвиль, які розповсюджуються у зустрічних напрямках та вздовж координати x

$$E_{TM}(\vec{r}) = (\vec{e}_x \cos \theta - \vec{e}_z \sin \theta) A_+ \exp(-i(\vec{k}_+ \cdot \vec{r})) + (\vec{e}_x \cos \theta + \vec{e}_z \sin \theta) A_- \exp(-i(\vec{k}_- \cdot \vec{r})); \quad (5.18)$$

$$H_{TM}(\vec{r}) = \vec{e}_y \frac{1}{\eta} (A_+ \exp(-i(\vec{k}_+ \cdot \vec{r})) - A_- \exp(-i(\vec{k}_- \cdot \vec{r}))). \quad (5.19)$$

Система рівнянь Максвела (5.3) за відсутності згаданих вище складових поля матиме вигляд

$$\begin{cases} \frac{\partial E_x(\vec{r})}{\partial z} - \frac{\partial E_z(\vec{r})}{\partial x} = -i\omega\mu\mu_0 H_y(\vec{r}), \\ \frac{\partial H_y(\vec{r})}{\partial z} = -i\omega\epsilon\epsilon_0 E_x(\vec{r}), \\ \frac{\partial H_y(\vec{r})}{\partial x} = i\omega\epsilon\epsilon_0 E_z(\vec{r}). \end{cases} \quad (5.20)$$

Проекції складових поля на відповідні осі системи координат параметризуємо через коефіцієнти A_+ та A_- , відношення яких визначатиме коефіцієнт відбиття $R_{TM} = A_+/A_-$. За аналогією до виразу (5.7) запишемо

$$\begin{cases} E_x(\vec{r}) = a_+ \cos \theta + a_- \cos \theta, \\ E_z(\vec{r}) = -a_+ \sin \theta + a_- \sin \theta, \\ H_y(\vec{r}) = (a_+ - a_-)/\eta, \end{cases} \quad (5.21)$$

де $a_+ := A_+ \exp(-i(\vec{k}_+ \cdot \vec{r}))$ та $a_- := A_- \exp(-i(\vec{k}_- \cdot \vec{r}))$ - нові змінні.

При підстановці виразів (5.21) у приведену систему рівнянь Максвелла (5.20) отримуємо

$$\begin{cases} \frac{\partial \cos \theta}{\partial z} (a_+ + a_-) + \cos \theta \left(\frac{\partial a_+}{\partial z} + \frac{\partial a_-}{\partial z} \right) + \sin \theta \left(\frac{\partial a_+}{\partial x} - \frac{\partial a_-}{\partial x} \right) = -i\omega\mu\mu_0 \frac{(a_+ - a_-)}{\eta}, \\ -\frac{1}{\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial z} (a_+ - a_-) + \frac{1}{\eta} \left(\frac{\partial a_+}{\partial z} - \frac{\partial a_-}{\partial z} \right) = -i\omega\epsilon\epsilon_0 \cos \theta (a_+ + a_-), \\ \frac{1}{\eta} \left(\frac{\partial a_+}{\partial x} - \frac{\partial a_-}{\partial x} \right) = -i\omega\epsilon\epsilon_0 \sin \theta (a_+ - a_-). \end{cases} \quad (5.22)$$

Подібно до того, як це було зроблено у випадку ТЕ поляризації, усунемо з системи рівнянь похідні за координатою x . В результаті матимемо систему з двох рівнянь

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial a_+}{\partial z} + \frac{\partial a_-}{\partial z} \right) = \\ = a_+ \left(-ik \frac{1}{\cos \theta} - \frac{\partial \ln(\cos \theta)}{\partial z} + ik \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \right) + a_- \left(ik \frac{1}{\cos \theta} - \frac{\partial \ln(\cos \theta)}{\partial z} - ik \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \right), \\ \left(\frac{\partial a_+}{\partial z} - \frac{\partial a_-}{\partial z} \right) = \\ = a_+ \left(\frac{\partial \ln(\cos \theta)}{\partial z} - ik \cos \theta \right) + a_- \left(-\frac{\partial \ln(\cos \theta)}{\partial z} - ik \cos \theta \right). \end{cases} \quad (5.23)$$

Використавши нову змінну (5.11) та здійснивши заміну, систему рівнянь (5.23) приведемо до вигляду

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial a_+}{\partial z} + \frac{\partial a_-}{\partial z} \right) = a_+ \left(\frac{\partial \ln k}{\partial z} - \frac{\partial \ln \gamma}{\partial z} - i\gamma \right) + a_- \left(\frac{\partial \ln k}{\partial z} - \frac{\partial \ln \gamma}{\partial z} + i\gamma \right), \\ \left(\frac{\partial a_+}{\partial z} - \frac{\partial a_-}{\partial z} \right) = a_+ \left(\frac{\partial \ln \eta}{\partial z} - i\gamma \right) - a_- \left(\frac{\partial \ln \eta}{\partial z} + i\gamma \right). \end{cases} \quad (5.24)$$

Після іншої заміни $a_- = \rho a_+$, отримаємо рівняння Ріккати

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} - 2i\gamma\rho - (1 - \rho^2) \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \ln \left(\frac{\varepsilon}{\gamma} \right) = 0, \quad (5.25)$$

яке також можна виразити через функцію діелектричної проникності

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} - 2i\rho \sqrt{k_0^2 \varepsilon(z) - k_0^2 \sin^2 \theta_0} - (1 - \rho^2) \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \ln \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{k_0^2 \varepsilon(z) - k_0^2 \sin^2 \theta_0}} \right) = 0. \quad (5.26)$$

Шуканий коефіцієнт відбиття визначається з розв'язку рівняння (5.26), який задовольняє граничну умову

$$R_{TM}(\omega, \cos \theta) = \frac{B_+}{B_-} = \rho \exp(-2ik_0 \cos \theta_0 z), \quad \rho = 0 \Big|_{z \rightarrow +\infty} \quad (5.27)$$

Легко перевірити, що за умови нормального падіння ($\theta_0 = 0$) рівняння (5.16) та (5.25) набувають однакового вигляду

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} - 2i\rho k_0 \sqrt{\varepsilon(z)} - (1 - \rho^2) \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial z} \ln \varepsilon(z) = 0. \quad (5.28)$$

Цей факт підтверджує правильність виведення рівнянь (5.16) та (5.28).

Зазначимо, що коефіцієнт відбиття для описаної структури можна знайти, застосувавши метод варіації постійних, а також метод функції Гріна, привівши систему рівнянь Максвелла у випадках ТЕ та ТМ поляризацій до звичайного диференціального рівняння другого порядку. Великий вибір математичних моделей розсіювання плоских хвиль на структурі з неперервною функцією діелектричної проникності вказує на можливість використання різних числових підходів до обчислення коефіцієнта відбиття.

У приведеному випадку коефіцієнт відбиття можна знайти з числового розв'язку рівняння Ріккати (5.16) або (5.26), у той час як метод варіації постійних та метод функції Гріна вимагає числового розв'язання інтегрального рівняння. Іншим підходом до знаходження коефіцієнта відбиття є апроксимація неперервного

діелектричного профілю кусково-постійним. Фізично це можна трактувати як заміну структури з неперервною діелектричною проникністю моделлю шаруваті структури. Відповідно для шаруватих структур для коефіцієнта відбиття вдається отримати замкнену аналітичну формулу, а числове знаходження можна реалізувати рекурентно.

5.1.3. Розсіювання електромагнітного поля точкових джерел на плоско-неоднорідній структурі. Матеріал попереднього пункту математично описує розсіювання плоскої хвилі на шаруватій діелектричній структурі. При цьому очевидним є те, що за вказаних вище умов розсіяне поле завжди матиме характер плоскої хвилі. Насправді, плоска хвиля є математичною абстракцією і сформувати її на практиці вкрай важко. Тому окремо здійснено аналіз одного з математичних підходів до опису неплоских хвиль, який полягає у розкладі поля, випроміненого елементарним джерелом, у базисі, що відповідає плоским хвилям. Результати аналізу для лінійного точкового джерела (формують відповідно циліндричну та сферичну хвилі) розташованих у початку координат подано у додатку Г.

Важливим є висновок, що електромагнітне поле у кожній точці простору, яке випромінює джерело у багат шаровій структурі, можна зобразити сумою плоских хвиль, що розсіюються на поверхнях розділу шарів. Характеристики такої взаємодії можна описати математично через кутову залежність коефіцієнта відбиття. У цьому випадку функція Гріна джерела у багат шаровій структурі вигляд інтеграла Зомерфельда. Підінтегральна функція цього інтеграла містить в явному вигляді (Г.27) та (Г.28) коефіцієнт відбиття, який є функцією кута падіння плоскої хвилі на багат шарову структуру [71, 280, 281].

5.2. Розв'язок оберненої задачі розсіювання за заданою кутовою залежністю коефіцієнта відбиття

Метою дослідження є встановлення взаємозв'язку між заданою залежністю коефіцієнта відбиття як функцією кута падіння та невідомою функцією

діелектричного профілю. Синтез багат шарової структури можна здійснити послідовним розв'язанням вищезгаданої оберненої задачі дифракції і кусково-постійною апроксимацією її розв'язку. Метод кусково-постійної апроксимації реалізовано на основі Вейвлет перетворення у базисі Хаара з усуненням малозначущих коефіцієнтів розкладу. Цей метод описано в роботах [42, 45].

5.2.1. Формулювання оберненої задачі розсіювання на фіксованій частоті.

Для встановлення просторово-часової аналогії процесу розсіювання введемо поняття просторової частоти: $\kappa = k_0 \cos \theta_0$, де θ_0 є кутом падіння плоскої хвилі на поверхню шаруватої структури. Таке позначення зручно використовувати при записі кутової залежності коефіцієнта відбиття.

Відношення коефіцієнтів A та B у виразах (5.4) і (5.18), яке визначено в точці $z = 0$, є коефіцієнтом відбиття плоскої хвилі для ТМ-поляризації: $R_{TM}(\omega, \kappa) = A_- / A_+$ та ТЕ-поляризації: $R_{TE}(\omega, \kappa) = B_- / B_+$. Основну увагу подальшого дослідження зосередимо на функції коефіцієнта відбиття від параметру κ , яка має зміст вихідних даних в оберненій задачі розсіювання для фіксованої частоти ω .

В другому розділі роботи одновимірні обернені задачі дифракції електромагнітних хвиль всесторонньо досліджено для випадків, в яких вихідні дані подано у вигляді коефіцієнта відбиття як функції частоти: $R(\omega)$. Відомі точні розв'язки такої задачі дають можливість знайти шукані матеріальні параметри шаруватої структури. В літературі суттєво менше уваги приділено сформульованій оберненій задачі розсіювання, особливість якої полягає у тому, що вихідними даними є кутова залежність коефіцієнта відбиття для плоскої хвилі.

В основі розв'язання у цьому випадку покладено модель потенціального розсіювання, а саме одновимірне стаціонарне рівняння Шредінгера

$$d^2 f(z) / dz^2 + f(z)(k^2 - V(z)) = 0, \quad (5.29)$$

де параметр k^2 має зміст енергії, яку прийнято вважати змінною величиною при визначенні характеристик розсіювання елементарних частинок, а $V(z)$ є розсіювальним потенціалом. Як відомо, асимптотичну поведінку $z \rightarrow -\infty$ розв'язків

рівняння (5.29) можна записати через коефіцієнти $a(k)$ і $b(k)$ для різних значень $k \in \mathbb{R}$, відношення яких $R(k) = b(k)/a(k)$ визначає коефіцієнт відбиття – один із елементів матриці розсіювання.

Відомо також, що обернена задача розсіювання для рівняння (5.29) має єдиний розв'язок, який дає можливість строго встановити потенціал $V(z)$ для заданої $R(k)$ та за умови відсутності зв'язаних станів [55,103]. Цей розв'язок вдається знайти завдяки відомим аналітичним властивостям матриці розсіювання і коефіцієнта відбиття $R(k)$, зокрема.

Ідея розв'язання сформульованої оберненої задачі полягає у:

- заміні коефіцієнта відбиття $R(k)$ на функції $R_{TM}(\omega, \kappa)$ або $R_{TE}(\omega, \kappa)$, що залежать від кута падіння;

- встановленні взаємозв'язку між параметрами електродинамічної моделі та моделі потенціального розсіювання.

Для досягнення цієї мети використаємо метод розділення змінних при розв'язанні рівнянь Максвелла для двох випадків: TE і TM поляризацій плоских хвиль, що падають під кутом на поверхню плоскої шаруватої структури.

5.2.2. Приведення рівнянь електромагнітного поля TE поляризації до рівняння Шредінгера. Нормалізовану складову $\varphi(z)$ електромагнітного поля, що співпадає з орієнтацією вектора \vec{e}_x у плоскій шаруватій структурі, можна визначити з рівняння Гельмгольца

$$\frac{d^2\varphi(z)}{dz^2} + k_z^2(z)\varphi(z) = 0, \quad (5.30)$$

де $k_z(z)$ є хвильовим числом для хвилі, що розповсюджується вздовж вектора \vec{e}_z . Беручи до уваги закон Сенеліуса $k_0 \sin \theta_0 = k(z) \sin \theta(z)$, шуканий хвильовий коефіцієнт $k(z) = k_0 \sqrt{\varepsilon(z)}$ можна виразити як

$$k_z^2(z) = k^2(z) (\cos \theta(z))^2 = k^2(z) - k_0^2 + (k_0 \cos \theta_0)^2. \quad (5.31)$$

Для випадку розсіювання плоскої хвилі на поверхні розділу середовищ між

вакуумом $\varepsilon_1 = 1$ та неоднорідним напівпростором $z > 0$ з неперервно змінним хвильовим числом $k(z) = k_0 \sqrt{\varepsilon(z)}$, рівняння (5.30) можна подати виразом

$$\frac{d^2 \varphi(z)}{dz^2} + \varphi(z) \left[(k_0 \cos \theta_0)^2 - (k_0^2 - k^2(z)) \right] = 0. \quad (5.32)$$

У цьому вигляді формулу (5.32) трактуємо як рівняння Шредінгера. Як видно з виразу (5.32), складова $k_0 \cos(\theta_0) = \kappa$ має сенс просторової частоти падаючої хвилі, у той час як інша складова виразу (5.32) відповідає розсіювальному потенціалу $(k_0^2 - k^2(z)) = V_{TE}(z)$.

Зважаючи, що задачу визначення діелектричного профілю $\varepsilon(z)$ при відомому розсіювальному потенціалі можна подати у простій алгебраїчній формі

$$\varepsilon(z) = 1 - V_{TE}(z)/k_0^2. \quad (5.33)$$

5.2.3. Приведення рівнянь електромагнітного поля ТМ поляризації до рівняння Шредінгера. Безпосереднє застосування методу розділення змінних дозволяє записати рівняння Максвелла для ТМ поляризації плоскої хвилі у вигляді

$$\frac{d^2 \gamma(z)}{dz^2} - \frac{d \ln(\varepsilon(z))}{dz} \frac{d \gamma(z)}{dz} + \left(k^2(z) - (k_0 \sin \theta_0)^2 \right) \gamma(z) = 0, \quad (5.34)$$

де $\gamma(z)$ є нормалізованою складовою поля, що співпадає з вектором \vec{e}_x . З метою усунення з рівняння (5.34) доданка з похідною першого порядку здійснимо заміну змінних $\phi(z) = \sqrt{\varepsilon(z)} \gamma(z)$. Беручи до уваги припущення про компактний носій функції $(\varepsilon(z) - 1)$, можна зробити висновок про те, що асимптотична поведінка розв'язків рівняння (5.34) є аналогічною до асимптотичної поведінки розв'язків нового рівняння

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \phi(z)}{dz^2} + (k_0 \cos \theta_0)^2 \phi(z) + \\ & + \left[\frac{1}{2\varepsilon(z)} \frac{d^2 \varepsilon(z)}{dz^2} - \frac{3}{4\varepsilon^2(z)} \left(\frac{d\varepsilon(z)}{dz} \right)^2 + k_0^2 \varepsilon(z) - k_0^2 \right] \phi(z) = 0. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Це рівняння є не що інше, як рівняння Шредінгера з розсіювальним потенціалом:

$$\frac{3}{4\varepsilon^2(z)} \left(\frac{d\varepsilon(z)}{dz} \right)^2 - \frac{1}{2\varepsilon(z)} \frac{d^2\varepsilon(z)}{dz^2} - k_0^2\varepsilon(z) + k_0^2 = V_{TM}(z). \quad (5.36)$$

Для того, щоб знайти діелектричну проникність $\varepsilon(z)$ необхідно розв'язати нелінійне диференціальне рівняння (5.36) з граничною умовою $d\varepsilon(z)/dz = 0$ при $z=0$, приймаючи до уваги те, що функція розсіюючого $V_{TM}(z)$ потенціалу є відомою, або обчисленою згідно з розв'язком оберненої задачі розсіювання для рівняння Шредінгера. Введена гранична умова для рівняння (5.36) впливає з того, що розсіюючий потенціал $V(z)$ повинен мати компактний носій в правому півпросторі.

Асимптотичний розв'язок $\varphi(z)$ для рівняння (5.30) та $\phi(z)$ для рівняння (5.34) можна також зобразити розв'язком Йоста (2.36) для рівняння Шредінгера (5.29). Саме відношення його коефіцієнтів у розв'язках Йоста визначає коефіцієнти відбиття $R_{TE}(\kappa)$ для $R_{TM}(\kappa)$, відповідно до розв'язків рівнянь (5.30) та (5.34). Тому, як результат попередньо проведеного аналізу, робимо висновок про те, що виконання умови $V_{TE}(z) = V_{TM}(z)$ дозволяє забезпечити однакові властивості відбиття у різних поляризаціях від двох діелектричних структур, які характеризуються розсіювальними потенціалами $V_{TE}(z)$ та $V_{TM}(z)$.

5.2.4. Розв'язок оберненої задачі відносно потенціалу рівняння Шредінгера. Відомо кілька методів розв'язання оберненої задачі розсіювання для рівняння Шредінгера з радіальним потенціалом. Так званий формалізм Гельфанда-Левітана-Марченка [99-103], а також задачу Рімана-Гільберта [246] покладено в основу найбільш розвинутих підходів до розв'язання одновимірних обернених задач розсіювання [93,125]. Завдяки особливостям операторів перетворення [98], такі задачі зведено до інтегрального рівняння другого роду з невідомим ядром.

У дисертації розвинуто інший аспект теорії обернених задач розсіювання. Він ґрунтується на тому, що система диференціальних рівнянь Дірака (2.88) за певних умов еквівалентна рівнянню Шредінгера (5.29), а обернена задача для рівняння

Дірака дозволяє реконструювати значно ширший клас потенціалів, ніж для рівняння Шредінгера. Заміною змінних функцію $q(z)$ в рівнянні (2.88) можна поставити у відповідність розсіювальному потенціалу $V(z)$ у рівнянні Шредінгера (5.29)

$$V(z) = (q(z))^2 - dq(z)/dz. \quad (5.37)$$

Обернену задачу розсіювання для рівняння Дірака (2.88) можна сформулювати за аналогією до рівняння Шредінгера. Вона полягає у знаходженні функції $q(z)$ за відомим коефіцієнтом відбиття $R(\kappa)$. Як показано в другому розділі дисертації процедуру розв'язання оберненої задачі розсіювання для рівняння (2.88) можна звести до знаходження невідомого ядра $K_1(x, y)$ у системі інтегральних рівнянь типу Марченка [124] (2.155). Тоді шукану функцію $q(x)$, як розв'язок оберненої задачі розсіювання, вдається просто обчислити згідно з виразом

$$q(z) = -2K_2^*(z, z). \quad (5.38)$$

У системі рівнянь (2.155) ядро $G(x, y)$ пов'язане безпосередньо з характеристиками розсіювання. В задачі синтезу багат шарової структури вихідні дані можна підібрати, припустивши відсутність у них зв'язаних станів [55]. Тоді для розв'язання оберненої задачі розсіювання на півосі ядро $G(x, y) = G(x + y)$ у системі рівнянь (2.155) прийнято обчислювати як Фур'є перетворення коефіцієнта відбиття $R(\kappa)$

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\kappa) \exp(-i\kappa(x + y)) d\kappa, \quad (x \geq |y|). \quad (5.39)$$

Необхідність визначати коефіцієнт відбиття для всіх κ вказує на те, що цей коефіцієнт має бути заданий як для всіх дійсних $-1 \leq \cos(\theta_0) \leq 1$, так і для всіх уявних $|\cos(\theta_0)| > 1$ кутів падіння плоскої хвилі на фіксованій частоті i , відповідно, з постійним хвильовим числом ($k_0 = const$). Можливість отримання експериментальних даних про розсіювання тільки в діапазоні дійсних кутів свідчить про істотні обмеження на безпосереднє застосування цього методу до реконструкції діелектричного профілю згідно з результатами реальних вимірювань. Очевидно, що

така задача є некоректною.

Попри те, що розв'язок оберненої задачі для рівняння Дірака можна шукати числовим методом, як запропоновано у другому розділі, в задачі синтезу вихідні дані можна задати таким чином, що система інтегральних рівнянь матиме розв'язок в аналітичній формі.

5.2.5. Отримання аналітичного розв'язку задачі синтезу. Як попередньо зазначено, першим етапом розв'язання оберненої задачі розсіювання є приведення вихідних даних до необхідної форми. У цьому випадку коефіцієнт відбиття, який залежить від кута падіння плоскої хвилі, апроксимуємо раціональною функцією

$$R(k_0 \cos \theta_0) = R(\kappa) = r_0 \kappa^p \prod_{j=p+1}^m (1 - \kappa/\mu_j) / \prod_{j=1}^n (1 - \kappa/\lambda_j), \quad (5.40)$$

де r_0 , μ_i і λ_j є комплексними величинами, і для цілих чисел p , n та m виконуються умови $0 \leq p \leq m$ та $n \geq m + 1$.

Мотивацію такого підходу до визначення вихідних даних у вигляді (5.40) можна знайти в теорії синтезу фільтрів [282]. Як відомо, теорія фільтрів охоплює підходи до синтезу частотних характеристик із заданими параметрами, що відповідають порядку та типу фільтра, його частотам зрізу, а також величинам нерівномірностей частотної характеристики в смугах пропускання та запирання. Більше того, розв'язок оберненої задачі розсіювання у вигляді системи рівнянь (2.155) можна звести до скінченої системи лінійних алгебраїчних рівнянь [113].

Нехай всі полюси λ_j є простими, і для них виконується умова $\text{Im}(\lambda_j) < 0$. Тоді $2n$ комплексних нулів рівняння $1 - R(\kappa)R(-\kappa) = 0$, що відрізняються один від одного, позначимо через δ_j та δ_j^* , $j = 1 \dots n$. Ці нулі відповідають зв'язаним станам. У приведеному формулюванні обернена задача розсіювання (2.155) для рівняння Дірака при $x > 0$ зводиться до системи $2n$ рівнянь відносно невідомих $f_j(x)$ та $g_j^*(x)$:

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \frac{-1}{R(\delta_j)} \frac{e^{i\delta_j x}}{\lambda_p - \delta_j} \begin{bmatrix} f_j(x) \\ g_j(x) \end{bmatrix} + \frac{e^{i\delta_j^* x}}{\lambda_p - \delta_j^*} \begin{bmatrix} g_j^*(x) \\ f_j^*(x) \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p=1\dots n. \quad (5.41)$$

Згідно з формулою, виведеною у статті [255], розв'язок оберненої задачі розсіювання для шуканого потенціалу можна записати як

$$q(x) = \sum_{j=1}^n \left[f_j(x) e^{-i\delta_j x} - g_j^*(x) e^{-i\delta_j^* x} / R^*(\delta_j) \right], \quad x > 0. \quad (5.42)$$

Як приклад, розглянемо коефіцієнт відбиття, заданий раціональною функцією з двома полюсами

$$R(\kappa) = \frac{1}{(\kappa - \lambda_1)(\kappa - \lambda_2)}, \quad (5.43)$$

де $\lambda_1 = \sqrt{2}(1-j)/2$ та $\lambda_2 = -\sqrt{2}(1+j)/2$.

Визначивши корені δ_j та δ_j^* рівняння $1 - R(\kappa)R(-\kappa) = 0$, знайдемо розв'язок системи рівнянь (5.41) відносно функцій $f_j(x)$ та $g_j^*(x)$. Такі дані дозволили безпосередньо обчислити значення функції $q(x)$ на основі виразу (5.42). Розв'язок такої оберненої задачі відносно потенціалу системи Дірака подано на рис. 5.3.

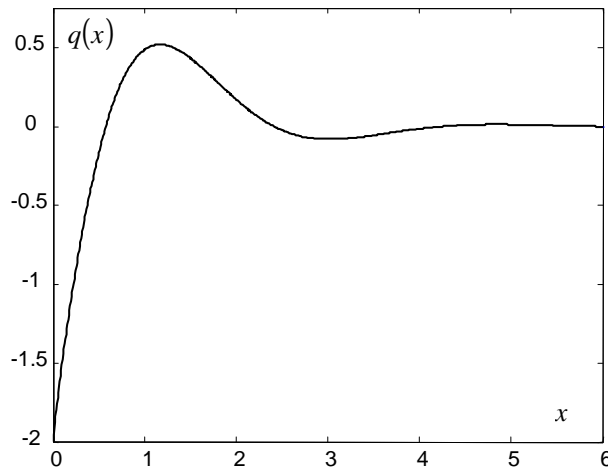


Рис. 5.3. Потенціал системи Дірака, як точний розв'язок оберненої задачі розсіювання для коефіцієнта відбиття, поданого виразом (5.43)

5.3. Розв'язок оберненої задачі розсіювання для частково відомих даних про розриви шуканої функції

Як видно, розв'язок (5.42) оберненої задачі розсіювання для аналітично заданої раціональної функції (5.40) не має особливостей. Тому обчислені потенціал Шредінгера за формулою (5.37) та функції діелектричної проникності за рівностями (5.33) і (5.36) не матимуть особливостей також. На практиці шаруватим структурам властивий кусково-розривний характер діелектричної проникності. Типовими є розриви у функції діелектричної проникності в точках розділу середовищ. Крім того, при синтезі шаруватих структур за наближено визначеним коефіцієнтом відбиття можливі випадки, коли розв'язок оберненої задачі не відповідає умовам практичної реалізації – параметри синтезованих структур виходять за межі фізично існуючих аналогів. Тому доцільно дослідити питання розв'язання обернених задач за умови частково визначених даних про їх розв'язок. Зокрема, у задачі синтезу необхідно враховувати те, що вільний простір, де вимірюють коефіцієнт відбиття, та перший шар діелектричної структури мають істотно відмінні діелектричні проникності.

Припустимо, що досліджувана структура має розрив функції $\varepsilon(z)$ у точці $z = z_{01}$, де значення діелектричної проникності стрибкоподібно змінюється від ε_1 до ε_2 , як це схематично показано на рис. 5.4. Вважаючи, що середовище не є магнітним і його магнітна проникність рівна одиниці, приведений імпеданс в околі точки розриву $z_{01} - 0$ та $z_{01} + 0$ можна виразити через просторову частоту κ для обох поляризацій

$$\eta_{T1} = \begin{cases} \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0\varepsilon_1} \kappa/k_1, & \text{для ТМ поляризації,} \\ \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0\varepsilon_1} k_1/\kappa, & \text{для ТЕ поляризації;} \end{cases} \quad (5.44)$$

$$\eta_{T2} = \begin{cases} \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0\varepsilon_2} \sqrt{1 - \varepsilon_1/\varepsilon_2 + \kappa^2/k_2^2}, & \text{для ТМ поляризації,} \\ \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0\varepsilon_2} / \sqrt{1 - \varepsilon_1/\varepsilon_2 + \kappa^2/k_2^2}, & \text{для ТЕ поляризації.} \end{cases} \quad (5.45)$$

де ε_0 та μ_0 є абсолютні діелектрична та магнітна проникності вакууму; $k_1 = k_0\sqrt{\varepsilon_1}$ та

$k_2 = k_0 \sqrt{\epsilon_2}$ - хвильове число матеріалу по обидві сторони від поверхні розділу.

Подальше розв'язання найпростіше здійснити на основі теорії чотиріполюсників [63], де для моделювання поширення хвилі у шаруватих середовищах використовують s-матрицю (матрицю розсіювання) та t-матрицю (матрицю погодження). У цьому випадку елементи матриці погодження відповідають коефіцієнтам розв'язків Йоста. Використання такої моделі обумовлено можливістю розщеплення потенціалу. Цю процедуру описано детально у статті [160] на прикладі оберненої задачі розсіювання для частково відомого розв'язку відносно потенціалу у рівнянні Шредінгера.

Якщо позначити за S_Σ , s-матрицю всієї діелектричної структури з елементами $\{s_{11_\Sigma}, s_{12_\Sigma}, s_{21_\Sigma}, s_{22_\Sigma}\}$, то сумарний коефіцієнт відбиття визначатиметься верхнім правим елементом $R(\kappa) = s_{11_\Sigma}$. Знаючи всі елементи матриці розсіювання, можна явно знайти всі елементи t-матриці погодження $T_\Sigma \{t_{11_\Sigma}, t_{12_\Sigma}, t_{21_\Sigma}, t_{22_\Sigma}\}$. Перетворення s-матриці до t-матриці має вигляд

$$\begin{bmatrix} s_{11_\Sigma} & s_{12_\Sigma} \\ s_{21_\Sigma} & s_{22_\Sigma} \end{bmatrix} = \frac{1}{t_{22_\Sigma}} \begin{bmatrix} t_{12_\Sigma} & t_{11_\Sigma} t_{22_\Sigma} - t_{12_\Sigma} t_{21_\Sigma} \\ 1 & -t_{21_\Sigma} \end{bmatrix}. \quad (5.46)$$

T-матриця діелектричної структури, що містить один розрив та неперервну частину функції діелектричної проникності справа від нього (рис 5.4) допускає факторизацію у формі $T_\Sigma = T_1 T_2$

$$\begin{bmatrix} t_{11_\Sigma} & t_{12_\Sigma} \\ t_{21_\Sigma} & t_{22_\Sigma} \end{bmatrix} = \frac{1}{s_{21}(\alpha + \beta)} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -s_\Delta & s_{11} \\ -s_{22} & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.47)$$

Тут введено додаткові коефіцієнти $\alpha = \eta_{T_2} + \eta_{T_1}$, $\beta = \eta_{T_2} - \eta_{T_1}$ та $s_\Delta = s_{11} s_{22} - s_{12} s_{21}$. Важливо зазначити, що всі параметри t-матриці (5.47) є функціями просторової частоти κ .

Фізичним пояснення факторизації t-матриці (5.47) є розділення впливу розривної (T_1) та неперервної (T_2) частини функції діелектричної проникності на властивості відбиття та пропускання хвиль всією структурою. У сформульованій задачі друга частина функції діелектричної проникності повинна бути визначена

таким чином, щоб забезпечити бажаний коефіцієнт відбиття всієї структури.

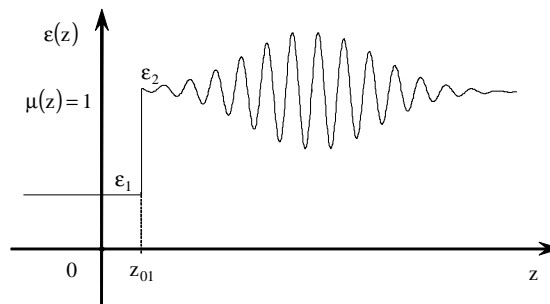


Рис. 5.4. Схематичне зображення функції діелектричної проникності, що має розрив лише в одній точці $z = z_{01}$

З виразу (5.47) можна встановити коефіцієнт вибиття всієї структури

$$R(\kappa) = s_{11\Sigma} = \frac{t_{12\Sigma}}{t_{22\Sigma}} = \frac{\alpha s_{11} + \beta}{\beta s_{11} + \alpha} = \frac{s_{11} + \rho}{1 + s_{11}\rho}, \quad (5.48)$$

де $\rho = (\eta_{T2} - \eta_{T1}) / (\eta_{T2} + \eta_{T1})$ є коефіцієнтом відбиття поверхні розділу між середовищами з діелектричними проникностями ε_1 та ε_2 .

Отже, виходячи з відомого (заданого за умовами задачі) коефіцієнта відбиття $R(\kappa)$, обертання білінійної форми (5.48) дозволяє знайти коефіцієнт s_{11} як

$$s_{11} = \frac{R(\kappa) - \rho}{1 - \rho R(\kappa)} = \frac{\alpha R(\kappa) - \beta}{\alpha - \beta R(\kappa)}. \quad (5.49)$$

Цьому коефіцієнту (як функції κ) можна поставити у відповідність приведений коефіцієнт відбиття $s_{11}(\kappa) = \tilde{R}(\kappa')$, використовуючи заміну змінних

$$\kappa' = \sqrt{k_0^2 (1 - \varepsilon_1/\varepsilon_2) + \kappa^2 \varepsilon_1/\varepsilon_2}. \quad (5.50)$$

Цей вираз є законом Сенеліуса, який переписано для просторової частоти κ над поверхнею розділу та просторової частоти κ' під нею, відповідно.

Розглянемо інший важливий для практичного застосування випадок, де частину діелектрика з неперервною зміною діелектричної проникності оточують дві поверхні розділу, а отже функція діелектричної проникності в цих місцях має розриви. Не претендуючи на загальність, вважатимемо, що розриви в точках $z = z_{01}$

та $z = z_{02}$ мають симетричні параметри. Це означає, що діелектрична проникність за межами шару є однаковою $\varepsilon(z) = \varepsilon_1$ для $z < z_{01}$ та $z > z_{02}$. Сам діелектричний шар на початку та в кінці характеризується діелектричною проникністю ε_2 (рис. 5.5).

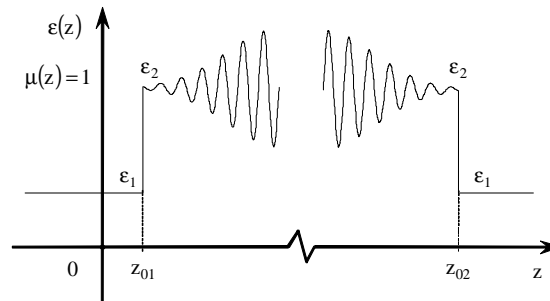


Рис. 5.5. Схематичне зображення функції діелектричної проникності, що має симетричні розриви в точках $z = z_{01}$ та $z = z_{02}$, та неперервну частину в між ними

Для обчислення коефіцієнта відбиття у випадку двох розривів функції діелектричної проникності необхідні значення всіх елементів s-матриці S_{Σ} всієї структури. Ця властивість демонструє істотну відмінність досліджуваної оберненої задачі від випадку задачі з одним розривом. Задавши бажаний коефіцієнт відбиття у формі раціональної функції (5.40), можна обчислити всі інші елементи матриці розсіювання $s_{12_{\Sigma}}$, $s_{21_{\Sigma}}$ та $s_{22_{\Sigma}}$. Їх обчислення базується на двох властивостях матриці розсіювання, які виражають закон збереження енергії та фази

$$|s_{11_{\Sigma}}|^2 + |s_{12_{\Sigma}}|^2 = 1 \text{ та } s_{11_{\Sigma}}^* s_{21_{\Sigma}} + s_{22_{\Sigma}} s_{12_{\Sigma}}^* = 0. \quad (5.51) \text{ та } (5.52)$$

Припустимо, що величини ϑ_i , $i = \overline{1, n}$ є розв'язками характеристичного рівняння $1 - R(\kappa)R(-\kappa) = 0$, які лежать у верхній півплощині. Тоді інші елементи s-матриці синтезованої структури можна задати наступним чином [113, 255]:

$$s_{21_{\Sigma}} = s_{12_{\Sigma}} = \prod_{i=1}^n (\kappa + \vartheta_i) / \prod_{j=1}^n (\kappa - \lambda_j); \quad (5.53)$$

$$s_{22_{\Sigma}} = \frac{(-1)^{m-n+1} r_o \prod_{i=1}^m (\kappa + \mu_i) \prod_{i=1}^n (\kappa + \vartheta_i)}{\prod_{i=1}^n (\kappa - \vartheta_i) \prod_{j=1}^n (\kappa - \lambda_j)}. \quad (5.54)$$

Звідси знайдемо елементи еквівалентної t -матриці T_Σ , використовуючи вираз (5.47). Таким чином, t -матрицю всієї структури з двома поверхнями розділу середовищ та з неоднорідністю між ними можна факторизувати у формі $T_\Sigma = T_1 T_2 T_3$, що у матричному записі виглядає як

$$\begin{bmatrix} t_{11_\Sigma} & t_{12_\Sigma} \\ t_{21_\Sigma} & t_{22_\Sigma} \end{bmatrix} = \frac{1}{s_{21}(\alpha^2 - \beta^2)} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -s_\Delta & s_{11} \\ -s_{22} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}. \quad (5.55)$$

Виразити s -елементи матриці у правій частині тотожності (5.55) через t -елементи можна домноженням лівої частини на обернені матриці. В результаті отримуємо

$$\frac{1}{s_{21}} \begin{bmatrix} -s_\Delta & s_{11} \\ -s_{22} & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(\alpha^2 - \beta^2)} \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11_\Sigma} & t_{12_\Sigma} \\ t_{21_\Sigma} & t_{22_\Sigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}. \quad (5.56)$$

За аналогією до випадку з однією поверхнею розділу, шуканий коефіцієнт s_{11} можна обчислити, розв'язавши два рівняння, записані за допомогою виразу (5.56). Прості алгебраїчні перетворення приводять до рівності

$$\begin{aligned} s_{11} &= \frac{\alpha\beta(t_{11_\Sigma} - t_{22_\Sigma}) + \alpha^2 t_{12_\Sigma} - \beta^2 t_{21_\Sigma}}{\alpha\beta(t_{21_\Sigma} - t_{12_\Sigma}) + \alpha^2 t_{22_\Sigma} - \beta^2 t_{11_\Sigma}} = \\ &= \frac{\alpha^2 s_{11_\Sigma} + \beta^2 s_{22_\Sigma} - \alpha\beta(s_{11_\Sigma} s_{22_\Sigma} - s_{21_\Sigma} s_{12_\Sigma} + 1)}{\alpha^2 + \beta^2 (s_{11_\Sigma} s_{22_\Sigma} - s_{21_\Sigma} s_{12_\Sigma}) - \alpha\beta (s_{11_\Sigma} + s_{22_\Sigma})}. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Оскільки параметри $\{s_{11}, s_{12}, s_{21}, s_{22}\}$ складають матрицю розсіювання для середовища між двома поверхнями розділу, то приведений коефіцієнт відбиття $\tilde{R}(\kappa')$ співпадає з $s_{11}(\kappa)$ з точністю до фазового множника. Цей коефіцієнт має задовольняти умову $R(-\kappa) = R(\kappa)^*$ для $\kappa \in \mathbf{R}$ та повинен асимптотично зникати $R(\kappa) = o(1/\kappa)$ при $\kappa \rightarrow \pm\infty$ для того, щоб забезпечити збіжність числової реалізації алгоритму розв'язання оберненої задачі. Цього можна досягти визначенням $\tilde{R}(\kappa')$ у певній області (області інтересу) просторових частот і продовженням цієї функції на іншу частину області визначення просторових частот, синтетично задовольняючи вищезгадані умови.

В результаті ядро $G(x, y)$, що визначається даними розсіювання при розв'язанні оберненої задачі розсіювання (2.155), (5.38) та (5.39) записуємо в новій формі

$$G(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{R}(\kappa') \exp(-i\kappa'(x+y)) d\kappa', \quad (x \geq |y|), \quad (5.58)$$

де співвідношення $\tilde{R}(\kappa') = s_{11}(\kappa)$ та (5.48) є справедливими для задач синтезу діелектричних структур, яка містять два та один розриви у функції діелектричної проникності з заданими параметрами.

Не зважаючи на те, що бажану характеристику розсіювання задано аналітично, складність перетворень (5.49) та (5.57) не дозволяє аналітично отримати результат перетворення Фур'є (5.58) від приведеного коефіцієнта відбиття $\tilde{R}(\kappa')$. Тому розв'язок такої оберненої задачі можна отримати тільки числовим методом, розвинутим у другому розділі роботи.

5.4. Результати числового розв'язання задачі синтезу багат шарових структур

Для підтвердження достовірності запропонованого підходу до розв'язання оберненої задачі розсіювання наведемо результати ідентифікації діелектричного профілю для заданої кутової залежності коефіцієнта відбиття, що має смугозапираючу форму. Вважатимемо, що хвильовий коефіцієнт у вільному просторі визначений для частоти коливань 5 ГГц . Для знаходження розсіювального потенціалу використаємо числову процедуру розв'язання оберненої задачі розсіювання (2.155), (5.37)-(5.39) для системи рівнянь типу Дірака. Визначення діелектричного профілю реалізуємо на основі встановлених взаємозв'язків (5.33) і (5.36) для ТЕ-поляризації та ТМ-поляризації. Результати, отримані на цьому етапі (рис. 5.6.а і рис. 5.6.б), демонструють випадок, де дві синтезовані структури мають ідентичні характеристики розсіювання за різних поляризацій. Для порівняння на рис. 5.7 наведено (пунктирною та точковою лінією) кутові залежності коефіцієнта

відбиття цих двох структур отримані як розв'язок прямої задачі розсіювання за попередньо обчисленими функціями діелектричної проникності. Суцільною лінією на цьому ж рисунку зображено вихідний коефіцієнт відбиття, визначений умовою задачі. Як видно, зображені функції співпадають в області сильного розсіювання. Невеликий рівень розсіювання в областях пропускання спричинений обмеженням товщини синтезованого діелектричного профілю, тоді як неперервна функція діелектричної проникливості має бути визначеною на всій півосі.

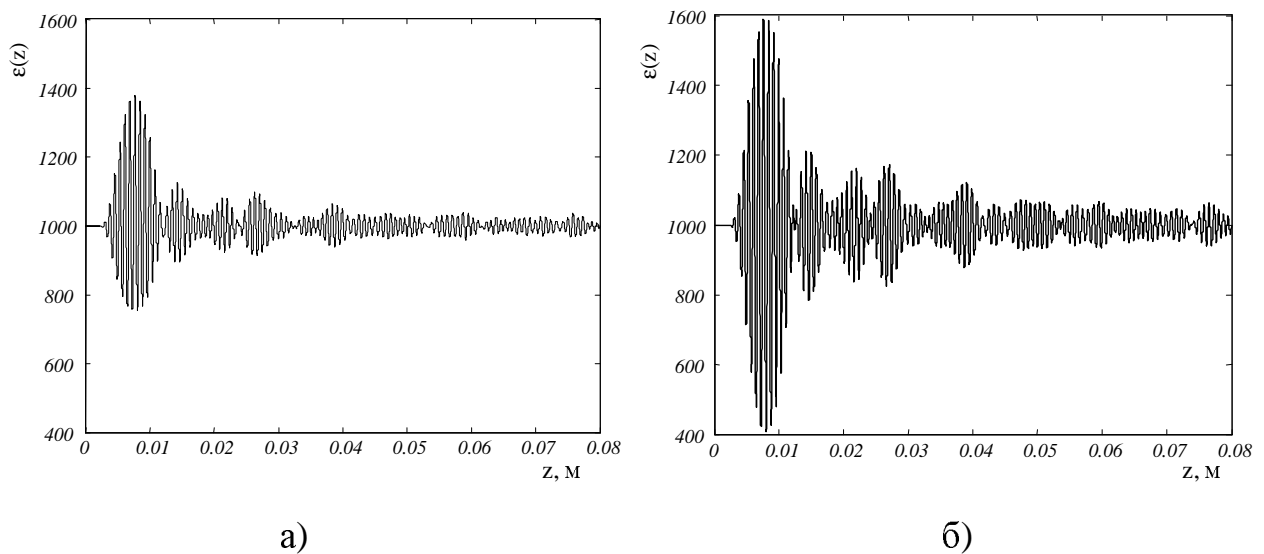


Рис. 5.6. Неперервні функції діелектричної проникності, отримані як розв'язок оберненої задачі розсіювання, з вихідними даними у вигляді кутової залежності коефіцієнта відбиття: для ТМ-поляризації - а) і для ТЕ-поляризації - б)

Подібний порівняльний аналіз достовірності сформульованих теоретичних тверджень здійснено при синтезі багатошарових структур, в яких (крім кутової залежності коефіцієнта відбиття) задано параметри першого та останнього шару. Характеристику відбиття визначено як смуго-запираючу функцію, аргументом якої є косинус кута падіння плоскої хвилі. Її зображено на рис. 5.8 (а – відповідає ТЕ-поляризації; б – ТМ-поляризації) суцільною лінією, що демонструє забезпечення у шуканій шаруватій структурі сильного розсіювання плоских хвиль у вузькому діапазоні кутів θ на частоті $550 THz$ з діапазону видимого світла. Аналогічні задачі виникають при синтезі тонких шаруватих покриттів спеціального призначення та в задачах просвітлення оптики. Тут, як і у попередньому прикладі, функцію $R(\theta)$

визначено раціональною формулою у певному інтервалі просторових частот $k_0 \cos(\theta)$, що представляють інтерес.

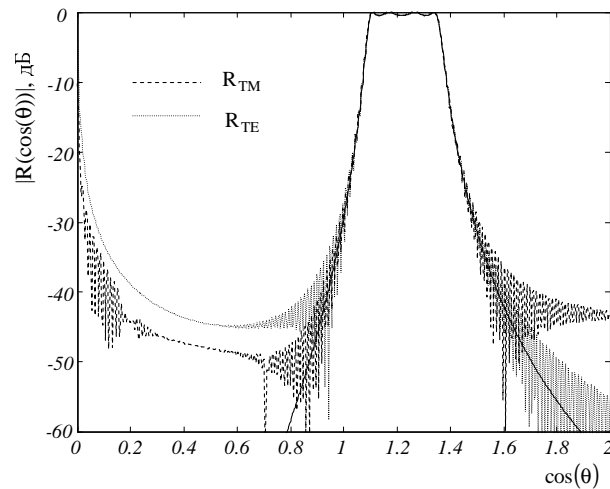


Рис. 5.7. Порівняння заданого коефіцієнта відбиття (суцільна лінія) з функціями відбиття (пунктирна лінія – для ТМ поляризації та точкова лінія – для ТЕ поляризації) синтезованих структур, діелектричний профіль яких зображено на рис. 5.6

Обчислення неперервної функції діелектричної проникності структури, в якій перший та останній шар задано умовами задачі, реалізовано на основі розв'язку оберненої задачі (2.155), (5.37)-(5.39) та виразу (5.57), що базується на факторизованому поданні матриці розсіювання. Результат синтезу неперервного діелектричного профілю зображено на рис. 5.9.а. Для підтвердження достовірності цього розв'язку, знайдено кутову залежність коефіцієнта відбиття синтезованої структури методом, що використовує розв'язок прямої задачі. Таку залежність для порівняння представлено точковою лінією на рис. 5.8.а.

Створення шаруватих покривів дозволяє сформувати структури з кусково-постійною діелектричною проникністю. Важливо проаналізувати, наскільки зміняться характеристики розсіювання, коли неперервний профіль, отриманий як розв'язок задачі розсіювання, апроксимувати кусково-постійною функцією. Для цього до попередньо отриманого результату застосовано метод нелінійної апроксимації функції, описаний в роботі [43, 45]. Апроксимовану функцію діелектричної проникності зображено на рис. 5.9.б. Як видно, результатом

апроксимації є функція з кусково-постійною діелектричною проникністю, а синтезована багатошарова структура складається з 251-го шару. Використаний для апроксимації метод [43, 45] потребує пошуку компромісу між досягненням бажаної точності характеристики відбиття та практично допустимою кількістю шарів у синтезованій структурі. Зазначимо, що максимальну кількість шарів можна контролювати на етапі апроксимації. Кутову характеристику відбиття синтезованої багатошарової структури зображено на рис. 5.8.б разом із заданим за умовами задачі коефіцієнтом відбиття. Отримані результати свідчать, що синтезована багатошарова структура забезпечує інтенсивне відбиття у вузькій області кутів θ . Це, в свою чергу, дає можливість стверджувати, що задачу синтезу розв'язано.

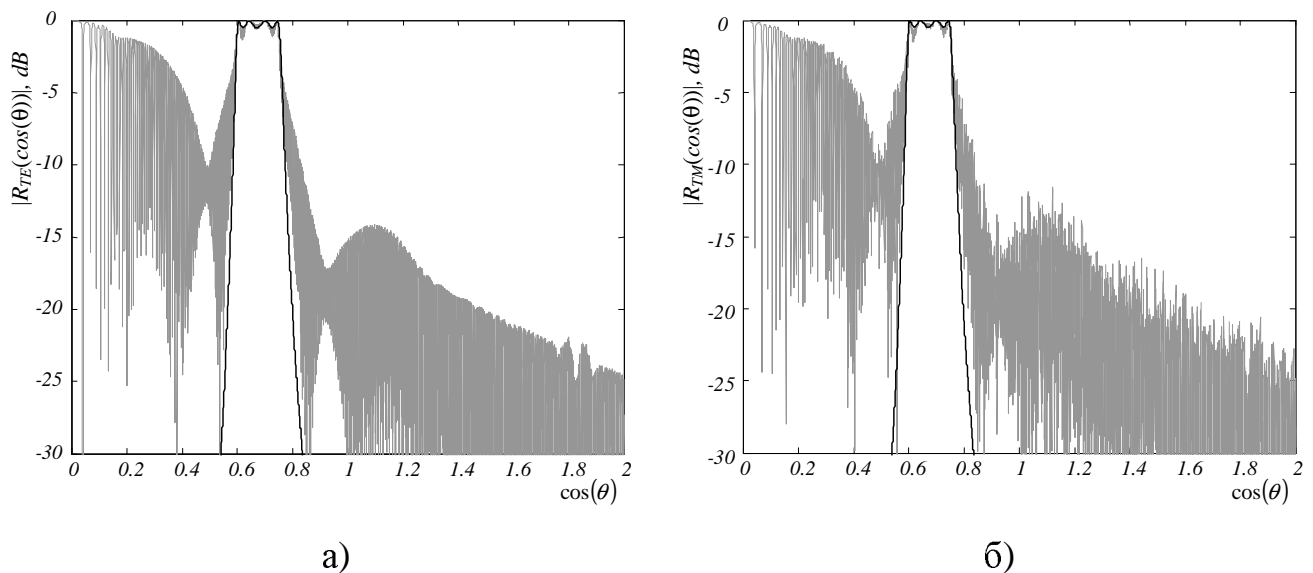


Рис. 5.8. Порівняння бажаної характеристики відбиття плоскої хвилі (суцільна лінія) з отриманою (точкова лінія) для синтезованої структури, в якій параметри першого та останнього шару зафіксовані

Важливо зазначити, що повне відбиття в області кутів, близьких до $\theta = \pi/2$, не можна усунути додаванням діелектричних шарів у структурі. Цим пояснюється ефект інтенсивного відбиття в області малих значень просторової частоти k для синтезованих структур як на рис. 5.7, так і на рис. 5.8.

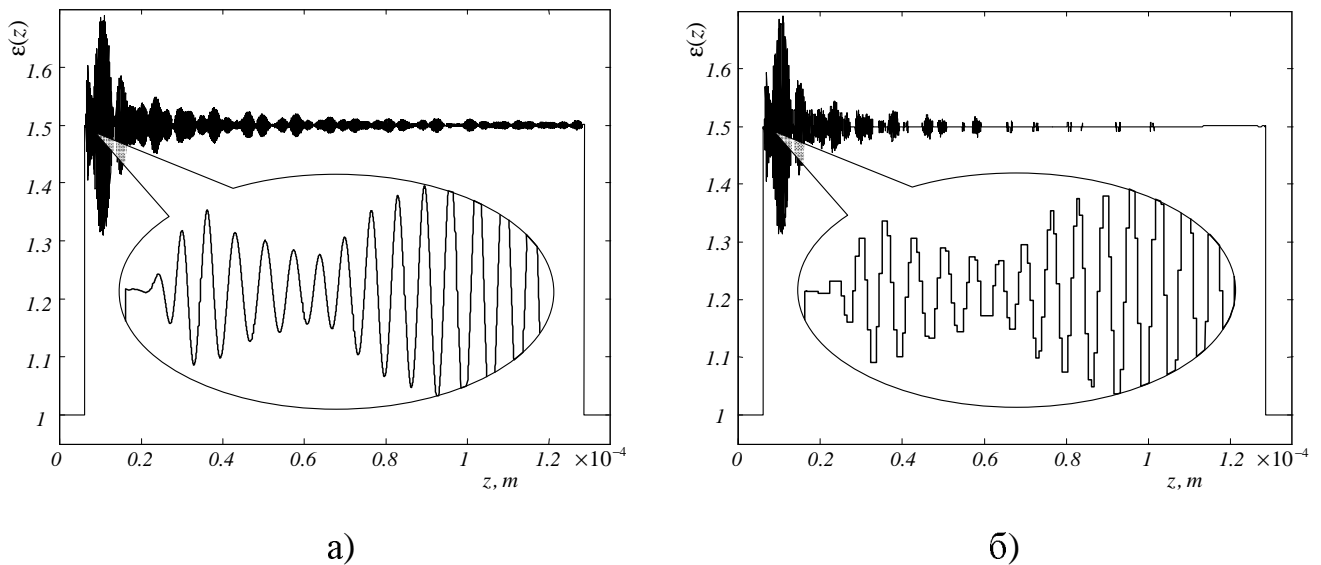


Рис. 5.9. Розв'язок оберненої задачі розсіювання - профіль діелектричної проникності шару, в якого між двома фіксованими розривами функція діелектричної проникності ϵ неперервною - а) та кусково-постійною – б)

5.5. Висновки до п'ятого розділу

Проведене дослідження показало, що у випадку випромінювання хвиль елементарними джерелами, розташованими над структурою з плоско-шаруватою неоднорідністю, обчислення поля можна умовно розділити на знаходження коефіцієнта відбиття плоских хвиль, що відбиваються від такої структури під різними кутами, та обчислення результуючого поля шляхом сумування цих плоских хвиль з відповідними коефіцієнтами. На відміну від шаруватої структури з кусково-постійним профілем діелектричної проникності, обчислення коефіцієнта відбиття від неоднорідних структур із неперервною функцією параметрів зводиться до диференціального рівняння Ріккаті. Показано, що найбільш ефективним методом числового знаходження поля від точкового джерела у плоскому шаруватому середовищі є метод комплексних джерел, який дозволяє уникнути проблем при числовому інтегруванні сильноосцилюючих та слабозникаючих підінтегральних функцій в інтегралі Зомерфельда.

Синтез структур із заданими просторовими характеристиками розсіювання хвиль від елементарних джерел зводиться також до одновимірної оберненої задачі розсіювання, в якій вихідні дані задано функцією коефіцієнта відбиття плоских

хвиль від кута падіння на фіксованій частоті. Запропонований підхід до інтерпретації рівнянь електромагнітного поля за допомогою моделей потенціального розсіювання, а також використання системи інтегральних рівнянь типу Марченка, дає можливість розв'язати обернену задачу розсіювання у випадку, коли вихідні дані задані у вигляді кутової залежності коефіцієнта відбиття як для ТМ, так і для ТЕ поляризації.

Будучи простим і теоретично обґрунтованим, числовий метод розв'язання оберненої задачі розсіювання для системи Дірака дозволяє використати запропонований підхід до синтезу розсіювальних, випромінювальних та діаграмоформувальних структур, побудованих за багатошаровою технологією. Принципи синтезу багатошарових елементів можна застосувати як у мікрохвильовому діапазоні радіохвиль, так і в оптичному. Стосовно оптичного діапазону, запропонований метод відкриває перспективи створення нових типів діелектричних дзеркал, відкритих резонаторів, тонкоплівкових покриттів, а також високоселективних інтерферометричних фільтрів. Сфера застосування отриманих результатів у мікрохвильовій техніці є суттєво більшою. Перш за все, це створення плоских діаграмоформувальних елементів, здатних забезпечувати необхідний просторовий розподіл поля завдяки заданим властивостям розсіювання багатошарової структури. На основі керамічних елементів з високою діелектричною проникністю (приклад на рис. 5.6 стосується саме структури з високою діелектричною проникністю) можна будувати компактні мікросмужкові антени. По-друге, запропонований підхід дає можливість створювати нові рефлекторні та лінзові антени, в яких апертурою служить плоска багатошарова структура. Створення багатошарових покриттів з малою розсіювальною здатністю є додатковою сферою застосування розвинутого підходу.

РОЗДІЛ 6

ОЦІНЮВАННЯ ГРАНИЦІ КОНТРАСТНИХ РОЗСІЮВАЧІВ У ДВОВИМІРНОМУ ВИПАДКУ

Як показано у першому розділі дисертації, розв'язок багатовимірних обернених задач є надзвичайно складною математичною проблемою. Явної форми розв'язку таких задач у загальному випадку не існує. Тому доцільно шукати наближені розв'язки, або будувати процедури розв'язання обернених задач розсіювання за умови наявності апіорних даних. Так, модель неоднорідного середовища, якою описують об'єкти дослідження у таких прикладних областях як дистанційне зондування та неруйнівний контроль, повинна передбачати наявність контрастних включень або підобластей, які мають чітку границю. Припущення про існування контрастної границі розділу між оточуючим однорідним середовищем та включенням дозволяє спростити процедуру розв'язку обернених задач розсіювання. Саме такому формулюванню обернених задач розсіювання у двовимірному випадку присвячено цей розділ.

Оцінювання параметрів неоднорідних середовищ у двовимірному випадку зведено до розв'язання задачі про встановлення границі контрастних неоднорідностей. Остатню запропоновано розв'язувати згідно з розвинутою стратегією ідентифікації контура тіл за відомим розподілом розсіяного електромагнітного поля у двовимірному просторі.

6.1. Узагальнений підхід до розв'язання оберненої задачі розсіювання

Запропонована нижче стратегія до вирішення сформульованої проблеми базується на:

- модифікації точної моделі, яка дає розв'язок прямої задачі розсіювання і описує поширення електромагнітних хвиль у середовищі з розсіювачем;
- побудові на основі модифікованої моделі наближених методів розв'язання оберненої задачі;

- уточненні розв'язку оберненої задачі розсіювання, побудованого за принципом мінімізації похибки наближеного розв'язку, та подальшого встановлення геометричної форми розсіювачів за відомим значенням розподілу розсіяного поля.

На рис. 6.1 представлено ієрархічну структуру моделей та методів розв'язання прямої та відповідної оберненої задачі, які лежать в основі запропонованої стратегії.

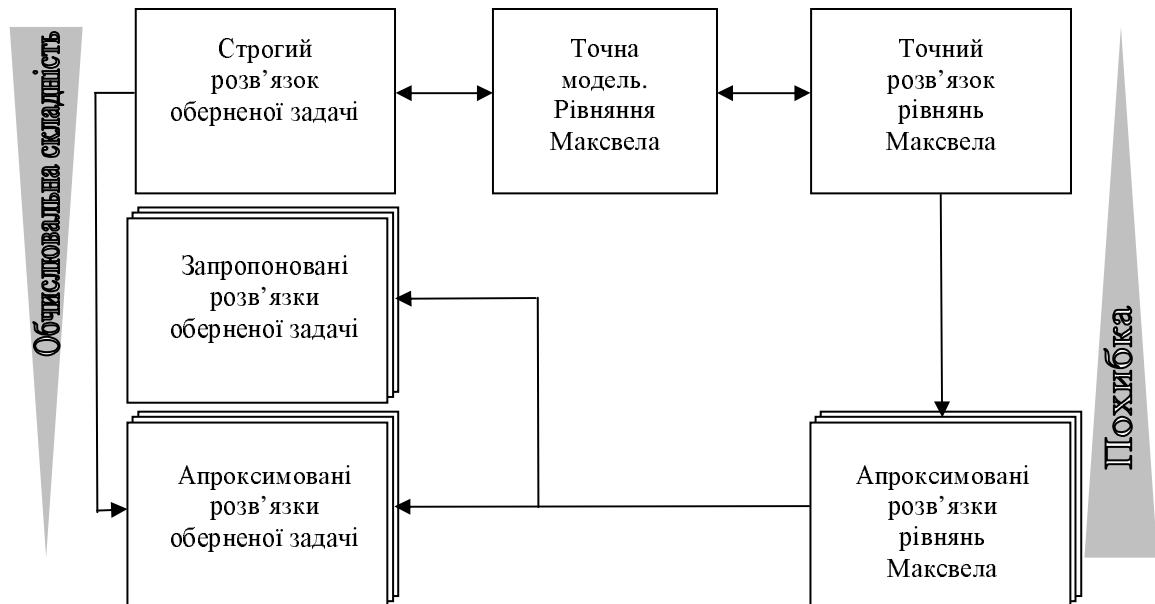


Рис. 6.1. Ієрархічна структура моделей та методів розв'язання прямої та оберненої задачі розсіювання

Для її пояснення ідею розв'язання оберненої задачі можна зобразити у термінах операторів, заданих формально у припущенні їх існування та неперервності. Розглянемо приклад оберненої задачі розсіювання, метою якої є встановлення границі ∂D розсіювача D . Нехай функція f позначає діаграму розсіювання, виміряну на поверхні B у дальній зоні (рис. 6.2) при всіх можливих напрямках падіння плоскої хвилі \mathbf{d} . Таку функцію розглядатимемо як вихідну для оберненої задачі.

Формально пряму задачу розсіювання можна записати через деякий оператор $F: \partial D \mapsto f$, який діє з простору функцій, що визначають границю розсіювача, у простір функцій діаграм розсіювання

$$F(\partial D) = f. \quad (6.1)$$

Обернена задача полягає у знаходженні оператора $H_{opt} : f \mapsto \partial D$, який діє, навпаки, з простору функцій діаграм розсіювання у простір функцій, що визначають границю розсіювача:

$$H_{opt}(f) = \partial D. \quad (6.2)$$

Такий оператор є, по суті, оберненим до оператора F .

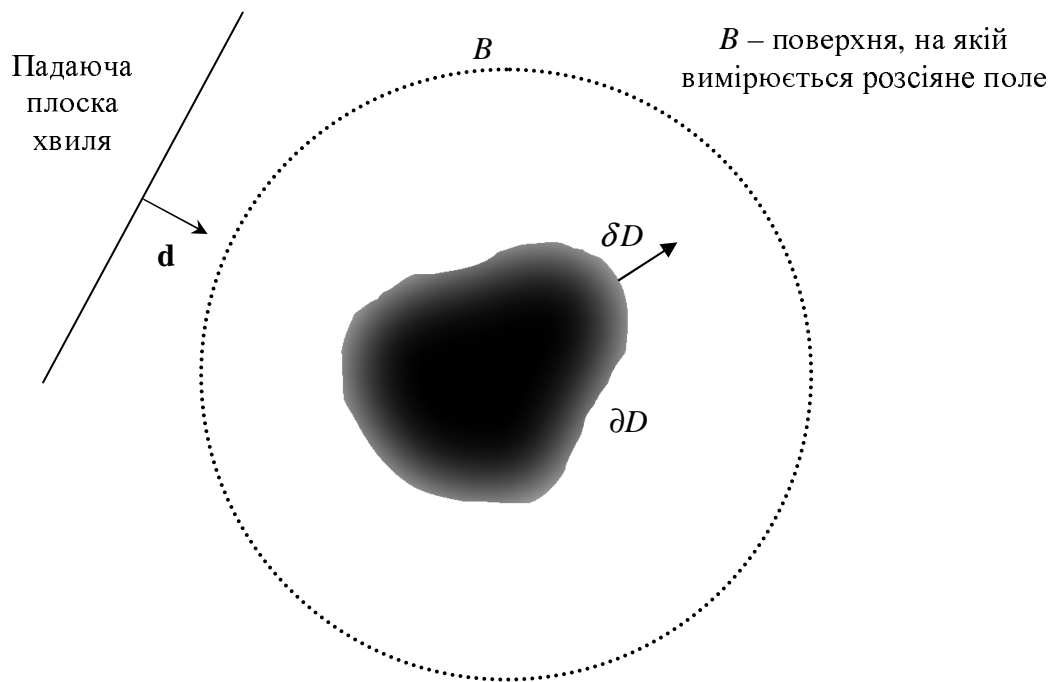


Рис. 6.2. Падіння плоскої хвилі на контрастну неоднорідність з границею ∂D

Знаходження такого оберненого оператора можна розглядати як задачу мінімізації похибки. Якщо припустити, що така задача має точний розв'язок, то його можна записати у вигляді:

$$H_{opt} = \arg \min_H \|H(f) - \partial D\|. \quad (6.3)$$

Відомо, що на відміну від оберненої задачі розсіювання, пряма задача є лінійною. Саме через нелінійність та некоректність оберненої задачі замість точного розв'язку шукають наближений. Нехай оператор H_{approx} дозволяє знайти розв'язок оберненої задачі з певною похибкою:

$$\varepsilon = \|H_{approx}(f) - \partial D\| = \varepsilon_{scatter} + \varepsilon_{interference}. \quad (6.4)$$

Для пояснення ідеї, яку розвинуто в роботі для встановлення розв'язків оберненої задачі, загальну похибку у виразі (6.4) умовно розділимо на дві складові: $\varepsilon_{scatter}$ та $\varepsilon_{interferece}$. Перша з них є спричинена наближеним характером шуканого розв'язку і характеризує точність оцінювання координат умовного точкового розсіювача, який знаходиться на границі об'єкта дослідження. Введення другої складової, що визначає похибку наближеного розв'язку оберненої задачі, пояснюється розподіленою у просторі формою розсіювача, або відмінністю розсіювача від точкового. Тут використано можливість граничного переходу, який дозволяє поверхню неточкового, або розподіленого розсіювача, зобразити сумою нескінченної кількості точкових розсіювачів, розташованих у точках, що відповідають границі.

Скориставшись формулою (6.4), задачу про встановлення операторів, які уточнюють розв'язок оберненої задачі розсіювання, зведено до задачі мінімізації

$$H_{\text{sampl}} = \arg \min_H \varepsilon_{\text{interferece}}(H). \quad (6.5)$$

Зафіксувавши значення іншої складової похибки $\varepsilon_{scatter}$, можна припустити, що існує залежність між операторами H та H_{approx} , яку у загальному випадку неможливо подати у явній формі.

Процедуру побудови розв'язку обернених задач розсіювання умовно розділено на два етапи у відповідності до запропонованої концепції:

1) на першому етапі встановимо наближену модель розсіювання електромагнітних хвиль, що дозволяє побудувати оператор H_{approx} , який у свою чергу дає можливість знайти грубу оцінку розв'язку оберненої задачі;

2) другий етап зводиться до уточнення розв'язку та полягає у модифікації наближеної моделі розсіювання з метою надання їй форми, яка допускає простий розв'язок задачі мінімізації похибки згідно з формулою (6.5).

Шукаючи таким чином уточнення наближеного розв'язку для оператора H вдається досягнути кращої точності розв'язання оберненої задачі розсіювання. Цю гіпотезу підтверджено на прикладах розв'язання обернених задач числовими методами для різних типів розсіювачів та різної форми заданих вихідних даних. Не

зважаючи на те, що обчислювальна складність розв'язку оберненої задачі запропонованим методом є більшою, ніж у методів, що дозволяють отримати грубе наближення, запропонований підхід потребує істотно менших обчислювальних ресурсів ніж знаходження розв'язку оберненої задачі розсіювання на основі строгого підходу, що продемонстровано на рис. 6.1.

6.2. Модель спостереження та побудова індикаторних функцій для розв'язку обернених задач розсіювання

Для математичного опису запропонованої стратегії розв'язання обернених задач розсіювання введемо спеціальний клас функцій та визначимо їх поведінку в околі $V_{\partial D} \subset \mathbb{R}^2$ точки $\mathbf{x}_{\partial D} \in \mathbb{R}^2$ на границі ∂D . Будемо вважати, що ∂D є диференційовною та існують вектори дотичної $\boldsymbol{\tau}$ і нормалі $\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\delta}D$ у кожній точці $\mathbf{x}_{\partial D}$ на границі ∂D . Нехай точка $\mathbf{x}_{\partial D}$ є центром локальних координат з ортонормальним базисом $\boldsymbol{\tau}$ та $\boldsymbol{\kappa}$. Тоді координати кожної точки \mathbf{x} околу $V_{\partial D}$ можна визначити через координати точки $\mathbf{x}_{\partial D}$ границі та задати значення її локальних координат d_1 і d_2 в ортонормальному базисі $\boldsymbol{\tau}$, та $\boldsymbol{\kappa}$ за допомогою:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\partial D} + d_1 \boldsymbol{\tau} + d_2 \boldsymbol{\kappa}. \quad (6.6)$$

Таке визначення координат точки околу границі є не єдиним, так як одну і ту ж точку можна визначити у різних системах локальних координат для заданої границі.

Оскільки нас цікавлять функції, які на кривій ∂D мають сингулярний характер і мають вигляд дельта-функції вздовж напрямку, що співпадає з нормаллю $\boldsymbol{\kappa}$, знайдемо координати всіх точок вздовж нормалі для фіксованої точки на границі, прирівнявши до нуля коефіцієнт $d_1 = 0$ в (6.6). В результаті отримаємо нову змінну $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\partial D} + 0\boldsymbol{\tau} + d_2\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{x}_{\partial D} + d_2\boldsymbol{\kappa}$, яку розглядатимемо як аргумент спеціального класу функцій, описаних нижче.

Визначення: Для фіксованої границі ∂D в \mathbb{R}^2 введемо клас функцій \mathbf{D} , до якого належать функція g , яку можна визначити як елемент послідовності, що збігається до дельта-функції в точках на ∂D

$$g \in \mathbf{D}: g(\mathbf{x}) = \left\{ g_n(\mathbf{x}), \mathbf{x} = (\mathbf{x}_{\partial D} + d_2 \boldsymbol{\kappa}) \in V_{\partial D} \subset \mathbb{R}^2 \mid a(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\partial D}) = a(\mathbf{x}) \delta(d_2 \boldsymbol{\kappa}) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(\mathbf{x}) \right\}. \quad (6.7)$$

На основі аналізу різних задач розсіювання показано, що найбільш придатними для реалізації запропонованої стратегії їх розв'язання є випадки, де вихідні дані $u(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in B$, або коли результати спостереження розсіяного поля можна подати в інтегральній формі:

$$u(\mathbf{x}) = \int_S J(\mathbf{x}') G_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d\mathbf{x}', \quad \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^2, \quad (6.8)$$

в якій підінтегральна функція належить класу $J(\mathbf{x}) \in \mathbf{D}$. Тут S - деяка область в \mathbb{R}^2 , яка лежить всередині контура B , і функція $J(\mathbf{x})$ зникає на границі цієї області.

Іншою необхідною умовою втілення запропонованої ідеї розв'язання оберненої задачі розсіювання є можливість приведення вихідних даних до моделі

$$\tilde{u}_j(\mathbf{x}) = \int_S J_j(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d\mathbf{x}', \quad \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^2, \quad j \subset Z \in \mathbb{Z}. \quad (6.9)$$

При цьому функції $J_j(\mathbf{x})$ та $J(\mathbf{x})$ повинні належати до того самого класу $J_j(\mathbf{x}) \in \mathbf{D}$.

Записавши модель спостереження в інтегральному вигляді (6.9) та записавши функції $J_j(\mathbf{x}) = g_{j,n}(\mathbf{x})$ параметрично як елементи зі збіжної послідовності $a_j(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\partial D}) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_{j,n}(\mathbf{x})$, обернену задачу розсіювання можна трактувати як пошук розв'язку системи рівнянь (6.9) відносно невідомого параметра $\mathbf{x}_{\partial D}$. Функції $a_j(\mathbf{x})$ та їх значення на границі $a_j(\mathbf{x}_{\partial D})$ є також невідомими, але їх знаходження не є ціллю розв'язку оберненої задачі розсіювання. Тоді основний результат, що стосується побудови методів розв'язання такої оберненої задачі, можна сформулювати у вигляді твердження.

Твердження 6.1: Нехай вихідні дані оберненої задачі розсіювання можна подати за допомогою перетворення $P_j: u(\mathbf{r}) \mapsto \tilde{u}_j(\mathbf{r})$ у вигляді скінченої (нескінченої) множини функцій

$$\tilde{u}_j(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} J_j(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d\mathbf{x}', \quad \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^2, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (6.10)$$

де функції $J_j(\mathbf{x})$ належать до класу \mathbf{D} для фіксованої границі ∂D . Тоді розв'язок оберненої задачі можна шукати у вигляді індикаторної функції, що дозволяє оцінити наявність границі в точці саплінгу \mathbf{z} . Така індикаторна функція є усередненням результату фільтрації за множиною реалізацій $j \in \mathbb{Z}$:

$$\varphi(\mathbf{z}) = E \left\langle H_{\text{samp}}(\mathbf{z}, \cdot), \tilde{u} \right\rangle^2, \quad (6.11)$$

де E - оператор усереднення; $H_{\text{samp}}(\mathbf{z}, \cdot)$ - лінійний оператор фільтрації, або “фільтр”, який знаходять із розв'язку задачі умовної мінімізації:

$$\begin{cases} H_{\text{samp}} = \arg \min_H E \left\langle H(\mathbf{z}, \cdot), \tilde{u} \right\rangle^2, \\ \left\langle H(\mathbf{z}, \cdot), h(\mathbf{z}, \cdot) \right\rangle = 1. \end{cases} \quad (6.12)$$

Тут невідому $h(\mathbf{z}, \mathbf{x})$, яка має зміст імпульсної характеристики, визначають з рівності

$$h(\mathbf{z}, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{z}) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d\mathbf{x}', \quad (6.13)$$

де функція $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ відповідає моделі вихідних даних (6.10).

Твердження 6.2 (уточнення): Якщо оператор $P_j: u(\mathbf{r}) \mapsto \tilde{u}_j(\mathbf{r})$ є відомим та детермінованим, і аналітично можна встановити функцію $K_j: J(\mathbf{x}) \mapsto J_j(\mathbf{x})$, то задачу умовної мінімізації можна сформулювати для одночасного визначення оператора фільтрації та невідомої функції $J(\mathbf{x})$ в точках на границі. Для цього задачу мінімізації розв'язують у вигляді

$$\begin{cases} \{H_{\text{samp}}, J(\mathbf{z})\} = \arg \min_{H, J(\mathbf{z})} \sum_j \left\langle H(\mathbf{z}, \cdot), \tilde{u} \right\rangle - K_j J(\mathbf{z}) \right|^2, \\ \left\langle H(\mathbf{z}, \cdot), h(\mathbf{z}, \cdot) \right\rangle = 1. \end{cases} \quad (6.14)$$

Результати підтверджують те, що користуючись запропонованою ідеєю можна знайти розв'язок обернених електродинамічних задач розсіювання для ідеально провідних екранів та для проникних діелектриків. Запропонована стратегія розв'язання обернених задач продемонструвала свою придатність також до узагальнення на різні форми вихідних даних для оберненої задачі, зокрема на багаточастотний випадок.

6.3. Метод ідентифікації границі ідеально провідного розсіювача за відомим розподілом розсіяного поля на фіксованій частоті

Керуючись запропонованою стратегією в цьому пункті детально описано процедуру знаходження розв'язку оберненої двовимірної задачі розсіювання для ідеально провідного тіла. Прийнято, що вихідними є значення розсіяного поля $E_3^s(\mathbf{k})$, задані на фіксованій частоті для всіх кутів падіння $\mathbf{k} \in S^1$ та всіх кутів спостереження $\mathbf{l} \in S^1$ (рис. 6.3).

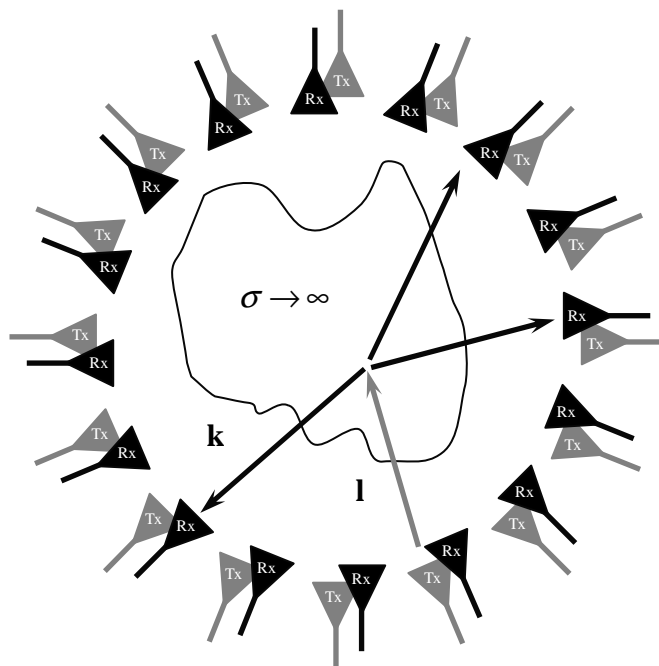


Рис. 6.3. Реєстрація вихідних даних для оберненої задачі розсіювання від ідеально-провідного об'єкта на фіксованій частоті

6.3.1. Дискретне формулювання задачі. Відомо, що складову розсіяного поля у виразі (1.35) можна апроксимувати суперпозицією полів від великої кількості точкових джерел, які знаходяться на поверхні ∂D . Таку апроксимацію часто використовують для числового розв'язання прямих задач розсіювання. Очевидно, що існує певна похибка такої апроксимації, яку, як правило, в задачах числового аналізу намагаються контролювати, встановлюючи для неї верхню межу. Значення похибки залежить від багатьох параметрів, а її детермінований характер настільки складний, що саму похибку можна розглядати як випадкову величину. Тому для подальшого дослідження розсіяне поле з виразу (1.35), що реєструється на колі B (рис. 6.2), будемо трактувати як випадковий процес, який має детерміновану та випадкову складові

$$\tilde{E}_3^s(\mathbf{x}) = ik \sum_{j \in M} J(\mathbf{y}_j) \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}_j) + \xi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{y}_j \in \partial D \text{ та } M = \{1, 2, \dots, M\} \in \mathbb{N}, \quad (6.15)$$

де $\xi(\mathbf{x})$ - випадкова складова, що має гаусівський розподіл з нульовим середнім та дисперсією σ_n^2 , а величини $\xi(\mathbf{x}_1)$ та $\xi(\mathbf{x}_2)$ в будь-яких точках $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ - статистично незалежні.

Крім того, слід зробити ще одне уточнення щодо моделі (6.15). Виходячи з єдності розв'язку оберненої задачі розсіювання, яка вимагає задання значень розсіяного поля $E_3^s(\mathbf{x})$, на $\mathbf{x} \in B$ та для всіх можливих кутів падіння $\mathbf{d} \in S^1$, можемо припустити, що кут падіння є також випадковою величиною з рівномірним розподілом у напівінтервалі кутів $[0, 2\pi)$. Тоді розподіл струмів на поверхні розсіювача $J(\mathbf{y})$ буде випадковим, оскільки він залежить від напрямку падіння плоскої хвилі. Таке детерміністичне трактування окремих параметрів у моделі (6.15) не змінює детерміністичного формулювання оберненої задачі розсіювання, що розглядається.

У цьому випадку розсіяне поле $E_3^s(\mathbf{x})$ в точці \mathbf{x} позначимо через $\tilde{E}_3^s(\mathbf{x})$, оскільки ця величина неявно залежить від напрямку падіння плоскої хвилі \mathbf{d} , а вираз (6.15) відповідає моделі (6.10).

На практиці вимірювання завжди супроводжуються похибками різного походження, а результат вимірювань містить шумову компонентну. Тому використання моделі (6.15) з випадковими складовими надає їй більшої загальності і дозволяє скористатися нею для опису результатів реальних вимірювань.

Основна ідея, яку покладено в основу цього дослідження, полягає у трактуванні оберненої задачі, як задачі виявлення та локалізації у просторі вторинних джерел поля на поверхні розсіювача. У цьому випадку останню формулюємо відносно множини дискретних струмів у відповідності до моделі (6.15). Будучи збудженими на поверхні об'єкта дослідження падаючою хвилею, такі вторинні джерела формують розсіяне поле, розподіл якого на колі B використаємо як вихідні дані для оберненої задачі. Оскільки одночасно знайти значення $J(\mathbf{y}_j)$ та $\mathbf{y}_j \in \partial D$ надзвичайно складно, і відповідні розв'язки сьогодні невідомі, скористаємося стратегією методів саплінгу. Для цього виокремимо з поверхні ∂D точковий розсіювач $l \in \partial D$ і обернену задачу розсіювання будемо розглядати як проблему виявлення цього об'єкта за значенням розсіяного поля, вважаючи, що розподіл струмів на поверхні $\partial D \setminus l$ є апіорно невідомим та випадковим.

Використовуючи дискретну модель, формулювання задачі зведемо до оцінювання невідомого параметра $\mathbf{l} = \mathbf{y}_m$, який відповідає координатам розсіювача l , а значення струмів $J(\mathbf{y}_j)$ точкових джерел $j \in M \setminus m$ та $\xi(\mathbf{x})$ є випадковими і невідомими. При цьому виділимо шуканий параметр у виразі (6.15) та запишемо модель спостереження у вигляді

$$\tilde{E}_3^s(\mathbf{x}) = a\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{l}) + ik \sum_{j \in M \setminus m} J(\mathbf{y}_j)\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}_j) + \xi(\mathbf{x}), \quad (6.16)$$

де a - комплексний коефіцієнт, який визначає внесок точкового розсіювача у сумарне розсіяне поле.

Виявлення точкового елемента l , який належить поверхні ідеально провідного невідомого розсіювача, можна здійснити, використовуючи різні припущення щодо статистичної моделі спостереження, оскільки нічого не відомо про другу складову у виразі (6.16). Розділимо доданки у виразі (6.16) наступним чином:

$$\tilde{E}_3^s(\mathbf{x}) = a\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{l}) + \eta(\mathbf{x}), \quad (6.17)$$

де $\eta(\mathbf{x}) = ik \sum_{j \in M \setminus m} J(\mathbf{y}_j) \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}_j) + \xi(\mathbf{x})$ - випадковий процес, характеристики якого невідомі.

Розглянемо два випадки, скориставшись різними припущеннями про статистичні властивості $\eta(\mathbf{x})$, та розв'яжемо відповідні задачі.

Задача 6.1. Знайти координати \mathbf{l} точкового розсіювача l на основі розв'язку задачі виявлення точкового джерела для моделі вихідних даних у вигляді (6.17). У цій задачі скористаємося припущенням про те, що $\eta_1(\mathbf{x}) = \eta(\mathbf{x})$ також випадковий гаусівський некорельований процес з дисперсією σ_c^2 та нульовим середнім.

Задача 6.2. Знайти координати \mathbf{l} точкового розсіювача l з розв'язку задачі виявлення точкового джерела, припускаючи, що $\xi(\mathbf{x})$ та $\eta_2(\mathbf{x})$ - випадкові гаусівські процеси. При цьому оцінку статистичних характеристик випадкового процесу $\eta_2(\mathbf{x})$ побудуємо на основі наявних вихідних даних для оберненої задачі.

Для наочності введемо нові позначення, що є типовими для інженерних задач обробки сигналів. Тут $Y = \tilde{E}_3^s(\mathbf{x})$ - вихідні дані, $X = a\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{l})$ - функція, що залежить від невідомого параметра \mathbf{l} та $N = \eta(\mathbf{x})$ - випадкова складова. Крім того, використаємо позначення скалярного добутку у вигляді $\langle A, B \rangle = \int_{\Omega} \overline{a(\omega)} b(\omega) d\omega$.

6.3.2. Наближений метод розв'язання оберненої задачі розсіювання.

Користуючись уведеними позначеннями, модель (6.16) подамо у вигляді

$$Y = X + N. \quad (6.18)$$

Розв'язок задачі 6.1 будемо шукати у вигляді лінійного фільтра $\langle H_1(\mathbf{z}), \cdot \rangle$, який застосуємо для фільтрації $\langle H_1(\mathbf{z}), Y \rangle$ вихідних даних для кожної точки простору \mathbf{z} , що називають точкою смплінгу.

За перевищенням значення $\langle H_1, Y \rangle = \langle H_1(\mathbf{z}), Y \rangle$ певного заданого порогу можна зробити припущення про наявність розсіювача у точці \mathbf{z} . Значення аргумента

\mathbf{z} , при якому функція $\langle H_1, Y \rangle = \langle H_1(\mathbf{z}), Y \rangle$ досягає максимуму, дозволяє також оцінити розташування розсіювача. Такий підхід правомірно можна назвати методом сэмплінгу, оскільки оцінка наявності розсіювача в конкретній точці здійснюється незалежно від того, чи відомо про наявність розсіювальної поверхні в сусідніх точках.

Для того, щоб знайти лінійний оператор H_1 , визначимо критерій оптимальності фільтрації. Для цього оберемо відношення реакції фільтра на функцію, що описує розсіяне поле від точкового розсіювача $\langle H_1, X \rangle$, до значення реакції цього фільтра на випадкову компоненту N у вхідних даних (6.18). Враховуючи імовірнісний характер процесу N , реакцію фільтра визначимо через усереднення $E[\langle H_1, N \rangle]^2$ за множиною реалізацій випадкового процесу та запишемо критерій через відношення енергетичних характеристик, щоб уникнути впливу невідомої фази. Такий критерій матиме вигляд

$$snr = \frac{|\langle H_1, X \rangle|^2}{E[\langle H_1, N \rangle]^2} = \frac{\langle H_1, XX^H H_1 \rangle}{\langle H_1, B_N H_1 \rangle} = \frac{\langle H_1, CH_1 \rangle}{\langle H_1, B_N H_1 \rangle}, \quad (6.19)$$

де $C = XX^H$ та $B_N = E[NN^H]$ мають зміст кореляційних матриць; X^H - матриця ермітово-спряжена до X .

Розв'язок оберненої задачі методом сэмплінгу також шукатимемо, максимізуючи відношення, задане критерієм (6.19). Для цього зафіксуємо значення знаменника у виразі (6.19) та візьмемо його рівним одиниці

$$\langle H_1, B_N H_1 \rangle = 1. \quad (6.20)$$

Тоді критерій (6.19) матиме вигляд

$$snr|_{\langle H_1, B_N H_1 \rangle = 1} = \langle H_1, CH_1 \rangle, \quad (6.21)$$

а відповідну задачу максимізації запишемо як задачу умовної максимізації:

$$H_1 = \arg \max_{H_1} snr = \arg \max_{H_1} (\langle H_1, CH_1 \rangle) \text{ для } \langle H_1, B_N H_1 \rangle = 1. \quad (6.22)$$

Розв'язок останньої співпадає з максимумом функціонала Ψ , який отримано методом множників Лагранжа:

$$\Psi = \langle H_1, CH_1 \rangle + \lambda(1 - \langle H_1, B_N H_1 \rangle), \quad (6.23)$$

де λ - невідомий множник Лагранжа.

Варіаційний підхід у свою чергу дає можливість знайти розв'язок цієї задачі відносно невідомих H_1 та λ . Для цього варіацію функціонала (6.23) оцінимо як

$$\begin{aligned} \nabla_H &= \langle (H_1 + \delta H_1), C(H_1 + \delta H_1) \rangle + \lambda(1 - \langle (H_1 + \delta H_1), B_N(H_1 + \delta H_1) \rangle) - \\ &\quad - \langle H_1, CH_1 \rangle - \lambda(1 - \langle H_1, B_N H_1 \rangle) = \\ &= \langle H_1, C\delta H_1 \rangle + \langle \delta H_1, CH_1 \rangle + \langle \delta H_1, CdH_1 \rangle - \\ &\quad - \lambda \langle H_1, B_N \delta H_1 \rangle - \lambda \langle \delta H_1, B_N H_1 \rangle - \lambda \langle \delta H_1, B_N \delta H_1 \rangle. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Усунувши члени вищих порядків, отримаємо вираз

$$\begin{aligned} \nabla_H &\approx \langle H_1, C\delta H_1 \rangle + \langle \delta H_1, CH_1 \rangle - \lambda \langle H_1, B_N \delta H_1 \rangle - \lambda \langle \delta H_1, B_N H_1 \rangle = \\ &= 2\operatorname{Re} \langle \delta H_1, CH_1 \rangle - 2\lambda \operatorname{Re} \langle \delta H_1, B_N H_1 \rangle. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Звідси можна зробити висновок, що функціонал Ψ буде досягати екстремуму, якщо виконується умова

$$\operatorname{Re} \langle \cdot, CH_1 \rangle - \lambda \operatorname{Re} \langle \cdot, B_N H_1 \rangle = 0. \quad (6.26)$$

Не важко показати, що рівність (6.26) задовольнятиме оператор H_1 , який визначатиметься формулою:

$$H_1 = B_N^{-1} X, \quad (6.27)$$

а множник Лагранжа буде рівним

$$\lambda = \langle X, B_N^{-1} X \rangle. \quad (6.28)$$

Згідно з припущенням, випадкова складова є незалежною та нормально розподіленою. Отже, коваріаційна “матриця” має діагональну структуру $B_N(x_1, x_2) = \sigma_c^2 \delta(x_1 - x_2)$. Тоді оптимальним в сенсі максимізації критерію (6.19) буде фільтр $\langle H_1, \cdot \rangle$, визначений як $H_1 = B_N^{-1} X = \sigma_c^{-2} X$.

За результатами проведеного аналізу можна сформулювати теорему.

Теорема 6.1. Фільтр $\langle H_1, \cdot \rangle$, для якого $H_1 = \sigma_c^{-2} \Phi$ максимізує відношення квадрату модуля реакції фільтра на поле від точкового розсіювача до усередненої

енергії його реакції цього фільтра на нормально розподілену випадкову складову з дисперсією σ_c^2 .

Доведення теореми впливає з процедури синтезу фільтра (6.19)-(6.28).

Усереднене значення квадрату реакції $E\left[\left|\langle H_1, Y \rangle\right|^2\right] = \sigma_c^{-2} E\left[\left|\langle \Phi(\cdot, \mathbf{z}), \tilde{E}_3^s(\cdot) \rangle\right|^2\right]$

цього фільтра $\langle H_1, \cdot \rangle$ може служити індикаторною функцією для виявлення точкового розсіювача/випромінювача.

В радіотехніці відношення (6.19) називається відношенням сигналу до шуму (завади). А фільтр $\langle X, \cdot \rangle$, синтезований за критерієм максимуму цього відношення має назву погодженого фільтра. Таку фільтрацію використовують у радіолокаційних системах та системах телекомунікації для виявлення відомого сигналу на фоні завад та шуму. Принцип погодженої фільтрації покладений в основу фокусування антенних решіток та синтезованих апертур, коли просторова обробка сигналів реалізується за допомогою фазообертачів.

6.3.3. Уточнення наближеного розв'язку оберненої задачі. На жаль, ефективність отриманого у попередньому розділі методу самплінгу для розв'язання оберненої задачі розсіювання є невисокою. Перш за все це пояснюється тим, що припущення про незалежність значень випадкового процесу $\eta(\mathbf{x}) = ik \sum_{j \in M \setminus m} J(\mathbf{y}_j) \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}_j) + \xi(\mathbf{x})$ має дуже грубий характер. Складова $ik \sum_{j \in M \setminus m} J(\mathbf{y}_j) \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}_j)$ у виразі (6.16) є причиною корельованості значень випадкового процесу, що у свою чергу вказує на неправомірність використання припущення про діагональну структуру коваріаційної матриці $B_N(x_1, x_2) \neq \sigma_c^2 \delta(x_1 - x_2)$. Як наслідок, результат фільтрації $\langle X, Y \rangle = \langle a\Phi(\cdot, \mathbf{z}), Y \rangle$ не буде максимізувати відношення (6.19) у точці самплінгу \mathbf{z} .

З метою подальшого аналізу розглянуто вираз

$$\begin{aligned} \langle X, Y \rangle &= \langle a\Phi(\cdot, \mathbf{z}), Y \rangle = \left\langle a\Phi(\cdot, \mathbf{z}), \left(a\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{l}) + ik \sum_{j \in M \setminus m} J(\mathbf{y}_j) \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}_j) + \xi(\mathbf{x}) \right) \right\rangle = \\ &= \langle a\Phi(\cdot, \mathbf{z}), a\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{l}) \rangle + \left\langle a\Phi(\cdot, \mathbf{z}), ik \sum_{j \in M \setminus m} J(\mathbf{y}_j) \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}_j) \right\rangle + \langle a\Phi(\cdot, \mathbf{z}), \xi(\mathbf{x}) \rangle. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Наявність складової $\kappa = \left\langle a\Phi(\cdot, \mathbf{z}), ik \sum_{j \in M \setminus m} J(\mathbf{y}_j) \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}_j) \right\rangle$ є причиною істотних похибок у синтезованій схемі фільтрації. Її значенням можна нехтувати, якщо розміри екрану є маленькими, і він відповідає моделі точкового розсіювача. Але такий випадок не представляє інтересу в цьому дослідженні, оскільки метою є встановлення форми розсіювача. Саме тому другу задачу сформульовано для усунення впливу складової κ на результат.

Розв'язок другої задачі також шукатимемо у вигляді лінійного фільтра $\langle H_2(\mathbf{z}), \cdot \rangle$. Враховуючи, що фільтр $\langle H_1, \cdot \rangle$ ефективно виявляє точковий розсіювач, результат, задекларований теоремою 6.1, покладемо в основу формулювання другої задачі. Зафіксуємо реакцію $\langle H_2, \cdot \rangle$ шуканого фільтра на поле від точкового розсіювача, який знаходиться у точці самплінгу. Вважаємо, що в такій точці виконується умова ідентичності реакції шуканого фільтра $\langle H_2, \Phi \rangle = \langle H_1, \Phi \rangle$ до реакції фільтра H_1 , отриманого за критерієм максимізації відношення (6.19) при фіксованому значенні нормально розподіленої некорельованої випадкової складової. Оскільки значення $\langle H_1(\mathbf{z}), \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{l}) \rangle$ при $\mathbf{z} = \mathbf{l}$ досягатиме максимального значення, то для спрощення розрахунків доцільно його про нормувати: $\left| \langle H_2(\mathbf{z}), \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \rangle \right| = 1$. Абсолютне значення в цій умові гарантуватиме усунення впливу фази на результат фільтрації. Нормування реакції фільтра не суперечить критерію (6.19), оскільки умовою (6.20) попередньо також зафіксовано та пронормовано максимальне значення.

Крім цього, на шуканий розв'язок H_2 накладемо додаткову умову, спрямовану на мінімізацію похибки від доданка κ . З цією метою задачу знаходження фільтра H_2 запишемо як задачу мінімізації загальної енергії,

обчисленої за всіма можливими реалізаціями випадкового процесу Y у відповідності до виразів (6.12) та (6.13). У результаті, задачу (6.2) формально можна подати як задачу умовної мінімізації:

$$H_2 = \arg \min_{H_2} E \left[\left| \langle H_2, Y \rangle \right|^2 \right] \quad (6.30)$$

$$\text{для } \left| \langle H_2, \Phi \rangle \right| = 1. \quad (6.31)$$

Розв'язок останньої також знайдемо за допомогою методу множників Лагранжа, як і в першій задачі. Для цього встановимо функціонал, мінімум якого співпадає з розв'язком вихідної задачі (6.30) та (6.31), а задачу мінімізації визначено як

$$H_2 = \arg \min_{H_2} \left(E \left[\left| \langle H_2, Y \rangle \right|^2 \right] + \alpha (1 - \langle H_2, X \rangle) + \beta (1 - \langle X, H_2 \rangle) \right), \quad (6.32)$$

де α та β - невідомі множники Лагранжа.

Оскільки має місце тотожність $\langle H_2, \cdot \rangle^H = \langle \cdot, H_2 \rangle$ то для забезпечення симетричності умову (6.31) у функціоналі (6.32) задано двома доданками, вплив яких визначають множники α та β .

Загальну енергію реакції фільтра можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} E \left[\left| \langle H_2, Y \rangle \right|^2 \right] &= E \left[\langle H_2, Y \rangle^H \langle H_2, Y \rangle \right] = E \left[\langle Y, H_2 \rangle \langle Y, H_2 \rangle \right] = \\ &= E \left[\langle Y Y^H H_2, H_2 \rangle \right] = E \left[\langle H_2, (Y Y^H)^H H_2 \rangle \right] = \langle H_2, (E [Y Y^H]) H_2 \rangle = \langle H_2, B H_2 \rangle, \end{aligned} \quad (6.33)$$

де $B = E [Y Y^H]$ має зміст коваріаційної матриці випадкового процесу, що спостерігається.

Отже, функціонал, мінімум якого шукаємо, запишемо як

$$Y = \langle H_2, B H_2 \rangle + \alpha (1 - \langle H_2, X \rangle) + \beta (1 - \langle X, H_2 \rangle). \quad (6.34)$$

Для того, щоб знайти варіацію цього функціоналу, визначимо варіацію кожного з його доданків у (6.34) окремо. Варіацію першого доданку можна знайти з формули

$$\begin{aligned}
& \langle B(H_2 + \delta H_2), (H_2 + \delta H_2) \rangle - \langle BH_2, H_2 \rangle = \\
& = \langle (BH_2 + B\delta H_2), (H_2 + \delta H_2) \rangle - \langle BH_2, H_2 \rangle = \\
& = \langle BH_2, (H_2 + \delta H_2) \rangle + \langle B\delta H_2, (H_2 + \delta H_2) \rangle - \langle BH_2, H_2 \rangle = \\
& = \langle BH_2, H_2 \rangle + \langle BH_2, \delta H_2 \rangle + \langle B\delta H_2, H_2 \rangle + \langle B\delta H_2, \delta H_2 \rangle - \langle BH_2, H_2 \rangle = \\
& = \langle BH_2, \delta H_2 \rangle + \langle B\delta H_2, H_2 \rangle + \langle B\delta H_2, \delta H_2 \rangle.
\end{aligned} \tag{6.35}$$

Тоді варіації другого і третього доданків матимуть вигляд

$$\begin{aligned}
& \alpha(1 - \langle X, (H_2 + \delta H_2) \rangle) - \alpha(1 - \langle X, H_2 \rangle) = \\
& = -\alpha \langle X, H_2 \rangle - \alpha \langle X, \delta H_2 \rangle + \alpha \langle X, H_2 \rangle = -\alpha \langle X, \delta H_2 \rangle
\end{aligned} \tag{6.36}$$

та

$$\begin{aligned}
& \beta(1 - \langle (H_2 + \delta H_2), X \rangle) - \beta(1 - \langle H_2, X \rangle) = \\
& = -\beta \langle H_2, X \rangle - \beta \langle \delta H_2, X \rangle + \beta \langle H_2, X \rangle = -\beta \langle \delta H_2, X \rangle.
\end{aligned} \tag{6.37}$$

Нехтуючи членами вищих порядків у (6.35), запишемо першу варіацію функціоналу (6.34) формулою

$$\nabla_H \approx 2\operatorname{Re}\langle BH_2, \delta H_2 \rangle - \alpha \langle X, \delta H_2 \rangle - \beta \langle \delta H_2, X \rangle. \tag{6.38}$$

Прирівнявши отриманий вираз до нуля, встановимо рівняння, розв'язок якого дасть можливість визначити шукану функцію H_2 :

$$2\operatorname{Re}\langle BH_2, \delta H_2 \rangle - \alpha \langle X, \delta H_2 \rangle - \beta \langle \delta H_2, X \rangle = 0. \tag{6.39}$$

Аналізуючи розклад функції у вигляді $\langle X, dH_2 \rangle = \operatorname{Re}\langle X, dH_2 \rangle + i\operatorname{Im}\langle X, dH_2 \rangle = a + ib$

та запис (6.39) через

$$2\operatorname{Re}\langle BH_2, \delta H_2 \rangle - (\alpha a + \beta a) - i(\alpha b - \beta b) = 0, \tag{6.40}$$

можна переконатися, що для дійсних множників Лагранжа α та β рівність (6.39) справджується тільки у випадку, якщо $\alpha = \beta$. Відповідно, рівняння (6.39) можна подати як

$$\operatorname{Re}\langle BH_2, \delta H_2 \rangle = \alpha \operatorname{Re}\langle X, \delta H_2 \rangle. \tag{6.41}$$

Його розв'язок також співпадатиме з розв'язком іншого рівняння

$$BH_2 = \alpha X. \tag{6.42}$$

Виходячи з моделі (6.15), не важко показати, що коваріаційну “матрицю” можна факторизовано записати у вигляді

$$B = G + \sigma_n^2 I, \quad (6.43)$$

де G є виродженим оператором, а I - оператор тотожності.

Враховуючи, що ряд $B^{-1} = (G + \sigma_n^2 I)^{-1}$ збігається, обернений оператор B^{-1} існує, і розв’язок задачі про встановлення фільтра можна виразити формулою

$$H_2 = \lambda B^{-1} X. \quad (6.44)$$

Підставивши знайдений розв’язок в умову (6.31), знайдемо невідомий коефіцієнт Лагранжа

$$\lambda = \frac{1}{\langle B^{-1} X, X \rangle}. \quad (6.45)$$

Тоді з (6.45) та (6.44) можна отримати також розв’язок задачі мінімізації (6.30) у вигляді

$$H_2 = \frac{B^{-1} X}{\langle B^{-1} X, X \rangle}. \quad (6.46)$$

Сформулюємо цей результат як теорему.

Теорема 6.2. Фільтр $\langle H_2, \cdot \rangle$, в якого $H_2 = \lambda B^{-1} \Phi$ і $\lambda = \frac{1}{\langle B^{-1} \Phi, \Phi \rangle}$, формує

відгук з фіксованим значенням від точкового джерела з полем Φ , розташованого в точці семплінгу, та мінімізує реакцію фільтра від джерел випромінювання, розташування яких не співпадає з точкою семплінгу. Статистичні властивості розподілу поля таких джерел описує коваріаційна матриця B .

Щоб уникнути впливу невідомої фази, розглянемо усереднене значення реакції побудованого фільтра $E \left[\left| \langle H_2, Y \rangle \right|^2 \right]$ на вихідні дані Y , які відповідають моделі (6.18). У цьому випадку усереднено всі доступні реалізації випадкового процесу, що спостерігаються. Враховуючи, що

$E \left[\left| \langle H_2, Y \rangle \right|^2 \right] = \langle H_2, \langle B, H_2 \rangle \rangle = \langle \lambda B^{-1} X, \lambda B B^{-1} X \rangle = \lambda^2 \langle B^{-1} X, X \rangle$ та використовуючи

отриманий вираз для множника Лагранжа (6.45), запропонуємо нову формулу індикаторної функції для розв'язку оберненої задачі розсіювання методом сэмплінгу:

$$E\left[\left|\langle H_2(z), Y \rangle\right|^2\right] = \frac{1}{\langle B^{-1}X, X \rangle} = \frac{1}{\langle B^{-1}\Phi(\cdot, \mathbf{z}), \Phi(\cdot, \mathbf{z}) \rangle}. \quad (6.47)$$

Обчислення такої функції для кожної точки сэмплінгу потребує встановлення коваріаційної матриці B за вихідними даними. Як зазначено вище, така функція є усередненням коваріацій $B = E[YY^H]$ для всіх можливих реалізацій процесу Y . Для випадку, коли вихідні дані про розсіяне поле задані оператором розсіювання в дальній зоні $\tilde{S}(\mathbf{x}, \mathbf{d}) = \tilde{E}_3^s(\mathbf{x}, \mathbf{d})$, а усереднення здійснюється за випадковим параметром \mathbf{d} при рівномірно розподіленому напрямі падіння плоскої хвилі, коваріаційну матрицю можна визначити як $B = \tilde{S}\tilde{S}^H = FF^H + \sigma_n^2 I$. Якщо вихідні дані оберненої задачі задано дискретно для скінченної кількості реалізацій, то оцінку коваріаційної матриці можна отримати за принципом максимуму правдоподібності [263]. Математичний запис для такої оцінки співпадає з попереднім виразом.

Для запису розв'язку оберненої задачі розсіювання у неперервному випадку та при $\sigma_n^2 = 0$ визначимо наступний оператор

$$(Fg)(\hat{x}) := \int_{S^1} E_3^s(\hat{x}, d)g(d)dl(d), \hat{x} \in S^1. \quad (6.48)$$

Твердження 6.3. Шукана індикаторна функція для розв'язку оберненої задачі запропонованим методом має вид

$$\varphi_{pc}(\mathbf{z}) = \langle \psi_{\mathbf{z}}, \Phi(\cdot, \mathbf{z}) \rangle^{-1}, \quad (6.49)$$

де $\psi_{\mathbf{z}}$ – є регуляризованим розв'язком рівняння, записаного в операторній формі:

$$FF^*\psi_{\mathbf{z}} = \Phi(\cdot, \mathbf{z}). \quad (6.50)$$

Тут $\langle f, g \rangle = \int_{S^1} f(\hat{x})g(\hat{x})dl(\hat{x})$ – скалярний добуток; а $\Phi(\cdot, \mathbf{z})$ – діаграма випромінювання точкового джерела, що знаходиться у точці \mathbf{z} .

Здатність візуалізувати форму розсіювача за допомогою розвинутого методу сэмплінгу вперше продемонстровано числовими експериментами, з використанням

ідеї фільтрації методом праці [242] у випадку багаточастотних даних розсіювання при випадковому опромінюванні об'єкта дослідження з метою реконструкції його поверхні [36].

Зазначимо, що синтезований метод саплінгу можна формально звести до процедури лінійного саплінгу, запропонованої в [210], якщо припустити, що існують обернені оператори $S^{-1} = F^{-1}$. Для підтвердження цього твердження, наведемо формальний запис індикаторної функції (6.47) за умови відсутності $\sigma_n^2 = 0$ у вихідних даних випадкової рівномірно розподіленої незалежної складової

$$E\left[\left|\langle H_2, Y \rangle\right|^2\right] = \frac{1}{\langle B^{-1}\Phi, \Phi \rangle} = \frac{1}{\langle (SS^H)^{-1}\Phi, \Phi \rangle} = \frac{1}{\langle S^{-1}\Phi, S^{-1}\Phi \rangle} = \frac{1}{\langle \varphi, \varphi \rangle} = \frac{1}{\|\varphi\|^2}. \quad (6.51)$$

Як видно, функція φ є нічим іншим, як розв'язком основного рівняння лінійного саплінгу [210]:

$$F\varphi = \Phi. \quad (6.52)$$

В роботі [210] таке рівняння запропоновано евристично. У подальших дослідженнях методу лінійного саплінгу виведення цього рівняння відсутнє, незважаючи на велику кількість праць з аналізом цього методу. Натомість всесторонньо досліджували властивості регуляризованого розв'язку рівняння (6.52) та властивості оператора розсіювання \tilde{S} у дальній зоні.

Аналіз оператора розсіювання \tilde{S} у дальній зоні показав, що регуляризований розв'язок рівняння (6.52) визначає індикаторну функцію для методу лінійного саплінгу лише у випадку, коли частота ω не є власним значенням задачі Діріхле для розсіювача, який досліджується. Натомість запропонований тут шлях виведення не потребує введення такого обмеження, оскільки побудований за критерієм, який є справедливим для будь-якої частоти.

З іншої сторони, формальна ідентичність формули (6.52) та запропонованого методу (6.47) дозволяє окреслити властивість, яку не встановлено при теоретичному обґрунтуванні методу лінійного саплінгу. Основне твердження, що впливає з властивостей оператора розсіювання, стосується лише необмеженості розв'язку рівняння (6.52) у точках, які не належать розсіювачу. Така властивість не дає

відповіді на питання, де знаходиться границя розсіювача. У той час, як у запропонованому в дисертації методі індикаторна функція (6.47) досягає свого максимуму в точках концентрації поверхневих струмів, тобто на границі розсіювача. Належний вибір регуляризуючого доданку в методі лінійного саплінгу дозволить також візуалізувати границю розсіювача.

Метод лінійного саплінгу [210] обґрунтовують також, використовуючи твердження про належність функції $\Phi(\cdot, \mathbf{z})$ до образу лінійного оператора \tilde{S} , якщо точка саплінгу належить розсіювачу.

Запропонований підхід до конструктивного виведення рівнянь (6.49) та (6.50) відкриває можливість узагальнення методу саплінгу на випадок, коли розсіювання досліджується для множини частот, і відповідним чином формулюється обернена задача. Одну з можливих процедур розв'язання багаточастотної оберненої задачі розвинуто на основі компонування векторів Y та X у моделі (6.18) за допомогою скінченної кількості підвекторів, що відповідають різним частотам i , відповідно, містять значення розсіяного поля (як вихідних даних оберненої задачі) та значення поля точкового розсіювача.

6.3.4. Приклади числового розв'язання оберненої задачі розсіювання. Для підтвердження дієвості методу саплінгу, виведення якого запропоновано в цій роботі на основі статистичної інтерпретації оберненої задачі, проведемо числове моделювання. Результати числового розв'язку прямої задачі розсіювання на ідеально провідному циліндрі відомої форми використаємо як вихідні дані для оберненої задачі. Останню, в свою чергу, числово розв'яжемо запропонованим тут методом лінійного саплінгу. На основі порівняння розв'язку оберненої задачі з відомою формою розсіювача можна зробити висновок про точність наближення, вплив регуляризуючого параметра і ступеня повноти вихідних даних на здатність візуалізувати границю розсіювача.

Як об'єкт дослідження розглянемо ідеально провідний циліндр еліптичного перерізу, в якого велика та мала піввісь мають розміри $0.2m$ та $0.1m$, відповідно.

Пряму задачу для такого циліндра розв'яжемо методом фундаментальних розв'язків.

На рис.6.4.а схематично зображено розсіювач та точки довкола, в яких реєструється розсіяне поле при падінні на нього плоских хвиль. Кількість точок (100), в яких реєструється поле, дорівнює кількості напрямів падіння плоскої хвилі на розсіювач, рівномірно розподілених від 0 до 2π . Досліджуємо монохроматичне поле з частотою $f = \omega/(2\pi) = 950 \text{ МГц}$. На рис.6.4.б зображено границю ідеально провідного циліндра, а на рис. 6.4.в - 6.4.е – результат розв'язку оберненої задачі методом саплінгу для різних значень дисперсії похибки σ_n^2 . Яскравість пікселів зображення на рис. 6.4.в - 6.4.е відповідає значенню індикаторної функції (6.49), яку обчислювали в усіх точках на площині xu .

Як видно з рис. 6.4 індикаторна функція дозволяє точно ідентифікувати границю розсіювача. Це підтверджує правильність приведеного теоретичного підходу до розв'язання оберненої задачі розсіювання.

Практично важливими є задачі, в яких з тих чи інших причин не можна забезпечити умови падіння хвилі з довільного напрямку та здійснити реєстрацію поля в усіх точках дальньої зони довкола розсіювача, як показано на рис. 6.3. Тому числові результати дають змогу оцінити, наскільки зміниться точність розв'язку оберненої задачі, якщо вихідні дані задано не повністю або частково. У цьому випадку під терміном «неповні вихідні дані» розуміють множину значень зареєстрованого розсіяного поля на апертурі скінчених розмірів та форми, яка відрізняється від радіальної. Крім того, числові результати показують, як багаточастотність формулювання оберненої задачі дозволяє компенсувати негативний ефект на точність її розв'язання спричинений наявністю лише часткових вихідних даних.

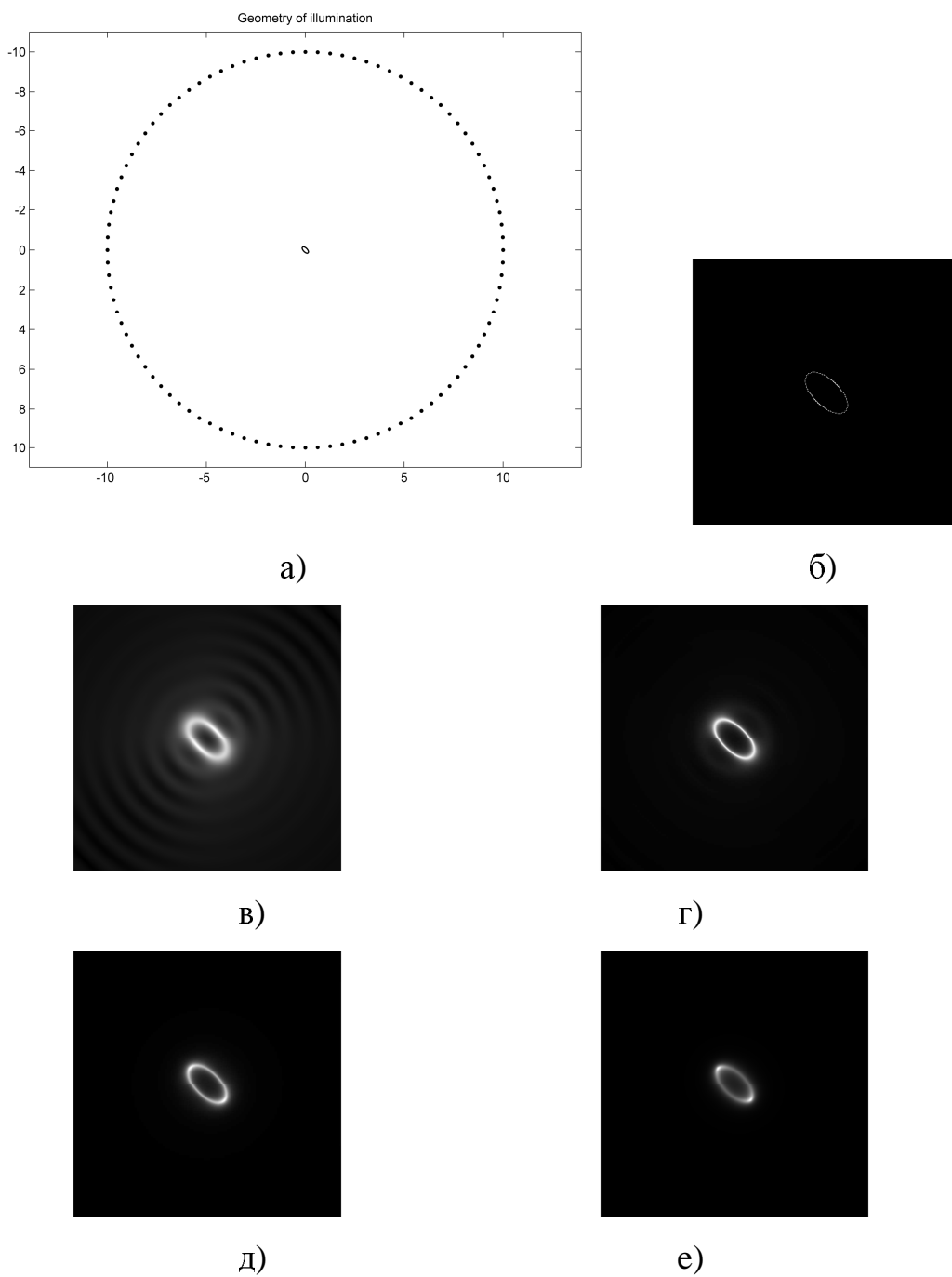


Рис. 6.4. Реконструкція ідеально провідного циліндра еліптичного перерізу - а) при реєстрації розсіяного поля системою антен - б) та обробкою вимірювань розвинутим методом семплінгу для частоти $f = 950\text{МГц}$ та різних значеннях дисперсії випадкової складової σ^2 : 10^{-7} - в), 10^{-9} - г), 10^{-11} - д), 10^{-13} - е)

На рис. 6.5.в – 6.5.ж наведено приклади розв’язання оберненої задачі розсіювання, в якій вихідні дані є значеннями розсіяного поля, що реєструються у 10 точках довкола розсіювача. Прийнято, що опромінення здійснюється з випадковим вибором фаз та інтенсивності від десяти точкових джерел, розташованих в цих же точках (рис. 6.5.а.). Для забезпечення достатньої точності оцінки кореляційної матриці, розсіяне поле реєструємо при 100 різних випадкових розподілах опромінення. Останнє забезпечують десять точкових джерел суперпозицією полів від кожного з них. Результат розв’язання оберненої задачі при таких неповних даних подано на рис. 6.5.в та рис. 6.5.г, для частот $f = 400\text{МГц}$ та $f = 1000\text{МГц}$, відповідно. Як видно з рис. 6.5, через малу кількість точок, в яких реєструється розсіяне поле, точність розв’язку оберненої задачі є гіршою, ніж у випадку, зображеному на рис. 6.4. Покращити точність розв’язання оберненої задачі дозволяє використання даних про розсіяне поле на множині частот. Рис. 6.5.д – 6.5.ж демонструють позитивний вплив на точність розв’язання оберненої задачі від доповнення вихідних даних значеннями про розсіяне поле, зареєстроване на множині частот. Параметр регуляризації, який використано при розв’язанні оберненої задачі, вибрано фіксованим для всіх числових експериментів та рівним $\sigma_n^2 = 10^{-19}$.

На рис. 6.6 – 6.9 показано результати розв’язання оберненої задачі методом сэмплінгу для випадків, коли розсіяне поле реєструють десятима приймачами, розташованими вздовж однієї лінії, формуючи таким чином лінійну апертуру. З приведених рисунків можна зробити висновок, що при лінійній апертурі та частково заданих вихідних даних досконало реконструювати форму розсіювача та точно ідентифікувати його границю на основі розв’язку оберненої задачі запропонованим методом сэмплінгу практично неможливо. Проте приведені результати підтверджують можливість локалізації розсіювача у просторі та ідентифікації елементів поверхні, які вносять найбільший вклад у розсіяне поле при заданій геометрії опромінювання та реєстрації розсіяного поля лінійною апертурою скінчених розмірів.

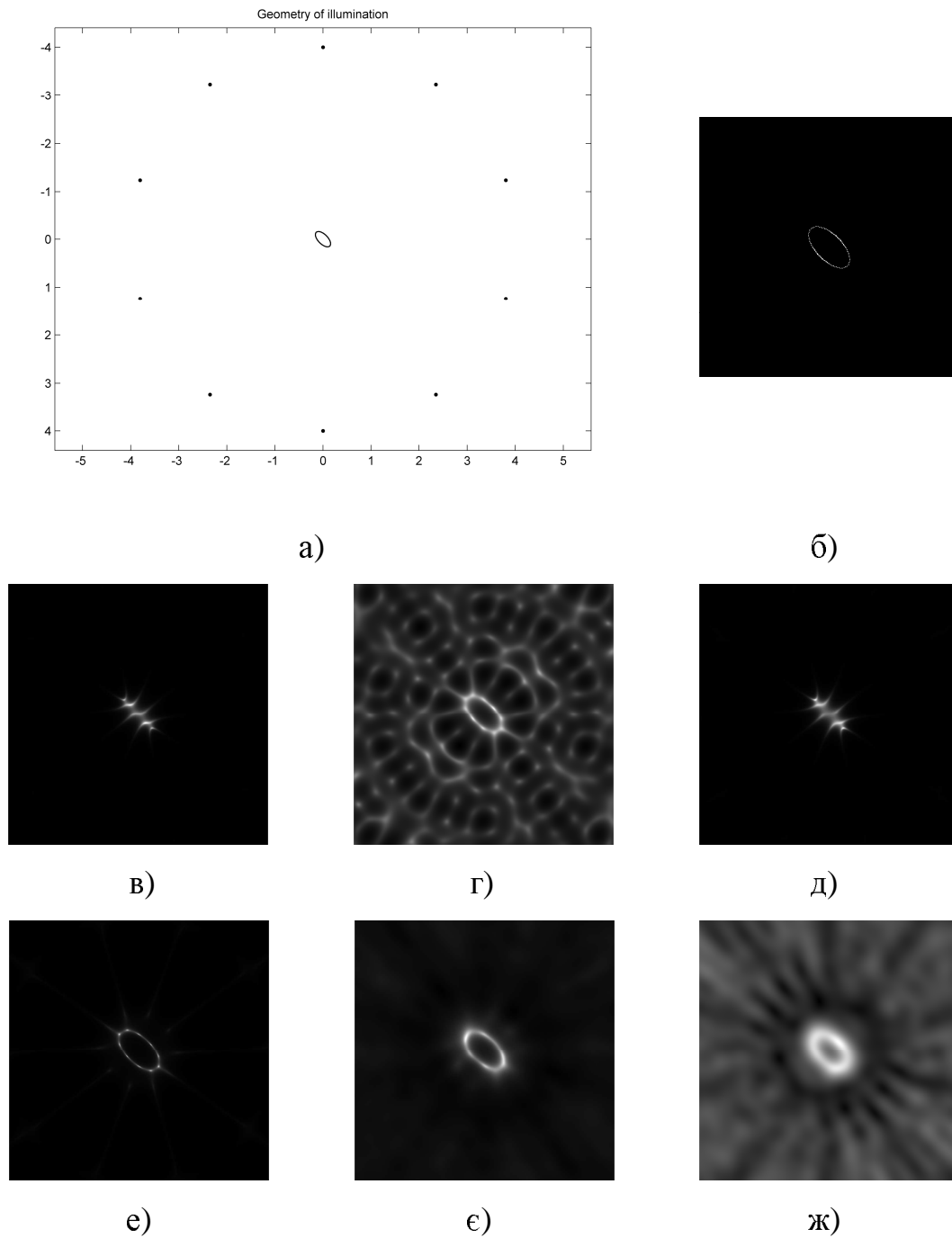


Рис. 6.5. Реконструкція ідеально провідного циліндра еліптичного перерізу -а) при реєстрації розсіяного поля системою антен - б) та обробкою вимірювань розвинутим методом семплінгу для частоти $f = 400 \text{ MHz}$ - в), $f = 1000 \text{ MHz}$ - г), а також для множини частот від $f_{\min} = 400 \text{ MHz}$ до $f_{\max} = 1000 \text{ MHz}$ з кроком $\Delta f = 300 \text{ MHz}$ - д), $\Delta f = 100 \text{ MHz}$ - е), $\Delta f = 50 \text{ MHz}$ - є), $\Delta f = 25 \text{ MHz}$ - ж)

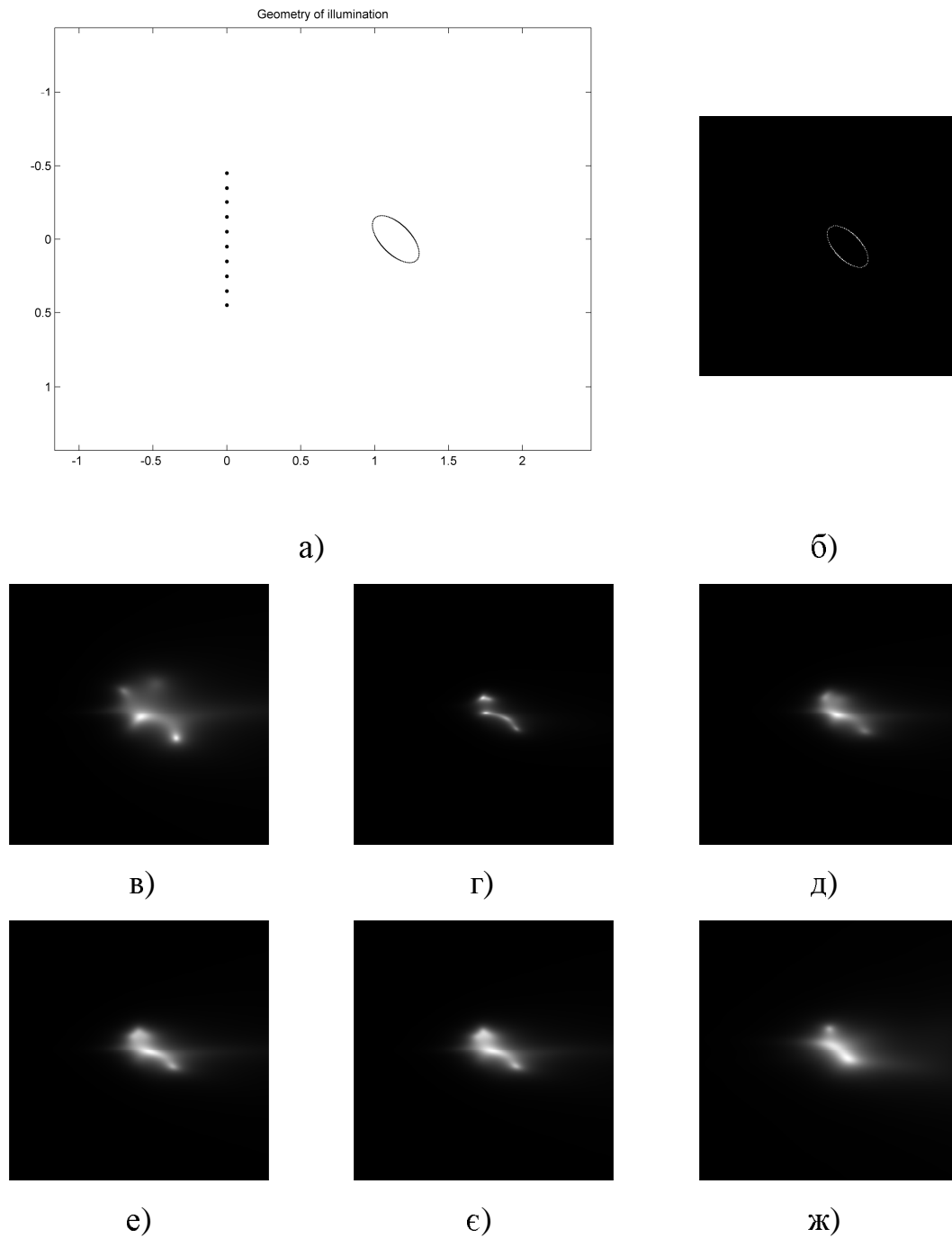


Рис. 6.6. Реконструкція ідеально провідного циліндра еліптичного перерізу а) при реєстрації розсіяного поля системою антен - б) та обробкою вимірювань розвинутим методом семплінгу для частоти $f = 400 \text{ MHz}$ - в), $f = 1000 \text{ MHz}$ - г), а також для множини частот від $f_{\min} = 400 \text{ MHz}$ до $f_{\max} = 1000 \text{ MHz}$ з кроком $\Delta f = 300 \text{ MHz}$ - д), $\Delta f = 100 \text{ MHz}$ - е), $\Delta f = 50 \text{ MHz}$ - є), $\Delta f = 25 \text{ MHz}$ - ж)

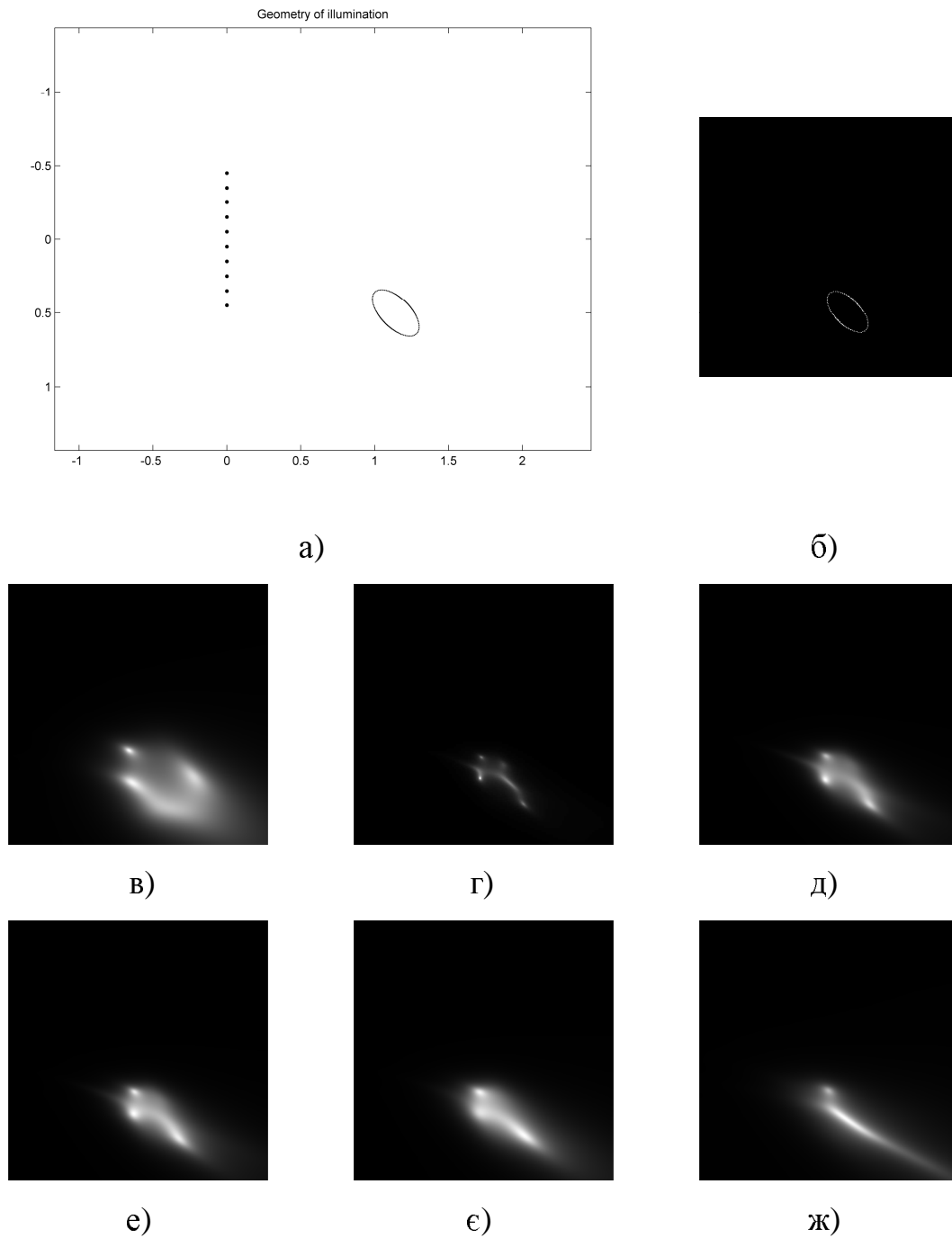


Рис. 6.7. Реконструкція ідеально провідного циліндра еліптичного перерізу -а) при реєстрації розсіяного поля системою антен - б) та обробкою вимірювань розвинутим методом семплінгу для частоти $f = 400\text{MHz}$ - в), $f = 1000\text{MHz}$ - г), а також для множини частот від $f_{\min} = 400\text{MHz}$ до $f_{\max} = 1000\text{MHz}$ з кроком $\Delta f = 300\text{MHz}$ - д), $\Delta f = 100\text{MHz}$ - е), $\Delta f = 50\text{MHz}$ - е), $\Delta f = 25\text{MHz}$ - ж)

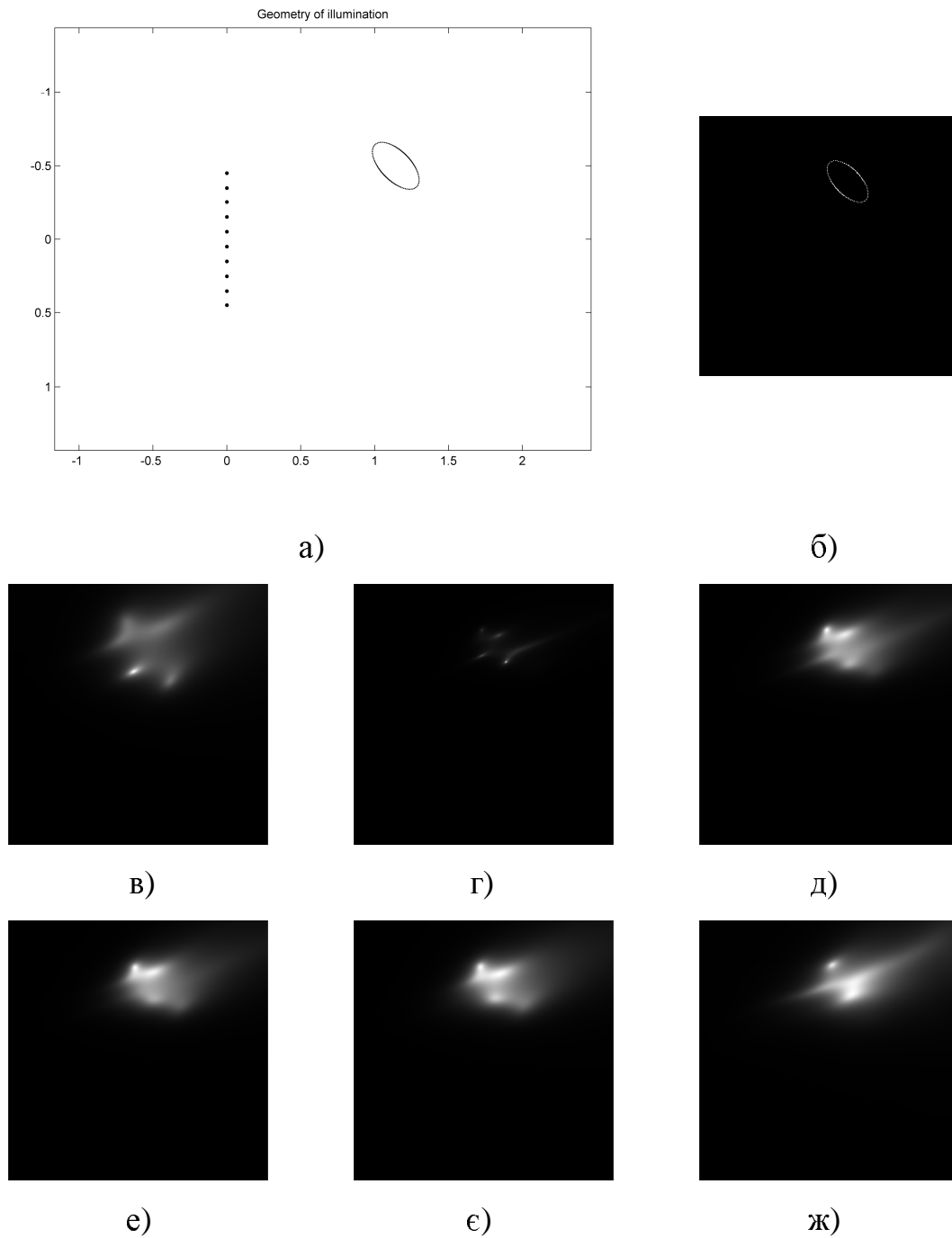


Рис. 6.8. Реконструкція ідеально провідного циліндра еліптичного перерізу - а) при реєстрації розсіяного поля системою антен - б) та обробкою вимірювань розвинутим методом саплінгу для частоти $f = 400 \text{ MHz}$ - в), $f = 1000 \text{ MHz}$ - г) а також для множини частот від $f_{\min} = 400 \text{ MHz}$ до $f_{\max} = 1000 \text{ MHz}$ з кроком $\Delta f = 300 \text{ MHz}$ - д), $\Delta f = 100 \text{ MHz}$ - е), $\Delta f = 50 \text{ MHz}$ - є), $\Delta f = 25 \text{ MHz}$ - ж)

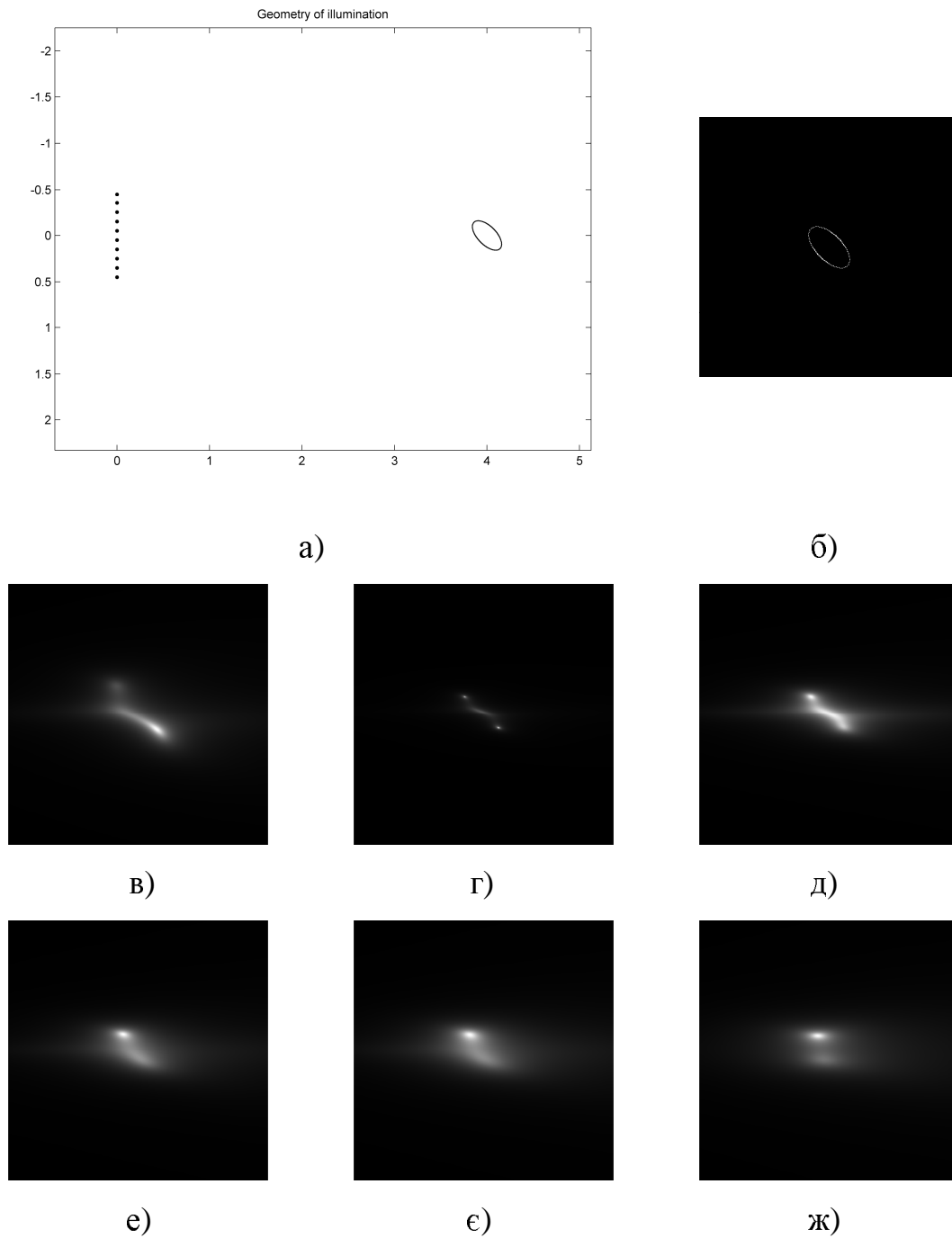


Рис. 6.9. Реконструкція ідеально провідного циліндра еліптичного перерізу -а) при реєстрації розсіяного поля системою антен - б) та обробкою вимірювань розвинутим методом семплінгу для частоти $f = 400\text{MHz}$ - в), $f = 1000\text{MHz}$ - г), а також для множини частот від $f_{\min} = 400\text{MHz}$ до $f_{\max} = 1000\text{MHz}$ з кроком $\Delta f = 300\text{MHz}$ - д), $\Delta f = 100\text{MHz}$ - е), $\Delta f = 50\text{MHz}$ - є), $\Delta f = 25\text{MHz}$ - ж)

6.4. Оцінювання границі діелектричного розсіювача за відомим розподілом розсіяного поля на фіксованій частоті

Керуючись запропонованою стратегією розв'язання обернених задач розсіювання можна побудувати метод саплінгу, який дозволяє встановити границю діелектричних тіл за значеннями розсіяного електромагнітного поля (рис. 6.10). Як показано у першому розділі, строгий розв'язок такої оберненої задачі є надзвичайно складним, так як вимагає послідовного розв'язання кількох інтегральних рівнянь [179]. Альтернативою є метод лінійного саплінгу, вперше запропонований Colton та Kirsch [210]. Математично доведено, що розв'язкам основного рівняння методу лінійного саплінгу притаманні властивості, які дають можливість ідентифікувати супорт проникних розсіювачів, зокрема діелектричних [212]. На жаль, конструктивного доведення методу лінійного саплінгу не існує і у випадках проникних тіл. Відсутність фізичної інтерпретації розв'язку утруднює його узагальнення на випадки інших моделей розсіювання електромагнітних хвиль. Тому пошук методу, що дозволить з достатньою точністю вирішити обернену задачу розсіювання для діелектричних структур, зокрема, неоднорідних діелектричних структур, є актуальною задачею.

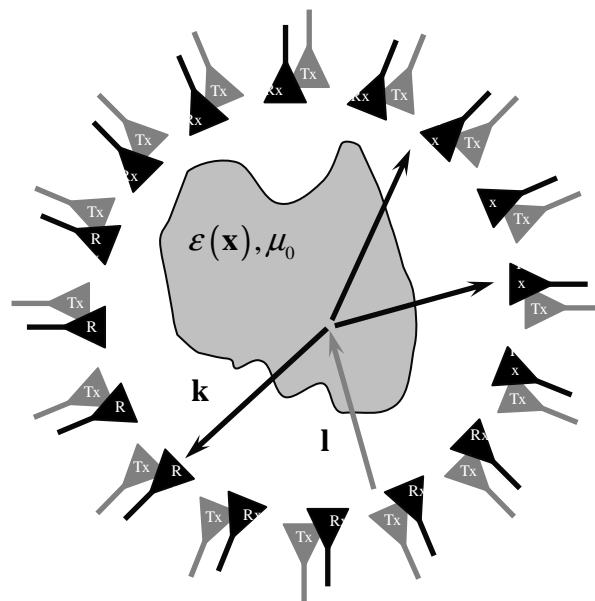


Рис. 6.10. Реєстрація вихідних даних для оберненої задачі розсіювання від діелектричного об'єкта на фіксованій частоті

У цьому підрозділі двовимірну обернену задачу розсіювання для діелектричного тіла розглянуто як проблему ідентифікації його границі з оточуючим середовищем. В основі розв'язку лежить високочастотне наближення Борна. Новий методу самплінгу, що уточнює розв'язок, використовує Борнівську апроксимацію, побудовано згідно з запропонованою стратегією розв'язування обернених задач розсіювання.

6.4.1. Параметризація моделі спостереження на основі наближення Борна

В основі методу самплінгу покладено високочастотне наближення розв'язку прямої задачі розсіювання

$$f(\mathbf{k}, \mathbf{l}, k) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \exp(i(\mathbf{k} - \mathbf{l}, \mathbf{x})) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + o(1), \quad |\mathbf{k}| \rightarrow \infty. \quad (6.53)$$

Вважаючи, що потенціал однозначно пов'язаний з шуканою функцією діелектричної проникності тотожністю $v(\mathbf{x}) = v(x_1, x_2) = k^2 - k^2(\varepsilon(x_1, x_2, 0)/\varepsilon_0)$, наближений розв'язок оберненої задачі шукаємо як

$$\check{v}(\mathbf{p}) \approx F(\mathbf{p}), \quad (6.54)$$

де $\mathbf{p} = (p_1, p_2) = \mathbf{k} - \mathbf{l}$; $F(\mathbf{p}) = f(\mathbf{k}, \mathbf{l}, k)$ - функція розсіяного поля в дальній зоні, або діаграма розсіювання для фіксованої частоти $|\mathbf{l}| = |\mathbf{k}| = k$, $k = const$, $\mathbf{l}, \mathbf{k} \in \mathbf{S}^2$;

$\check{v}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2} \exp(i(\mathbf{p}, \mathbf{x})) v(\mathbf{p}) d\mathbf{p}$ - перетворення Фур'є від функції потенціалу.

В рамках цього дослідження розглянемо однорідне діелектричне тіло, якому відповідає модель кусково-постійної функції діелектричної проникності. Отже, функція потенціалу також є кусково-постійною.

Знаходження функції $v(\mathbf{x}) = v(x_1, x_2)$ за відомими значеннями функції $F(\mathbf{p}) = F(p_1, p_2)$ можна звести до рівняння

$$F(\mathbf{p}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \exp(i(\mathbf{p}, \mathbf{x})) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad |\mathbf{p}| \leq 2k. \quad (6.55)$$

Проаналізуємо вираз (6.55), сфокусувавши увагу на властивостях шуканої функції. Очевидно, що вихідні дані $F(\mathbf{p})$ у такій задачі буде задано з похибкою.

Відомо, що для фіксованої частоти область визначення функції $F(\mathbf{p})$ є множиною точок, які лежать в середині кола радіуса $2k$ (рис. 1.6). Отже, задача знаходження функції $v(\mathbf{x})$ є некоректною та потребує регуляризації шляхом накладання апіорних обмежень на розв'язок. Регуляризований розв'язок як апроксимацію $\hat{v}(\mathbf{x})$ функції $v(\mathbf{x})$ можна шукати, використовуючи модель, побудовану з урахуванням апіорної інформації про розв'язок.

Для однорідного розсіювача функція $v(\mathbf{x})$ має компактний супорт і розриви в точках, які належать границі ∂D . З іншої сторони, середнє значення функції $\hat{v}(\mathbf{x})$, як розв'язку рівняння (6.55), буде прагнути до нуля, оскільки розсіяне поле при $\mathbf{p} \rightarrow 0$ прямує також до нуля $F(\mathbf{p}) \rightarrow 0$ за умови високочастотного наближення. Таке твердження можна обґрунтувати з фізичної точки зору, оскільки при $\mathbf{p} = \mathbf{k} - \mathbf{l} = 0$ значення векторів \mathbf{k} та \mathbf{l} однакові, що вказує на область геометричної тіні.

З малості середнього значення функції $\hat{v}(\mathbf{x})$ можна зробити висновок, що точне відновлення постійного значення потенціалу $v(\mathbf{x})$ у точках, які належать однорідному розсіювачу неможливо здійснити розв'язуючи рівняння (6.55). Тому наближений розв'язок $\hat{v}(\mathbf{x})$ рівняння (6.55) досягатиме на границі максимальних значень. А отже функцію потенціалу в рівнянні (6.55) доцільно шукати з моделі, яка враховує перелічені властивості. Аналіз показав, що при цьому доцільно записати потенціал у вигляді

$$\hat{v}(\mathbf{x}) = s(\mathbf{x}) + e(\mathbf{x}), \quad (6.56)$$

де $s(\mathbf{x})$ - деяка функція з класу \mathbf{D} для границі ∂D ; $e(\mathbf{x})$ - регулярна функція.

Високочастотне наближення дає можливість зробити висновок, що функція $e(\mathbf{x})$ є значно меншою, ніж максимальні значення функції $s(\mathbf{x})$ на границі ∂D . Крім того, належність функції $s(\mathbf{x})$ до класу \mathbf{D} означає, що її можна параметризувати у вигляді (6.7). Отже, координати точок, які належать границі ∂D , визначатимемо за

максимумом індикаторної функції, побудованої за допомогою запропонованої стратегії розв'язання обернених задач розсіювання.

Для цього запишемо модель спостереження для значень розсіяного поля у вигляді

$$\begin{aligned} F(\mathbf{p}) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \exp(i(\mathbf{p}, \mathbf{x})) s(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \exp(i(\mathbf{p}, \mathbf{x})) e(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \exp(i(\mathbf{p}, \mathbf{x})) s(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + E(\mathbf{p}), \end{aligned} \quad (6.57)$$

де $E(\mathbf{p}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \exp(i(\mathbf{p}, \mathbf{x})) e(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$.

Припустимо, що складова $E(\mathbf{p})$ є малою і незначущою. Керуючись запропонованою ідеєю, замість розв'язання інтегрального рівняння (6.55) відносно функції потенціалу $v(\mathbf{p})$, розв'язок оберненої задачі розсіювання будемо шукати як ідентифікацію параметрів функції $s(\mathbf{x})$, яка відповідає моделі (6.7). Для реалізації процедури оцінки невідомих параметрів цієї моделі за вихідними даними розв'яжемо задачу представлення цих даних у вигляді множини спостережень, згідно з твердженням 6.1.

Сформулюємо задачу наступним чином. Для наближеної моделі, яка описує розсіяне поле, що є результатом спостереження процесів розсіювання плоских хвиль у вигляді

$$F(\mathbf{p}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} s(\mathbf{x}) \exp(i(\mathbf{p}, \mathbf{x})) d\mathbf{x}, \quad (6.58)$$

необхідно синтезувати множину спостережень, яку можна подати в інтегральній формі

$$\tilde{F}_j(\mathbf{l}) = \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \tilde{J}_j(\mathbf{x}) G(\mathbf{l}, \mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (6.59)$$

При цьому функції $J_j(\mathbf{x})$ повинні належати до того самого класу \mathbf{D} , що й функція $s(\mathbf{x})$ у моделі (6.58).

Одновимірна модель. Ідею розв'язання сформульованої задачі можна наочно продемонструвати на одновимірному прикладі. Цей випадок допускає можливість подальшого узагальнення до двовимірного завдяки розділенню змінних у комплексній експоненті, а саме через подання скалярного добутку в підінтегральному виразі (6.58) сумою $(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = p_1 x_1 + p_2 x_2$.

Одновимірний прототип моделі (6.58) перепишемо у вигляді

$$F^1(p_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^1} s^1(x_1) \exp(ip_1 x_1) dx_1, \quad p_1 \in [-k, k]. \quad (6.60)$$

Введемо нову функцію з областю визначення $q_1 \in [0, (2k - K\Delta n)]$, яку можна записати, як зсунутий на ціле число кроків Δn оригінал

$$\tilde{F}_j^1(q_1) = F^1(q_1 - k - j\Delta n), \quad j \in \overline{0, K}, \quad (6.61)$$

Використавши вираз (6.60), перепишемо нововведену функцію в інтегральній формі

$$\begin{aligned} \tilde{F}_j^1(q_1) &= F^1(q_1 - k - j\Delta n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^1} s^1(x_1) \exp(i(q_1 - k - j\Delta n)x_1) dx_1 = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^1} s^1(x_1) \exp(-i(k + j\Delta n)x_1) \exp(iq_1 x_1) dx_1. \end{aligned} \quad (6.62)$$

В результаті отримаємо множину функцій, які відповідають шуканій моделі спостереження:

$$\tilde{F}_j^1(q_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^1} s^1(x_1) \exp(-i(k + j\Delta n)x_1) \exp(iq_1 x_1) dx_1 = \int_{\mathbb{R}^1} \tilde{J}_j(x_1) G(q_1, x_1) dx_1, \quad (6.63)$$

де $\tilde{J}_j(x_1) = (2\pi)^{-1} s^1(x_1) \exp(-i(k + j\Delta n)x_1)$ та $G(q_1, x_1) = \exp(iq_1 x_1)$ - підінтегральні функції, що входять у нову модель спостереження.

Значимо, що якщо функція $s^1(x_1)$ є елементом послідовності, збіжної до дельта функції $\delta(x_1 - x_{1,\theta})$, то з властивостей виразу $\tilde{J}_j(x_1) = (2\pi)^{-1} s^1(x_1) \exp(-i(k + j\Delta n)x_1)$ заключаємо, що $\tilde{J}_j(x_1)$ також буде належати до класу функцій, які збігаються до дельта-функції.

Скориставшись граничним переходом окремо можна розглянути частковий випадок, коли підінтегральна функція $s^1(x_1)$ є сумою дельта функцій з різними коефіцієнтами:

$$s^1(x_1) = \sum_{p=1}^P \alpha_p \delta(x_1 - \omega_p), \quad (6.64)$$

де α_p та ω_p - сталі.

Тоді одновимірну модель спостереження можна записати сумою комплексних експонент з постійними коефіцієнтами:

$$\begin{aligned} F^1(p_1) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^1} s^1(x_1) \exp(ip_1 x_1) dx_1 = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^1} \left(\sum_{p=1}^P \alpha_p \delta(x_1 - \omega_p) \right) \exp(ip_1 x_1) dx_1 = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=1}^P \alpha_p \exp(ip_1 \omega_p). \end{aligned} \quad (6.65)$$

Застосувавши аналогічну до (6.61) процедуру виділення з одного спостереження кількох реалізацій, отримаємо вираз, що містить суму комплексних експонент із коефіцієнтами, які залежать від порядкового номера j спостереження

$$\tilde{F}_j^1(q_1) = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=1}^P \alpha_p \exp(-i(k + j\Delta n) \omega_p) \exp(iq_1 \omega_p). \quad (6.66)$$

Саме наявність змінних коефіцієнтів у комплексних експонентах дозволяє ефективно скористатись усередненням множини «некогерентних» спостережень, трактуючи їх як випадкові реалізації одного і того ж випадкового процесу. Цю ідею розвинуто в теорії високороздільного спектрального аналізу сигналів, де розглядають аналогічну дискретну модель (6.65) як суміш комплексно-експоненційних функцій та випадкової складової [263]. У задачах спектрального оцінювання [241, 263] метою є оцінити невідомі параметри α_p та ω_p за множиною спостережень.

Двовимірна модель подання розсіяних даних. Як показано на прикладі одновимірної моделі, синтез множини реалізацій з одного спостереження здійснено виділенням з оригінальної функції інтервалів, що перекриваються. Таку ж ідею

можна застосувати у випадку двовимірної моделі спостереження, яку використаємо для розв'язання оберненої задачі розсіювання у наближенні Борна:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{p}) &= F(p_1, p_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} s(\mathbf{x}) \exp(i(\mathbf{p}, \mathbf{x})) d\mathbf{x} = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2} s(x_1, x_2) \exp(i(p_1 x_1 + p_2 x_2)) dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (6.67)$$

З області визначення $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ виділимо $K = (N+1)^2$ замкнутих квадратних областей $[(n_1 \Delta n), (2k - N \Delta n + n_1 \Delta n)] \times [(n_2 \Delta n), (2k - N \Delta n + n_2 \Delta n)]$, де $n_1 \in [0, N] \in \mathbb{Z}$ та $n_2 \in [0, N] \in \mathbb{Z}$. Значення функції (6.67) на цих множинах дозволяє отримати скінчене число нових функцій

$$\tilde{F}_j(\mathbf{q}) = \tilde{F}_j(q_1, q_2) = F(q_1 - k - n_1 \Delta n, q_2 - k - n_2 \Delta n), \quad (6.68)$$

де $q_1, q_2 \in [0, (2k - N \Delta n)] \in \mathbb{R}$, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$ і $j = n_1(N+1) + n_2$, $j \in \overline{0, K}$ - порядковий номер синтезованої функції.

За аналогією з одновимірним випадком, виділимо у підінтегральному виразі комплексну експоненту, яка не залежить від індекса

$$\begin{aligned} \tilde{F}_j(\mathbf{q}) &= \tilde{F}_j(q_1, q_2) = F(q_1 - k - n_1 \Delta n, q_2 - k - n_2 \Delta n) = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2} s(x_1, x_2) \exp(i((q_1 - k - n_1 \Delta n)x_1 + (q_2 - k - n_2 \Delta n)x_2)) dx_1 dx_2 = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2} s(x_1, x_2) \exp(-i((k + n_1 \Delta n)x_1 + (k + n_2 \Delta n)x_2)) \exp(i(q_1 x_1 + q_2 x_2)) dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (6.69)$$

Синтезована з $F(\mathbf{p})$ множина функцій $\tilde{F}_j(\mathbf{q})$ відповідає моделі спостереження

$$\tilde{F}_j(\mathbf{q}) = \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \tilde{J}_j(\mathbf{x}) G(\mathbf{q}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \tilde{J}_j(\mathbf{x}) \exp(i(q_1 x_1 + q_2 x_2)) d\mathbf{x}, \quad (6.70)$$

де підінтегральні функції $\tilde{J}_j(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-2} s(x_1, x_2) \exp(-i((k + n_1 \Delta n)x_1 + (k + n_2 \Delta n)x_2))$ належить до того ж класу \mathbf{D} , що й $s(\mathbf{x})$.

Очевидно, що можуть існувати інші форми подання вихідних даних у вигляді множини спостережень (6.10). Але питання оптимального підходу до синтезу

множини спостережень виходять за рамки цього дослідження, в якому лише продемонстровано очікуваний ефект та дієвість приведенного підходу.

6.4.2. Побудова індикаторної функції для розв'язання оберненої задачі розсіювання. Обернену задачу розсіювання представимо як задачу фільтрації за аналогією як це зроблено у пункті 6.3. Вихідні дані $\tilde{F}_j(\mathbf{q})$ позначимо через Y , а шуканий фільтр - через H . Відповідно, оцінку границі розсіювача будемо шукати за максимумом деякої індикаторної функції, яку можна обчислити як усереднене значення квадрату модуля результату фільтрації. Математично це виражається через скалярний добуток $\langle H, Y \rangle_2$

$$\langle H, Y \rangle_2 = \iint_{\Omega \in \mathbb{R}^2} \overline{H(x_1, x_2)} Y(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \quad (6.71)$$

Тут Ω - область визначення вихідних даних, або множина значень вектора \mathbf{q} , на якій задані синтезовані функції $\tilde{F}_j(\mathbf{q})$.

Користуючись запропонованою стратегією, знаходження такого фільтра розглядатимемо як задачу умовної мінімізації

$$H_{Borm} = \arg \min_H E \left[\left| \langle H, Y \rangle_2 \right|^2 \right], \quad (6.72)$$

$$\text{якщо } \left| \langle H_2, h_{Borm}(\mathbf{z}, \cdot) \rangle_2 \right| = 1, \quad (6.73)$$

де h_{Borm} - імпульсний відгук, отриманий з виразу (6.69) для наближеного розв'язку оберненої задачі підстановкою замість шуканої функції дельта-функцію $\tilde{J}_j(\mathbf{x}) = \tilde{J}_j(x_1, x_2) = \delta(x_1 - z_1, x_2 - z_2)$:

$$\begin{aligned} h_{Borm}(\mathbf{z}, \mathbf{q}) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \tilde{J}_j(x_1, x_2) \exp(i(q_1 x_1 + q_2 x_2)) d\mathbf{x} = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \delta(x_1 - z_1, x_2 - z_2) \exp(i(q_1 x_1 + q_2 x_2)) d\mathbf{x} = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \exp(i(q_1 z_1 + q_2 z_2)) = \frac{1}{4\pi^2} \exp(i(\mathbf{z}, \mathbf{q})). \end{aligned} \quad (6.74)$$

Зберігаючи систему позначень з пункту 6.3, цю імпульсну характеристику позначимо через $X_{2D} := X_{2D}(q_1, q_2) = \exp(i(\mathbf{z}, \mathbf{q})) / (4\pi^2)$. Залежність $X_{2D} = X_{2D}(q_1, q_2)$ від координат точки семплінгу \mathbf{z} тут навмисно упущено за для спрощення запису.

Як показано в пункті 6.3, розв'язком задачі мінімізації з обмеженнями (6.72) та (6.73) є функціонал

$$H_{Borm} = H = \frac{B^{-1}X}{\langle B^{-1}X, X \rangle_2} = \frac{B_{2D}^{-1}X_{2D}}{\langle B_{2D}^{-1}X_{2D}, X_{2D} \rangle_2}. \quad (6.75)$$

Виведення формули (6.75) показує, що B_{2D} має зміст коваріаційної функції, яка залежить у даному випадку від чотирьох змінних: $B_{2D}(x_1, x_2, x'_1, x'_2)$ і визначається як $B_{2D}(x_1, x_2, x'_1, x'_2) = E[\overline{Y(x_1, x_2)}Y(x'_1, x'_2)]$, де $E[\cdot]$ - оператор математичного сподівання. Наближене оцінювання цієї коваріаційної матриці заміною математичного очікування усередненням за множиною реалізацій вдається реалізувати саме завдяки впровадженню модифікованої моделі (6.59). Така модель об'єднує різні спостереження одного і того ж випадкового процесу. Принцип максимуму правдоподібності дає оцінку коваріаційної матриці гаусівського процесу у вигляді

$$\begin{aligned} \hat{B}_{2D}(x_1, x_2, x'_1, x'_2) &= \\ &= \frac{1}{K+1} \sum_{j=0}^K \overline{Y_j(x_1, x_2)} Y_j(x'_1, x'_2) \hat{B}_{2D}(x_1, x_2, x'_1, x'_2) = \frac{1}{K+1} \sum_{j=0}^K \overline{\tilde{F}_j(\mathbf{x})} \tilde{F}_j(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (6.76)$$

Згідно з теоремою 6.2, індикаторну функцію для методу семплінгу, що базується на апроксимації Борна, можна обчислити за формулою

$$E\left[\left|\langle H_{Borm}(z), Y \rangle_2\right|^2\right] = E\left[\left|\langle H(z), Y \rangle_2\right|^2\right] = \frac{1}{\langle B^{-1}X, X \rangle_2} = \frac{1}{\langle B_{2D}^{-1}X_{2D}, X_{2D} \rangle_2}. \quad (6.77)$$

Добуток $B_{2D}^{-1}X_{2D}$ у знаменнику цього виразу відповідає інтегральному рівнянню

$$\iint_{\Omega \in \mathbb{R}^2} \hat{B}_{2D}(x_1, x_2, x'_1, x'_2) \psi(x'_1, x'_2) dx'_1 dx'_2 = X_{2D}(x_1, x_2), \quad (6.78)$$

де $\psi(x_1, x_2)$ - невідома функція, а $X_{2D}(x_1, x_2) = \exp(i(\mathbf{z}, \mathbf{x})) / (4\pi^2) = \exp(i(x_1 z_1 + x_2 z_2)) / (4\pi^2)$.

Тоді індикаторну функцію, яка має властивість досягати максимальних значень у точках семплінгу на границі розсіювача, можна обчислити, використовуючи знайдений з рівняння (6.78) розв'язок

$$E \left[\left| \langle H_{Born}(z), Y \rangle_2 \right|^2 \right] = \left(\iint_{\Omega \in \mathbb{R}^2} \overline{\psi(x_1, x_2)} X_{2D}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right)^{-1}. \quad (6.79)$$

Розв'язання оберненої задачі тепер зводиться до обчислення індикаторної функції в кожній точці досліджуваної області. Воно включає знаходження оцінки коваріаційної матриці (6.77), розв'язання рівняння (6.78) та обчислення індикаторної функції (6.79). При цьому два останні етапи необхідно повторювати для кожної точки семплінгу \mathbf{z} , оскільки функція $X_{2D}(x_1, x_2)$ залежить від координат $\mathbf{z} = (x_1, x_2)$.

Підсумовуючи процедуру аналізу вихідних даних та виведення індикаторної функції для розв'язання оберненої задачі розсіювання, можна сформулювати наступне

твердження 6.4. Індикаторну функцію, яка дозволяє ідентифікувати границю діелектрика за відомими значеннями $E_3^\infty(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ розсіяного поля на фіксованій частоті, визначає скалярний добуток

$$\phi_{pen}(\mathbf{z}) = \langle \phi_z, \Psi \rangle_2^{-1}, \quad (6.80)$$

де $\Psi := \exp(ik(\mathbf{z}, \mathbf{v})) / (4\pi^2)$ та $g_z := g(\mathbf{z}, \mathbf{w})$, для $\mathbf{w} \in Q_1 \subset \mathbb{R}^2$.

Тоді розв'язання задачі умовної мінімізації (6.72) та (6.73) зводиться до знаходження розв'язку ϕ_z рівняння (6.78), яке в операторній формі можна записати як

$$SS^* \phi_z = \Psi. \quad (6.81)$$

Тут S та S^* - оператори, визначені через функцію $\tilde{A}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau})$ у вигляді

$$(Sf)(\mathbf{v}) := \iint_{Q_2} \tilde{A}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}) f(\boldsymbol{\tau}) ds(\boldsymbol{\tau}) \quad \text{та} \quad (S^*g)(\mathbf{v}) := \iint_{Q_1} \tilde{A}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}) g(\mathbf{v}) ds(\mathbf{v}), \quad (6.82) \quad \text{та} \quad (6.83)$$

а функцію $E_3^\infty(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ для фіксованого значення k виражено як $A(\mathbf{k} - \mathbf{l}) = A(\mathbf{p}) := E_3^\infty(\mathbf{k}, \mathbf{l})$, де $\mathbf{p} \in B \subset \mathbb{R}^2$, $B := \{\mathbf{p} = (p_1, p_2) : p_1^2 + p_2^2 \leq k^2\}$.

Вихідні дані $E_3^\infty(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ для оберненої задачі розсіювання приведено до моделі (6.9) у вигляді

$$\tilde{A}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}) := T_{\boldsymbol{\tau}}(A(\mathbf{p}))(\mathbf{v}), \quad (6.84)$$

де $T_{\boldsymbol{\tau}}$ – оператор зсуву $(T_{\boldsymbol{\tau}}f(\mathbf{x}))(\mathbf{y}) := f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x} + \boldsymbol{\tau}) = f(x_1 + \tau_1, x_2 + \tau_2)$;

\mathbf{v} та $\boldsymbol{\tau}$ – вектори, областю визначення яких є квадрати $\mathbf{v} \in Q_1 \subset \mathbb{R}^2$, $Q_1 := \{-a \leq (v_1, v_2) \leq a\}$ та $\boldsymbol{\tau} \in Q_2 \subset \mathbb{R}^2$, $Q_2 := \{-b \leq (\tau_1, \tau_2) \leq b\}$.

При цьому a і $b := (\sqrt{2}k/2 - a)$ – фіксовані скалярні величини.

6.4.3. Числове розв’язання двовимірної оберненої задачі розсіювання на діелектриках. На відміну від методу саплінгу, обґрунтування якого дано у пункті 6.3 уточненням оцінки, що мінімізує відношення «сигнал/завада», у даному випадку обчислення індикаторної функції (6.77) безпосередньо зводиться до перемноження гіпер-матриць з розмірністю $\mathbb{C}^{N \times N \times N \times N}$ на $\mathbb{C}^{N \times N}$. Тому числовій реалізації такого методу саплінгу необхідно приділити спеціальну увагу.

Існує кілька варіантів побудови числової процедури оцінювання коваріаційної матриці B_{2D} згідно з (6.76) та обчислення значень індикаторної функції (6.77) в точках саплінгу. Їх реалізації відрізняються особливостями приведення виразу (6.78) до вигляду, який дозволяє застосувати стандартні методи лінійної алгебри, використовуючи операції з векторами та матрицями.

Один із таких підходів передбачає векторизацію матриць оператором

$$\text{vec}(\mathbf{X}) = [x_{0,0}, \dots, x_{M,0}, x_{0,1}, \dots, x_{M,1}, \dots, x_{0,M}, \dots, x_{M,M}]^T, \quad (6.85)$$

де x_{h_1, h_2} є елементами матриці \mathbf{X} при $h_1, h_2 \in \mathbb{Z}$ і $h_1 = \overline{0, M}$ $h_2 = \overline{0, M}$.

Визначимо матрицю дискретних значень діаграми розсіювання як

$$\tilde{\mathbf{F}}_j = \begin{bmatrix} \tilde{F}_j(0,0) & \tilde{F}_j(0,\Delta m) & \cdots & \tilde{F}_j(0,M\Delta m) \\ \tilde{F}_j(\Delta m,0) & \tilde{F}_j(\Delta m,\Delta m) & \cdots & \tilde{F}_j(\Delta m,M\Delta m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{F}_j(M\Delta m,0) & \tilde{F}_j(M\Delta m,\Delta m) & \cdots & \tilde{F}_j(M\Delta m,M\Delta m) \end{bmatrix}, \quad (6.86)$$

де Δm - крок дискретизації і $M = (2k - N\Delta n)/\Delta m$.

Аналогічно задамо матрицю \mathbf{X} , елементи якої є дискретними значеннями імпульсної характеристики $X := \exp(i(\mathbf{z}, \mathbf{q})) / (4\pi^2) = \exp(i(z_1 q_1 + z_2 q_2)) / (4\pi^2)$, впорядковану як

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \frac{1}{4\pi^2} \begin{bmatrix} \exp(i\Delta q(0z_1 + 0z_2)) & \exp(i\Delta q(0z_1 + 1z_2)) & \cdots & \exp(i\Delta q(0z_1 + Mz_2)) \\ \exp(i\Delta q(1z_1 + 0z_2)) & \exp(i\Delta q(1z_1 + 1z_2)) & \cdots & \exp(i\Delta q(1z_1 + Mz_2)) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \exp(i\Delta q(Mz_1 + 0z_2)) & \exp(i\Delta q(Mz_1 + 1z_2)) & \cdots & \exp(i\Delta q(Mz_1 + Mz_2)) \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \begin{bmatrix} 1 & \exp(i\Delta q z_2) & \cdots & \exp(iM\Delta q z_2) \\ \exp(i\Delta q z_1) & \exp(i\Delta q(z_1 + z_2)) & \cdots & \exp(i\Delta q(z_1 + Mz_2)) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \exp(iM\Delta q z_1) & \exp(i\Delta q(Mz_1 + z_2)) & \cdots & \exp(iM\Delta q(z_1 + z_2)) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (6.87)$$

де $q_1 = h_1 \Delta q$ та $q_2 = h_2 \Delta q$ і $h_1, h_2 \in \overline{0, M}$.

Оскільки кожний елемент матриці \mathbf{X} можна виразити добутком двох експонент, які допускають розділення індексів, останню формулу також можна подати добутком двох векторів

$$\mathbf{X} = \mathbf{a}(z_1) (\mathbf{a}(z_2))^H, \quad (6.88)$$

де $\mathbf{a}(z) = [1, \exp(i\Delta q z), \exp(i2\Delta q z), \dots, \exp(iM\Delta q z)]^T$.

Для спрощення застосування числових методів лінійної алгебри дискретні значення функції $\hat{B}_{2D}(x_1, x_2, x'_1, x'_2)$ перегрупуємо, сформувавши таким чином квадратну коваріаційну матрицю $\hat{\mathbf{R}} \in \mathbb{C}^{(M+1) \times (M+1)}$. Її можна знайти на основі виразу (6.76), підставивши замість дискретних значень функції $\tilde{F}_j(\mathbf{x})$ векторизоване значення матриці $\tilde{\mathbf{F}}_j$ із (6.86):

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{K+1} \sum_{j=0}^K \text{vec}(\tilde{\mathbf{F}}_j) (\text{vec}(\tilde{\mathbf{F}}_j))^H. \quad (6.89)$$

Виходячи зі структури та принципу групування елементів матриці $\hat{\mathbf{R}}$, необхідно впорядкувати елементи матриці \mathbf{X} . При цьому варто передбачити можливість знаходження дискретизованого (наближеного) розв'язку рівняння (6.78) через розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь, поданої у матричному вигляді. Цьому відповідає перегрупування елементів матриці \mathbf{X} , реалізоване шляхом її векторизації

$$\boldsymbol{\chi} = \text{vec}(\mathbf{X}). \quad (6.90)$$

Отриманий вектор також можна виразити через добуток Кронекера \otimes двох векторів: $\boldsymbol{\chi} = \mathbf{a}(z_1) \otimes \mathbf{a}(z_2)$.

Обчислення індикаторної функції в кожній точці семплінгу включає два етапи. На першому – знаходять регуляризований розв'язок системи лінійних рівнянь, який є апроксимацією розв'язку інтегрального рівняння (6.78):

$$(\hat{\mathbf{R}} + \alpha \mathbf{I}) \boldsymbol{\psi}(\mathbf{z}) = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{z}), \quad (6.91)$$

тут α та \mathbf{I} - коефіцієнт регуляризації та одинична матриця, $\boldsymbol{\psi}$ - вектор дискретних значень, який апроксимує функцію $\psi(x_1, x_2)$.

Другий етап зводиться до знаходження оберненої величини до скалярного добутку знайденої функції та векторизованої матриці \mathbf{X} , у відповідності до виразу (6.79). Значення індикаторної функції обчислюють як

$$\varphi(\mathbf{z}) = (\boldsymbol{\chi}^H(\mathbf{z}) \boldsymbol{\psi}(\mathbf{z}))^{-1}. \quad (6.92)$$

Очевидно, що ефективність розв'язання оберненої задачі розсіювання запропонованим методом залежатиме від параметра регуляризації, а також від параметрів Δn та N , які визначають кількість синтезованих спостережень з оригінального. Незважаючи на те, що питання вибору оптимальних значень цих параметрів вимагає додаткового вивчення, числові результати, отримані підбором цих параметрів, підтверджують можливість ідентифікації границі розсіювача за

повністю заданими даними про розсіяне поле та демонструють покращення точності її ідентифікації таким методом у порівнянні з наближеннями Борна.

На рис. 6.11 показано переріз однорідного діелектричного циліндра з діелектричною проникністю $\varepsilon = 3$. Обернену задачу розсіювання розв'язано в наближенні Борна для заданих значень діаграми розсіювання на фіксованій частоті 10 ГГц (рис. 6.12.а). Розв'язок отримано із застосуванням дискретно-неперервного перетворення Фур'є для рівняння (6.55) та з використанням залежності $v(x_1, x_2) = k^2 - k^2(\varepsilon(x_1, x_2)/\varepsilon_0)$ між діелектричною проникністю та потенціалом рівняння Шредінгера. Як видно, такий розв'язок дозволяє наближено оцінити границю розсіювача. У той же час оцінка діелектричної проникності в точках, що відповідають однорідним областям, є неоднозначною та хибною. Це підтверджує висновки, зроблені за результатами теоретичного аналізу розв'язку цього інтегрального рівняння.

Результати розв'язання оберненої задачі розсіювання запропонованим методом для вихідних даних із попереднього прикладу продемонстрована на рис. 6.12.б та рис. 6.12.в для різних значень параметра N . Бачимо, що запропонований метод саплінгу значною мірою дозволяє усунути похибки, властиві розв'язку, що базується на борнівському наближенні.

6.5. Оцінювання границі проникного розсіювача для моностатично заданих вихідних даних на множині частот

Більшість досліджень в теорії обернених задач розсіювання присвячено випадкам, для яких існує доведення теореми про єдиність розв'язку [184]. Відповідне формулювання включає багатовимірні обернені задачі розсіювання на фіксованій частоті, вихідні дані яких гарантують перевизначеність задачі. Його розглянуто у попередніх двох пунктах у припущенні, що розсіяне поле реєструють для всіх кутів спостереження та для всіх кутів падіння плоских хвиль. Такі вихідні дані називають даними, що задані для повної апертури. Насправді реалізувати вимірювання розсіяного поля навколо невідомого об'єкта одночасно для всіх кутів

спостереження та для всіх кутів падіння плоскої хвилі практично неможливо. Тому використання обмеженої апертури є більш ралістичним. Варто зазначити, що багаточастотне зондування одним випромінювачем та реєстрація поля одним приймачем за умови їх фіксованого відносного розташування є стандартною схемою побудови радіолокаційних систем та систем дистанційного зондування. Такий принцип вимірювань називають моностатичним (рис. 6.13), а відповідну задачу розсіювання англійським терміном *back-scattering*. Очевидно, що для фіксованої частоти та моностатично заданих вихідних даних обернена задача розсіювання не має єдиного розв'язку. Тому розглянемо багаточастотний випадок.

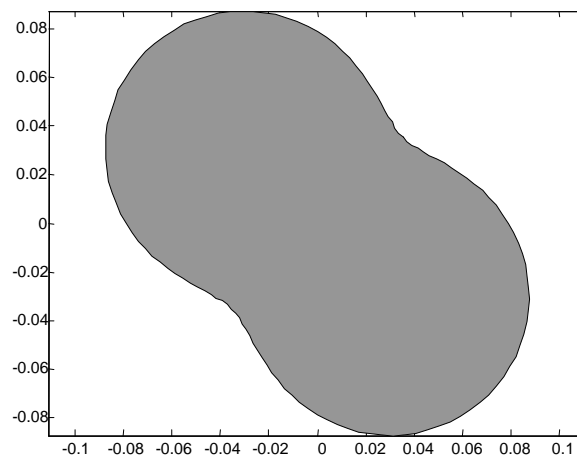
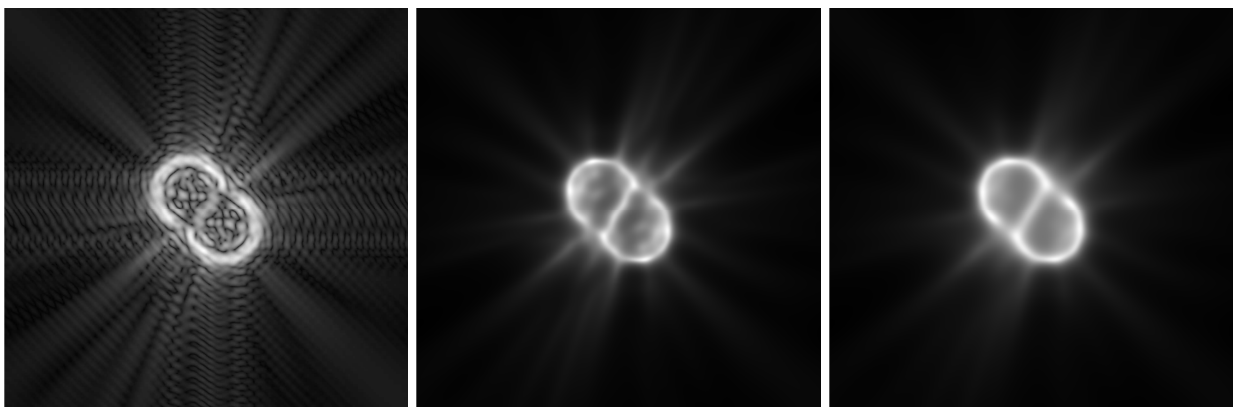


Рис. 6.11. Переріз розсіювача з діелектричною проникністю $\varepsilon = 3$



а)

б)

в)

Рис. 6.12. Розв'язок задачі розсіювання на основі наближення Борна - а) та розв'язки, отримані запропонованим методом - б) та - в) для різних N

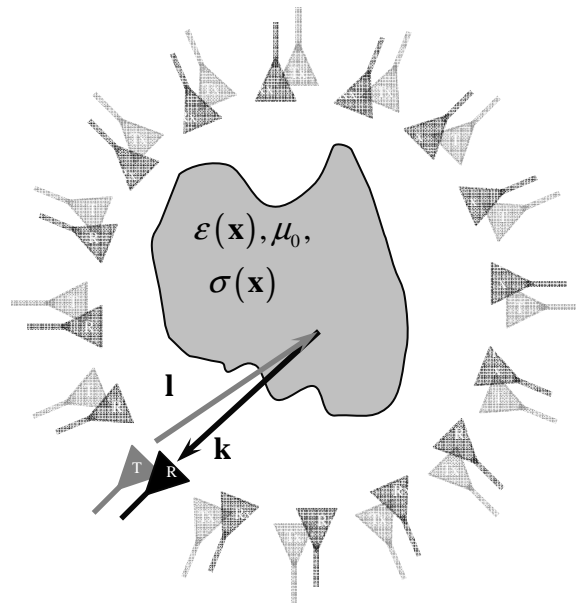


Рис. 6.13. Моностатичний спосіб реєстрації вихідних даних для оберненої задачі розсіювання від діелектричного об'єкта на множині частот

Таку задачу розглядали багато дослідників [233, 234, 283-286], але ефективність методів встановлення форми розсіювачів та оцінювання параметрів неоднорідних середовищ є малою і непринятною для практичного використання.

Ідея побудови методу розв'язання оберненої задачі для ідентифікації границі розсіювачів за відомим розподілом поля, зафіксованого моностатичною вимірювальною системою, полягає у формуванні індикаторної функції відповідно до описаної вище стратегії. При цьому за основу прийнято наближення Борна для розв'язку оберненої задачі (6.53).

Очевидно, що фіксоване значення вектора $\mathbf{p} = \mathbf{k} - \mathbf{l}$ для різних частот k можна задати різними способами, змінюючи кути спостереження та падіння плоскої хвилі. Таку неоднозначність можна пояснити тим, що функції \mathbf{k} та \mathbf{l} залежать як від частоти, так і від кутів падіння та спостереження, відповідно. Приклад визначення одного і того ж значення вектора на двох частотах показано на рис. 6.14.а. Таким чином, змінюючи значення кута падіння плоскої хвилі, кута спостереження та частоти, можна отримати будь-яке значення вектора \mathbf{p} .

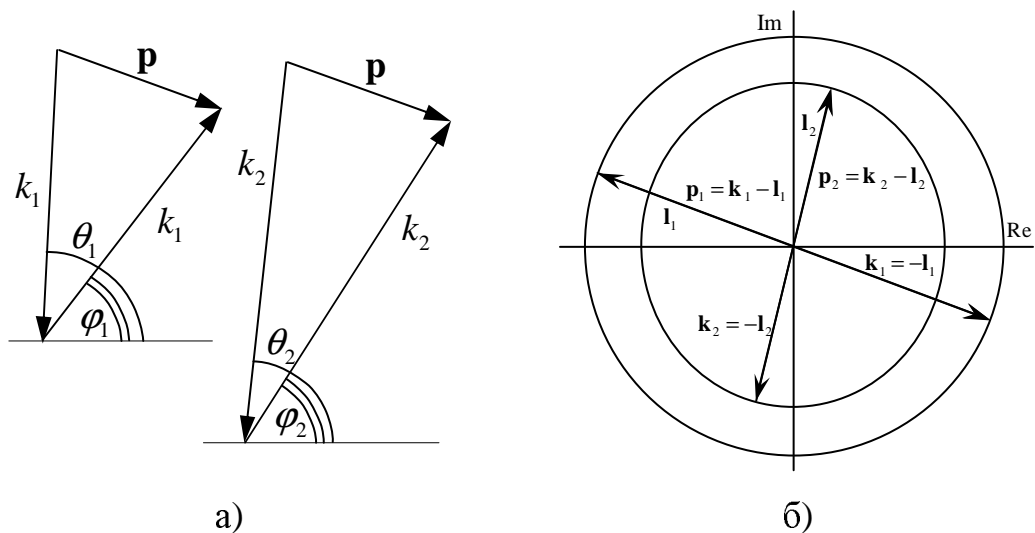


Рис. 6.14. Визначення вектора \mathbf{p} на двох частотах для різних кутів падіння та спостереження – а) та область значень вектора \mathbf{p} на двох частотах при моностатичному способі реєстрації розсіяного поля

Варто зазначити, що при моностатичному способі реєстрації розсіяного поля взаємне розташування випромінювача та приймальної антени завжди фіксоване. Як правило, розглядають випадок, де випромінювальна та приймальна антени суміщені, і отже, виконується умова $\mathbf{l} = -\mathbf{k}$. Тоді на фіксованій частоті кінець вектора \mathbf{p} буде описувати коло, радіуса k . Область значень вектора \mathbf{p} для двох різних частот зображена на рис. 6.14.б двома колами.

За умови $\mathbf{l} = -\mathbf{k}$ для скінченного діапазону частот $k \in [0, k_{\max}]$ значення вектора \mathbf{p} будуть лежати на крузі з радіусом k_{\max} . Тому наближений розв'язок оберненої задачі для моностатично заданих вихідних даних можна шукати на основі формули (6.55), де $F_{\text{backscat}}(\mathbf{p}) = f(\mathbf{k}, \mathbf{l}, k)$, $\mathbf{l} = -\mathbf{k}$, $k \in [0, k_{\max}]$. Такий розв'язок будемо називати також Борнівським наближенням. Його уточнення здійснено методом умовної мінімізації (6.72) та (6.73), яку реалізовано приведенням вихідних даних $F_{\text{backscat}}(\mathbf{p})$ до моделі множини спостережень $\tilde{F}_{\text{backscat}}(\mathbf{p})$ згідно з виразом (6.69). Результати числового моделювання дають можливість оцінити дієвість такого методу.

Для моделювання розсіювання та оцінювання ефективності розвинутих методів вибрано проникний об'єкт із відносною діелектричною проникністю $\varepsilon = 3$

та геометричною формою, яку називають ‘kite’ [202] (рис.6.15.а). Результати числового розв’язання відповідної оберненої задачі подано на рис. 6.15.б та рис. 6.15.в для вихідних даних, заданих на фіксованій частоті, та для довільних кутів падіння і спостереження. Результати розв’язання оберненої задачі розсіювання для моностатичного випадку подано на рис. 6.16. Аналізуючи два рисунки - рис. 6.15 та рис. 6.16, можна зробити висновок про те, що уточнення наближеного розв’язку запропонованим методом істотно покращує точність ідентифікації границі розсіювача. Також зазначимо, що точність реконструкції форми проникного розсіювача методами, які використовують індикаторну функцію для випадку вихідних даних із фіксованою частотою та вихідних даних, моностатично зареєстрованих на множині частот, є співмірною. Незважаючи на це, побудова експерименту для реєстрації розсіяного поля моностатичною системою є незрівнянно простішою, а отже її можна вважати практично прийнятним конструкційним рішенням у порівнянні з системою з повною апертурою. Це означає, що загальна ціна встановлення границі проникного розсіювача при використанні моностатичної системи вимірювань у широкому діапазоні частот з подальшою обробкою даних вимірювань запропонованим тут методом є меншою, ніж для візуалізації на фіксованій частоті.

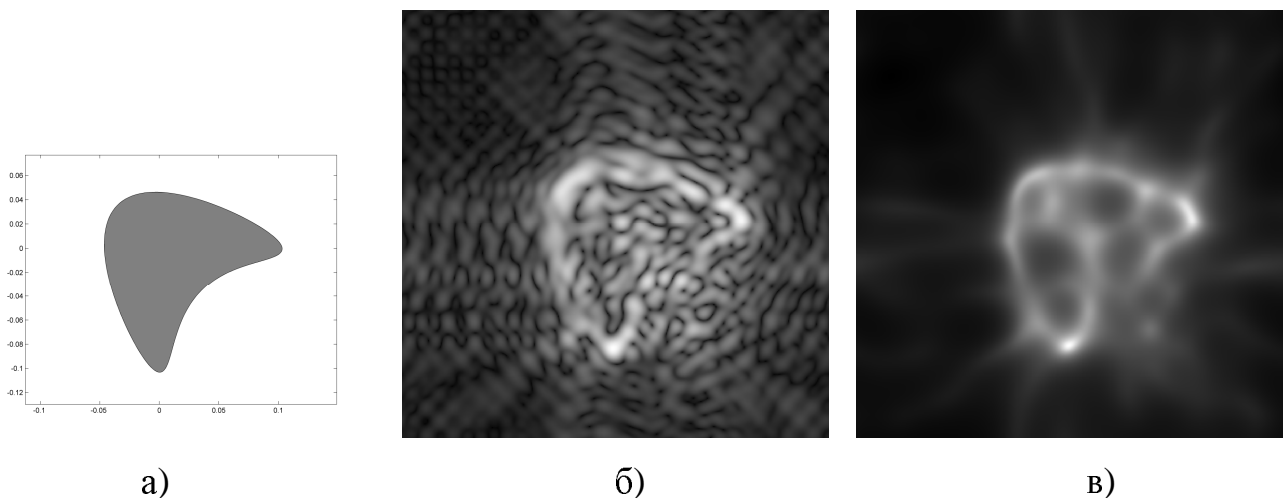


Рис. 6.15. Переріз діелектричного розсіювача $\epsilon = 3$ - а) та його реконструкція для повністю заданих вихідних даних на частоті $f = \omega/2\pi = 1GHz$ згідно з наближенням Борна – б) та запропонованим методом саплінгу - в)

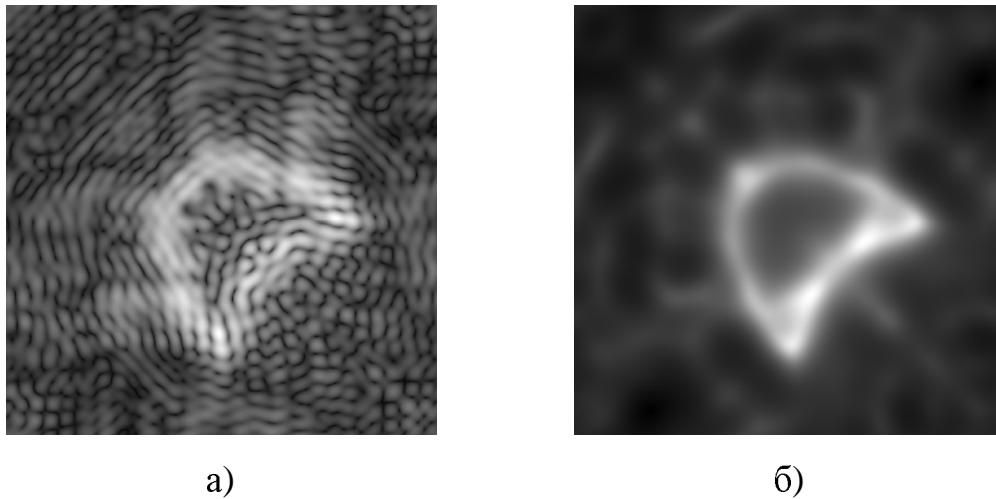


Рис. 6.16. Реконструкція діелектричного розсіювача (рис. 6.15) для вихідних даних, отриманих моностатичним способом вимірювання в діапазоні частот від $f_{\min} = 22\text{MHz}$ до $f_{\max} = 1\text{GHz}$, згідно з наближенням Борна – а) та запропонованим методом сэмплінгу - б)

6.6. Оцінювання границі ідеально провідного розсіювача для моностатично заданих вихідних даних на множині частот

Ідею уточнення наближеного розв'язку оберненої задачі для багаточастотних вихідних даних використаємо для встановлення форми ідеально провідного розсіювача. В даному випадку, вихідні дані для оберненої задачі візьмемо у вигляді моделі багатьох детермінованих спостережень (6.62). Це дозволяє застосувати підхід, що полягає у оцінюванні невідомих параметрів шляхом умовної мінімізації (6.14). Параметр, який оцінюється, відповідає часу проходження хвилі від випромінювача до поверхні розсіювача. Усереднення оцінених значень для множини положень моностатичної системи вимірювань дозволяє збільшити точність такого оцінювання. Як приклад, розглянемо моностатичний принцип реєстрації розсіяного поля у точках вздовж прямої, що відповідає синтезу лінійної антенної апертури (рис. 6.17)

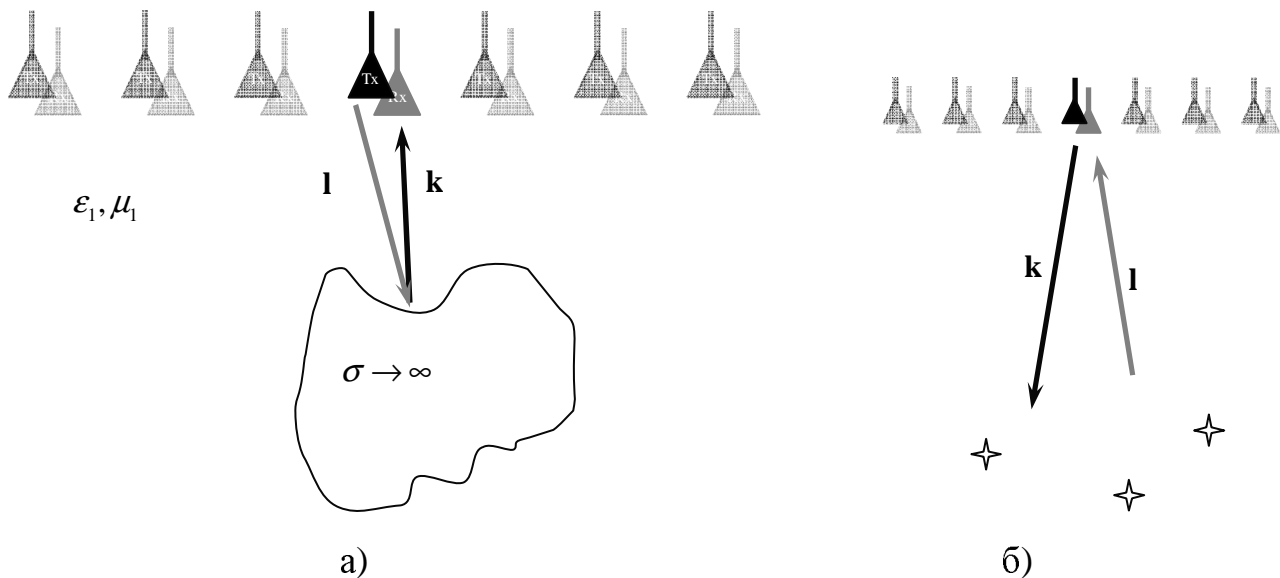


Рис. 6.17. Моностатичний спосіб вимірювання розсіяного поля системою з лінійною синтезованою антенною решіткою від ідеально-провідного розсіювача – а) та від трьох точкових розсіювачів – б)

Результати застосування запропонованого методу обробки результату вимірювань та його порівняння з відомим методом подано на рис. 6.18. Як видно, точність виявлення та розділення точкових розсіювачів запропонованим методом (рис. 6.18.г - е) є вищою, ніж у відомого методу синтезу апертури [239] (рис. 6.18.а - в). Це ще раз підтверджує правильність запропонованої стратегії побудови розв'язків двовимірних обернених задач розсіювання та дієвість отриманих згідно з цією стратегією розв'язків.

6.7. Висновки до шостого розділу

Враховуючи, що знаходження точного розв'язку оберненої задачі розсіювання викликає значні труднощі, основну увагу в розділі приділено створенню методів, які дозволяють знайти наближені розв'язки і не потребують великих обчислювальних затрат. Для цього запропоновано стратегію, яка полягає в уточненні відомих наближених розв'язків оберненої задачі розсіювання шляхом мінімізації певної складової похибки. Це дозволяє за вихідними даними оберненої задачі побудувати індикаторні функції, які мають властивість досягати максимального значення на

границі розсіювачів. Розподіл розсіяного поля при цьому запропоновано розглядати у вигляді множини спостережень, трактуючи задачу як статистичну. Розв'язок останньої знайдено у вигляді лінійного фільтра, отриманого шляхом умовної мінімізації деякого функціоналу.

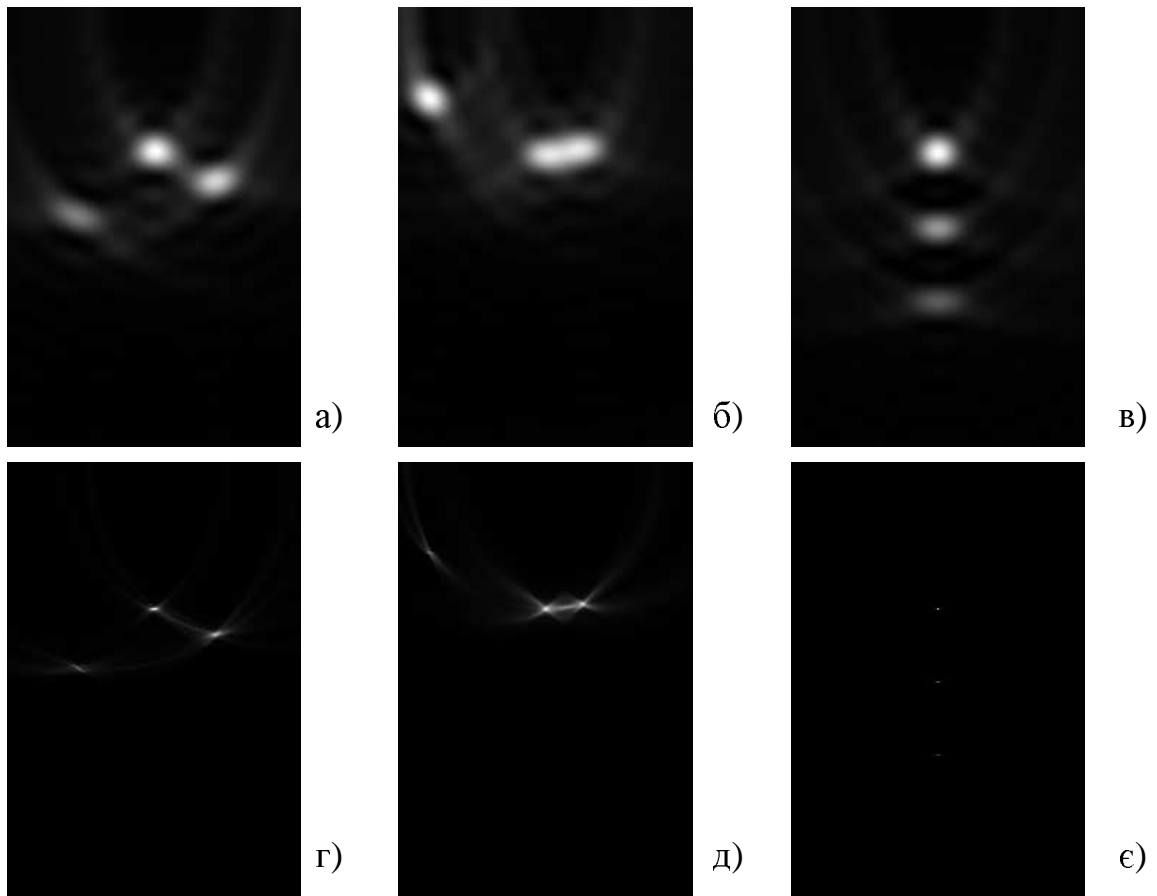


Рис. 6.18. Результати застосування методу синтезу апертури – а), б), в) та запропонованого методу – г), д), є) для виявлення трьох точкових розсіювачів

В залежності від характеру вихідних даних та типу розсіювача, отримані розв'язки оберненої задачі мають свої особливості. Для окремих випадків, де апіорно відомий тип розсіювача (ідеально провідний чи діелектричний), отримано математичні вирази, що дозволяють знайти розподіл у просторі параметрів матеріалу розсіювача та, зокрема, ідентифікувати геометричне місце точок його границі.

У випадку ідеально провідного об'єкта розв'язок оберненої задачі розсіювання можна трактувати як задачу ідентифікації у просторі джерел електромагнітного поля, які належать його поверхні. В основу запропонованого методу покладено наближений розв'язок задачі, що максимізує відгук від точкового джерела, який обчислено за вихідним даними про розсіяне поле на фіксованій частоті. Для забезпечення максимальної ефективності розвинутого методу вихідні дані необхідно задати для всіх кутів падіння плоскої хвилі на розсіювач та для всіх кутів спостереження. Числові результати розв'язку оберненої задачі демонструють можливість точної ідентифікації границі розсіювача при повністю заданих вихідних даних. У випадку частково заданих вихідних даних метод втрачає здатність точно встановити форму розсіювача, оскільки проявляється негативний вплив сильної кореляції між збудженими струмами на поверхні. Одним із шляхів покращення ефективності методу є його узагальнення на багаточастотний випадок.

Продемонстровано можливість застосування процедури знаходження розв'язку оберненої задачі розсіювання у випадках, де дані про розсіяне поле задані для фіксованої множини частот. Враховуючи перевизначений характер багаточастотної оберненої задачі розсіювання, запропонований метод розв'язку апробовано числово для випадків з обмеженою апертурою.

Результати числового аналізу запропонованого методу розв'язання оберненої задачі розсіювання дають можливість зробити висновок, що наведений розподіл струмів на поверхнях розділу середовищ, у тому числі й на поверхні об'єктів дослідження у неруйнівному контролі, є додатковою інформаційною ознакою, яку можна використати для встановлення форми цих об'єктів за виміряним довкола розсіяним електромагнітним полем.

Для ідеально провідного тіла при моностатично заданих вихідних даних на множині частот, в основу методу розв'язання оберненої задачі розсіювання покладено інший принцип. Використано факт, що імпульсна характеристика має особливості в моменти часу, коли фронт хвилі взаємодіє з границею розсіювача. Метод розв'язання оберненої задачі побудовано згідно з запропонованою

стратегією, а його дієвість оцінено на прикладі виявлення трьох точкових розсіювачів за умови, що вихідні дані задано частково (на лінійній антенній решітці).

Показано, що запропоновану стратегію можна також ефективно використати для побудови методів розв'язання оберненої задачі для проникних діелектричних тіл. У цьому випадку базовим розв'язком оберненої задачі, який уточнюється, є наближення Борна. Запропонований підхід розвинуто на випадки, коли поле задано на фіксованій частоті для всіх кутів падіння та всіх кутів спостереження, а також для моностатично заданих вихідних даних. Числові результати демонструють здатність ідентифікувати границю невідомого проникного розсіювача у моностатичному випадку за рахунок до визначення оберненої задачі, використовуючи значення розсіяного поля у широкому діапазоні частот. Практична цінність такого підходу полягає у тому, що завдяки багаточастотному зондуванню вдається уникнути необхідності використання складної антенної системи випромінювачів та приймачів.

Результати числового моделювання підтверджують правильність твердження про можливість істотного покращення якості уточнених розв'язків оберненої задачі розсіювання запропонованими методами порівняно з наближеними методами, якщо розв'язок шукають у класі функції, що збігаються до дельта-функції в точках на границі розсіювача.

Аналіз результатів показав, що визначальною характеристикою ефективності запропонованих методів розв'язання обернених задач розсіяння є точність оцінки коваріаційної матриці за множиною синтезованих спостережень. Для повних заданих вихідних даних і використаних методів синтезу таких спостережень, точність оцінки коваріаційної матриці досягає границі. Оскільки така коваріаційна матриця визначає ступінь статистичної залежності між значеннями розсіяного поля у різних спостереженнях, то можна стверджувати, що усунення або мінімізацію цієї залежності можна використати для подальшого підвищення точності розв'язків оберненої задачі.

На відміну від відомих методів саплінгу [207, 210], побудову індикаторних функцій здійснено згідно з запропонованою процедурою, яка має як фізичне, так і математичне пояснення.

РОЗДІЛ 7

ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ ДИСКРЕТНИХ СКІНЧЕНОВИМІРНИХ МОДЕЛЕЙ РОЗСІЮВАННЯ

Можливість побудови нових ефективних методів розв'язання обернених задач розсіювання для двовимірного випадку на основі розвинутої у попередньому розділі моделі (6.8), (6.9) не є єдиною її перевагою. Запропоновану стратегію побудови методів оцінювання параметрів об'єктів за відомим розсіяним полем та відповідну модель можна також звести до одновимірної моделі та використати у різних часткових випадках, які становлять практичний інтерес.

Саме тому цей розділ присвячено аналізу задач, де розсіювання відбувається на скінченій кількості дискретних об'єктів. Такі задачі пов'язані з виявленням точкових (нерозподілених) джерел електромагнітного поля. Отже, дискретне формулювання можна розглядати як частковий випадок загального формулювання оберненої задачі розсіювання, де об'єктом дослідження є процес розсіювання, в якому вторинне випромінювання відбувається завдяки просторово розподіленим наведеним струмам та зарядам на поверхні тіл та в їх об'ємі.

Ключовим моментом розділу є те, що в ньому, як частковий випадок багатовимірної задачі, розвинуто метод оцінювання коефіцієнтів у розв'язках Йоста за заданою їх частотною залежністю, якою подають вихідні дані в одновимірних обернених задачах. Як слідує з другого, третього та четвертого розділів, одновимірні обернені задачі розсіювання для шаруватих середовищ можна звести до рекурентного обчислення параметрів шарів якщо відомі всі коефіцієнти у розв'язках Йоста (2.71) та (2.72).

Щоб охарактеризувати дискретну скінченновимірну модель, розглянемо вираз (6.8) і припустимо, що $u(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in B \subset \mathbb{R}^1; J(\mathbf{x}) \in \mathbf{D}$, де $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^1$ є вісь дійсних чисел.

Розглянемо граничний випадок, коли функція має вигляд $J(\mathbf{x}) = \sum_{d=1}^D a_d \delta(\mathbf{x} - \omega_d)$.

Тоді модель спостереження (6.8) запишемо як

$$\begin{aligned}
 u(\mathbf{x}) &= \int_S J(\mathbf{x}') G_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \int_S \left(\sum_{d=1}^D a_d \delta(\mathbf{x} - \omega_d) \right) G_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \\
 &= \sum_{d=1}^D a_d G_0(\mathbf{x}, \omega_d), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^1.
 \end{aligned}
 \tag{7.1}$$

Очевидно, що для реалізації запропонованої стратегії знаходження розв'язків одновимірних задач розсіювання та для оцінювання параметрів розсіювачів, вихідні дані $u(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^1$ також необхідно подати у вигляді множини спостережень $\tilde{u}_j(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^1, j \in \mathbb{Z}$, у відповідності до (6.9). Тоді необхідно оцінити параметри a_d та ω_d за відомим $\tilde{u}_j(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^1$.

У цьому розділі розглянуто окремо три випадки, які можна трактувати як часткові у двовимірній оберненій задачі розсіювання:

- оцінювання коефіцієнтів у розв'язках Йоста за їх частотною залежністю;
- оцінювання кута падіння плоскої хвилі на лінійну антенну решітку від джерел випромінювання на безмежності та її аналітичний розв'язок у замкнутій формі для чотириелементної решітки;
- оцінювання кута падіння плоскої хвилі на кругову антенну решітку від джерел випромінювання на безмежності.

Крім того, оцінено порядок моделі D у виразі (7.1). Така задача є характерною тільки у випадку скінченної кількості джерел, на відміну від розглянутих обернених задач для двовимірних моделей розсіювання з неоднорідно просторово розподіленими параметрами.

7.1. Узагальнене статистичне формулювання та розв'язки задачі оцінювання

Припустимо, що функція $G_0(\mathbf{x}, \eta_d)$ у виразі (7.1) має вигляд комплексної експоненти $\exp(ix\omega_d)$. Тоді задача зводиться до оцінювання коефіцієнтів a_d та ω_d тригонометричного полінома за відомим значення $u(x)$ у випадку, якщо $u(x)$ задано точно (без похибки). Очевидно, що її можна розв'язати, розглядаючи суму

(7.1) як ряд Фур'є, а наближене значення коефіцієнтів шукати у вигляді дискретного перетворення Фур'є. Однак, такий підхід не виправдав себе через низьку роздільну здатність і неможливість точно оцінити впорядковані параметри ω_d , близькі до ω_{d+1} .

Тому розглядають більш загальну задачу, коли вихідні дані задані з випадковою похибкою, а задачу оцінювання розв'язують, максимізуючи точність шуканих параметрів. Це є рівнозначним задачі мінімізації дисперсії оцінки цих параметрів. Такий підхід складає основу спектрального оцінювання, розвинутого в теорії обробки просторово-часових сигналів як окремий напрям [241, 263, 287-290]. Важливо зазначити, що одним із постулатів цієї теорії є те, що вихідні дані задач оцінювання задано дискретно.

Нехай випадковий процес, який спостерігаємо, містить обмежену кількість D гармонічних складових із частотами $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_D$ та випадкову складову \mathbf{n} . Реалізацію випадкового процесу \mathbf{u} подано N дискретними вибірками і записано у матричній формі

$$\mathbf{u} = \mathbf{V}(\mathbf{w})\mathbf{s} + \mathbf{n}, \quad (7.2)$$

де $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^{D \times 1}$ - вектор-стовпець комплексних значень детермінованих, або випадкових модулюючих сигналів і $\mathbf{n} \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ - реалізація випадкової складової, яку описано дискретно.

Подальший аналіз базується на припущенні про те, що випадкова складова досліджуваного процесу є гаусівською рівномірно розподіленою випадковою величиною. У виразі (7.2) $\mathbf{V}(\mathbf{w}) \in \mathbb{C}^{D \times N}$ є матрицею Вандермонда з експоненціальними коефіцієнтами. Таку матрицю можна подати у формі $\mathbf{V}(\mathbf{w}) = [\mathbf{v}(\omega_1) | \mathbf{v}(\omega_2) | \mathbf{v}(\omega_3) | \dots | \mathbf{v}(\omega_D)]$, або

$$\mathbf{V}(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} e^{-i\omega_1\Delta} & e^{-i\omega_2\Delta} & \dots & e^{-i\omega_D\Delta} \\ e^{-i2\omega_1\Delta} & e^{-i2\omega_2\Delta} & \dots & e^{-i2\omega_D\Delta} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{-iN\omega_1\Delta} & e^{-iN\omega_2\Delta} & \dots & e^{-iN\omega_D\Delta} \end{bmatrix},$$

де $\mathbf{w} = [\omega_1 | \omega_2 | \omega_3 \dots \omega_D]^T$ є вектором значень спектрального параметра, $[]^T$ - позначення операції транспонування, Δ - інтервал, з яким дискретизовано

реалізацію випадкового процесу.

Залежно від наявних апріорних даних основну задачу спектрального оцінювання формулюють як знаходження оцінки вектора $\hat{\mathbf{w}} = [\hat{\omega}_1 | \hat{\omega}_2 | \hat{\omega}_3 \cdots \hat{\omega}_D]^T$ за вхідними даними \mathbf{u} . За певних умов порядок моделі D , детерміновані значення або статистичні властивості вектора \mathbf{s} модулюючих коефіцієнтів, а також параметри випадкової складової \mathbf{n} можна трактувати як невідомі величини. Очевидно, що така задача є істотно нелінійною, і питання однозначності її рішення вимагає додаткової уваги.

Статистична теорія базується на принципі усереднення випадкових величин за множиною реалізацій. Тому для досягнення більш точних результатів спектрального оцінювання розглядають не одну реалізацію \mathbf{u} , а їх множину $U = [\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2 | \mathbf{u}_3 | \dots | \mathbf{u}_K]$, $U \in \mathbb{C}^{N \times K}$, елементи якої зафіксовані за однакових умов експерименту. Кількість реалізацій K є числом спостережень випадкової величини \mathbf{u} в задачі оцінювання. Всі вектори матриці U відповідають моделі (7.2) $\mathbf{u}_k = \mathbf{V}(\mathbf{w})\mathbf{s}_k + \mathbf{n}_k$, $k = 1 \dots K$. Подібну ідею покладено в основу двовимірної моделі (6.10), де за вихідними даними \mathbf{u} синтезують множину спостережень $\tilde{\mathbf{u}}_j$.

У кожному з спостережень випадкова складова має шумову природу і є статистично незалежною випадковою величиною з коваріаційною матрицею $E[\mathbf{nn}^H] = \sigma^2 \mathbf{I}$, де σ^2 - дисперсія випадкової складової, $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ - діагональна одинична матриця; $E[\]$ - математичне очікування.

Підхід до знаходження розв'язку задачі статистичного спектрального оцінювання залежить від того, яке припущення здійснено щодо характеру вектора модулюючих коефіцієнтів \mathbf{s} . Прийнято розрізняти статистичне та детерміністичне визначення параметрів цього вектора. Виходячи з тверджень розділу 6, де побудову індикаторних функцій здійснено за принципом мінімізації деякої складової випадкової похибки, розглянемо випадок, коли елементи вектора \mathbf{s} є випадковими величинами з нормальним законом розподілу та коваріаційною матрицею $E[\mathbf{ss}^H] = \mathbf{S}$. Тоді на основі правила лінійного перетворення нормально розподілених

випадкових величин, можна встановити, що елементи вектора \mathbf{u}_k , значення якого спостерігаються, є також нормально розподіленими з густиною імовірності

$$p(\mathbf{u}_k) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N \sqrt{\det(\mathbf{B})}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \mathbf{u}_k^H \mathbf{B}^{-1} \mathbf{u}_k\right\} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N \sqrt{\det(\mathbf{B})}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{B}^{-1} \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^H)\right\}, \quad (7.3)$$

де $\det()$ та $\text{tr}()$ - детермінант та слід матриці; $[\]^H$ - позначення операції комплексно-спряженого транспонування, а $\mathbf{B} = E[\mathbf{u}\mathbf{u}^H]$ - коваріаційна матриця, яку можна виразити сумою двох матриць [287]

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}(\mathbf{w})\mathbf{S}\mathbf{V}^H(\mathbf{w}) + \sigma^2\mathbf{I}. \quad (7.4)$$

Статистична незалежність окремих спостережень дає можливість записати сумісний закон розподілу випадкової величин $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_K$ як добуток функцій густини розподілу (7.3) результатів кожного спостереження:

$$p(U) = \prod_{k=1}^K p(\mathbf{u}_k) = \frac{1}{((\sqrt{2\pi})^N \sqrt{\det(\mathbf{B})})^K} \exp\left\{-\frac{1}{2} \text{tr}\left(\mathbf{B}^{-1} \sum_{k=1}^K \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^H\right)\right\}. \quad (7.5)$$

За відсутності апріорних даних про розв'язок статистичне оцінювання можна трактувати як задачу максимізації функції правдоподібності. Таку функцію записано відповідно до виразу (7.5):

$$\ell = \ln p(U) = -\frac{NK}{2} \ln(2\pi) - \frac{K}{2} \ln(\det(\mathbf{B})) - \frac{1}{2} \text{tr}\left(\mathbf{B}^{-1} \sum_{k=1}^K \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^H\right). \quad (7.6)$$

Аналіз формули (7.6) дає можливість зробити висновок, що при заданих вхідних даних $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_K$ оцінка їх коваріаційної матриці \mathbf{B} за принципом максимуму правдоподібності матиме вигляд:

$$\hat{\mathbf{B}} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^H. \quad (7.7)$$

Коваріаційна матриця \mathbf{B} і, відповідно, її оцінка $\hat{\mathbf{B}}$ згідно з виразом (7.7) є позитивно визначеними ермітовими матрицями, які можна факторизувати, використавши властивості розкладу матриці у базисі власних векторів:

$$\mathbf{B} = \mathbf{U}_s \Lambda_s \mathbf{U}_s^H + \mathbf{U}_n \Lambda_n \mathbf{U}_n^H \quad \text{та} \quad \hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{U}}_s \hat{\Lambda}_s \hat{\mathbf{U}}_s^H + \hat{\mathbf{U}}_n \hat{\Lambda}_n \hat{\mathbf{U}}_n^H, \quad (7.8) \quad \text{та} \quad (7.9)$$

де \mathbf{U}_s та \mathbf{U}_n – прямокутні матриці ($\mathbf{U}_s \in \mathbb{C}^{N \times D}$ та $\mathbf{U}_n \in \mathbb{C}^{N \times (N-D)}$), стовпці яких є власними векторами, які ототожнюються з модулюючими коефіцієнтами \mathbf{s} та з випадковою шумовою складовою \mathbf{n} ; Λ_s та Λ_n - діагональні матриці, елементами діагоналей яких є власні значення λ_s та λ_n , впорядковані у порядку спадання.

Задачу максимізації функції правдоподібності (7.6) можна записати відносно невідомих значень елементів вектора спектральних параметрів $\mathbf{w} = [\omega_1 | \omega_2 | \omega_3 \cdots \omega_D]^T$. Розв'язок цієї задачі не вдається записати явно, тому його подано [241] у вигляді результату мінімізації функціоналу багатьох змінних:

$$\hat{\mathbf{w}}_{MLU} = \arg \min_{\mathbf{w}} \left(\det \left(\mathbf{P}_V \hat{\mathbf{B}} \mathbf{P}_V + \frac{1}{N-D} \text{tr}(\mathbf{P}_V^\perp \hat{\mathbf{B}}) \mathbf{P}_V^\perp \right) \right), \quad (7.10)$$

де $\mathbf{P}_V = \mathbf{V}(\mathbf{w})[\mathbf{V}^H(\mathbf{w})\mathbf{V}(\mathbf{w})]^{-1}\mathbf{V}^H(\mathbf{w})$ та $\mathbf{P}_V^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{P}_V$ є матриці-проектори на ортогональні простори.

У випадку, коли спектральне оцінювання базується на припущенні про детермінований характер елементів вектора модулюючих коефіцієнтів, розв'язок задачі [241] максимізації умовної функції правдоподібності має вигляд:

$$\hat{\mathbf{w}}_{MLC} = \arg \min_{\mathbf{w}} \left(\text{tr}(\mathbf{P}_V^\perp \hat{\mathbf{B}}) \right). \quad (7.11)$$

Тоді оцінку елементів вектора модулюючих коефіцієнтів \mathbf{s} , як невідомих величин, можна записати в явній матричній формі

$$\hat{\mathbf{s}} = \left[\mathbf{V}^H(\hat{\mathbf{w}})\mathbf{V}(\hat{\mathbf{w}}) \right]^{-1} \mathbf{V}(\hat{\mathbf{w}})U. \quad (7.12)$$

Як видно з виразів (7.10) та (7.11), розв'язок задачі максимуму правдоподібності вимагає застосування числових методів мінімізації функції багатьох змінних. Такі задачі є багатоекстремальними, тобто глобальний екстремум необхідно знаходити серед багатьох локальних.

З іншого боку, науковий напрям - спектральне оцінювання [241, 263, 287-290], що розвинувся у теорії фільтрації та обробки сигналів, пропонує альтернативні шляхи розв'язання поставленої задачі. Для спрощення спектрального оцінювання на практиці використовують методи [242, 277, 291, 292], які є асимптотично еквівалентними до методу максимальної правдоподібності, при цьому вимагають

значно менше обчислювальних затрат. До них можна віднести принципи обробки сигналів, згідно з методами MUSIC [291], мінімальної норми [287], пучка матриці [277], ESPRIT [292], MODE [241], WSF [241], Capon [242] та іншими.

Безпосередня мінімізація з обмеженнями (6.30) та (6.31) стосовно оцінювання параметрів \mathbf{w} в одновимірному випадку дає можливість звести вихідну задачу до процедури пошуку екстремумів функції однієї змінної, яку формально запишемо як:

$$\hat{\mathbf{w}} = \arg \min_{\omega} Q_{\text{Capon}}(\omega), \quad (7.13)$$

де $Q_{\text{Capon}}(\omega) = \mathbf{v}^H(\omega) \hat{\mathbf{B}}^{-1} \mathbf{v}(\omega)$ є функцією, яка характеризує спектр досліджуваного процесу. В околах значень $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \dots$ функція $Q_{\text{Capon}}(\omega)$ досягає свого локального мінімуму, а спектр $1/Q_{\text{Capon}}(\omega)$, як обернена величина до неї, набув максимальних значень.

Метод оцінювання відповідно до виразу (7.13) називають методом Capon [242]. Незважаючи на те, що цей метод асимптотично наближається до методу максимізації функції правдоподібності, його використання є обґрунтованим лише у випадках, коли кількість параметрів D є апріорно невідомою, або вона прямує до безмежності. Саме цією властивістю пояснюється ефективність розвинутого методу розв'язання двовимірних обернених задач розсіювання, спрямованих на ідентифікацію границі розподілених об'єктів.

Для скінчено вимірного дискретного випадку, коли кількість невідомих параметрів є відомою і скінченою величиною, доцільно використовувати інші методи. Одним із них є метод класифікації багатьох сигналів MUSIC (MUltiple SIgnal Classification) [291]. Він полягає у визначенні абсолютної величини проекції сингалу на підпростір, утворений власними векторами шумової компоненти. Оцінювання невідомих спектральних параметрів зводиться до знаходження екстремумів функції однієї змінної:

$$\hat{\mathbf{w}} = \arg \min_{\omega} Q_{\text{MUSIC}}(\omega), \quad (7.14)$$

де $Q_{MUSIC}(\omega) = v^H(\omega)(I - \hat{U}_s \hat{U}_s^H)v(\omega)$ є функцією, яка характеризує спектр досліджуваного процесу. Функція $1/Q_{MUSIC}(\omega)$, має максимуми в околах точок $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_D$.

Завдяки малій обчислювальній складності методи Capon та MUSIC часто використовують [242, 291], як наближення для числового розв'язання задачі максимізації функції правдоподібності (7.10) або (7.11). Спектральне оцінювання за методом MUSIC демонструє вищу точність порівняно з методом Capon, але реалізація методу MUSIC вимагає апріорно заданого значення порядку моделі.

7.2. Приведення обернених задач розсіювання до задачі оцінювання вектора невідомих параметрів

Нижче розглянуто випадки, де практичні задачі в теорії обернених задач розсіювання можна звести до одновимірної моделі спостереження (7.2), а їх розв'язок шукати як оцінку скінченої множини невідомих параметрів методами, описаними вище.

7.2.1. Обернена задача розсіювання для багатошарової структури. Однією з задач неруйнівного контролю [59] є визначення параметрів багатошарових структур на основі даних про частотну залежність коефіцієнтів матриці розсіювання електромагнітних хвиль, які можна виміряти. На рис. 7.1. схематично зображено процес обстеження взірця, упродовж якого встановлюють коефіцієнт розсіювання $R(\omega)$ плоских хвиль від поверхні багатошарової структури та коефіцієнт проходження $T(\omega)$ плоских хвиль через неї. В другому, третьому та четвертому розділах роботи показано, що різні задачі ідентифікації параметрів багатошарових структур можна звести до оцінювання величин τ_p , M_0 , $\alpha_0(p)$ та $\beta_0(p)$, $p = \overline{1, M_0}$ у сумах (2.71), (2.72) за значеннями коефіцієнтів у розв'язках Йоста, визначених перерахунком результатів вимірювання. У найпростішому випадку вихідними

даними задачі оцінювання є частотна залежність функцій $B_m(\omega) = L_m(-\omega)/T_m(-\omega)$ та $A_m(\omega) = 1/T_m(\omega)$.

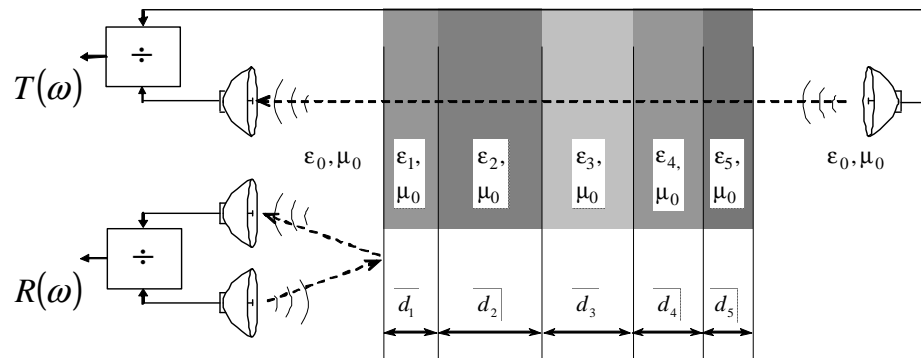


Рис. 7.1. Визначення коефіцієнтів відбиття та проходження плоских електромагнітних хвиль при неруйнівному контролі багат шарової структури

Складність такого оцінювання зумовлена тим, що у вимірних даних завжди присутня випадкова складова, а самі вимірювання здійснюються на скінченній множині частот в обмеженому діапазоні. Для більшої адекватності математичної моделі процесу вимірювання введено припущення про адитивний характер гаусівської випадкової складової. Тоді оцінку коефіцієнтів у розв'язках Йоста можна виразити сумою точного значення та похибки

$$\hat{A}_m(\omega) = A_m(\omega) + n_A = \sum_{p=1}^{M_0} \alpha_0(p) \exp(i\omega\tau_p) + n_A; \quad (7.15)$$

$$\hat{B}_m(\omega) = B_m(\omega) + n_B = \sum_{p=1}^{M_0} \beta_0(p) \exp(i\omega\tau_p) + n_B. \quad (7.16)$$

Тут n_A та n_B – комплексні гаусівські випадкові складові з розподілами $N(0, \sigma_A^2)$ та $N(0, \sigma_B^2)$, відповідно.

Зазначимо, що припущення про гаусівський характер випадкових складових у формулах (7.15) та (7.16), строго кажучи, є занадто сильним, оскільки спектральні коефіцієнти $A_m(\omega)$ та $B_m(\omega)$ отримано за результатами нелінійних перетворень коефіцієнтів відбиття під час реконструкції матриці розсіювання. Однак таке припущення на практиці є допустимим, а процедура ідентифікації параметрів у

сумах (2.71) та (2.72) для адитивної гаусівської моделі суттєво спрощується. При цьому обґрунтованим є припущення щодо рівності дисперсій $\sigma_S^2 = \sigma_A^2 = \sigma_B^2$ випадкової складової для спектральних коефіцієнтів $\hat{A}_m(\omega)$ та $\hat{B}_m(\omega)$.

Так як значення $\hat{A}_m(\omega)$ та $\hat{B}_m(\omega)$ визначені лише для скінченої множини частот $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_{N_m}$, то вирази (7.15) та (7.16) можна звести до скінченновимірної форми. Нехай $\mathbf{V}(\boldsymbol{\tau})$ є матрицею експонент із чисто уявними аргументами, що залежать від вектора невідомих $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_{M_0}]$. Якщо результати вимірювань задано на регулярній сітці частот $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_{N_m}$ з кроком $\Delta\omega$, то матриця $\mathbf{V}(\boldsymbol{\tau})$ є матрицею Вандермонда, а вирази (7.15) та (7.16) можна записати як

$$\mathbf{u}_A = \mathbf{V}(\boldsymbol{\tau}) \cdot \boldsymbol{\alpha}_0 + \mathbf{n}_A \quad \text{та} \quad \mathbf{u}_B = \mathbf{V}(\boldsymbol{\tau}) \cdot \boldsymbol{\beta}_0 + \mathbf{n}_B, \quad (7.17) \text{ та } (7.18)$$

де $\mathbf{u}_A = [\hat{A}_m(\omega_1), \hat{A}_m(\omega_2), \dots, \hat{A}_m(\omega_{N_m})]^T$ та $\mathbf{u}_B = [\hat{B}_m(\omega_1), \hat{B}_m(\omega_2), \dots, \hat{B}_m(\omega_{N_m})]^T$ – вектори вибірок комплексних значень коефіцієнтів розв’язків Йоста; $\mathbf{n}_A \in \mathbb{C}^{N_m \times 1}$ та $\mathbf{n}_B \in \mathbb{C}^{N_m \times 1}$ – вектори миттєвих значень випадкових складових n_A та n_B ; $\boldsymbol{\alpha}_0 = [\alpha_0(1), \alpha_0(2), \dots, \alpha_0(M_0)]^T \in \mathbb{R}^{M_0 \times 1}$ та $\boldsymbol{\beta}_0 = [\beta_0(1), \beta_0(2), \dots, \beta_0(M_0)]^T \in \mathbb{R}^{M_0 \times 1}$ – вектори шуканих коефіцієнтів сум (2.71) та (2.72).

У скінченно вимірному формулюванні задача спектрального аналізу полягає у знаходженні векторів невідомих параметрів $\hat{\boldsymbol{\tau}}$, $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_0$, $\hat{\boldsymbol{\beta}}_0$ та порядку моделі \hat{M}_0 за відомими векторами \mathbf{u}_A та \mathbf{u}_B . Її розв’язання методом дискретного перетворення Фур’є не дозволяє отримати високу точність, яку можна досягнути методами спектрального оцінювання. Для реалізації останніх необхідно оцінити коваріаційну матрицю. Матриця, яку у випадку відсутності шумової складової знайдено згідно з формулою (7.7), є виродженою. Така властивість негативно проявляється при реалізації методів спектрального оцінювання. Для збільшення рангу коваріаційної матриці використаємо підхід, який у теорії спектрального оцінювання називають просторовим усередненням. Він є частковим випадком запропонованої у шостому розділі роботи стратегії розв’язання оберненої задачі розсіювання, яка полягає у

тому, щоб вихідні дані \mathbf{u} подати множиною реалізацій $\tilde{\mathbf{u}}_j$ згідно з моделлю (6.9). Як окремі реалізації $\tilde{\mathbf{u}}_j$ процесу \mathbf{u} , описаного дискретно, використаємо його підвектори $\tilde{\mathbf{u}}_{A,j} = [\hat{A}_m(\omega_{j-J+1}) \dots \hat{A}_m(\omega_j)]^T$ та $\tilde{\mathbf{u}}_{B,j} = [\hat{B}_m(\omega_{j-J+1}) \dots \hat{B}_m(\omega_j)]^T$. Беручи до уваги регулярність сітки частот, на яких здійснюються вимірювання, оцінку коваріаційних матриць $\mathbf{K}_A \in \mathbb{C}^{J \times J}$ та $\mathbf{K}_B \in \mathbb{C}^{J \times J}$ кожного з векторів \mathbf{u}_A та \mathbf{u}_B можна знайти усередненням коваріаційних матриць їх підвекторів (з $\mathbb{C}^{J \times 1}$) за формулою [263]:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_A &= \frac{1}{N_m - J + 1} \sum_{j=J}^{N_m} \tilde{\mathbf{u}}_{A,j} \tilde{\mathbf{u}}_{A,j}^H = \\ &= \frac{1}{N_m - J + 1} \sum_{j=J}^{N_m} [\hat{A}_m(\omega_{j-J+1}) \dots \hat{A}_m(\omega_j)]^T [\hat{A}_m(\omega_{j-J+1}) \dots \hat{A}_m(\omega_j)]^* ; \end{aligned} \quad (7.19)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_B &= \frac{1}{N_m - J + 1} \sum_{j=J}^{N_m} \tilde{\mathbf{u}}_{B,j} \tilde{\mathbf{u}}_{B,j}^H = \\ &= \frac{1}{N_m - J + 1} \sum_{j=J}^{N_m} [\hat{B}_m(\omega_{j-J+1}) \dots \hat{B}_m(\omega_j)]^T [\hat{B}_m(\omega_{j-J+1}) \dots \hat{B}_m(\omega_j)]^* , \end{aligned} \quad (7.20)$$

де $[\]^*$ – операція спряження елементів вектора.

Крім того, спільність параметрів M_0 та $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_{M_0}]$ для моделей (7.17), (7.18) вказує на те, що для отримання їх оцінки можна використати усереднення вихідних даних, виражених двома незалежними векторами \mathbf{u}_A та \mathbf{u}_B . Тому розглядатимемо вектори \mathbf{u}_A та \mathbf{u}_B як дві статистично незалежні реалізації деякого випадкового процесу, моделлю якого є скінчена сума періодичних функцій з випадковими значеннями амплітуд. Тоді оцінку коваріаційної матриці випадкового процесу, що розглядається, можна отримати як середнє (2.71) та (2.72)

$$\hat{\mathbf{V}} = (\mathbf{K}_A + \mathbf{K}_B) / 2. \quad (7.21)$$

Факторизована форма (7.8) коваріаційної матриці досліджуваного випадкового процесу та розклад оцінки коваріаційної матриці (7.9) служать базою для оцінювання невідомих параметрів у моделях (2.71) та (2.72). Аналізуючи

діагональні матриці Λ_s та Λ_n , можна безпосередньо записати вираз для дисперсії випадкової складової у векторах \mathbf{u}_A та \mathbf{u}_B :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{J - M_0} \sum_{j=M_0+1}^J \hat{\lambda}_{n,j}. \quad (7.22)$$

В цьому випадку вважаємо, що значення порядку моделі M_0 є відомим.

Вектор невідомих параметрів $\hat{\boldsymbol{\tau}} = [\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, \hat{\tau}_3, \dots, \hat{\tau}_{M_0}]$ можна знайти, побудувавши індикаторну функцію як однопараметричну залежність від величини τ та визначивши M_0 її найбільших значень.

Для відомих параметрів $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_{M_0}]$, коефіцієнти $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_0$ і $\hat{\boldsymbol{\beta}}_0$ можна оцінити за принципом найменших квадратів

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_0 = [\mathbf{V}^H(\hat{\boldsymbol{\tau}})\mathbf{V}(\hat{\boldsymbol{\tau}})]^{-1} \mathbf{V}^H(\hat{\boldsymbol{\tau}})\mathbf{u}_A \quad \text{та} \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_0 = [\mathbf{V}^H(\hat{\boldsymbol{\tau}})\mathbf{V}(\hat{\boldsymbol{\tau}})]^{-1} \mathbf{V}^H(\hat{\boldsymbol{\tau}})\mathbf{u}_B. \quad (7.23) \text{ та } (7.24)$$

Отримані значення векторів $\boldsymbol{\tau}$, коефіцієнти $\boldsymbol{\alpha}_0$ і $\boldsymbol{\beta}_0$ дають можливість повністю реконструювати параметри шаруватої структури за скінчену кількість рекурентних операцій, як описано у другому розділі.

Як приклад розглянемо двошарову структуру з параметрами $\varepsilon_1 = 50$, $\varepsilon_2 = 10$, $d_1 = 9.4$, $d_2 = 22.1$. Змодельовавши процес вимірювання коефіцієнтів відбиття та пропускання з відношенням «сигнал/шум» 12 дБ, визначимо параметри $[\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_{M_0}]$ характеристик розсіювання за критерієм розташування максимумів у спектрі $\varphi_{MUSIC}(\tau)$. Для порівняння ефективності цього підходу на рис. 7.2 подано спектр, обчислений усередненням результатів дискретного перетворенням Фур'є за кількома експериментами та згідно з методом спектрального оцінювання MUSIC при однакових вихідних даних: $N = 100$, $K = 15$ та $J = 40$. Як видно з рисунка, метод MUSIC дозволяє отримати суттєво більшу роздільну здатність спектрального оцінювання порівняно з дискретним перетворенням Фур'є, що вказує на доцільність використання статистичних параметричних підходів до спектрального оцінювання.

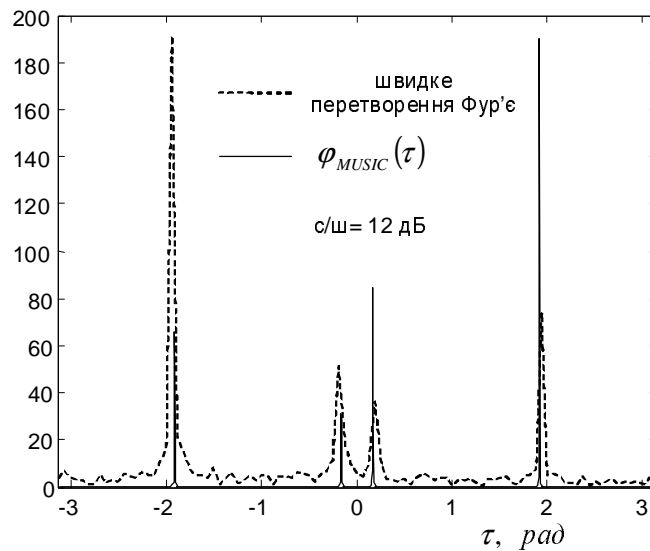


Рис. 7.2. Індикаторна функція $\varphi_{MUSIC}(\tau)$ і результат обчислення дискретного перетворення Фур'є для оцінки коефіцієнтів у розв'язку Йоста двошарової структури

Як показано у першому розділі, обернену задачу для плоскої безвтратної шаруватої структури можна також наближено розв'язати ітераційним методом, якщо в якості вихідних даних взяти імпульсну характеристику. Результати проведеного аналізу свідчать, що імпульсна характеристика безвтратної шаруватої структури є безмежним рядом дельта-функцій (2.83). Керуючись розвинутою стратегією, оцінювання параметрів цих дельта функцій також можна здійснити за заданою частотною залежністю коефіцієнта відбиття $R(\omega)$ на скінченному діапазоні частот.

Припустимо, що частотна залежність коефіцієнта відбиття $R(\omega)$ є процесом, який містить випадкову складову n та нескінченне число комплексних експонент з амплітудами $s_1, s_2, s_3 \dots$ та відповідними аргументами $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \dots$. Крім того, вимірювання здійснюємо на фіксованій множині N частот $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \dots \omega_N$, розташованих регулярно з кроком $\Delta\omega$. Тоді для опису результату вимірювань коефіцієнта відбиття від багат шарової структури зручно використати модель (7.2). Вона передбачає оцінювання на основі вихідних даних $\mathbf{u}_R = [R(\omega_1), R(\omega_2), R(\omega_3) \dots R(\omega_N)]^T$ скінченного числа Z параметрів $\hat{\mathbf{t}} = [\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, \hat{\tau}_3, \dots, \hat{\tau}_Z]^T$ та $\hat{\mathbf{s}} = [\hat{s}_1, \hat{s}_2, \hat{s}_3, \dots, \hat{s}_Z]^T$, значення амплітуд яких перевищують

випадкову складову. Скінченність Z не суперечить твердженню щодо безмежно великої кількості δ -функцій, які формують імпульсну відповідь будь-якої багат шарової структури, так як ряд (2.83) є швидкозбіжним і множники при δ -функціях високого порядку є значно менші порівняно з рівнем випадкової складової.

Отже, на основі оцінок скінченного числа Z параметрів можна знайти наближений розв'язок сформульованої оберненої задачі розсіювання. Оскільки значення Z нам невідоме, то індикаторну функцію будуємо на основі підходу до мінімізації загальної енергії з обмеженнями (6.12). В одновимірному випадку розв'язок такої задачі отримуємо методом Сапон.

На рис. 7.3 продемонстровано можливість забезпечення високої роздільної здатності спектрального оцінювання на основі методу Сапон порівняно з методом періодограм [287]. Аргументи δ -функцій імпульсної характеристики шару оцінено за максимумами спектрів Сапон та Фур'є. Починаючи від $\tau_0 = 7.59 \cdot 10^{-3}$, істинні значення аргументів δ -функції періодично розташовані з інтервалом $\Delta\tau = 2.545 \cdot 10^{-3}$, що позначено стрілками на рис. 7.3. Як видно з рис. 7.3.а, метод Сапон дозволяє визначити точне розташування перших трьох δ -функцій імпульсної характеристики. У той час як згідно зі спектром Фур'є, не вдається розділити другий та третій максимуми. Крім того, пологість періодограм Фур'є зменшує точність оцінювання величини τ . Звідси можна зробити висновок, що метод періодограм Фур'є має низьку точність та невисоку роздільну здатність. Рис. 7.3.б демонструє втрату можливості забезпечувати високу роздільну здатність і методу Сапон при великому рівні завад для даних умов експерименту. Тим не менше, його точність оцінювання залишається суттєво вищою, ніж у методів, що базуються на перетворенні Фур'є.

7.2.2. Оцінювання кутів приходу хвилі для лінійної антенної решітки сенсорів. Іншим частковим випадком застосування стратегії побудови розв'язків оберненої задачі розсіювання є просторово-часова обробка сигналів [241], зокрема,

оцінювання параметрів сигналів, що приймає лінійна антенна решітка. У шостому розділі показано, що розподіл струмів, збуджених падаючою хвилею на поверхні просторово розподілених об'єктів, може служити інформаційною ознакою для її реконструкції при розв'язанні оберненої задачі розсіювання. Беручи точкову модель розсіювача та припускаючи його скінченновимірний дискретний характер, обернену задачу можна трактувати як виявлення джерел вторинного поля. Зазначимо, що такі джерела є когерентними при опроміненні плоскою монохроматичною хвилею.

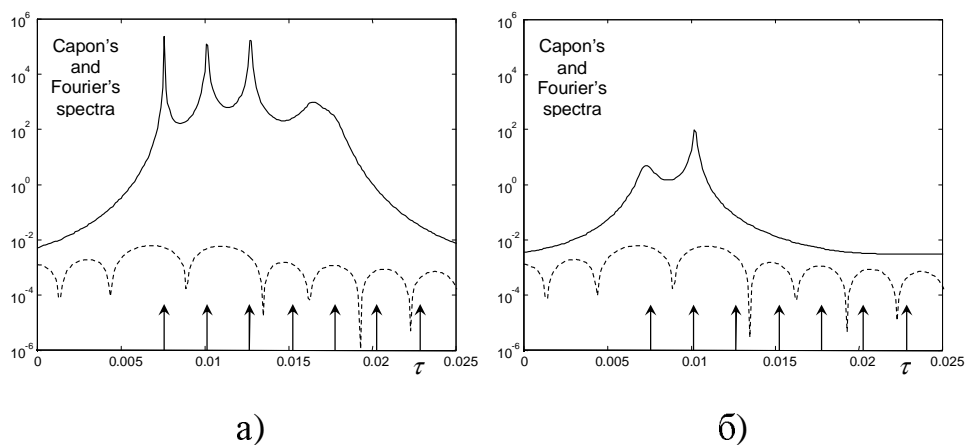


Рис. 7.3. Порівняння періодограми Фур'є (пунктирна лінія) і спектру Карон (суцільна лінія) для оцінювання аргумента дельта-функцій в коефіцієнті відбиття без випадкової складової – а) та з нею, рівною 18.3 дБ – б). Стрілками показано шукану імпульсну характеристику як суму дельта-функцій

Саме тому у цьому параграфі розглянуто задачу виявлення точкових джерел електромагнітного випромінювання у просторі, визначення їх координат та встановлення оцінки огинаючої сигналу на тлі шуму. Відомо, що для лінійної антенної системи потенційно досяжна точність визначення відстані до джерела монохроматичної хвилі критично зменшується з відстанню. Тому оцінювання координат джерела випромінювання доцільно здійснювати лише відносно невідомого значення кута падіння плоских хвиль на антенну решітку, вважаючи, що джерела розташовані безмежно далеко.

Як відомо, фазові методи дозволяють найбільш точно локалізувати поодинокі джерела електромагнітного випромінювання, тобто встановити його просторові

координати [242]. У випадку, коли в полі зору антенної системи присутні кілька джерел випромінювання, методи фазової пеленгації втрачають свою ефективність. Теорія спектрального оцінювання дозволяє вирішити цю проблему на якісно новому, теоретично обґрунтованому рівні [242].

Для опису процесу реєстрації поля моделлю спостереження (7.2) розглянемо лінійну еквідистантну антенну решітку (рис. 7.4), сигнали від кожного елемента якої обробляють окремо. Електромагнітні плоскі хвилі від джерел на безмежності розповсюджуються в однорідному просторі з хвильовим коефіцієнтом $\kappa = 2\pi/\lambda$ і падають на антенну решітку з різних напрямів $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 | \theta_2 | \theta_3 | \dots | \theta_D]^T$.

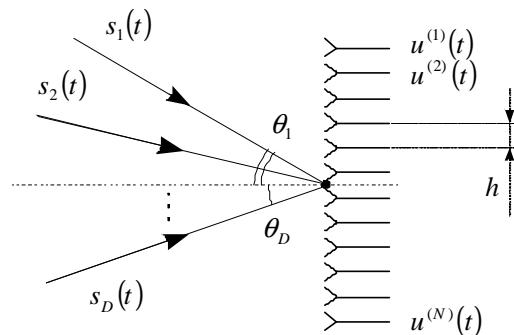


Рис. 7.4. Опромінення лінійної антенної решітки плоскими хвилями від просторово рознесених джерел електромагнітного поля

Модель збудження елементів антенної решітки сукупністю плоских хвиль, які прийшли з різних напрямів, можна записати аналогічно до виразу (7.2)

$$\mathbf{u}_L(t) = \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t). \quad (7.25)$$

У цьому випадку реалізація $\mathbf{u}_L(t) = [u^{(1)}(t) | u^{(2)}(t) | \dots | u^{(N)}(t)]^T$ випадкового процесу має зміст миттєвих значень струмів, збуджених в елементах антенної решітки у k -ий момент часу. Матриця $\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})$ експоненціальних компонент складається з векторів $\mathbf{v}(\theta_d) = [e^{-i\kappa h \sin(\theta_d)} | e^{-i2\kappa h \sin(\theta_d)} | \dots | e^{-iN\kappa h \sin(\theta_d)}]^T$, кожен з яких визначає затримки сигналів на окремих антенних елементах від окремих джерел. Тут введено припущення про рівномірність амплітудної характеристики кожного з елементів антени та відсутність взаємних зв'язків між ними.

У даній моделі реєстрації електромагнітних хвиль антенною решіткою

необхідно оцінити кути $\hat{\boldsymbol{\theta}} = [\hat{\theta}_1 | \hat{\theta}_2 | \hat{\theta}_3 | \dots | \hat{\theta}_D]^T$ приходу плоских хвиль від окремих джерел. У різних формулюваннях цієї задачі розглядають джерела як статистично незалежні, так і когерентні, наприклад $s_k^{(1)} = l \cdot s_k^{(2)}$, де l - довільний комплексний коефіцієнт. Явище когерентності може бути зумовлене як багатопроменевою моделлю розповсюдження хвиль, так і взаємодією розсіювачів. За наявності когерентних хвиль, що приходять на антенну решітку з різних напрямів, коваріаційна матриця $\hat{\mathbf{B}}$ обчислена згідно з виразом (7.7), стає сингулярною. Це призводить до втрати просторового розділення когерентних джерел. Для усунення цього ефекту, можна застосувати принцип синтезу множини спостережень $\tilde{\mathbf{u}}_{L,j}(t)$ за вихідними даними $\mathbf{u}_L(t)$, за аналогією до двовимірного випадку (6.9). Оцінка коваріаційної матриці за синтезованими спостереженнями має вигляд

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{B}} &= \frac{1}{K(N-M+1)} \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{N-M} \tilde{\mathbf{u}}_{L,j}(k\Delta t) \cdot \tilde{\mathbf{u}}_{L,j}^H(k\Delta t) = \\ &= \frac{1}{K(N-M+1)} \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{N-M} [u^{(j)}(k\Delta t) | \dots | u^{(j+M)}(k\Delta t)]^T \cdot [u^{(j)}(k\Delta t) | \dots | u^{(j+M)}(k\Delta t)]^*, \end{aligned} \quad (7.26)$$

де M - ранг результуючої коваріаційної матриці, що визначає максимальну кількість джерел, які можна локалізувати окремо. Тут в якості синтезованих спостережень $\tilde{\mathbf{u}}_{L,j}(k\Delta t) = [u^{(j)}(k\Delta t) | \dots | u^{(j+M)}(k\Delta t)]$ використано підвектори функції $\mathbf{u}_L(t)$. Крім того, властивості ермітових матриць дозволяють покращити оцінювання коваріаційної матриці за рахунок прийому [296]

$$\hat{\mathbf{B}}_{FB} = \frac{1}{2K(N-M+1)} \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{N-M} \tilde{\mathbf{u}}_{L,j}(k\Delta t) \tilde{\mathbf{u}}_{L,j}^H(k\Delta t) + \mathbf{J} \left(\sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{N-M} \tilde{\mathbf{u}}_{L,j}(k\Delta t) \tilde{\mathbf{u}}_{L,j}^H(k\Delta t) \right)^H \mathbf{J}, \quad (7.27)$$

де \mathbf{J} - контр-діагональна одинична матриця.

Як приклад, на рис. 7.5 наведено результат спектрального оцінювання методом MUSIC кутової координати чотирьох когерентних джерел. Метод MUSIC вибрано, оскільки апріорно відомою є кількість джерел. Як видно з рисунка, метод зберігає здатність розрізняти близько розташовані когерентні джерела навіть за умови високого рівня завади.

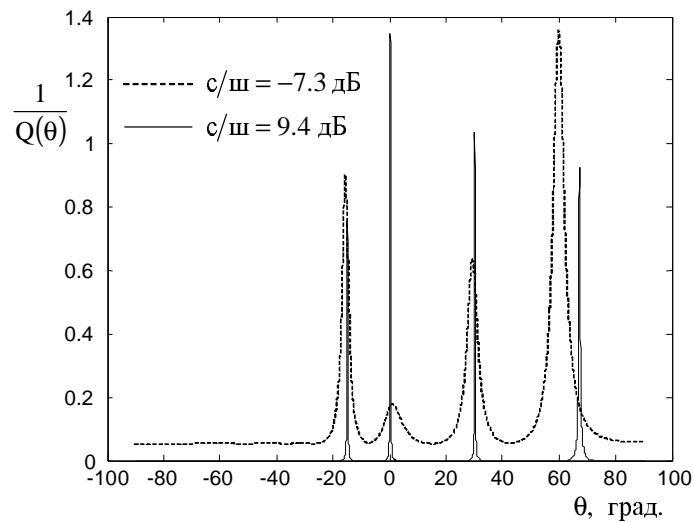


Рис. 7.5. Спектральне оцінювання методом MUSIC напрямку приходу плоских хвиль від чотирьох когерентних джерел при $s^{(d)} = 2$, $\theta = [0^\circ | -15^\circ | 30^\circ | 67^\circ]^T$, $h = 0.3\lambda$, $\lambda = 1\lambda$, $K = 10$, $N = 30$, $M = 19$

7.2.3. Оцінювання кутів приходу хвилі для кругової антенної решітки сенсорів. Іншою важливою прикладною проблемою є встановлення кутів приходу хвиль на кругову антенну решітку (рис. 7.6). У цьому випадку реєстрацію поля від джерел електромагнітного поля на нескінченності можна також розглядати як модель (7.2), але матриця $\mathbf{V}(\mathbf{w}) = [\mathbf{v}(\alpha_1) | \mathbf{v}(\alpha_2) | \mathbf{v}(\alpha_3) | \dots | \mathbf{v}(\alpha_D)]$ тоді не буде мати структури матриці Вандермонда. Для побудови методу оцінювання вектора невідомих $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_D]^T$ за вимірними даними \mathbf{u}_C необхідно привести ці дані до множини незалежних спостережень $\tilde{\mathbf{u}}_{C,j}$ згідно зі стратегією, запропонованою у шостому розділі. Оскільки матриця $\mathbf{V}(\mathbf{w})$ має іншу структуру, ніж у попередніх випадках, це вимагає нового підходу до формування множини векторів $\tilde{\mathbf{u}}_{C,j}$.

Миттєві значення поля, що фіксує система антен (рис. 7.6) від джерела плоских хвиль, які приходять з напрямку α , можна подати виразом

$$\mathbf{v}(\alpha) = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(ikr \cos(\beta_1 - \alpha)) \\ \vdots \\ \exp(ikr \cos(\beta_N - \alpha)) \end{bmatrix}, \quad (7.28)$$

де $k = 2\pi/\lambda$ - хвильовий коефіцієнт, r - радіус кругової антенної решітки, $\beta_n = 2\pi n/N$ - кутова координата n -ї антени у решітці з N антен.

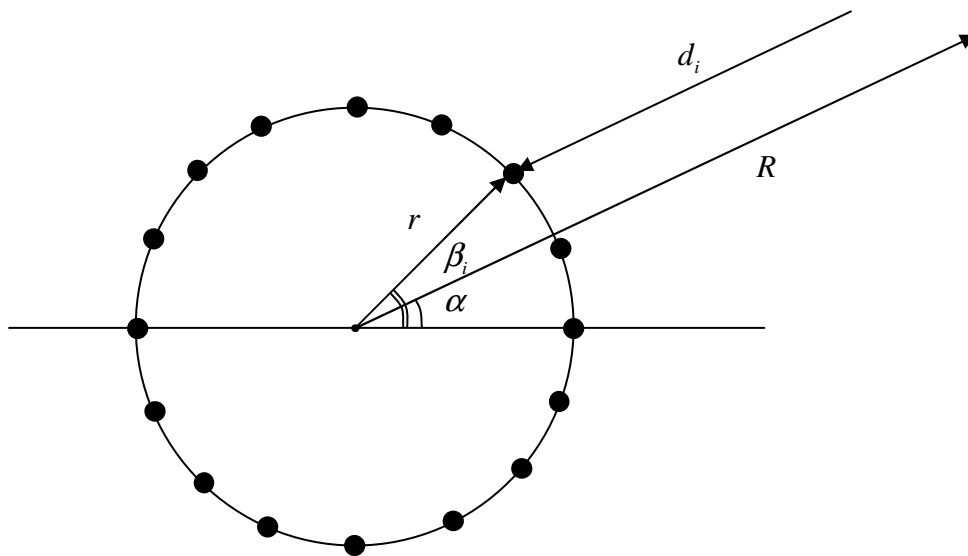


Рис. 7.6. Реєстрація поля плоскої хвилі круговою антенною решіткою

Розв'язок поставленої задачі можна знайти, привівши вираз (7.28) до вигляду

$$\begin{bmatrix} \exp(ikr \cos(\beta_1 - \alpha)) \\ \vdots \\ \exp(ikr \cos(\beta_N - \alpha)) \end{bmatrix} = \mathbf{G} \begin{bmatrix} \exp(i\alpha 0) \\ \vdots \\ \exp(i\alpha(N-1)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1M} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{N1} & \cdots & g_{NM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(i\alpha 0) \\ \vdots \\ \exp(i\alpha(N-1)) \end{bmatrix}, \quad (7.29)$$

де коефіцієнти g_{nm} матриці \mathbf{G} є незалежними від шуканого параметра α .

Параметризований запис (7.29) вектора $\mathbf{v}(\alpha)$ можна отримати за допомогою ряду, яким подано функцію Бесселя

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \exp(i(n\tau - x \sin(\tau))) d\tau. \quad (7.30)$$

Як видно, підінтегральна функція є комплексною експонентою з аргументом у вигляді тригонометричної функції. Подібну структуру мають елементи вектора $\mathbf{v}(\alpha)$. Застосувавши перетворення Фур'є до виразу (7.30), попередньо помноживши його на комплексно спряжену експоненційну функцію, та наблизивши неперервне перетворення рядом, отримуємо:

$$\exp(i\zeta \cos(\beta_n - \alpha)) \approx \sum_{m=0}^{M-1} i^{|m|} J_{|m|}(\zeta) \exp(-i\beta_n m) \exp(im\alpha), \quad (7.31)$$

де $\zeta = kr$ - фазовий коефіцієнт.

Оскільки кожний елемент вектора $\mathbf{v}(\alpha)$ можна наближено виразити лінійною комбінацією елементів $[\exp(i\alpha 0), \exp(i\alpha 1), \dots, \exp(i\alpha(N-1))]^T$, то має місце лінійне перетворення [297]:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \exp(i\zeta \cos(\beta_1 - \alpha)) \\ \vdots \\ \exp(i\zeta \cos(\beta_N - \alpha)) \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} i^{|0|} J_{|0|}(\zeta) \exp(-i\beta_1 0) & \dots & i^{|M-1|} J_{|M-1|}(\zeta) \exp(-i\beta_1(M-1)) \\ \vdots & & \vdots \\ i^{|0|} J_{|0|}(\zeta) \exp(-i\beta_N 0) & \dots & i^{|M-1|} J_{|M-1|}(\zeta) \exp(-i\beta_N(M-1)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(i0\alpha) \\ \vdots \\ \exp(i(M-1)\alpha) \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} \exp(-i\beta_1 0) & \dots & \exp(-i\beta_1(M-1)) \\ \vdots & & \vdots \\ \exp(-i\beta_N 0) & \dots & \exp(-i\beta_N(M-1)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i^{|0|} J_{|0|}(\zeta) & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & i^{|M-1|} J_{|M-1|}(\zeta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(i0\alpha) \\ \vdots \\ \exp(i(M-1)\alpha) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7.32)$$

Відповідно шукану матрицю \mathbf{G} можна виразити як:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \exp(-i\beta_1 0) & \dots & \exp(-i\beta_1(M-1)) \\ \vdots & & \vdots \\ \exp(-i\beta_N 0) & \dots & \exp(-i\beta_N(M-1)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i^{|0|} J_{|0|}(\zeta) & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & i^{|M-1|} J_{|M-1|}(\zeta) \end{bmatrix}. \quad (7.33)$$

Елементи матриці \mathbf{G} залежать лише від параметрів системи та ступеня наближення неперервного перетворення Фур'є дискретним. Оскільки обернена матриця до \mathbf{G} існує, то відповідне перетворення дозволяє привести вихідні дані \mathbf{u}_C до моделі (7.2), в якій матриця $\mathbf{V}(\alpha)$ має структуру матриці Вандермонда $\mathbf{u}' = \mathbf{G}\mathbf{u}_C$. Звідси множину незалежних спостережень $\tilde{\mathbf{u}}_{C,j}$ можна сформулювати, вибираючи підвектори зі знайденого вектора \mathbf{u}' . Оскільки всі вектори $\tilde{\mathbf{u}}_{C,j}$ належать до одного і того ж класу, такі синтезовані вихідні дані дозволяють скористуватися загальним підходом до оцінювання шуканих параметрів $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_D$, розвинутим у шостому

розділі. В одновимірному випадку такий підхід рівноцінний методу Capon, де коваріаційну матрицю для фіксованого моменту часу визначено як

$$\hat{\mathbf{B}} = \frac{1}{(N - M + 1)} \sum_{j=1}^{N-M} \tilde{\mathbf{u}}_{c,j} \tilde{\mathbf{u}}_{c,j}^H. \quad (7.34)$$

7.3. Оцінювання порядку моделі розсіювання

У прикладних задачах, що розглядаються, порядок D моделі у виразі (7.2) відповідає кількості джерел електромагнітного випромінювання, напрямки приходу хвиль від яких оцінюються. При неруйнівному контролі багат шарової структури електромагнітними методами порядок моделі та кількість шарів - однозначно пов'язані величини.

Відомо, що за наявності апріорних даних про кількість джерел випромінювання, можна досягнути більшої точності оцінювання. В одновимірному випадку оцінювання реалізують одним із методів, який використовує порядок моделі як відомий параметр. До цих методів відносять методи MUSIC [291], MODE [241], ESPRIT [292] та пучка матриці [277]. Тому важливо оцінити порядок D моделі [241, 293-295].

Якщо процес описано скінченновимірною моделлю, з невідомим порядком, то для розв'язання задачі спектрального оцінювання [287] прийнято на першому етапі здійснювати оцінку її порядку, а далі встановлювати решту невідомих коефіцієнтів.

Серед відомих підходів до розв'язання задачі вибору порядку моделі в теорії спектрального оцінювання найчастіше використовують інформаційно-теоретичний критерій Akaike [294] та метод мінімуму описової довжини [295]. За наявності гаусівського шуму в суміші з гармонічними складовими, що мають випадково-розподілені амплітуди, оцінювання їх кількості можна трактувати як одночасне виявлення сигналів, кількість яких є заданою величиною. Для розв'язання такої задачі можна використати статистичний підхід, який базується на відношенні правдоподібностей [241,263]. У роботі розвинуто ідею поєднання теорії виявлення

сигналів із постійним рівнем хибної тривоги [293] і встановлення просторово рознесених розсіювачів з ідентифікацією параметрів багатошарової структури методами спектрального оцінювання.

Статистичний підхід до реєстрації параметрів електромагнітного поля (модель (7.2)) дозволяє записати кореляційну матрицю величин, що спостерігаються, як суму кореляційних матриць промодульованих корисних параметрів $\mathbf{V}(\mathbf{w})\mathbf{s}$ та шуму \mathbf{n} . Використовуючи ортогональний базис власних векторів, модель коваріаційної матриці (7.8) перепишемо у вигляді

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^D (\lambda_{s_i} + \lambda_{n_i}) \mathbf{e}_{s_i} \mathbf{e}_{s_i}^H + \sum_{i=D+1}^N \lambda_{n_i} \mathbf{e}_{n_i} \mathbf{e}_{n_i}^H = \sum_{i=1}^D \tilde{\lambda}_{s_i} \mathbf{e}_{s_i} \mathbf{e}_{s_i}^H + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (7.35)$$

де λ_{s_i} та λ_{n_i} - власні значення матриці \mathbf{B} ; \mathbf{e}_{s_i} , $i = \overline{1, D}$ та \mathbf{e}_{n_i} , $i = \overline{(N-D), N}$ - власні вектори коваріаційної матриці \mathbf{B} , які є i -ими стовпцями матриць \mathbf{U}_s та \mathbf{U}_n , відповідно. Аналогічний розклад у базисі власних векторів можна здійснити для оцінки $\hat{\mathbf{B}}$ коваріаційної матриці, яку отримано згідно з виразом (7.7)

$$\hat{\mathbf{B}} = \sum_{i=1}^D \hat{\lambda}_{s_i} \hat{\mathbf{e}}_{s_i} \hat{\mathbf{e}}_{s_i}^H + \sum_{i=D+1}^N \hat{\lambda}_{n_i} \hat{\mathbf{e}}_{n_i} \hat{\mathbf{e}}_{n_i}^H, \quad (7.36)$$

де $\hat{\mathbf{e}}_{s_i}$, $\hat{\mathbf{e}}_{n_i}$ та $\hat{\lambda}_{s_i}$, $\hat{\lambda}_{n_i}$ - оцінки власних векторів та власних значень матриці $\hat{\mathbf{B}}$.

Оскільки формулу (7.7) отримано згідно з принципом максимуму правдоподібності, то нев'язка між точним і оціненим значеннями власних векторів $\hat{\mathbf{e}}_{s_i}$ і \mathbf{e}_{s_i} та власних значень $\hat{\lambda}_{s_i}$ і $\tilde{\lambda}_{s_i}$ для $i = \overline{1, D}$, які відповідають детермінованій складовій процесу, повинна бути мінімальною і прямувати до нуля.

Відмінність між моделями (7.35) та (7.36) використано для запису логарифма відношення правдоподібності двох подій: E_0 - вхідні дані відповідають моделі (7.35), яка описує суміш D гармонік із гаусівською випадковою складовою з дисперсією σ^2 , та E_1 - вхідні дані не відповідають гармонікам із гаусівською випадковою складовою. Введені припущення для цих двох подій дають змогу подати детермінанти коваріаційних матриць у вигляді:

$$\det(\mathbf{B}_0) = \left(\prod_{i=1}^d \hat{\lambda}_i \right) \left(\frac{1}{N-d} \sum_{i=d+1}^N \hat{\lambda}_i \right)^{N-d}; \quad (7.38)$$

$$\det(\mathbf{B}_1) = \left(\prod_{i=1}^d \hat{\lambda}_i \right) \left(\prod_{i=d+1}^N \hat{\lambda}_i \right). \quad (7.39)$$

Тоді логарифм відношення правдоподібності можна записати часткою арифметичного середнього $(N-d)$ найменших власних значень коваріаційної матриці $\hat{\mathbf{B}}$ до їх геометричного середнього:

$$r(d) = \ln \left(\frac{P(E_1)}{P(E_0)} \right) = \frac{1}{2} K (N-d) \ln \left(\frac{\sum_{i=d+1}^N \hat{\lambda}_i}{(N-d) \left(\prod_{i=d+1}^N \hat{\lambda}_i \right)^{\frac{1}{N-d}}} \right). \quad (7.40)$$

Отриманий вираз для логарифма відношення правдоподібності є достатньою статистикою для порядку моделі d .

Визначення порядку моделі в задачах спектрального оцінювання можна здійснити шляхом порівняння значення $r(d)$ з фіксованим порогом. Такий підхід має суттєвий недолік через неоднозначність вибору порогу. Для усунення цього недоліку використаємо додатковий критерій [293], який задає стале значення ймовірності P_{FA} хибних тривог та дає можливість розглядати оцінювання порядку моделі у вигляді однопараметричної екстремальної задачі

$$\hat{D} = \arg \min_d (2r(d) + F(d, N, K)), \quad (7.41)$$

де функціонал обмежень $F(d, N, K) = \gamma (d(N^\alpha - d + \beta + \delta + 2) + \sigma + 1)$ залежить від

параметрів $\alpha = 1 - 0.0001 \cdot 4 / (3 + 2K/N)$, $\beta = (0.06 \cdot N - 0.4) \cdot \ln(2K/N)$,

$\sigma = \sum_{i=1}^d (i^2 / (N^2 - 2) - 0.5)$, $\delta = -0.145N + 4$ та $\gamma = 1 - \frac{4\sqrt{10}}{25\sqrt{N}} (\log_{10}(P_{FA}) + 2)$.

Для перевірки ефективності розвинутого підходу до оцінювання порядку моделі проведено статистичне моделювання методом Монте-Карло. Змодельовано випадок опромінення лінійної антенної решітки (її параметри аналогічні до наведених на рис. 7.5) плоскими хвилями від п'яти $D=5$ когерентних джерел випромінювання, що знаходяться під різними кутами $\theta = [-15^\circ | 0^\circ | 30^\circ | 45^\circ | 67^\circ]^T$

відносно осі антени. Дисперсія випадкової складової є однаковою для кожного приймача антенної системи. На основі однопараметричної задачі мінімізації (7.41) отримано оцінку \hat{D} кількості джерел випромінювання. При цьому моделювання повторювали 50 разів для обчислення імовірності правильного виявлення $P_{ne.} = \#(D = \hat{D})/50$. На рис. 7.7.а для різних співвідношень «сигнал/шум» наведено характеристики виявлення як функції імовірності правильного виявлення від кількості K реалізацій, на основі яких формується оцінка (7.7) коваріаційної матриці.

Розвинутий підхід застосовано також до ідентифікації кількості шарів багат шарової структури на основі частотної залежності коефіцієнта пропускання $T(\omega)$. Для цього здійснено числове моделювання дифракції електромагнітних хвиль на структурах із різною кількістю шарів. Коефіцієнт пропускання у кожному з експериментів обчислено для $N=100$ значень частот. Результат визначення кількості \hat{P} шарів методом мінімізації (7.41) порівняли з дійсною кількістю P шарів. На цій основі статистичним усередненням обчислили імовірність правильної ідентифікації багат шарової структури. Оцінку коваріаційної матриці результатів вимірювань сформулювали згідно з виразами (2.55) та (7.19) при $K = 25$ і $M = 40$. З рис. 7.7.б, де наведено результуючі залежності імовірності правильної ідентифікації від відношення «сигнал/шум», видно, що для правильної ідентифікації структур із великою кількістю шарів необхідно забезпечити високий рівень «сигнал/шум» у процесі вимірювання коефіцієнта пропускання.

7.4. Аналітичний розв'язок задачі оцінювання параметрів для двопрменевої моделі розповсюдження хвилі

З попереднього слідує, що оцінювання параметрів одновимірної моделі (7.2) потребує істотного перевизначення, якщо кількість відомих параметрів є значно більшою, ніж кількість невідомих. Крім того, побудова аналітичного виразу у замкнутій формі для знаходження оцінки шуканих параметрів складає значну

трудність. Навіть якщо існують аналітичні методи, що дають шукані параметри прямим перерахунком вихідних даних, вони досягають прийнятної точності лише за умови істотної перевизначеності. До цих методів можна віднести так звані root-MUSIC [241], ESPRIT [292], метод пучка матриці [277] та root-WSF [241]. Питання побудови аналітичного методу оцінювання для мінімальної кількості вхідних даних у загальному випадку залишається відкритим.

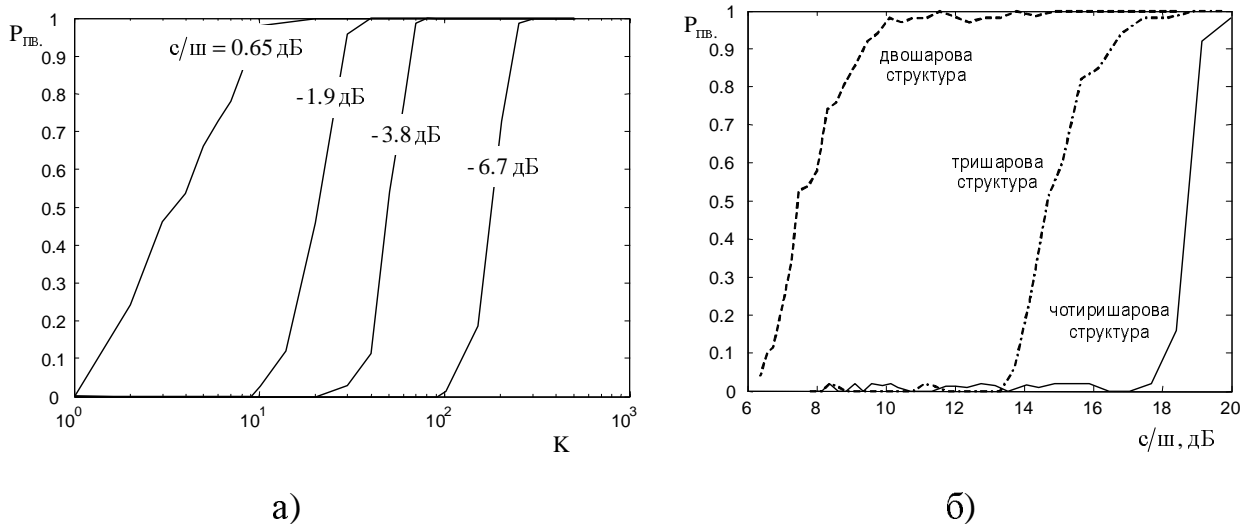


Рис. 7.7. Імовірнісні характеристики: для оцінювання кількості просторово рознесених когерентних джерел – а); для встановлення кількості шарів у структурі – б)

У цьому параграфі основну увагу приділено випадку, коли в точку прийому з різних напрямів приходять дві когерентні плоскі хвилі з невідомими амплітудами, які необхідно встановити відповідною обробкою у приймачі. Це можна розглядати як прототип реальної ситуації, коли один із сигналів є когерентною завадою, відмінною (внаслідок розповсюдження) від корисного сигналу лише зміненою на фіксовану величину фазою та амплітудою.

Багатьом радіотехнічним системам характерна наявність когерентних завад. Вони приводять до часткової, або повної втрати інформації, що надходить від джерела. Причиною є те, що інтерференція в точці прийому протилежних за фазою та амплітудою хвиль призводить до відсутності сигналу на виході приймача. Статистика таких явищ описана в [48]. Актуальним є створення принципів прийому та обробки просторово-часових сигналів, стійких до когерентних завад.

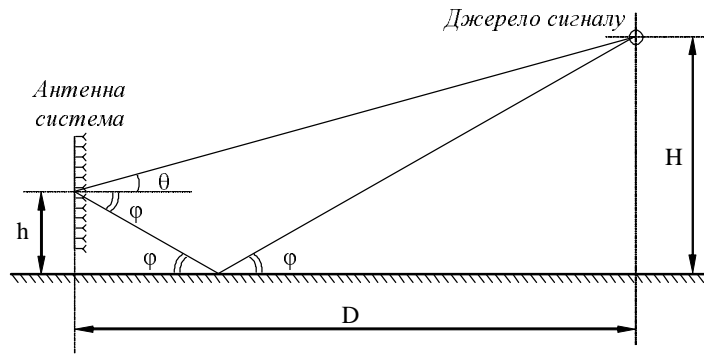


Рис. 7.8. Прийом сигналу від джерела випромінювання при двопробеневій моделі розповсюдження

Оскільки найкритичнішим є випадок двопробенового розповсюдження хвиль від джерела випромінювання, розташованого низько над плоскою розсіювальною поверхнею (рис. 7.8), його вибрано для детального аналізу. Відомо, що двопробенева модель розповсюдження радіохвиль характерна для систем зв'язку з рухомими об'єктами, систем формування каналів супутникового зв'язку, а також у радіорелейних лініях передачі. Вона також є однією з причин спекл-структури на радіолокаційних зображеннях [49].

Основним принципом зменшення впливу інтерференційної завади на прийом сигналу є просторове рознесення, яке у досліджуваному випадку реалізовано застосуванням багатоелементної (чотириелементної) лінійної антенної решітки. Його можна реалізувати згідно з принципами, описаними у пункті 7.2.2.

У загальному випадку для m -елементної лінійної антенної решітки (рис. 7.9) двопробеневу модель прийнятого сигналу $U(t) \in \mathbb{C}^{m \times 1}$ на виході кожного з елементів можна подати виразом:

$$U(t) = [\mathbf{a}(\theta_1) \ \mathbf{a}(\theta_2)] [1 \ G]^T s(t) + \varepsilon(t), \quad (7.42)$$

де $s(t)$ – корисний сигнал (комплексно значна функція) з невідомими параметрами огинаючої; $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_{1,2}) = [\mathbf{a}(\theta_1) \ \mathbf{a}(\theta_2)] \in \mathbb{C}^{m \times 2}$ – матриця комплексних коефіцієнтів спрямованості антенних елементів для напрямку приходу корисного сигналу θ_1 та напрямку приходу когерентної завади θ_2 ; $G = \Gamma \cdot \exp(-i2\pi\Delta R/\lambda)$ – невідомий

комплексний коефіцієнт, що визначає відмінність між сигналом та когерентною завадою (Γ – коефіцієнт зміни амплітуди, λ – довжина хвилі, ΔR – різниця між довжинами шляхів розповсюдження). Надалі цей коефіцієнт визначаємо вектором $\mathbf{b} \cong [1 \ \Gamma]^T \in \mathbb{C}^{2 \times 1}$, $\|\mathbf{b}\|=1$. Тут використано відмінні позначення для операції ермітового спряження $[\cdot]^H$ та операції транспонування $[\cdot]^T$ (без спряження). Отже, задачею є встановлення комплексної огинаючої невідомого сигналу $s(t)$ та напряму його приходу θ_1 за результатами вимірювань $U(t)$.

Елементи матриці $\mathbf{A}(\theta_{1,2})$ визначимо виразом $a_k(\theta_{1,2}) = e^{-i2\pi \sin(\theta_{1,2})d_k/\lambda}$, де d_k – відстань від фазового центру решітки до k -го елемента. Прийmemo, що на кожному елементі антенної решітки присутня незалежна комплексно-значна гаусівська випадкова складова $\varepsilon(t) \in \mathbb{C}^{m \times 1}$, $\varepsilon_k \cong N(0, \sigma_n^2)$.

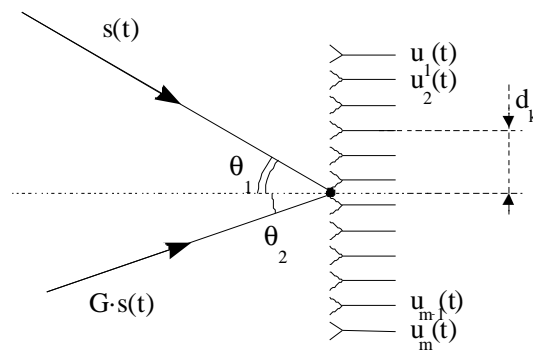


Рис. 7.9. Опроміювання лінійної m -елементної антенної решітки двома хвилями, що надходять з різних напрямів

Подібність та відмінність між сигналами, що надходять з різних напрямів, можна охарактеризувати взаємокореляційними властивостями сигналів, зафіксованих приймачем на кожному з елементів антенної решітки. Їх взаємні властивості охарактеризують коваріаційною матрицею, оцінка якої має вигляд

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N U(j\Delta t) \cdot U^H(j\Delta t), \quad (7.43)$$

де N – кількість відліків сигналу, зафіксованих у різні моменти часу; Δt – інтервал дискретизації прийнятих сигналів.

Статистично обґрунтованим підходом до знаходження оцінки параметрів за відсутності апіорних даних про них є втілення принципу максимуму правдоподібності [263,298]. Розв'язок статистичної задачі (7.6) для оцінки кутів напрямку приходу сигналу та когерентної завади у цьому разі можна звести до задачі двопараметричної мінімізації [299]:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \left(\text{Tr}(\hat{\mathbf{R}}) - \lambda_{\max} \left[\left(\mathbf{A}^H(\boldsymbol{\theta}_{1,2}) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_{1,2}) \right)^{-1/2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \mathbf{A}^H(\boldsymbol{\theta}_{1,2}) \hat{\mathbf{R}} \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_{1,2}) \left(\mathbf{A}^H(\boldsymbol{\theta}_{1,2}) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_{1,2}) \right)^{-1/2} \right] \right) \quad (7.44)$$

де $\lambda_{\max}[\mathbf{R}]$ – максимальне власне значення матриці \mathbf{R} ; $\hat{\boldsymbol{\theta}} = [\hat{\theta}_1 \ \hat{\theta}_2]^T$ – двоелементний вектор кутів приходу сигналу і завади; $\text{Tr}(\mathbf{R})$ – слід матриці \mathbf{R} .

На рис. 7.10 зображено функціонал, максимум якого відповідає розв'язку задачі максимуму правдоподібності (7.44). При формуванні функціоналу враховано, що плоскі хвилі, які опромінюють антенну решітку, є результатом двопробеневого розповсюдження (рис. 7.8) від джерела випромінювання, розташованого на відстані $D = 2 \cdot 10^5$ м та висоті $H = 10^4$ м над плоскою поверхнею ґрунту. При моделюванні використано такі параметри дванадцятиелементної антенної решітки: відстань між антенними елементами $d/\lambda = 0.7$; висота розташування антени над поверхнею $h = 6$ м.

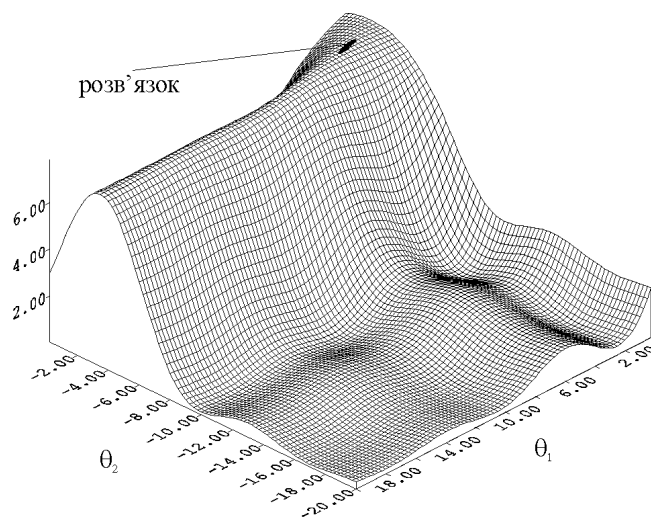


Рис. 7.10. Функціонал правдоподібності, екстремум якого дозволяє оцінити кути падіння двох плоских хвиль на лінійну антенну решітку

Як видно з рис. 7.10, функціонал має багатоекстремальну форму. Це вказує на те, що початкове наближення в задачі знаходження екстремуму повинно бути задане в околі глобального максимуму. У свою чергу розв'язок рівняння максимуму функції правдоподібності відносно параметрів $\hat{\theta}_1$ та $\hat{\theta}_2$ дозволяє сформулювати алгоритм пошуку оцінки комплексної огинаючої сигналу [299]. Він полягає у перемноженні вектора прийнятих сигналів на вектор попередньо визначених вагових коефіцієнтів

$$\hat{s}(t) = \left\| \mathbf{A}(\hat{\theta}_{1,2}) \hat{\mathbf{b}} \right\|^{-2} \hat{\mathbf{b}}^H \mathbf{A}^H(\hat{\theta}_{1,2}) U(t). \quad (7.45)$$

Застосування описаного алгоритму дозволяє здійснити оптимальний (в сенсі максимуму правдоподібності) прийом сигналу від джерела з урахування наявності когерентної завади.

Як видно з виразів (7.43)-(7.45), реалізація такого теоретично обґрунтованого підходу до обробки просторових сигналів пов'язана з великим обсягом обчислень, що у багатьох випадках приводить до його неприйнятності. Відомі спрощені підходи до оцінювання кутів приходу хвилі, що базуються на методах представлення у підпросторах [241] (Capon, MODE, WSF, Smoothing MUSIC і т.д.), також потребують суттєвих обчислювальних затрат. Вони мають малу ефективність у випадках, коли оцінювання повинно здійснюватися в масштабі реального часу. Використання таких підходів до здійснення просторової фільтрації вимагає пошуку компромісу між високою точністю оцінки параметрів та швидкістю обробки.

Результати аналізу показують, що максимум функціоналу правдоподібності для схеми звичайного інтерферометра співпадає з безпосереднім розв'язком системи рівнянь, записаної через детерміновані функції миттєвих значень сигналу на виходах елементів інтерферометра відносно напрямку приходу хвилі. У цьому випадку вважаємо, що оцінка формується за результатом вимірювань тільки в один момент часу.

За аналогією до задачі для інтерферометра, наближений розв'язок задачі про максимум функції правдоподібності здійснено для чотириелементної антенної

решітки у передбаченні наявності когерентної завади. У цьому випадку необхідно розв'язати систему рівнянь відносно чотирьох параметрів (рис. 7.11.а): напрямів приходу сигналу θ та завади ϕ , а також комплексної огинаючої $s(t)$ сигналу та комплексного коефіцієнта G .

Одним із способів запису системи рівнянь для такої антенної системи є зображення її через чотири миттєві значення прийнятих антенними елементами сигналів - $u_1(t), u_2(t), u_2(t)$ та $u_4(t)$:

$$\begin{cases} u_1(t) = s(t)(\exp(i 3k_1) + G \exp(i 3k_2)), \\ u_2(t) = s(t)(\exp(i k_1) + G \exp(i k_2)), \\ u_3(t) = s(t)(\exp(-i k_1) + G \exp(-i k_2)), \\ u_4(t) = s(t)(\exp(-i 3k_1) + G \exp(-i 3k_2)), \end{cases} \quad (7.46)$$

де $k_1 = \pi d \sin(\theta)/\lambda$; $k_2 = \pi d \sin(\phi)/\lambda$; d – відстань між сусідніми елементами антени, або між фазовими центрами підрешіток, що складають чотириелементний просторовий фільтр.

Розв'язок цієї системи рівнянь відносно кутів приходу сигналу та когерентної завади запишемо за допомогою аргументів комплексних коефіцієнтів, які обчислимо згідно з формулою

$$B_{1,2} = \left(\left((u_2 u_4 - u_3^2)^{-1} (-u_2 u_3 + u_1 u_4 \pm \sqrt{-3u_2^2 u_3^2 - 6u_2 u_3 u_1 u_4 + u_1^2 u_4^2 + 4u_2^3 u_4 + 4u_3^3 u_1}) / 2 \right)^{1/2} \right). \quad (7.47)$$

Шукані кути приходу хвиль можна виразити формулою:

$$\gamma_{1,2} = -\arcsin \left(\frac{\lambda}{\pi d} \operatorname{arctg} \left[\operatorname{Im}(B_{1,2}) / \operatorname{Re}(B_{1,2}) \right] \right). \quad (7.48)$$

Для вибраної моделі прийому (рис. 7.11.а) оцінки цих кутів мають вид:

$$\begin{cases} \hat{\theta} = -\min(|\gamma_1|, |\gamma_2|), \\ \hat{\phi} = -\max(|\gamma_1|, |\gamma_2|). \end{cases} \quad (7.49)$$

Для спрощення обчислень комплексного коефіцієнта G та миттєвого значення самого сигналу s , введемо додаткові змінні:

$$L = \exp(i\pi d \sin(\hat{\theta})/\lambda); \quad (7.50)$$

$$M = \exp(i\pi d \sin(\hat{\phi})/\lambda). \quad (7.51)$$

Тоді оцінки шуканих параметрів можна виразити формулами:

$$\hat{G} = \frac{L(M^2 u_2 (u_2 u_4 - u_3^2) + u_3 (u_2^2 - u_1 u_3))}{M(u_2 u_4 - u_3^2)(M^2 u_2 - u_1)}; \quad (7.52)$$

$$\hat{s} = \frac{L^2 u_2 (u_2 u_4 - u_3^2) + u_3 (u_2^2 - u_1 u_3)}{L(2L^2 (u_2 u_4 - u_3^2) + (u_2 u_3 - u_1 u_4))}. \quad (7.53)$$

Межі однозначності $(-\theta_{\max} < \theta < \theta_{\max})$ оцінювання всіх чотирьох параметрів запропонованим методом можна визначити так само, як і межі однозначності оцінювання кута приходу хвилі для інтерферометра, а саме за формулою

$$d \sin(|\theta_{\max}|) < \lambda/2. \quad (7.54)$$

Формули (7.47)-(7.53) покладено в основу запропонованої схеми процесора для оцінювання напрямів приходу сигналу та його комплексної огинаючої за миттєвими значеннями сигналів, прийнятих чотирма антенними елементами. Обробку доцільно реалізовувати на проміжній частоті (рис.7.11). Це дозволяє отримати оцінку параметрів невідомих сигналів у реальному масштабі часу. Визначення параметрів $\hat{\theta}$ та $\hat{\phi}$ можна реалізовувати на основі відфільтрованих величин: $\overline{u_3 u_3}$, $\overline{u_3 u_1}$, $\overline{u_2 u_3}$, $\overline{u_1 u_4}$, $\overline{u_4 u_2}$ та $\overline{u_2 u_2}$, які входять у вираз (7.47) як окремі доданки.

7.5. Теоретична та експериментальна перевірка методу оцінювання параметрів джерела над розсіювальною поверхнею

Запропонований підхід до просторової обробки використано при проектуванні приймальної системи, яка дозволяє вимірювати кутову координату θ випромінювача, розташованого над плоскою поверхнею, та оцінювати параметри його комплексної огинаючої. Ефективність такого принципу побудови антенної

системи підтверджено числовими експериментами, в яких процеси двопробеневого розповсюдження хвиль та просторової обробки сигналів змодельовано на комп'ютері методом Монте-Карло.

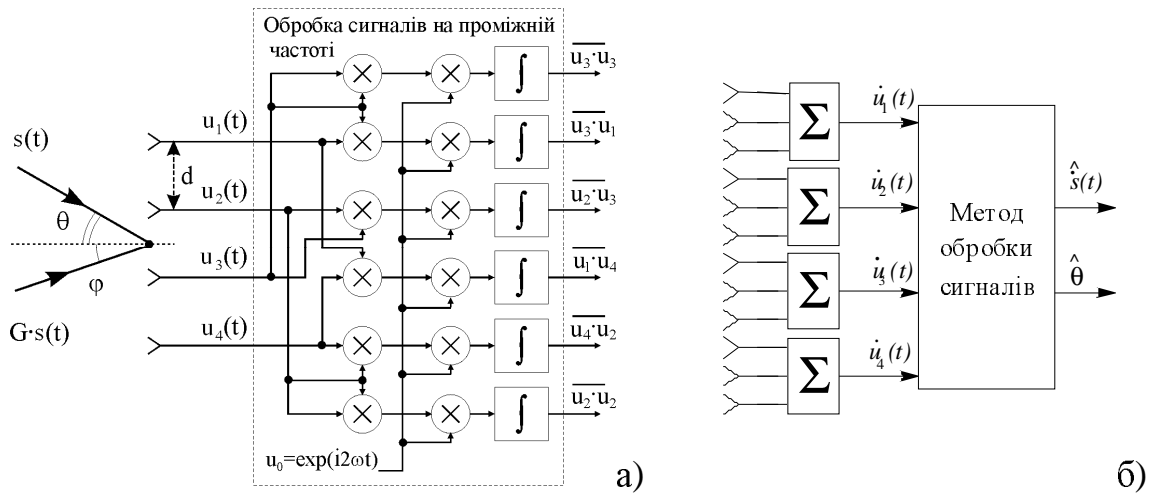


Рис. 7.11. Оцінювання кутів приходу сигналу та когерентної завади чотириелементною антенною решіткою – а) та модифікація запропонованого методу у випадку системи з дванадцятиелементною антенною решіткою – б)

Для забезпечення кращого відношення «сигнал-шум», дванадцятиелементну лінійну антенну решітку об'єднано у підрешітки (по три елементи в одній кожній). Відстань між фазовими центрами підрешіток $d = 2.1\lambda$ гарантує однозначність вимірювання координат у діапазоні $\theta < 10^\circ$.

Точнісні характеристики такої системи оцінимо за критерієм середньоквадратичної похибки вимірювання кутів θ та ϕ , а ефективність усунення завмирань визначимо як точність оцінювання фази монохроматичного сигналу, випроміненого джерелом. Як видно з рис. 7.12, запропонована система гарантує стійкий прийом сигналів у діапазоні кутів $2^\circ \dots 12^\circ$ для заданих умов розповсюдження (рис. 7.8).

Окрім числового моделювання, ефективність запропонованого методу оцінювання параметрів джерела випромінювання перевіряли відтворенням реальних умов двопробеневого розповсюдження хвилі у лабораторії, вимірюванням значень електромагнітного поля та здійсненням відповідної обробки. Замість

чотириелементної антенної решітки використали двохкоординатний сканер (рис. 7.13). За допомогою останнього здійснювали контрольоване вертикальне переміщення рупорної антени. Об'єднання когерентних сигналів (вимірних комплексних величин) дозволило реалізувати синтез антенної решітки. За приймач використали векторний аналізатор Agilent HP 8530A рис. 7.13.б, який дозволяє оцінити миттєве комплексне значення прийнятого сигналу.

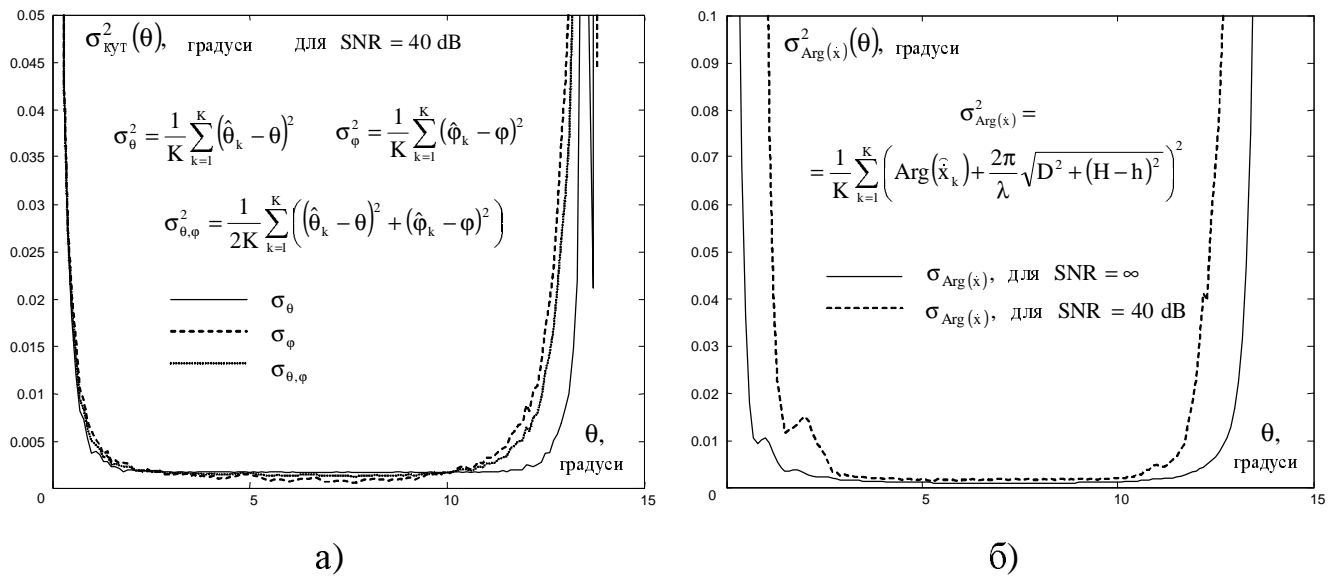
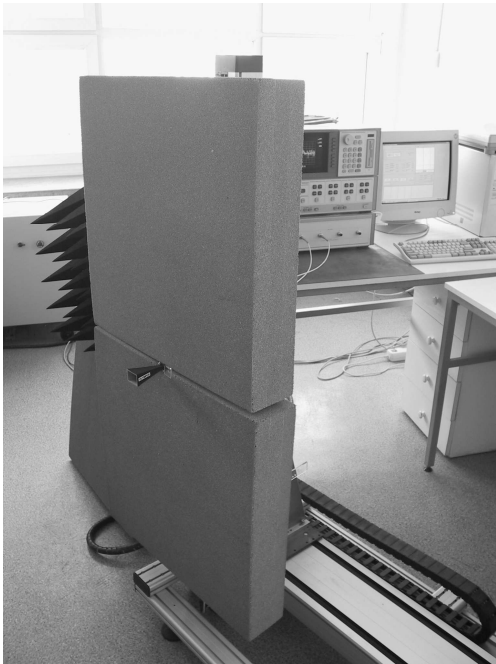


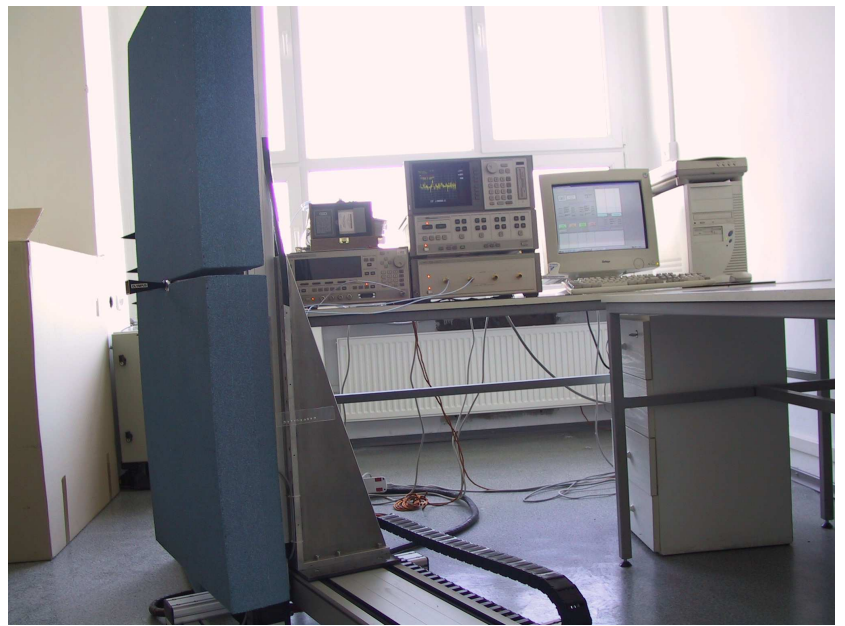
Рис. 7.12. Дисперсія оцінки параметрів від кута приходу сигналу при двопробеневій моделі розповсюдження для кутів приходу сигналу і когерентної завади – а) та така ж залежність для аргумента огинаючої сигналу - б)

Суцільна крива u на рис.7.14.а показує залежність миттєвого значення монохроматичної хвилі з довжиною $\lambda = 8$ мм від висоти h приймальної антени. В експерименті горизонтальна відстань до джерела випромінювання становить $D = 3.17$ м, а висота розташування джерела випромінювання (випромінювальної антени) над плоскою поверхнею рівна $H = 0.54$ м. У цьому випадку підлога лабораторії з ліноліумним покриттям відіграла роль плоскої розсіювальної поверхні. Для порівняння на рис. 7.14.а пунктирною лінією зображено обчислену теоретично залежність миттєвого значення складової електромагнітного поля, зафіксованої рупором, від висоти приймальної антени. За винятком великих h ,

виміряні та обчислені значення прийнятого сигналу u співпадають. Це свідчить про відповідність моделі двопробеневого розповсюдження експерименту. Причиною незначної відмінності між теоретичними та експериментальними даними може бути інтерферометрична завада, що не відповідає двопробеневій моделі розповсюдження хвилі, або відмінність структури поля від моделі плоскої хвилі.



а)



б)

Рис. 7.13. Двокоординатна сканувальна система з рупорною антеною – а) та високочастотний векторний аналізатор, використані для прийому та синтезу вертикальної чотириелементної антенної решітки - б)

Виміряні значення напруженості поля вздовж вертикалі використано як вихідні дані для оцінювання кута приходу хвилі від джерела випромінювання. Завдяки виразам (7.47)-(7.49), що складають основу запропонованого методу, знайдено оцінку кутів приходу хвилі та когерентної завади для різних значень висоти чотириелементної антенної решітки. Останню синтезовано вертикальним переміщенням реальної антени. Крім того, оцінено миттєві значення сигналу від джерела випромінювання згідно з формулами (7.50)-(7.53).

Точне значення кута приходу хвилі від джерела випромінювання та його оцінку подано штриховою та суцільною лініями на рис. 7.14.б, відповідно. Незначна

відмінність між цими лініями вказує на наявність систематичної похибки вимірювань. Ця похибка має характер зміщеної оцінки в діапазоні однозначності кутів, розмір якого передбачено теоретичними розрахунками.

Для підтвердження усунення негативного впливу когерентної завади на прийом сигналу від джерела на рис. 7.14.а суцільною лінією $|\hat{s}|$ приведено залежність оцінки огинаючої сигналу від висоти h розташування синтезованої чотириелементної антенної решітки. Як видно, характер кривих, що зображають миттєві значення сигналу до u і після s обробки, суттєво відрізняється. Якщо вимірний сигнал u при зміні вертикального розташування антени на 2λ змінюється навіть до 5 dB , то після обробки спостерігаємо зміну модуля огинаючої s в межах $0.4\text{--}0.7\text{ dB}$. Це говорить про семикратний позитивний ефект від застосованої обробки. Відсутність істотних загасань при зміні висоти h свідчить про досягнення поставленої мети – усунення інтерферометричного впливу когерентної завади на прийом сигналів при двопробеневій моделі розповсюдження.

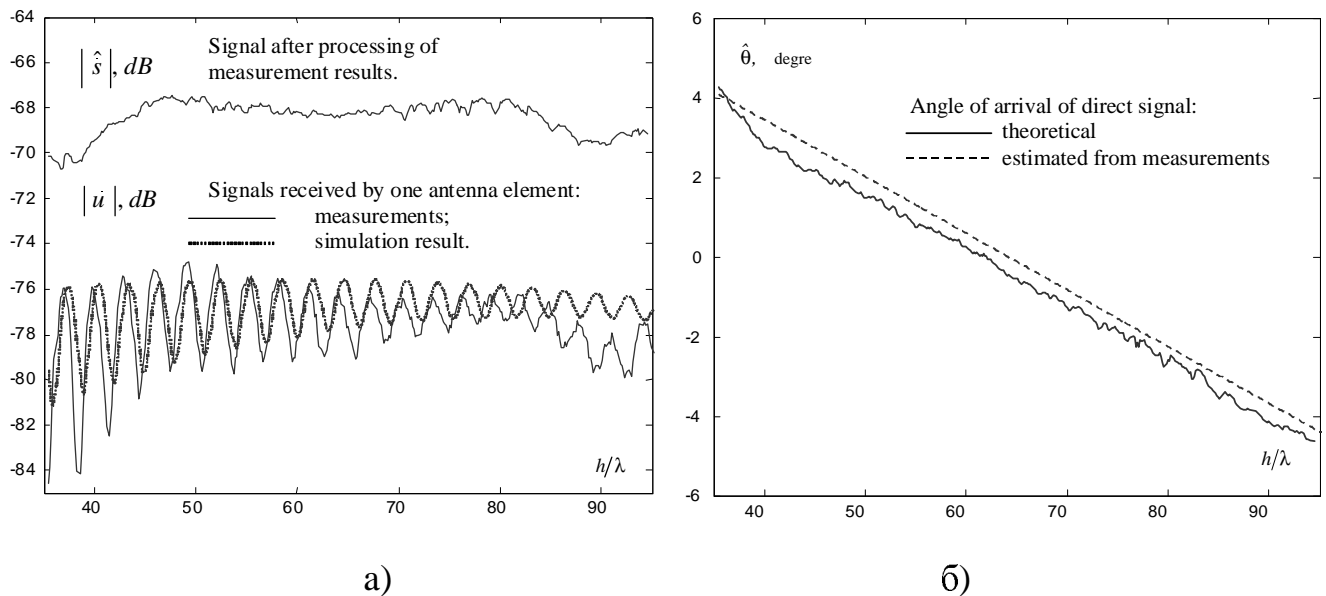


Рис. 7.14. Залежність амплітуди прийнятих сигналів – а) та кута приходу плоскої хвилі – б) від висоти розташування антени

7.6. Висновки до сьомого розділу

Реєстрацію експериментальних даних у лінійній та круговій антенних решітках, а також у багаточастотних пристроях неруйнівної діагностики шаруватих структур можна спільно змодельовати розвинутим у шостому розділі підходом. У роботі продемонстровано можливість вирішення ряду практично важливих проблем, розглядаючи їх як задачі оцінки параметрів узагальненої моделі. Вони полягають в оцінюванні параметрів скінченного числа дискретних розсіювачів та джерел випромінювання електромагнітних хвиль і можуть бути сформульовані як одновимірні. Виходячи з розвинутої у попередньому розділі стратегії до побудови методів оцінювання, показано, що в одновимірному випадку застосування індикаторної функції для наближення шуканих параметрів також є теоретично обґрунтованим. Для ефективності такого підходу необхідно виконання умови, коли за вихідними даними можна синтезувати множину спостережень, які є реалізаціями одного і того ж процесу. До часткових випадків, де розвинутий підхід продемонстрував свою ефективність можна віднести оцінювання:

- коефіцієнтів тригонометричного полінома за частотною залежністю коефіцієнтів у функціях Йоста для розв'язання одновимірних обернених задач розсіювання на шаруватих структурах;

- коефіцієнтів нескінченного збіжного ряду комплексних експонент, яким задано коефіцієнт відбиття багат шарової структури при наближеному розв'язанні одновимірної оберненої задачі розсіювання;

- кутів падіння плоских хвиль на лінійну еквідистантну та кругову антенні решітки.

Оскільки досліджувані моделі містять комплексні тригонометричні експоненти, одним із наближених підходів до встановлення її параметрів є застосування дискретного перетворення Фур'є. Результати моделювання показують, що використання перетворення Фур'є при обробці експериментальних даних, в яких присутня випадкова складова, є не ефективним через обмежену роздільну

здатність. Так просторово-часова обробка на основі дискретного перетворення Фур'є прийнятих антенною решіткою сигналів не дозволяє розділити близько розташовані джерела електромагнітного випромінювання та ідентифікувати тонкі шари у багат шарових структурах при неруйнівному контролі. У той же час статистичне формулювання задачі забезпечує значно вищу точність.

Оцінювання невідомих параметрів для перелічених задач, яка базується на методі максимуму правдоподібності, дозволяє досягнути максимальної точності, але надзвичайно висока обчислювальна складність робить її неприйнятною на практиці.

Завдяки запропонованому підходу досягнуто високу роздільну здатність та отримано достовірні оцінки шуканих параметрів в умовах малих відношень «сигнал/шум». Особливостями кожної з розглянутих задач є формування коваріаційної матриці, за якою побудовано індикаторну функцію.

При неруйнівному контролі багат шарових структур запропонована ідея дозволила підвищити точність розв'язку обернених задач розсіювання у різних формулюваннях, якщо вони зводяться до оцінки коефіцієнтів тригонометричних поліномів за знайденою частотною залежністю коефіцієнтів розв'язків Йоста. Іншим корисним ефектом від застосування запропонованого підходу є можливість отримати більш точну оцінку імпульсної характеристики безвтратної шаруватої структури, за якою наближено можна оцінити перші кілька шарів структури. Запропонований підхід дав можливість визначати товщини та діелектричну проникність шарів плоских діелектричних структур навіть якщо вихідні дані (коефіцієнт відбиття) задано у скінченному діапазоні частот.

Показано, що оцінювання кутів падіння плоских хвиль на кругову антенну решітку зводиться до задачі для лінійної антенної решітки застосуванням лінійного перетворення вихідних даних. Від так, знаходження оцінки коваріаційної матриці та побудова індикаторної функції для цих задач є частковими випадками розвинутої стратегії оцінювання.

Аналіз запропонованого підходу до побудови індикаторних функції показав,

що у часткових випадках дискретних скінченновимірних моделей розсіювання критично важливим є інформація про порядок моделі, який відповідає кількості розсіювачів, або визначається кількістю поверхонь розділу у досліджуваному шаруватому середовищі. Показано, що вищої точності розв'язання одновимірних обернених задач розсіювання тут можна досягнути за умови, що значення порядку моделі є відомим. У розглянутих в шостому розділі двовимірних обернених задач розсіювання питання оцінки порядку моделі є неактуальним, оскільки шукані розсіювачі є просторово неперервно розподіленими. Враховуючи наведені аргументи, для підвищення ефективності розв'язання перелічених вище задач доцільно спочатку оцінити порядок. Розвинутий в дисертації єдиний для всіх задач підхід зводиться до знаходження мінімуму однопараметричної функції, побудованої за оцінкою коваріаційної матриці. Його відповідним чином знайдено за результатами вимірювань.

Показано, що оцінювання кутів приходу плоских хвиль від двох когерентних джерел випромінювання на чотириелементну лінійну антенну решітку має аналітичний розв'язок. Він дозволяє зменшити ефект двопробного розповсюдження хвилі при реєстрації сигналів чотириелементною антенною приймальною системою від джерела електромагнітного поля, розташованого над плоскою поверхнею. Результати порівняльного аналізу підтверджують високу ефективність методу при оцінюванні комплексної огинаючої корисного сигналу, параметрів когерентної завади, а також напрямів їх приходу. Достовірність теоретичних положень перевірено також експериментально.

РОЗДІЛ 8

ПОГОДЖЕННЯ ЗОБРАЖЕНЬ ТА РЕЄСТРАЦІЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ У ТРИВИМІРНОМУ ПРОСТОРИ

У випадку, коли досліджувані середовища є оптично проникні, то оптичні засоби оцінки їх параметрів мають переваги порівняно з радіохвильовими. Зокрема, системи оптичного діапазону дають можливість забезпечувати високу роздільну здатність на відміну від їх мікрохвильових аналогів. Однак реєстрація фази в оптичному діапазоні та забезпечення просторово-часової когерентності викликає істотні труднощі при реалізації. Проекційний спосіб отримання зображень у такому випадку призводить до втрати інформації про форму і об'ємний характер об'єктів дослідження. Аналіз методів тривимірної реконструкції вказує на те, що саме втрата фазової інформації у широкодоступних сенсорах оптичного діапазону не дозволяє провести аналогії між вирішенням проблем реконструкції у системах мікрохвильового (просторово-часове сканування, інтерферометричний принцип радіолокації) та оптичного діапазонів. Однак задачу тривимірної реконструкції за оптичними зображеннями можна трактувати як обернену задачу, що має всі ознаки некоректності. Отже пошук її розв'язку необхідно здійснювати, використовуючи апіорну інформацію для побудови регуляризатора.

У цьому розділі розглянемо більш складну задачу – встановлення трьохкомпонентного поля переміщень поверхні об'єкта, що зазнає деформації. Особливу увагу спрямуємо на використання апіорної інформації про шукану функцію переміщень поверхні з метою регуляризації розв'язку.

8.1. Високочастотне наближення хвильових процесів у моделі формування оптичних зображень

Для опису процесів розповсюдження хвиль та встановлення моделі реєстрації зображень оптичними засобами виходимо із розв'язків рівняння Максвела для монохроматичної хвилі [300]

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r})e^{ik_0n(\mathbf{s}\cdot\mathbf{r})} \text{ та } \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_0(\mathbf{r})e^{ik_0n(\mathbf{s}\cdot\mathbf{r})}, \quad (8.1) \text{ та } (8.2)$$

де $n(\mathbf{r}) = \sqrt{\varepsilon(\mathbf{r})/\varepsilon_0}$ коефіцієнт заломлення неоднорідного середовища і \mathbf{s} - одиничний вектор напрямку поширення хвилі.

У високочастотному наближенні $k_0 \rightarrow \infty$, для складових електромагнітного поля виконуються умови $|\nabla \times \mathbf{H}_0| \ll k_0$ та $|\nabla \times \mathbf{E}_0| \ll k_0$, які дозволяють подати вирази (8.1) та (8.2) у вигляді

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cong \mathbf{E}_0(\mathbf{r})\exp(-ink_0S(\mathbf{r})) \text{ та } \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cong \mathbf{H}_0(\mathbf{r})\exp(-ink_0S(\mathbf{r})), \quad (8.3) \text{ та } (8.4)$$

де функція $S(\mathbf{r}) = const$ визначає фазовий фронт хвилі.

Значимо, що функції $S(\mathbf{r})$, $\mathbf{H}_0(\mathbf{r})$ та $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$ плавно змінюються у просторі. Тоді підстановка формул (8.3) та (8.4) у рівняння Максвела дозволяє записати рівняння ейконалу

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = n^2(\mathbf{r}). \quad (8.5)$$

З цього рівняння слідує, що поле, яке падає на об'єкт та дифрагує на ньому, розповсюджується в однорідному просторі з постійним коефіцієнтом заломлення $n(\mathbf{r}) = const$, маючи плоский фазовий фронт $S_0 := Ax + By + Cz + D$. Відповідно поширення падаючої та розсіяної хвиль відбувається прямолінійно, і вектор \mathbf{s} є перпендикулярним до фазового фронту S_0 .

Звідси можна зробити висновок, що формування зображення відповідає проєкційній моделі (рис. 8.1) у припущенні, що використана оптична система є ідеальною, тобто зображення є сфокусованим, відсутня аберація лінз, плоский екран камери розташований перпендикулярно до оптичної осі. Визначення параметрів цієї моделі розглянуто в роботах [301, 302]. Точка M проєктується в точку m за рахунок того, що електромагнітна хвиля при розсіюванні від точки M поверхні об'єкта розповсюджується прямолінійно в напрямі до оптичного центру камери C , генеруючи електричний заряд у в точці m фоточутливого елемента екрана.

Сформоване на екрані зображення реєструється так, що інтенсивність кожного з пікселів $I(x, y)$ зображення відповідає квадрату модуля напруженості

електромагнітного поля, яке усереднюється по площі фоточутливого елемента. Відповідно фазові взаємозв'язки, які несуть інформацію про відстань до об'єкта, втрачаються.

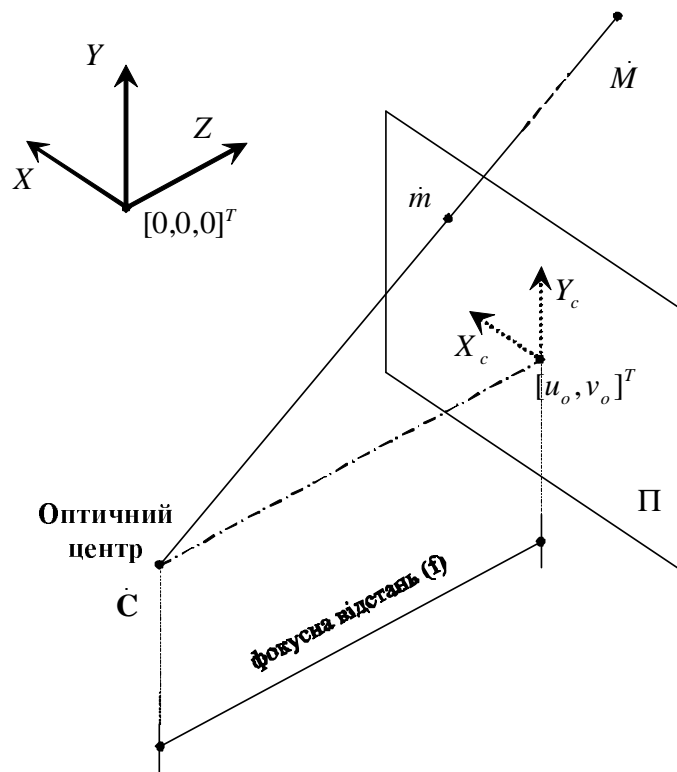


Рис. 8.1. Проекційна модель побудови зображень, що базується на прямолінійному розповсюдженні електромагнітних хвиль в однорідному середовищі

8.2. Задача погодження зображень та встановлення оптичного потоку

Зміна умов спостереження впливає на відображення об'єктів, яке формує оптична камера. До параметрів, які характеризують умови спостереження, належать геометрія взаємного розташування камери та об'єкта, стан останнього та технічні характеристики камери (фокусна відстань, глибина різкості і т.д.). Серед сукупності задач інтерпретації зображень можна виділити окремий клас, що оперує зображеннями, сформованими під час різних умов спостереження. Їх розв'язок спрямований на встановлення взаємозв'язків (явних чи неявних) між зображеннями об'єкта. Однією з форм таких взаємозв'язків є функція, що визначає відповідність елементів одного зображення іншим. У стереобаченні [301,302] її часто називають функцією відмінності між зображеннями (disparity function). За умови незначних

відмінностей між фрагментами послідовності зображень рухомого об'єкта така функція є основною характеристикою оптичного потоку [303].

З появою нових засобів реєстрації та формування зображень задача погодження форм (елементів поверхні об'єктів у тривимірному просторі) ускладнюється і, відповідно, вимагає модернізації підходів до її розв'язання. Наприклад, якщо для тривимірної реконструкції достатньо встановити скалярну величину функції відмінності між зображеннями, то для погодження форм у тривимірному просторі функція відмінності назагал матиме векторний характер. При цьому вектор відмінності між елементами об'єкта має три складових та три ступені свободи.

Підсумовуючи, загальне формулювання задачі погодження зображень (або форм) можна подати у вигляді

$$f_1(\xi) = f_2(\xi + \Xi(\xi)), \quad (8.6)$$

де f_1 та f_2 - функції (зображення $\xi \in \mathbb{R}^2$, форми $\xi \in \mathbb{R}^3$), що підлягають погодженню; Ξ - невідома функція відмінності (для зображення - $\Xi \in \mathbb{R}^2$, для форми - $\Xi \in \mathbb{R}^3$), яка є розв'язком задачі погодження.

У кожному конкретному випадку невідому функцію Ξ можна характеризувати по-різному. При тривимірній реконструкції за двома зображеннями (стерео реконструкція), сформованими каліброваними камерами, задачу погодження можна привести пошуку функції відмінності $\Xi \in \mathbb{R}^2$, яка має тільки одну ступінь свободи. Епіполярна геометрія двох каліброваних камер дозволяє параметризувати векторну функцію відмінності $\Xi \in \mathbb{R}^2$. Детальний аналіз методів епіполярної параметризації, рестифікації та погодження стереозображень можна знайти в роботах [302-310]. Використання лазерних сканерів дозволяє уникнути розв'язання задачі погодження зображень при стерео реконструкції. Тим не менше висока ціна цих засобів спонукає до розвитку математичних методів знаходження її розв'язку.

Проблема реєстрації поверхневого розподілу переміщень виникає при експериментальному встановленні залежностей між навантаженнями на взірць та його деформаціями [311]. Значення деформації безпосередньо пов'язане з

переміщеннями, які фіксують. Часто розглядають випадки, де функція відмінності є векторною $\Xi \in \mathbb{R}^2$ і визначає переміщення у площині зображення. Тензоелектричні давачі, що найчастіше використовують, можуть реєструвати переміщення тільки для обмеженої кількості фіксованих точок. Оптичні камери дозволяють реєструвати стан поверхні досліджуваного взірця, даючи необхідну інформацію для непрямого визначення поверхневого розподілу переміщень і деформацій. Послідовність зображень поверхні досліджуваного взірця, зафіксованих у різні моменти часу, може служити вихідними даними для встановлення динамічного й еволюційного характеру деформацій.

Особливий практичний інтерес на сьогоднішній день складає задача погодження форм, або встановлення відповідності між елементами у тривимірному просторі. Визначення переміщень у площині зображення є лише частковим випадком задачі погодження форм. Кількість явищ у механіці, що можуть спричиняти деформації лише у площині, є невеликою, і особливого значення вони не мають. Загалом, деформації характеризуються переміщенням елементів об'єкта у тривимірному просторі. По при це, на такі деформації можна накласти додаткові умови, які використовують у теорії пружного та пластично деформованого тіла [311]. Саме тому розвиток підходів комп'ютерного бачення у напрямку аналізу тривимірної форми об'єктів та динаміки/еволюції їх поверхні під дією навантажень має як практичний, так і теоретичний інтерес для науковців у галузі механіки деформованого тіла та матеріалознавства.

Метою даного розділу є розвиток варіаційного підходу до погодження зображень та його узагальнення на випадок визначення розподілу переміщень поверхні у тривимірному просторі. Важливим є врахування особливостей цих задач, коли сформовані зображення об'єкта відображають процес його деформації під дією навантажень, або спричинені зміною його розташування відносно камери, що реєструє зображення.

Найпростіша задача погодження полягає у визначенні функції відмінності стереопроєкцій [302] виходячи з двох зображень $I_L(x, y)$ та $I_R(x, y)$. Для

двовимірних зображень функція відмінності є вектором $\mathbf{h}(x, y) := (u(x, y), v(x, y))^T$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, і її можна визначити як

$$I_L(x, y) = I_R(x + u(x, y), y + v(x, y)). \quad (8.7)$$

Складові $u(x, y)$ та $v(x, y)$ вектора функції відмінності є значеннями покоординатних переміщень елемента поверхні у площині (x, y) . Таке погодження зображень є частковим випадком узагальненого формулювання задачі, коли визначають переміщення елементів поверхні навантаженого об'єкта, зображення якого фіксують. Якщо на функції $u(x, y)$ та $v(x, y)$ не накладаються спеціальні обмеження, то задачу можна трактувати як встановлення оптичного потоку.

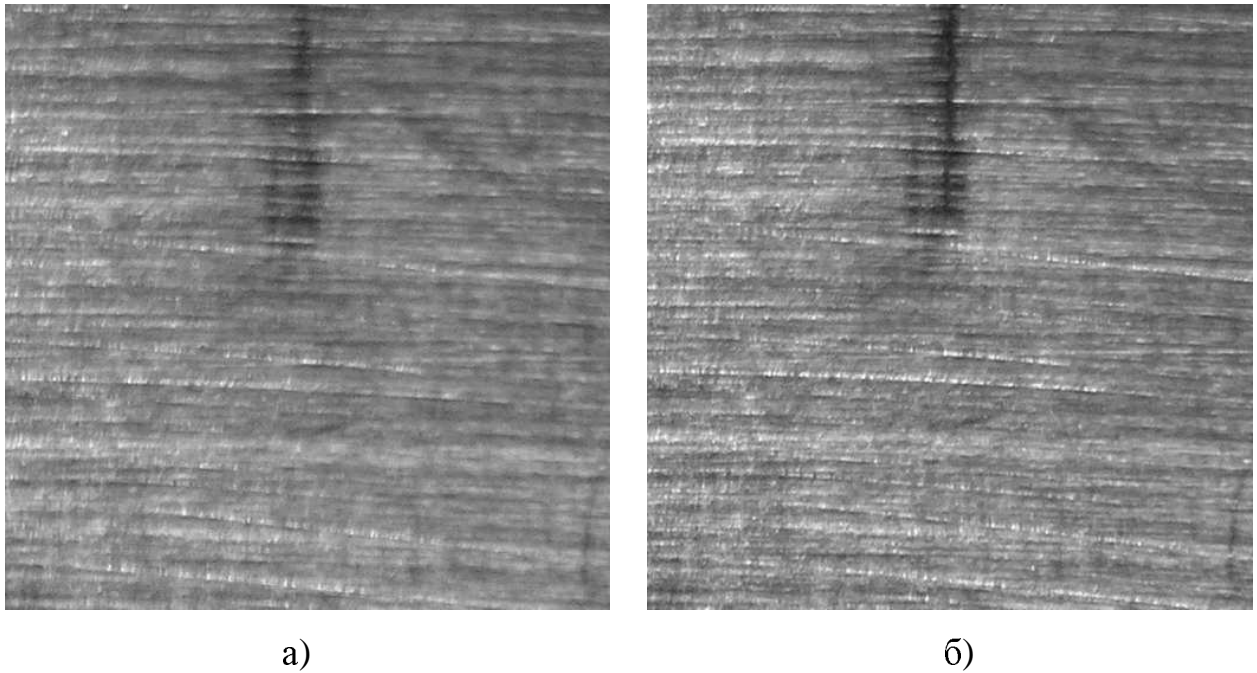


Рис. 8.2. Зображення поверхні металевого взірця без навантаження – а) та з навантаженням 1500 кг - б); (x – координата вдовж вертикалі, y – вздовж горизонталі)

У цьому параграфі представлено результати числового моделювання підходу до встановлення оптичного потоку та перевірено їх достовірність. Для аналізу використано два зображення (рис. 8.2.а та рис. 8.2.б), які демонструють поверхню металевого взірця в різні моменти часу: без навантаження та з горизонтальним розтягувальним навантаженням у 1500 кг, відповідно. Як частковий випадок задачі

погодження розглянуто знаходження функції відмінності для стереозображень (рис. рис. 8.3.а та рис. 8.3.б) металевого взірця у випадку, коли епіпольярна геометрія оптичної системи є невідомою.

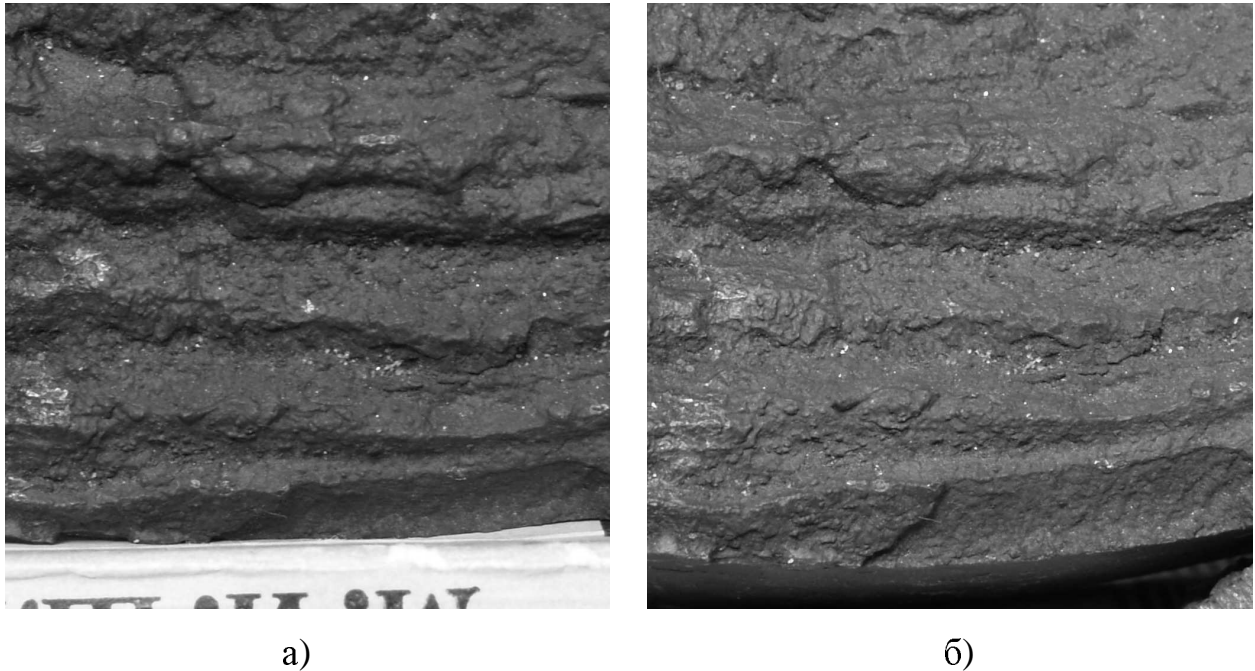


Рис. 8.3. Зображення поверхні металевого взірця, сформовані для різних позицій некаліброваної камери

На рис. 8.4 подано класифікацію відомих методів погодження зображень. Для підтвердження актуальності задачі погодження приведемо основні недоліки відомих методів її розв'язання: відсутність стійкого розв'язку та його неоднозначність за великих переміщень. Кореляційний підхід до погодження зображень покладено в основу багатьох відомих методів обробки [307]. На рис. 8.5 світлими ділянками зображення позначено області, де кореляційний метод дозволив отримати достовірний розв'язок задачі погодження для тестових зображень з рис. 8.2. Критерієм достовірності, у даному випадку, є відповідність отриманого переміщення конкретної точки при взаємній перевірці за принципом максимуму коефіцієнта кореляції. При реалізації кореляційного методу вважали, що розмір квадратної області зображення, обчислюється коефіцієнт взаємкореляції, є 20×20 пікселів.

Як видно з рис. 8.5, погодження кореляційним методом не вдається отримати для значної частини зображення. Такий ефект спостерігається для областей поверхні, геометрія яких є сильно зміненою внаслідок деформації.

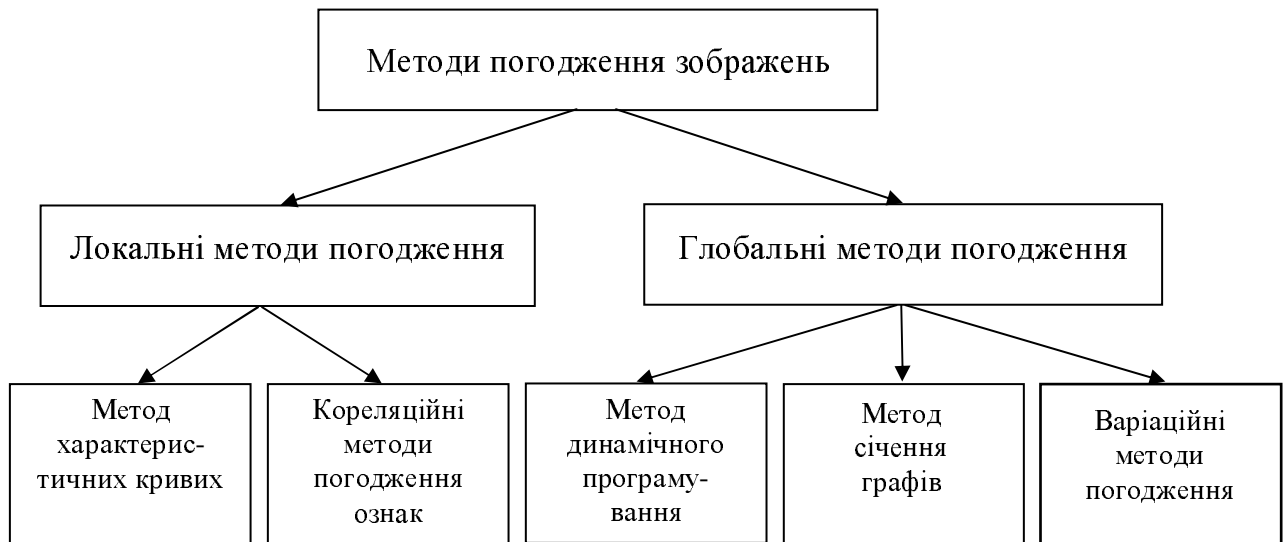


Рис. 8.4. Класифікація методів погодження зображень

8.2.1. Варіаційний підхід до розв'язання задачі погодження зображень.

Основна ідея, розвинута в роботі, полягає у приведенні задачі погодження зображень до мінімізації функціоналу, який визначає ступінь відмінності зображень при заданих регуляризаційних обмеженнях. Функція $\mathbf{h}(x, y)$, при якій повна енергія досягає свого мінімального значення $\hat{\mathbf{h}} = \arg \min_{\mathbf{h}} E(\mathbf{h})$, відповідає шуканій функції відмінності. Загальний вигляд функціоналу повної енергії можна подати як

$$E(\mathbf{h}) = \iint_{\Omega} C(I_L, I_R, \mathbf{h}) dx dy + \kappa \iint_{\Omega} \Phi(\nabla I_L, D\mathbf{h}) dx dy, \quad (8.8)$$

де Ω - область визначення функцій яскравості пікселів на зображеннях I_L та I_R ; C - функція втрат; κ - коефіцієнт регуляризації; $\Phi(\cdot, \cdot)$ - функція, що визначає характер апіорних даних щодо шуканого розв'язку; $D\mathbf{h}$ - якобіан.

Як видно, вираз (8.8) містить у явному вигляді функції $u(x, y)$ та $v(x, y)$, а також їх частинні похідні за просторовими координатами $u_x = \partial u(x, y) / \partial x$, $u_y = \partial u(x, y) / \partial y$, $v_x = \partial v(x, y) / \partial x$, $v_y = \partial v(x, y) / \partial y$. Тому для знаходження

екстремуму такого функціоналу найбільш доцільним видається використання варіаційного підходу [305, 312, 314].

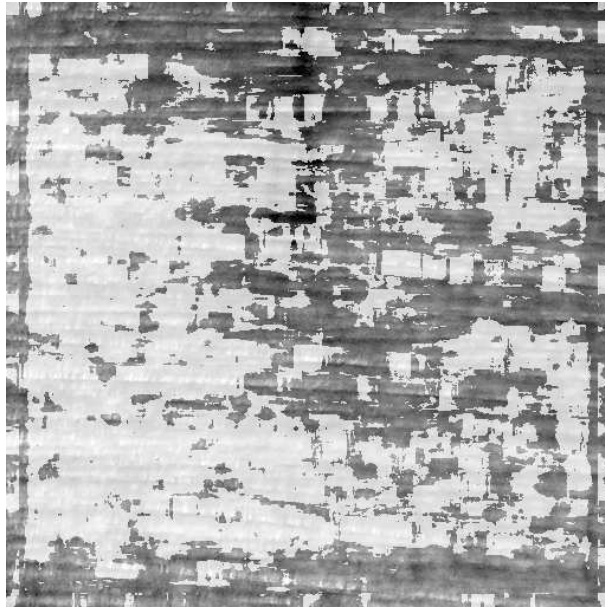


Рис. 8.5. Відображення областей (світлі ділянки), де кореляційний метод дозволив достовірно встановити величину переміщень

Варіаційний підхід у даному випадку зводиться до перетворення функціоналу, що мінімізують, у диференціальне рівняння з частинними похідними, таким чином, щоб його мінімум співпадав із розв'язком цього рівняння. Якщо досліджуваний функціонал має вигляд

$$J(u, v) = \iint H(x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y) dx dy, \quad (8.9)$$

то варіаційну задачу розглядають як розв'язок системи Ейлера-Лагранжа [312]

$$\frac{\partial H}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H}{\partial u_y} \right) = 0; \quad (8.10)$$

$$\frac{\partial H}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial v_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H}{\partial v_y} \right) = 0. \quad (8.11)$$

Тому погодження зображень зводиться до системи двох диференціальних рівнянь

$$\mathfrak{J}(\mathbf{h}) = \mathbf{A}(\mathbf{h}) + \mathbf{B}(\mathbf{h}) = 0, \quad (8.12)$$

де $\mathbf{A}(\mathbf{h})$ та $\mathbf{B}(\mathbf{h})$ - векторні функції, визначені у відповідності до функціонального та регуляризуючого доданків у виразі (8.8).

Одним із способів визначення функції втрат C є її подання через нормалізовану функцію взаємкореляції (можливе також використання середньоквадратичної похибки та взаємної інформації як мір відмінності) певного околу $x, y \in \Omega_o$ точки (x_o, y_o) зображення $I_L(x, y)$ та околу Ω_o іншого зображення $I_R(x+u, y+v)$

$$C(I_L, I_R, \mathbf{h}) = 1 - \frac{\langle f_L, f_R \rangle}{\sqrt{\langle f_L, f_L \rangle \langle f_R, f_R \rangle}}, \quad (8.13)$$

де $f_L = \hat{I}_L(x+x_o, y+y_o)$ та $f_R = \hat{I}_R(x+x_o+u(x, y), y+y_o+v(x, y))$ є функціями зображень, подібність яких оцінюється. Значення цих функцій знаходять на основі білінійної інтерполяції дискретних відліків вихідних зображень I_L та I_R ; $\hat{I} = I - \iint_{\Omega_o} I(x, y) dx dy$ є позначенням функції з нульовим середнім в околі Ω_o ;

$\langle f, g \rangle = \iint_{\Omega_o} f(x, y) g(x, y) dx dy$ - позначення скалярного добутку двох функцій.

(8.13) не містить частинних похідних функції відмінності \mathbf{h} , тому її підстановка його в рівняння Ейлера-Лагранжа (8.10) та (8.11) зводиться до обчислення похідних цього виразу за функціями u та v . Для спрощення диференціювання виразу (8.13) використаємо апроксимацію

$$f_R(x+u(x, y), y+v(x, y)) \approx f_R(x, y) + \frac{\partial f_R(x, y)}{\partial x} u(x, y) + \frac{\partial f_R(x, y)}{\partial y} v(x, y). \quad (8.14)$$

Тоді перший доданок у виразі (8.12) відповідає (з точністю до постійного множника) двохкомпонентному вектору $[\partial C / \partial u, \partial C / \partial v]^T$, поданого у вигляді

$$\mathbf{A}(\mathbf{h}) = \langle f_R, f_R \rangle \langle f_L, \nabla f_R \rangle - \langle f_L, f_R \rangle \langle f_R, \nabla f_R \rangle. \quad (8.15)$$

Важливою характеристикою задачі погодження є її некоректність, що вказує на необхідність регуляризації розв'язку. Це можна пояснити дискретним характером сформованих зображень, оскільки рівень освітлення екрану оптичної камери фіксується у вузлах певної сітки, що ототожнюється з розташуванням пікселів при

його відображенні. Тому область визначення вихідних зображень ($I_L(x', y')$ та $I_R(x', y')$ на практиці задані для дискретної множини значень $\{x', y'\} \in \mathbb{Z}^2$) відрізняється від області значень істинної (шуканої) функції $\mathbf{h}(x, y)$, для якої $\{u, v\} \in \mathbb{R}^2$.

Крім того, на некоректність задачі погодження вказує той факт, що для певних областей зображення (наприклад, тріщини на рис. 8.2.б, або затінених областей на рис. 8.3) відсутній її розв'язок. Іншими словами, певний елемент поверхні відображається тільки на одному з зображень, і на іншому зображенні відповідного до нього елемента не існує. Саме такий ефект свідчить про наявність особливостей шуканої функції відмінності $\mathbf{h}(x, y)$.

Вибір регуляризуючого доданку у виразі (8.8) визначається характером та природою шуканої функції відмінності. Найчастіше для забезпечення гладкого регуляризованого розв'язку використовують регуляризацію Тихонова [81]. Для розв'язання задач тривимірної реконструкції погодження зображень здійснюють, користуючись моделями оптичного потоку, що пов'язані з різними фізичними явищами, зокрема:

- моделі лінійно-пружного матеріалу

$$\Phi_1(\nabla I, D\mathbf{h}) = \frac{1}{2} \left(\xi \text{Tr}(D\mathbf{h}^T D\mathbf{h}) + (1 - \xi) \text{Tr}(D\mathbf{h}^2) \right), \quad (8.16)$$

де $k \in (1/2, 1]$ має зміст коефіцієнта Ламе [311]; Tr - слід матриці;

- моделі анізотропної дифузії [314]

$$\Phi_2(\nabla I, D\mathbf{h}) = \frac{1}{2} \text{Tr}((D\mathbf{h})\mathbf{T}(\nabla I)D\mathbf{h}^T). \quad (8.17)$$

Оператор \mathbf{T} характеризує анізотропію і залежить від функції яскравості пікселів зображення, що погоджують [314]:

$$\mathbf{T}(\nabla I) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{|\nabla I|^2 + 2\eta^2} \left\{ \begin{bmatrix} \partial I / \partial y \\ -\partial I / \partial x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial I / \partial y \\ -\partial I / \partial x \end{bmatrix}^T + \eta^2 \mathbf{I} \right\}. \quad (8.18)$$

Тут \mathbf{I} - одинична діагональна матриця; η - параметр анізотропії; Коефіцієнти c і b рівні.

Підставляючи вираз (8.16) в рівняння Ейлера-Лагранжа (8.10) і (8.11), отримаємо рівняння Ламе [311, 313], в якому переміщення відповідають елементам шуканої функції відмінності для двох зображень:

$$\begin{cases} \xi \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + (1 - \xi) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0, \\ \xi \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + (1 - \xi) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0. \end{cases} \quad (8.19)$$

Це рівняння можна трактувати як другий доданок у формулі (8.12)

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{h}) = -\kappa \left(\xi \Delta \mathbf{h} + (1 - \xi) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{h}) \right). \quad (8.20)$$

Лінійність та пружність матеріалу середовища, як моделі оптичного потоку, вказує на те, що регуляризатор (8.16), а відповідно і регуляризуючий доданок (8.20), гарантує гладкість розв'язку задачі про визначення переміщень та сумісність спричинених ними деформацій [311].

В рівняння Ейлера-Лагранжа (8.10) і (8.11) також підставимо вираз (8.17) з метою встановлення аналітичного запису регуляризаційного доданку для моделі анізотропної дифузії. В результаті отримаємо систему рівнянь, якій має задовольняти шуканий розв'язок:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(d \frac{\partial u}{\partial y} + b \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial v}{\partial x} + b \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(d \frac{\partial v}{\partial y} + b \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0. \end{cases} \quad (8.21)$$

У векторній формі регуляризуючий доданок для моделі анізотропної дифузії має вигляд:

$$\mathbf{B}_2(\mathbf{h}) = \begin{bmatrix} -\kappa \operatorname{div}(\mathbf{T}(\nabla I) \nabla u) \\ -\kappa \operatorname{div}(\mathbf{T}(\nabla I) \nabla v) \end{bmatrix}. \quad (8.22)$$

Особливість підходу [313], що базується на моделі анізотропної дифузії (8.17), полягає у тому, що він гарантує гладкість розв'язку та передбачає розриви у шуканій функції. Регуляризацію на основі моделі анізотропної дифузії можна трактувати як залежну від певного параметра регуляризацію Тихонова.

Для знаходження розв'язку рівняння (8.12) або $\mathfrak{Z}(\mathbf{h})=0$ використаємо метод спуску. Розв'язок $\hat{\mathbf{h}}$ тоді можна досягти, встановлюючи асимптотичний стан $t \rightarrow \infty$ відповідної системи диференціальних рівнянь

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = -(\mathbf{A}(\mathbf{h}) + \mathbf{B}(\mathbf{h})) \quad (8.23)$$

при початковій умові $\mathbf{h}(x, y) = \mathbf{h}_0$ в $t=0$. Введення змінної часу t може бути обгрунтоване неявною залежністю шуканої функції $\mathbf{h}(x, y)$ від параметра t .

Доданки в рівнянні (8.23) набувають конкретного змісту при підстановці в нього виразу (8.15) для $\mathbf{A}(\mathbf{h})$ та регуляризуючого доданку $\mathbf{B}(\mathbf{h})$, відповідно до вибраної моделі функції відмінності:

- для моделі лінійно-пружного матеріалу (8.16) система рівнянь (8.23) має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \langle f_L, f_R \rangle \left\langle f_R, \frac{\partial f_R}{\partial x} \right\rangle - \langle f_R, f_R \rangle \left\langle f_L, \frac{\partial f_R}{\partial x} \right\rangle + \kappa \xi \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \kappa(1-\xi) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ \frac{dv}{dt} = \langle f_L, f_R \rangle \left\langle f_R, \frac{\partial f_R}{\partial y} \right\rangle - \langle f_R, f_R \rangle \left\langle f_L, \frac{\partial f_R}{\partial y} \right\rangle + \kappa \xi \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \kappa(1-\xi) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right); \end{cases} \quad (8.24)$$

- для моделі анізотропної дифузії (8.17) систему рівнянь (8.21) подамо як

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \langle f_L, f_R \rangle \left\langle f_R, \frac{\partial f_R}{\partial x} \right\rangle - \langle f_R, f_R \rangle \left\langle f_L, \frac{\partial f_R}{\partial x} \right\rangle + \kappa \operatorname{div}(\mathbf{T}(\nabla I) \nabla u), \\ \frac{dv}{dt} = \langle f_L, f_R \rangle \left\langle f_R, \frac{\partial f_R}{\partial y} \right\rangle - \langle f_R, f_R \rangle \left\langle f_L, \frac{\partial f_R}{\partial y} \right\rangle + \kappa \operatorname{div}(\mathbf{T}(\nabla I) \nabla v). \end{cases} \quad (8.25)$$

Для рівнянь типу (8.24) та (8.25) вдається довести теорему про існування розв'язку [313]. Але така форма запису задачі погодження не гарантує однозначності розв'язку, навіть при його регуляризації. Не зважаючи на це, істинний розв'язок задачі погодження можна отримати, використовуючи ієрархічний підхід.

Він полягає у тому, що початкову умову рівняння (8.23) для зображень з більшою роздільною здатністю σ_s вибирають як розв'язок рівняння (8.23) $\mathbf{h}_0^{\sigma_s} = \hat{\mathbf{h}}^{\sigma_{s-1}}$ для цих же зображень із меншою роздільною здатністю σ_{s-1} . Бажану роздільну здатність можна отримати, здійснивши дискретну згортку \otimes даного зображення з

функцією $G^\sigma(x, y) \equiv \exp\left(-\frac{(x^2 + y^2)}{\sigma^2}\right)$, де параметр σ визначає роздільну здатність. При цьому функції f_R^σ та f_L^σ у диференціальних рівняннях (8.24) та (8.25) приведено у відповідності до того, для якої роздільної здатності необхідно знайти розв'язок \mathbf{h}^σ . Наприклад, перший доданок у рівнянні (8.24) набуває вигляду:

$$\mathbf{A}(\mathbf{h}^\sigma) = \langle f_R^\sigma, f_R^\sigma \rangle \langle f_L^\sigma, \nabla f_R^\sigma \rangle - \langle f_L^\sigma, f_R^\sigma \rangle \langle f_R^\sigma, \nabla f_R^\sigma \rangle, \quad (8.26)$$

де $f_R^\sigma = \iint_{\Omega} f_R(x', y') G^\sigma(x' - x, y' - y) dx' dy'$ та $f_L^\sigma = \iint_{\Omega} f_L(x', y') G^\sigma(x' - x, y' - y) dx' dy'$.

Послідовне розв'язання рівнянь (8.24) та (8.25) для різних роздільних здатностей, заданих спадною послідовністю $\sigma_{s-1} > \sigma_s > \sigma_{s+1}$, дозволяє отримати збіжність ітераційної схеми до розв'язку, що відповідає глобальному мінімуму задачі (8.8).

8.2.2. Особливості числового розв'язку задачі погодження зображень.

Числову схему розв'язання рівнянь (8.24) та (8.25) побудуємо на основі кінцево-різницевої апроксимації похідних за часовою t та просторовими x, y координатами. Апроксимацію частинних похідних другого порядку за просторовими координатами здійснимо згідно з формулами:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} \approx \frac{I_{n+1,m} - I_{n,m}}{\Delta x^2} - \frac{I_{n,m} - I_{n-1,m}}{\Delta x^2}, \quad (8.27)$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial y^2} \approx \frac{I_{n,m+1} - I_{n,m}}{\Delta y^2} - \frac{I_{n,m} - I_{n,m-1}}{\Delta y^2}, \quad (8.28)$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y} \approx \frac{I_{n+1,m+1} - I_{n,m}}{4\Delta x \Delta y} + \frac{I_{n-1,m-1} - I_{n,m}}{4\Delta x \Delta y} - \frac{I_{n+1,m-1} - I_{n,m}}{4\Delta x \Delta y} - \frac{I_{n-1,m+1} - I_{n,m}}{4\Delta x \Delta y}. \quad (8.29)$$

Диференціальне рівняння (8.23) при апроксимації похідної за часом можна подати у загальному вигляді

$$\frac{\mathbf{h}^{k+1} - \mathbf{h}^k}{\Delta t} = -\mathbf{A}(\mathbf{h}^k) - \mathbf{B}(\mathbf{h}^{k+1}), \quad (8.30)$$

де $\mathbf{h}^k = (u^k, v^k)^T$ є наближенням розв'язку рівняння на k -тій ітерації. Записавши тут доданки, що містять невідомі коефіцієнти з лівої сторони виразу, відомі коефіцієнти – з правої сторони, матимемо

$$\mathbf{h}^{k+1} + \Delta t \mathbf{B}(\mathbf{h}^{k+1}) = -\Delta t \mathbf{A}(\mathbf{h}^k) + \mathbf{h}^k. \quad (8.31)$$

Враховуючи лінійний характер уведених регуляризуючих обмежень (8.20) та (8.22), стверджуємо, що перетворення $\mathbf{B}(\mathbf{h})$ є лінійним оператором. Тому рівняння (8.24) та (8.25) подано у вигляді скінченновимірних систем лінійних рівнянь:

- для регуляризації на основі моделі анізотропної дифузії:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{n,m}^{k+1} & \left(\frac{1}{\Delta t \kappa} - \frac{a_{n+1,m} + a_{n,m}}{2\Delta x^2} - \frac{a_{n,m} + a_{n-1,m}}{2\Delta x^2} - \frac{d_{n,m+1} + d_{n,m}}{2\Delta x^2} - \frac{d_{n,m} + d_{n,m-1}}{2\Delta x^2} - \right. \\ & \left. - \frac{b_{n+1,m+1} + b_{n,m}}{4\Delta x \Delta y} - \frac{b_{n-1,m-1} + b_{n,m}}{4\Delta x \Delta y} + \frac{b_{n+1,m-1} + b_{n,m}}{4\Delta x \Delta y} + \frac{b_{n-1,m+1} + b_{n,m}}{4\Delta x \Delta y} \right) + \\ & + \frac{a_{n+1,m} + a_{n,m}}{2\Delta x^2} \mathbf{h}_{n+1,m}^{k+1} + \frac{a_{n,m} + a_{n-1,m}}{2\Delta x^2} \mathbf{h}_{n-1,m}^{k+1} + \frac{d_{n,m+1} + d_{n,m}}{2\Delta x^2} \mathbf{h}_{n,m+1}^{k+1} + \\ & + \frac{d_{n,m} + d_{n,m-1}}{2\Delta x^2} \mathbf{h}_{n,m-1}^{k+1} + \frac{b_{n+1,m+1} + b_{n,m}}{4\Delta x \Delta y} \mathbf{h}_{n+1,m+1}^{k+1} + \frac{b_{n-1,m-1} + b_{n,m}}{4\Delta x \Delta y} \mathbf{h}_{n-1,m-1}^{k+1} - \\ & - \frac{b_{n+1,m-1} + b_{n,m}}{4\Delta x \Delta y} \mathbf{h}_{n+1,m-1}^{k+1} - \frac{b_{n-1,m+1} + b_{n,m}}{4\Delta x \Delta y} \mathbf{h}_{n-1,m+1}^{k+1} = \frac{\mathbf{h}_{n,m}^k}{\kappa \Delta t} - \frac{\mathbf{A}(\mathbf{h}^k)}{\kappa}; \end{aligned} \quad (8.32)$$

- для регуляризації на основі моделі лінійно-пружного тіла

$$\left\{ \begin{aligned} u_{n,m}^{k+1} & \left(\frac{1}{\Delta t} - \frac{2\kappa}{\Delta x^2} - \frac{2\kappa\xi}{\Delta y^2} \right) + \frac{\kappa}{\Delta x^2} (u_{n+1,m}^{k+1} + u_{n-1,m}^{k+1}) + \frac{\kappa\xi}{\Delta y^2} (u_{n,m+1}^{k+1} + u_{n,m-1}^{k+1}) = \\ & = -\mathbf{A}(\mathbf{h}^k) + \frac{u_{n,m}^k}{\Delta t} + \kappa(\xi - 1) \frac{u_{n+1,m+1}^k - u_{n+1,m-1}^k - u_{n-1,m+1}^k + u_{n-1,m-1}^k}{4\Delta x \Delta y}, \\ v_{n,m}^{k+1} & \left(\frac{1}{\Delta t} - \frac{2\kappa}{\Delta x^2} - \frac{2\kappa\xi}{\Delta y^2} \right) + \frac{\kappa}{\Delta x^2} (v_{n+1,m}^{k+1} + v_{n-1,m}^{k+1}) + \frac{\kappa\xi}{\Delta y^2} (v_{n,m+1}^{k+1} + v_{n,m-1}^{k+1}) = \\ & = -\mathbf{A}(\mathbf{h}^k) + \frac{v_{n,m}^k}{\Delta t} + \kappa(\xi - 1) \frac{v_{n+1,m+1}^k - v_{n+1,m-1}^k - v_{n-1,m+1}^k + v_{n-1,m-1}^k}{4\Delta x \Delta y}. \end{aligned} \right. \quad (8.33)$$

Знаходження кожного наступного наближеного значення $\mathbf{h}^k = (u^k, v^k)^T$ розв'язку диференціального рівняння зводиться до розв'язання системи лінійних рівнянь (8.32) або (8.33) на кожному етапі ітераційного процесу. Сформовані

системи лінійних рівнянь можна на загал подати як

$$\mathbf{M}\alpha = \beta, \quad (8.34)$$

де \mathbf{M} - матриця системи рівнянь; $\alpha = \mathbf{h}^{k+1}$ - вектор невідомих коефіцієнтів; $\beta = -\Delta t \mathbf{A}(\mathbf{h}^k) + \Psi(\mathbf{h}^k)$ - вектор відомих коефіцієнтів.

Апроксимація частинних похідних другого порядку (8.27)-(8.29) приводить до того, що матриця \mathbf{M} має тристрічкову структуру. При цьому кожна стрічка матриці має три елементи. Тому для розв'язання системи лінійних рівнянь вибрано ітераційний метод Гауса-Зейделя

$$(\mathbf{D} - \mathbf{L})\alpha^{n+1} = \mathbf{U}\alpha^n + \beta, \quad (8.35)$$

де $\mathbf{M} = \mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U}$ - матриця системи рівнянь (8.32); α^n - наближення розв'язку цієї системи на n -ій ітерації.

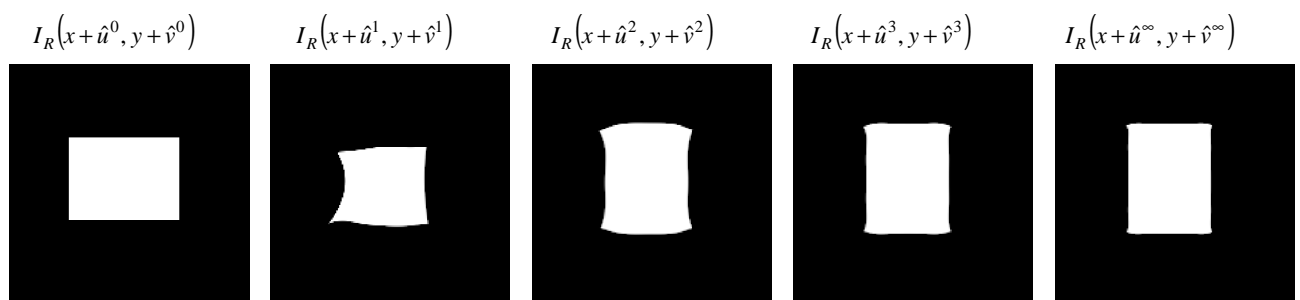


Рис. 8.6. Приклад збіжності ітераційного процесу до розв'язку

Використання такої методики числового розв'язання диференціального рівняння дало можливість отримати швидку збіжність до глобального мінімуму задачі (8.8) у варіаційному її формулюванні. Збіжність ітераційного процесу демонструє рис. 8.6. За тестові об'єкти вибрали нетекстуровані прості геометричні фігури рис 8.7.а. та рис 8.7.б. Саме цей випадок є найбільш критичним, так як задача погодження має безліч розв'язків, що вказує на необхідність введення додаткових обмежень. Результат погодження для цього прикладу приведений на рис. 8.7.в, де розв'язок у вигляді функцій $\hat{u}(x, y)$ та $\hat{v}(x, y)$ використано для деформації вихідного зображення на рис 8.7.б. Як видно, результат деформації (рис. 8.7.в) та оригінальне зображення (рис. 8.7.а) співпадають, що свідчить про достовірність знайденого розв'язку задачі погодження.

В залежності від вибраного типу апіорних обмежень, розв'язок задачі погодження може набути різної форми. Така відмінність особливо буде проявляти в тих областях зображення, де відсутня текстура. На рис. 8.8. приведені векторні поля переміщень, обчислені на основі моделі лінійно-пружного тіла та анізотропної дифузії (рис. 8.8.а та рис. 8.8.б, відповідно). Ітераційний процес погодження зображень збігається до розв'язку як для першої, так і для другої моделі. Встановлення відповідності між елементами з текстурою (контрастні границі геометричної фігури) відбувається однозначно, у той час як розв'язок на ділянках зображення, де текстура відсутня, в основному буде визначатися регуляризуючим доданком у функціоналі (8.8).

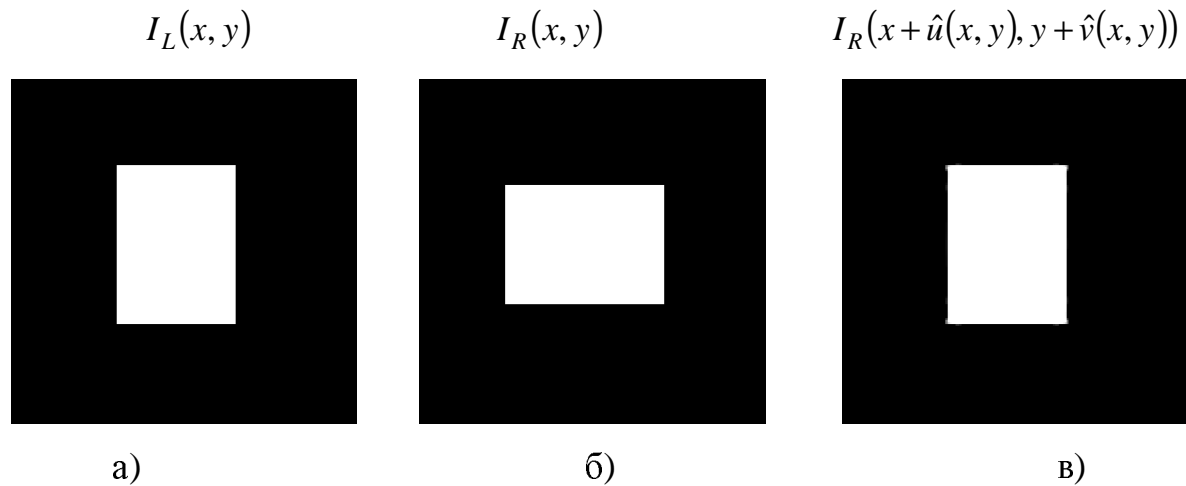


Рис. 8.7. Вихідні зображення $I_L(x, y)$ і $I_R(x, y)$ та деформоване зображення $I_R(x + \hat{u}(x, y), y + \hat{v}(x, y))$ у відповідності до розв'язку задачі погодження

На рис. 8.9 показано результат розв'язання задачі погодження тестових зображень з рис. 8.2. Різним рівнем яскравості та контурами однакового рівня на рис. 8.9.а та рис. 8.9.б подано величину (в пікселях) обчислених функцій переміщень $\hat{u}(x, y)$ та $\hat{v}(x, y)$, які є складовими векторної функції відмінності $\hat{\mathbf{h}}$. На рис. 8.10 у регулярних точках тестового зображення представлено векторне поле функції відмінності, де абсолютну величину векторів пропорційно змінено для кращої інтерпретації розподілу переміщень.

Для підтвердження достовірності розвинутої методики знаходження переміщень, проведено порівняльний аналіз отриманих результатів із даними, які можна отримати прямим кореляційним методом. На рис. 8.11 графічно зображено функцію $\hat{u}(x_o, y)$ для $x_o = 100$. Суцільна лінія на рис. 8.11 відображає функцію, обчислену кореляційним методом, а пунктирна – розв’язок задачі (8.8) варіаційним підходом.

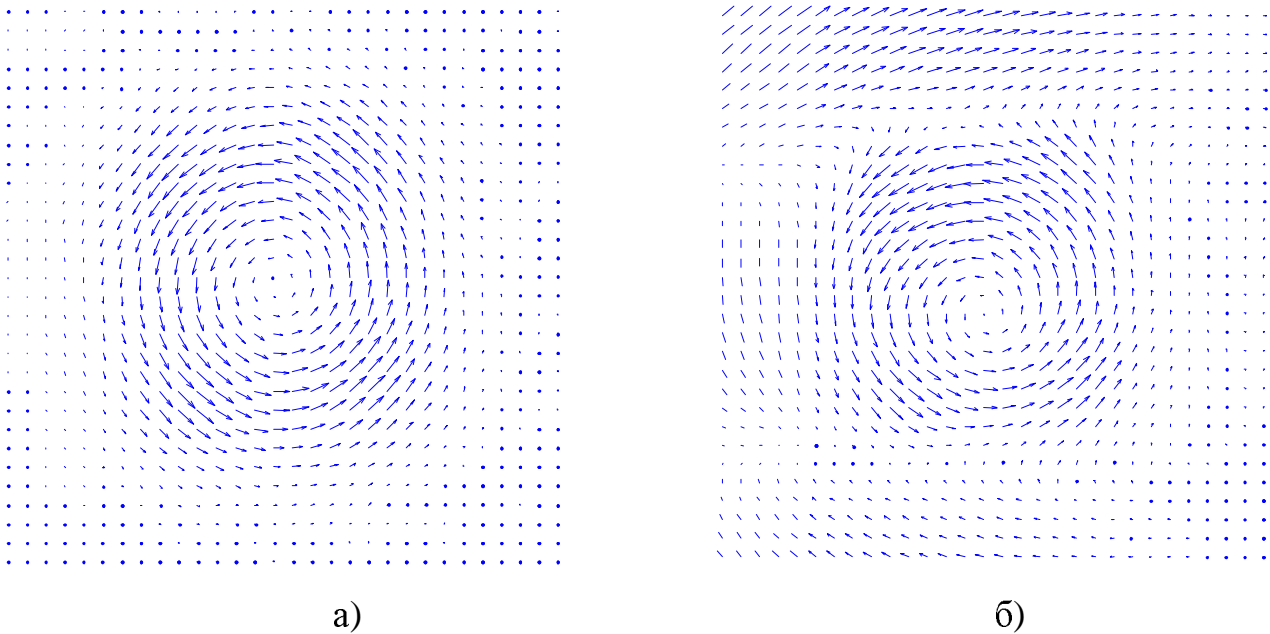
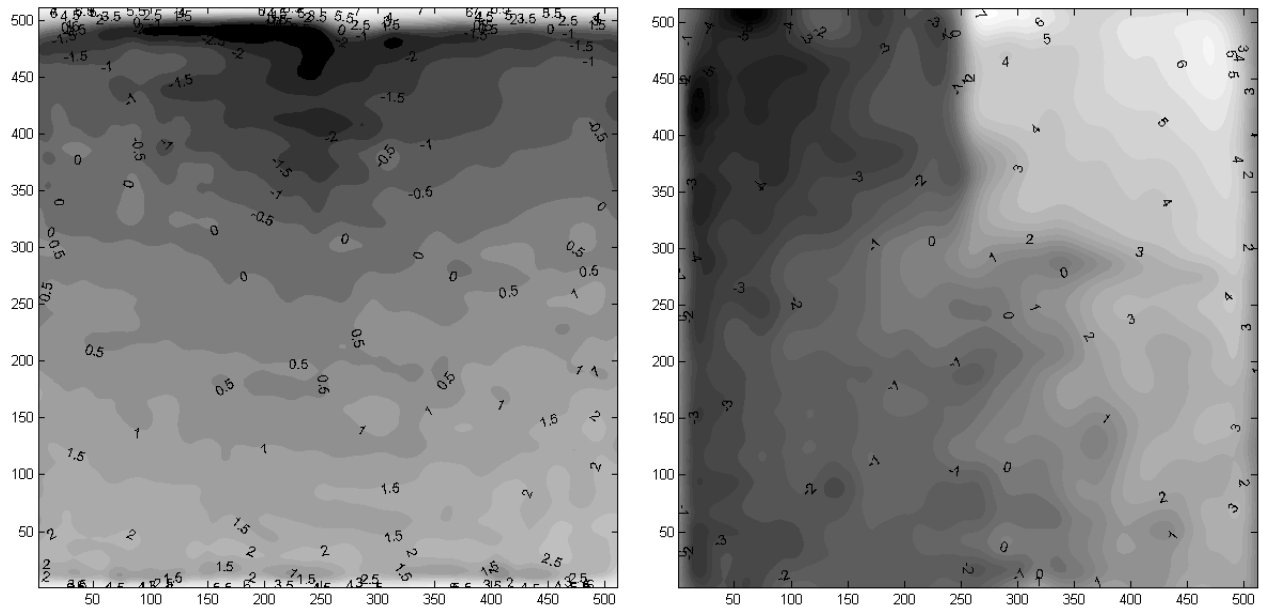


Рис. 8.8. Векторне представлення розв’язку $\hat{\mathbf{h}}(x, y)$ задачі погодження зображень на рис. 8.7.а та рис. 8.7.б для різних моделей апіорних даних: моделі лінійно-пружного тіла - а); моделі анізотропної дифузії - б)

Неперервність обчисленої функції відмінності отримано за рахунок регуляризації. Для реєстрації пружних деформацій застосовано регуляризацію, що використовує модель лінійно-пружного тіла. Процеси тріщиноутворення не описуються лінійною теорією пружності. Тому перспективним видається пошук інших регуляризаторів, які б більш точно відповідали особливостям шуканої функції відмінності і функції переміщень. Одним із можливих підходів є регуляризація, що базується на моделі анізотропної дифузії. Підхід передбачає залежно від текстури досліджуваного зображення наявність розривів у шуканій функції відмінності.



а)

б)

Рис. 8.9. Зображення розв'язку задачі погодження тестових зображень у вигляді контурів однакового рівня: функція переміщень $\hat{u}(x, y)$ - а) та функція переміщень $\hat{v}(x, y)$ - б)

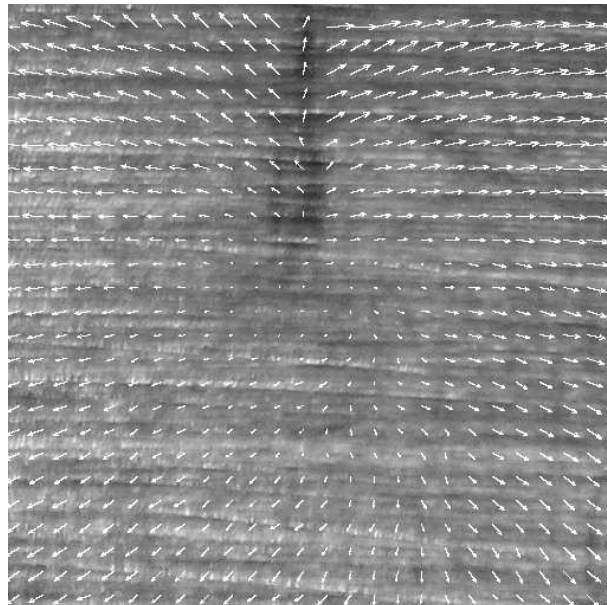


Рис. 8.10. Векторне поле переміщень \hat{h} , обчислене згідно з варіаційним підходом до розв'язання задачі погодження тестових зображень

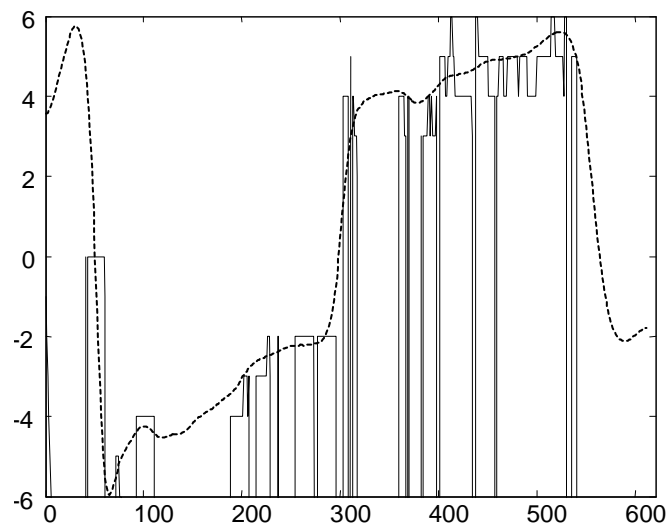


Рис. 8.11. Порівняння результатів розв'язання задачі погодження $\hat{u}(x_o, y)$, отриманих кореляційним методом (суцільна лінія) та на основі варіаційного підходу (пунктирна лінія)

Іншим прикладом застосування розвинутого варіаційного підходу до погодження зображень є тривимірна реконструкція поверхні. Погодження є одним з важливих етапів реконструкції, що використовує зображення об'єкта, зафіксовані з різних позицій спостереження. На рис. 8.12 подано приклад поверхні металевого взірця, реконструйованої за її стереозображенням (рис. 8.3). Метод реконструкції описано в роботах [301,302] та реалізовано в [15]. Як видно, пропорційність розмірів синтезованої поверхні у тривимірному просторі вказує на достовірність погодження стереозображень, здійснених на основі варіаційного підходу.

8.3. Реєстрація 3D переміщень поверхні

Дослідження двовимірних деформацій та переміщень елементів об'єкта в площині екрана камери, що фіксує його зображення, дає лиш часткове уявлення про характер поверхні. Розвинуті підходи до тривимірної реконструкції у теорії комп'ютерного бачення, а також представлений варіаційний метод погодження зображень, дають можливість узагальнити методи погодження зображень на випадок тривимірного простору.

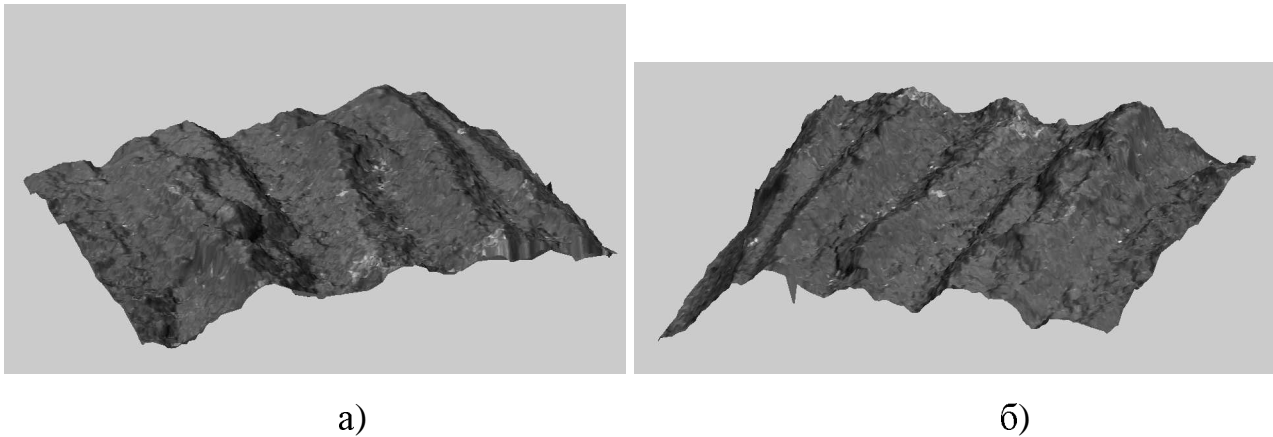


Рис. 8.12. Приклади відображення реконструйованої поверхні металевого взірця для різних позицій спостереження

Метою дослідження, результати якого висвітлено у цьому розділі, є створення методологічних засад здійснення непрямих вимірювань, які б дозволили оцінити 3D переміщення елементів поверхні досліджуваних взірців, що змінюють свою форму внаслідок прикладених до них зусиль.

При деформації об'єкта погодження у тривимірному просторі можна звести до встановлення векторного значення переміщень елементів поверхні у просторі тривимірних координат. Вважаємо, що вихідними даними для цього є набір зображень об'єкта, зафіксованих у процесі його деформації.

Теорія комп'ютерного бачення визначає умови, за яких можна здійснити тривимірну реконструкцію поверхні об'єкта дослідження. Достатньою умовою реконструкції є наявність двох сфокусованих зображень I' та I'' , зареєстрованих каліброваною камерою з різних позицій. Нехай $m_1 = [m'_1, m''_1] \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ є матрицею, що містить координати точок на екранах (зображення I'_1 та I''_1) двох камер, які відображають точку M поверхні об'єкта з координатами $M_1 \in \mathbb{R}^3$. Після деформації ця ж точка розташовується з координатами $M_2 \in \mathbb{R}^3$. Відповідно, її проекції на екрани (зображення I'_2 та I''_2) двох камер будуть мати нові значення координат $m_2 = [m'_2, m''_2] \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Внаслідок деформації поверхні вектор переміщення точки M у 3D можна визначити як різницю координат (рис. 8.13) цієї точки перед та після деформації:

$$T = M_2 - M_1. \quad (8.36)$$

У задачі погодження у тривимірному просторі значення $T = [dX, dY, dZ]^T$ цього вектора є невідомим. Вхідними ж даними є координати відображення точки M на екранах камер m_1 та m_2 перед та після деформації, відповідно.

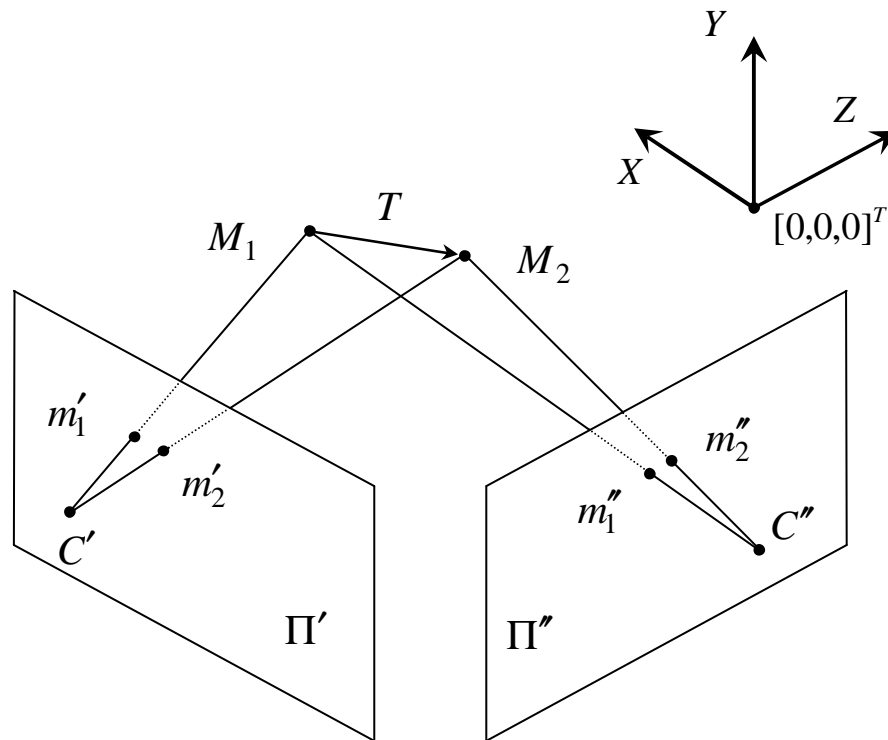


Рис. 8.13. Проеціювання точки M , що належить до поверхні об'єкта, на екрани двох камер перед та після деформації

Нехай оптична стереосистема, що реєструє деформацію об'єкта, має незмінні параметри. Отже, процес тривимірної реконструкції можна описати абстрактним оператором $\mathbf{S}: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$M_1 = \mathbf{S}(m_1) \text{ та } M_2 = \mathbf{S}(m_2). \quad (8.37) \text{ та } (8.38)$$

Знаходження цього оператора зводиться до процедури, описаної в [15, 301] для стереопари.

Оскільки за умовою задачі точка M належить поверхні об'єкта перед та після його деформації, то існує взаємозв'язок між координатами точок m_2 та m_1

відображення точки M . Щоб охарактеризувати цей взаємозв'язок, уведемо оператор $\mathbf{G} : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ такий, що:

$$m_2 = \mathbf{G}(m_1). \quad (8.39)$$

Тепер вектор переміщення точки M можна виразити функціональною залежністю координат проєціювання точки на один із екранів камер:

$$T = \mathbf{S}(m_2) - \mathbf{S}(m_1) = \mathbf{S}(\mathbf{G}(m_1)) - \mathbf{S}(m_1) = \mathbf{L}(m_1), \quad (8.40)$$

де відображення $\mathbf{L} : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^3$ діє як оператор реконструкції. Це вказує на те, що для визначення вектора переміщень точки M можна застосувати оператор реконструкції у простір 3D, попередньо привівши системи координат кожного з зображень до однієї спільної. Для цього необхідно встановити оператор $\mathbf{G} = [g', g'']$, який буде повністю визначатися геометрією стереосистеми, формою поверхні та характером деформації об'єкта дослідження.

Реальні об'єкти мають складну текстуру, а оптична система є сфокусованою і однозначно відображає кожну видиму точку на поверхні однією точкою є екрані кожної з камер. Тому оператор $\mathbf{G} = [g', g'']$ можна записати як рівність інтенсивності зображень у точках проєціювання: $I_1'(m_1') = I_2'(m_2') = I_2'(g'(m_1'))$ та $I_1''(m_1'') = I_2''(m_2'') = I_2''(g''(m_1''))$. Задача встановлення оператора \mathbf{G} , є погодженням зображень, а саме встановленням функцій відмінності h' та h'' для кожної з камер. Ці функції мають два ступеня свободи і співвідносяться до шуканого оператора \mathbf{G} , як $g' := 1 - h'$ та $g'' := 1 - h''$. В системі декартових координат екранів камер умова рівності інтенсивності відповідних точок на поверхні об'єкта перед та після його деформації набуває вигляду:

$$I_1'(x, y) = I_2'(x - u'(x, y), y - v'(x, y)) \text{ і } I_1''(x, y) = I_2''(x - u''(x, y), y - v''(x, y)) \quad (8.41) \text{ і } (8.42)$$

де x та y є елементами векторів $m = [x, y]^T$; u та v - елементи векторнозначних функцій відмінності $h = [u, v]^T$.

Встановивши основні співвідношення між вектором $T = [dX, sY, dZ]^T$ переміщень точок на поверхні та їх проєкцій на екранах камер $m_1 = [m_1', m_1'']^T$ та

$m_2 = [m'_2, m''_2]$ відповідно перед та після деформації, розв'язок задачі погодження у тривимірному просторі можна розділити на три етапи:

- 1) тривимірна реконструкція поверхні об'єкта перед та після деформації (знаходження відображення \mathbf{S});
- 2) погодження зображень у різні моменти часу (обчислення розподілу вектора переміщень у площині екрану камери, тобто знаходження функції відмінності h');
- 3) перерахунок розподілу вектора переміщень h' у розподіл вектора переміщень T як векторнозначної функції, область визначення якої є простором координат точок поверхні об'єкта.

8.3.1. Особливості реєстрації стереозображень при знаходженні переміщень поверхні у тривимірному просторі. Теоретичне обґрунтування розв'язку задачі встановлення переміщень поверхні об'єкта у тривимірному просторі вказує на те, що точність розв'язку буде залежати від того, наскільки точно буде здійснено реконструкцію поверхні у тривимірному просторі та погодження зображень перед та після деформації. Якщо питання щодо погодження зображень висвітлено детально у попередньому пункті даного розділу, то реєстрацію стереозображення та ідею тривимірної реконструкції поверхні за стереопарою описано в [15, 301, 302].

Як відомо, точність тривимірної реконструкцій є тим більшою, чим точніше відомі значення параметрів як камери, так і всієї системи, яка формує стереозображення. Як правило, параметри камер (фокусна відстань, координати основної точки та інші), а також геометрію їх взаємного рознесення та орієнтацію оптичних осей встановлюють непрямыми методами. Таким чином вдається уникнути похибок вимірювання цих параметрів. Для забезпечення їх стабільності та усунення джерела похибок, що можуть виникати в процесі експериментальної реєстрації стереозображення, запропоновано методику формування стереопари за допомогою однієї камери та системи дзеркал.

Основна ідея формування стереозображення однією камерою полягає у тому, що за допомогою зафіксованих дзеркал на її екрані отримують одночасно

зображення того ж самого об'єкта з різних точок спостереження. На рис. 8.14 схематично приведено структуру системи формування стереозображення однією камерою та наведено приклад експерименту для визначення 3D переміщень елементів поверхні внаслідок деформації.

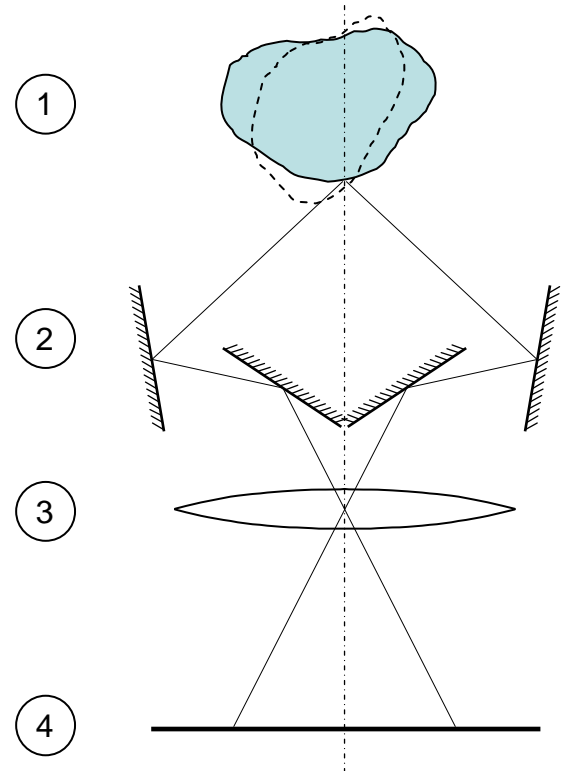


Рис. 8.14. Експериментальна система формування стереопари для реєстрації переміщень у тривимірному просторі: 1 - об'єкт, переміщення поверхні якого досліджується; 2 - система дзеркал, що формують стереопару; 3 - оптична система камери; 4 - екран камери, на якому реєструється стереозображення

Запропонований підхід до формування зображення дозволив забезпечити незмінність параметрів стереосистеми, що формує стереозображення на різних стадіях деформації об'єкта спостереження. Крім того, така схема експерименту дозволяє достатньо точно обчислити параметри рознесення та взаємної орієнтації віртуальних камер, які реєструють стереозображення. Для цього використано методику оцінювання епіпольярної геометрії стереосистеми, що може бути здійснено для довільного тестового об'єкта. У даному випадку застосували калібраційну сітку, вузли якої на зображеннях стереопари вдалося просто виявити та погодити. Непрямий метод вимірювання параметрів рознесення та орієнтації дзеркал, які

формують віртуальну стереопару, усуває потребу їх прецизійної орієнтації. Використання однієї камери замість двох дозволяє суттєво зменшити вартість обладнання для реєстрації переміщень у тривимірному просторі.

На рис. 8.15 дано приклад зображень експериментального взірця, переміщення поверхні якого реєструють запропонованою системою формування стереопари. Як видно, на екрані камери проєціюються два зображення поверхні об'єкта, отримані під різним ракурсом спостереження. Зображення отримані на двох етапах деформації крученням.

Для покращення збіжності ітераційного методу погодження зображень, вибрано об'єкт із текстурованою поверхнею.

8.3.2. Результати обчислення переміщень поверхні за експериментальними даними. З метою тривимірної реконструкції поверхні, що здійснюється на кожному з етапів деформації об'єкта, систему формування зображень попередньо прокалібрували. При цьому отримали елементи калібраційної матриці для правої та лівої проєкцій, а також фундаментальну матрицю, що описує епіполярну геометрію стереосистеми. Це дало змогу визначити проєкційні оператори для правої і лівої частин стереопари.

Погодження зображень об'єкта у площині проєціювання перед та після його деформації дало можливість вибрати злічену множину погоджених точок для тривимірної реконструкції. Ця множина зображена на рис. 8.16. В системі тривимірних координат подано дві множини точок реконструйованої поверхні - перед та після деформації, які відображено різною яскравістю.

Визначені на етапі реконструкції значення координат погоджених точок поверхні перед і після деформації дозволяють безпосередньо обчислити вектор переміщень для кожної їх пари. На рис. 8.17 показано орієнтацію системи координат, в якій знайдено вектор переміщень елементів поверхні об'єкта відносно площини проєціювання зображення. Визначені розподіли переміщень для кожної з трьох компонент вектора $T = [dX, dY, dZ]$ зображено на рис. 8.18.

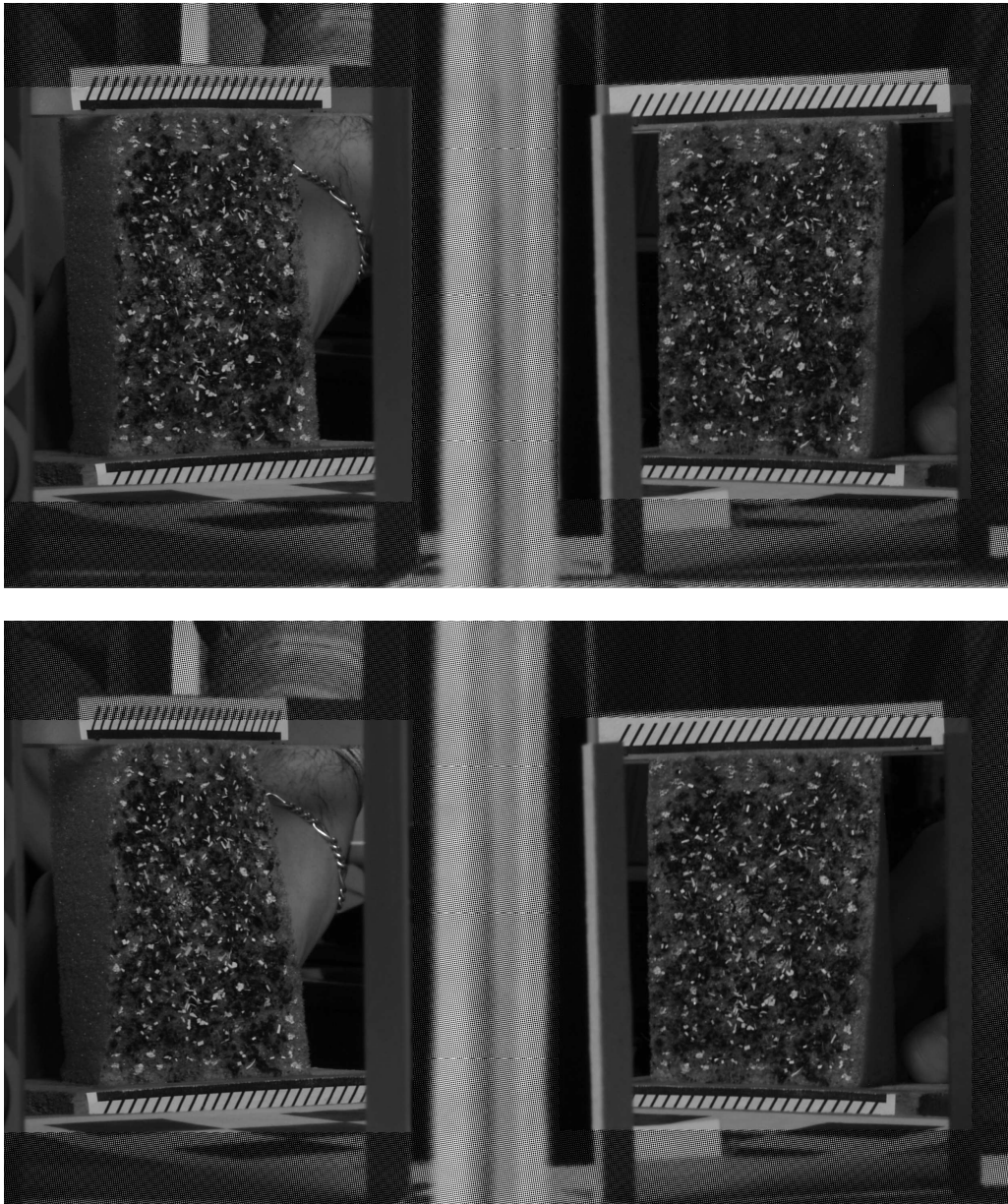


Рис. 8.15. Приклади стереозображень, зафіксованих на різних етапах деформації крученням тестового об'єкта

Векторна форма зображення результату обчислень переміщень є більш наочною. Так, на рис. 8.19 у тривимірному просторі приведено множину векторів переміщення точок поверхні об'єкта, визначених у вузлах регулярної сітки. На рис. 8.19.б додатково показано реконструйовану поверхню, переміщення якої визначали.

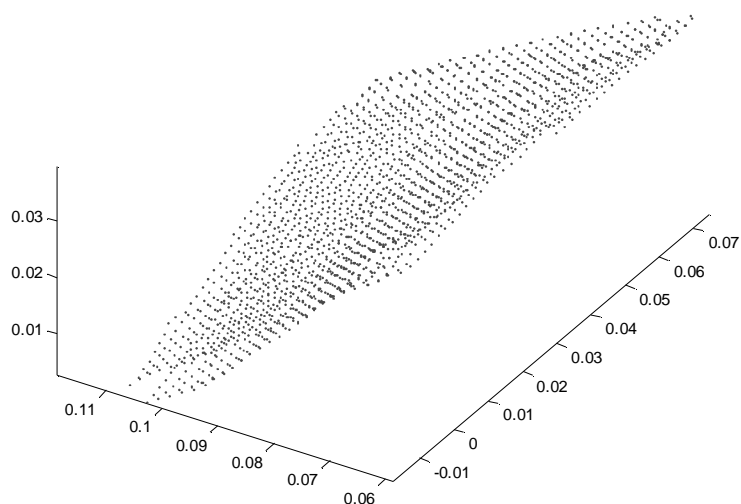


Рис. 8.16. Точкове зображення реконструйованих поверхонь об'єкта на двох етапах деформації (кручення)

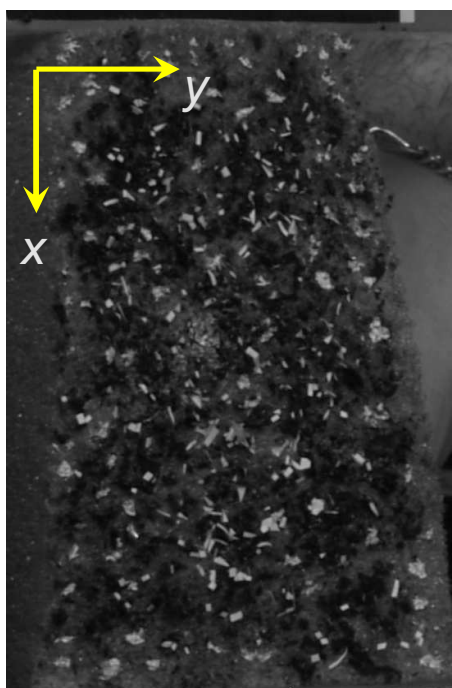


Рис. 8.17. Проекція, в площині якої обчислено розподіли переміщень

8.4. Висновки до восьмого розділу

Особливості погодження зображень та встановлення значень вектора переміщень поверхні деформованого об'єкта у тривимірному просторі вказують на доцільність формулювання окремих висновків щодо отриманих результатів:

відмінності є неперервною функцією (рис. 8.11), у той час як метод погодження, який базується на знаходженні максимуму дискретної функції кореляції, дає результат у вигляді квантованої функції (з точністю до величини розміру сітки дискретизації зображення).

2) Реєстрацію 3D переміщень елементів поверхні об'єкта розв'язано на основі розвинутого підходу до погодження зображень методом варіації та як задачі тривимірної реконструкції об'єкта за зображеннями з рознесених камер. Для забезпечення точності обчислення розподілу переміщень вздовж поверхні об'єкта запропоновано формувати стереозображення однією камерою та знаходити вектор переміщень у довільно вибраних точках поверхні. У запропонованому методі регуляризований розв'язок задачі щільного погодження зображень отримано параметризацією, що відповідає моделі анізотропної дифузії. Такий підхід дав можливість непрямыми методами оцінити параметри оптичної системи, що формує стереозображення, та забезпечити їх стабільність при спостереженні процесу деформації.

Достовірність результатів підтверджено поетапним оцінюванням точності кожної з процедур для обчислення вектора переміщень як у випадку погодження зображень, так і при погодженні форм (оцінювання 3D переміщень). Крім того, особливості задачі погодження дають можливість оцінити точність її розв'язку на основі порівняння штучно деформованого вихідного зображення згідно з знайденою функцією відмінності та оригіналом. Результати порівняння вказують на ефективність розвинутих підходів та методів.

З наведених вище аргументів видно, що погодження зображень може мати безпосереднє застосування у металографії, фрактографії, трибології та аналізі мікроструктури поверхні структурних матеріалів. Характер поверхні та розподіл вектора переміщень дає можливість фахівцям в області матеріалознавства зробити висновок щодо фізико-хімічних властивостей досліджуваного взірця. Такий метод також істотно збільшує інформативність оптичних засобів вимірювання для аналізу деформацій і стійкості схилів земної поверхні.

ВИСНОВКИ

У дисертації розвинуто математичні моделі опису взаємодії електромагнітного поля з неоднорідними середовищами та вирішено науково-прикладну проблему підвищення ефективності оцінювання параметрів таких середовищ в одновимірному та двовимірному випадках за відомими даними розсіювання. Це складає вагомий внесок у розвиток теорії обернених задач електродинаміки і має важливе прикладне значення для вирішення задач неруйнівного контролю в різних галузях машинобудування, зокрема в будівництві, суднобудуванні, аерокосмічній галузі та для здійснення підповерхневого зондування неоднорідних середовищ у геології та археології. При цьому отримано такі наукові та практичні результати.

1. Проаналізовано сучасний стан теорії розсіювання електромагнітних хвиль та теорії розв'язання обернених задач розсіювання як найбільш обґрунтованого підходу до непрямого оцінювання параметрів неоднорідних середовищ. Огляд показав, що побудові моделей та методів встановлення параметрів неоднорідних середовищ з неперервною зміною матеріальних параметрів та контрастними включеннями, приділялося недостатньо уваги. Саме таким моделям відповідають більшість реальних об'єктів дослідження в неруйнівному контролі та дистанційному зондуванні. Відмінності математичного формулювання задачі розсіювання на контрастних включеннях від формулювання задачі розсіювання у середовищах з неперервно-змінними електричними параметрами істотно ускладнюють знаходження оцінок параметрів таких середовищ за розсіяним полем. Відповідно питання побудови моделей, які є зручними для створення нових методів знаходження параметрів за розсіяним полем, є актуальною проблемою.

2. Показано, що моделі у вигляді рівняння типу Шредінгера та рівняння типу Дірака можуть адекватно описувати процеси розсіювання електромагнітних хвиль, дозволяють проводити аналіз на предмет єдиності розв'язку обернених задач розсіювання та будувати конструктивні методи їх розв'язання для різних формулювань. Для цього встановлено залежності, які дають можливість виразити потенціали в рівняннях типу Шредінгера та типу Дірака через функції діелектричної

проникності за умови ідентичності асимптотичної поведінки розв'язків цих рівнянь та розв'язків рівнянь Максвелла для різних випадків, де відбувається взаємодія електромагнітного поля з неоднорідним середовищем, в якого параметри змінюються вздовж однієї координати. Окрім того, розроблений підхід, який полягає у приведенні вихідних даних обернених задач розсіювання до моделей у вигляді розв'язків Йоста для відповідних рівнянь, що в свою чергу дає змогу у одновимірному випадку коректно враховувати наявність розривів в функціях матеріальних параметрів кусково-неперервного неоднорідного середовища, які мають місце на поверхнях розділу. Такий підхід дає можливість знаходити оцінки параметрів середовищ, оперуючи скінченими тригонометричними сумами, та скористатися аналітичними властивостями розв'язків Йоста в електродинамічному формулюванні обернених задач розсіювання. В результаті досягнуто зменшення середньоквадратичної похибки оцінювання у порівнянні з відомим методом у 1.4 разів.

3. Розроблений метод числового розв'язання інтегрального рівняння Вольтерри другого роду, до якого приведено одновимірну обернену задачу розсіювання з метою обчислення функції розсіюючого потенціалу в моделі у вигляді рівняння типу Дірака, що в свою чергу, дозволяє знайти розподіл електричних параметрів досліджуваного середовища за відомою матрицею розсіювання при нормальному падінні плоскої хвилі. Показано, що точність такого підходу є на 8 відсотків вищою від відомих методів, а обчислювальна складність є істотно меншою за рахунок рекурентного способу знаходження оберненої матриці. Окрім того, показано, що з асимптотичної поведінки коефіцієнтів матриці розсіювання у високочастотній області можна встановити параметри поверхонь розділу для середовищ із кусково-неперервними функціями параметрів. Середньоквадратична похибка такого методу в порівнянні з методом, що не враховує високочастотну асимптотику коефіцієнта відбиття менша в 7.6 раз. Вперше розроблено також метод синтезу плоско-неоднорідних діелектричних структур за заданою кутовою залежністю коефіцієнта відбиття, що дає можливість створювати плоскі діаграмо-формуючі поверхні антенних систем.

4. Розвинуто підхід до розв'язання обернених задач розсіювання, в яких вихідні дані задано абсолютним значенням частотозалежних коефіцієнтів матриці розсіювання та окреслено умови знаходження однозначного розв'язку такої задачі. Встановлено випадки, в яких ця задача має скінчену кількість розв'язків. Такий підхід базується на реконструкції комплексно-значних коефіцієнтів у розв'язках Йоста за неповними вихідними даними та дає змогу здійснювати оцінку параметрів плоско-шаруватих структур без застосування коштовних когерентних квадратурних детекторів для здійснення вимірювань.

5. Створено та обґрунтовано підхід, який полягає у приведенні обернених задач розсіювання до задачі Гільберта-Рімана, що вперше з єдиних позицій дозволив розв'язувати обернену спектральну задачу для сферично-симетричного радіального середовища за заданою множиною трансмісійних власних значень, довести теорему про існування єдиного розв'язку такої задачі, а також створити метод встановлення параметрів багат шарових структур за заданим коефіцієнтом відбиття у випадку повного відбиття хвиль від плоского екрану, який обмежує шарувату структуру. Такий підхід ґрунтується на аналітичних властивостях розв'язків Йоста, які використано як модель опису взаємодії електромагнітних хвиль із шаруватим середовищем. Відмінності нового підходу від відомих дають можливість застосувати його для неруйнівного контролю ізолюючих та захисних покриттів у випадку, коли вихідні дані задано у скінченій смузі частот та дає можливість здійснювати оцінювання параметрів з середньоквадратичною похибкою, що в 11.4 раз є меншою у порівнянні з відомим методом.

6. Розвинуто модель процесу спостереження, яка описує електромагнітне поле, що є наслідком дифракції хвиль на контрастних розсіювачах, та має форму множини інтегральних перетворень від функцій з виділеними випадковими та детермінованими параметрами. Така форма дає змогу розглядати вихідні дані оберненої задачі розсіювання як реалізації випадкового процесу та будувати оцінки детермінованих параметрів, що характеризують форму розсіювача, використовуючи принципи усереднення. Вірогідність такого підходу до опису розсіяного поля

полягає у тому, що при граничному переході обґрунтована модель стає повністю детермінованою та відповідає відомим розв'язкам прямої задачі розсіювання.

Розроблено конструктивний підхід до побудови індикаторної функції, яка має властивість досягати максимуму на границі розділу середовищ. Це дало можливість створити різні методи розв'язання обернених задач розсіювання залежно від характеру вихідних даних та апіорних даних про розсіювач. На відміну від відомих методів, які за значеннями розсіяного поля встановлюють область, що займає розсіювач, розроблений підхід дозволяє ідентифікувати лише границю розсіювача. У поєднанні з розвинутими процедурами приведення вихідних даних до запропонованої моделі, створені методи розв'язання обернених задач розсіювання демонструють високу роздільну здатність як для випадків вихідних даних на фіксованій частоті для всіх кутів спостереження, так і для моностатичних вихідних даних, заданих на множині частот. Створені згідно з розробленим підходом методи володіють властивістю мінімізувати відгук лінійного просторового фільтра від розсіювачів, які знаходяться поза точкою, що аналізується.

7. Встановлено, що у часткових випадках дискретних моделей розсіювання важливою є оцінка порядку моделі, яка відповідає кількості розсіювачів, або визначається кількістю поверхонь розділу шаруватого середовища. Показано, що високої точності розв'язання оберненої задачі розсіювання для дискретних моделей можна досягнути за умови, коли порядок моделі є відомим. Це стосується оцінки координат точкових розсіювачів, а також оцінки коефіцієнтів тригонометричних сум у розв'язках Йоста при аналізі плоско-шаруватих структур. Для цього розв'язано задачу оцінки порядку дискретної моделі, яка зводиться до оптимізаційної задачі для функції з одним екстремумом, яку побудовано, виходячи з властивостей коваріаційної матриці спостережень. Показано, що для оцінювання кутів приходу плоских хвиль від двох джерел випромінювання можна встановити аналітичний розв'язок, який дозволяє зменшити ефект двопробного розповсюдження хвилі при реєстрації сигналів чотириелементною приймальною антенною від джерела електромагнітного поля, розташованого над плоскою

розсіювальною поверхнею. Достовірність теоретичних положень перевірено експериментально.

8. Розвинуто метод розв'язання оберненої задачі для встановлення поля переміщень поверхні об'єкта, що деформується під дією навантажень, за фіксованими його проекціями в різні моменти часу. Регуляризований розв'язок задачі щільного погодження зображень при цьому отримано шляхом параметризації, яка відповідає моделі анізотропної дифузії. Новизна результату полягає у тому, що три ортогональні проекції векторного поля переміщення вдається обчислити за стерео-зображеннями без використання складної когерентної оптичної системи. Достовірність отриманих результатів підтверджено експериментально.

Отримані в дисертації результати можуть бути використані при створенні пристроїв обробки вимірних даних у системах дистанційного зондування та у засобах неруйнівного контролю. Знайдені умови існування розв'язку обернених задач розсіювання та точності характеристики оцінювання параметрів неоднорідних середовищ можуть служити критеріями вибору структури таких вимірювальних систем та планування вимірювань. Узагальнені результати щодо вибору моделей та підходів до розв'язання обернених задач є вагомим теоретичним результатом, а відтак їх можна використати у навчальному процесі при підготовці курсів «математичне моделювання», «числовий аналіз», «методи математичної фізики», «радіотехнічні систем та комплекси», «методи неруйнівного контролю» і інших.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

- [1] Назарчук З.Т. Виявлення підповерхневих неоднорідностей у діелектричних матеріалах радіохвильовим надвисокочастотним методом / З.Т. Назарчук, В.Р. Джала, А.Т. Синявський // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2013. – Т.49, № 4. - С. 7-22.
- [2] Nazarchuk Z.T. Reconstruction of the impedance Schrödinger equation from the modulus of the reflection coefficients / Z.T. Nazarchuk, R.O. Hryniv, A.T. Synyavskyy // Wave Motion. – 2012. – Vol.49, Issue 8. – P. 719–736.
- [3] Назарчук З.Т. Наближений розв'язок оберненої задачі розсіювання для плоскої діелектричної структури з ідеально провідною основою / З.Т. Назарчук, А.Т. Синявський // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2012. – Т. 55, №1. – С.168-178.
- [4] Назарчук З.Т. Розв'язання оберненої задачі проходження нормально падаючої електромагнітної хвилі крізь шарувату діелектричну структуру / З.Т. Назарчук, Р.О. Гринів, А.Т. Синявський // Радиофизика и радиоастрономия. – 2011. – Т. 16, №3. - С. 269-281.
- [5] Назарчук З.Т. Апроксимація розв'язку оберненої задачі розсіювання електромагнітних хвиль на плоских діелектриках / З.Т. Назарчук, А.Т. Синявський // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2011. – Т. 47, № 1. - С. 7-17.
- [6] Назарчук З.Т. Розв'язання оберненої задачі дифракції через реконструкцію матриці розсіювання в обмеженому частотному діапазоні / З.Т. Назарчук, А.Т. Синявський // Доповіді Національної академії наук України. Математика, природознавство, технічні науки. - 2010. - № 10. - С. 61-67.
- [7] Назарчук З.Т. Визначення характеристик шаруватої структури за реконструйованою з коефіцієнтів відбиття матрицею розсіювання / З.Т. Назарчук, А.Т. Синявський // Радиофизика и радиоастрономия. – 2010. – Т. 15, № 3. - С. 295-313.
- [8] Синявський А.Т. Числовий розв'язок одновимірної зворотної задачі розсіювання

електромагнітних хвиль на основі рівняння Захарова-Шабата / А.Т. Синявський // Відбір і обробка інформації. – 2009. - Вип. 30(106). - С. 5-12.

- [9] Synyavskyy A.T. High-resolution recovering of discontinuities of permittivity profile from band-limited reflection measurements / A.T. Synyavskyy, M. Shahin // Відбір і обробка інформації. – 2009. – Вип. 29(105). - С. 10-20.
- [10] Синявський А.Т. Реєстрація просторових переміщень поверхні під час деформації макрооб'єктів / А.Т. Синявський, Б.П. Русин, Ю.В. Обух // Відбір і обробка інформації – 2008. – Вип. 28(104). - С. 67-75.
- [11] Synyavskyy A.T. Spectral analysis in problems of electromagnetic sources detection and multilayer structures identification / A.T. Synyavskyy, V.P. Antonyuk, M.V. Lobur, Ye.I. Klepfer // Radioelektronika i informatika. - 2008. - № 4. - P. 50-56.
- [12] Синявський А.Т. Визначення розподілу поверхневих переміщень на основі варіаційного підходу до обробки послідовності зображень / А.Т. Синявський, Б.П. Русин, Л.Я. Іваницький // Відбір і обробка інформації. – 2006. - Вип. 24(100). - С. 91-98.
- [13] Синявський А.Т. Ідентифікація плоскої структури з неперервним профілем діелектричної проникності за кутовою залежністю її коефіцієнта відбиття / А.Т. Синявський, Ю. Модельський // Радіоелектроніка та телекомунікації. - 2006. - № 557. - С. 127-134.
- [14] Синявський А.Т. Метод просторової фільтрації сигналу від джерела випромінювання розташованого над розсіюючою поверхнею / А.Т. Синявський, В.П. Антонюк, В.Г. Грек, М.В. Лобур, Є.І. Клепфер // Радіоелектроніка і інформатика. - 2006. - № 1. - С. 16-20.
- [15] Синявський А.Т. Реалізація методу реконструкції мікроструктури поверхні за її стереозображенням з оптичних камер / А.Т. Синявський, Б.П. Русин // Радіоелектроніка і інформатика. - 2005. - № 2. - С. 112-118.
- [16] Синявський А.Т. Оцінка можливості розв'язання зворотної задачі дифракції аналітичними методами / А.Т. Синявський, Є.М. Ящишин, Дж. Модельський // Комп'ютерні системи проектування. Теорія і практика. - 2003. - № 471. -

С. 125-135.

- [17] Прудюс І.Н. Моделювання процесів формування радіолокаційних портретів методом моментів з використанням Wavelet-функцій / І.Н. Прудюс, Й.А. Захарія, А.Т. Синявський // Радиотехника. – 2002. – Вып. 130. - С. 90-96.
- [18] Прудюс І.Н. Дослідження кореляційних властивостей багатофазних послідовностей максимальної довжини / І.Н. Прудюс, В.-М.В. Міський, А.Т. Синявський // Моделювання та інформаційні технології. – 2002. - № 14. - С. 188-196.
- [19] Прудюс І.Н. Перетворення функцій розподілу випадкових величин в задачах нелінійної обробки зображень / І.Н. Прудюс, А.Т. Синявський // Радіоелектроніка та телекомунікації. - 2002. - № 440. - С. 83-93.
- [20] Synyavskyy A. Wavelet-based MAP image denoising using provably better class of stochastic I.I.D. image models / A. Synyavskyy, S. Voloshynovskiy, I. Prudyus // Facta Universitatis Series: Electronics And Energetics. – 2001. - Vol. 14. No. 3. - P. 375-385.
- [21] Прудюс І.Н. Статистичні властивості зображень, сформованих когерентними радіолокаційними системами / І.Н. Прудюс, А.Т. Синявський // Радіоелектроніка та телекомунікації. - 2001. - № 428. – С. 90-98.
- [22] Prudyus I.N. Generalized radar/radiometry imaging problems / I.N. Prudyus, S.V. Voloshynovskiy, A.T. Synyavskyy, T.S. Holotyak, L.V. Lazko // Journal of telecommunications and information technology. – 2001. – No 4 (1). – P. 15-20.
- [23] Прудюс І.Н. Побудова дальнісного профілю радіолокаційних зображень на основі локально-інваріантного підходу / І.Н. Прудюс, А.Т. Синявський, Л.В. Лазько // Електроенергетичні та електромеханічні системи. - 2001. - № 418. - С. 147-153.
- [24] Варецкий Я.Ю. Разработка средств классификации растительности по высоте по данным лазерного отражения в среде AutoCAD / Я.Ю. Варецкий, А.Т. Синявский, Ю.В. Обух, Ю.И. Грыцкий // ГеоИнжиниринг. - 2008. - № 1(5). - С. 27-33.
- [25] Nazarchuk Z. A method of inverse scattering problem solution for penetrable objects

using back-scattering data / Z. Nazarchuk, M. Shahin, R. Hryniv, A. Synyavskyy // Direct and inverse problems of electromagnetic and acoustic wave theory (DIPED-2015): international seminar/workshop, 21-24 september 2015: proc. – Lviv: Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, 2015. - P. 23-26.

- [26] Назарчук З.Т. Метод розв'язання обернених електродинамічних задач розсіювання для ідентифікації точок границі розсіювачів / З.Т. Назарчук, Р.О. Гринів, А.Т. Синявський // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики (APAMCS-2015): всеукраїнська наукова конференція, 24-25 вересня 2015 р. – праці конференції: - Львів: Львівський Національний Університет ім. Івана Франка, 2015. - С. 233-236.
- [27] Nazarchuk Z.T. A new sampling method for an inverse scattering problem solution through Born approximation and high-resolution spectral analysis / Z.T. Nazarchuk, A.T. Synyavskyy, M. Shahin // Обчислювальні методи і системи перетворення інформації: науково-технічна конференція, 25-26 вересня 2014 р.: збірник праць. – Львів: ФМІ ім. Г.В.Карпенка НАН України, 2014. – С. 135-138.
- [28] Synyavskyy A. On the solvability of inverse transmission eigen-values problem for wave equation with a spherically-symmetric piecewise-constant wave speed / A. Synyavskyy // Direct and inverse problems of electromagnetic and acoustic wave theory (DIPED-2013): international seminar/workshop, 23-26 september 2013: proc. – Lviv: Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, 2013. - P. 250-253.
- [29] Джала В.Р. Радіохвильовий неруйнівний контроль композитних матеріалів з локальними неоднорідностями / В.Р. Джала, А.Т. Синявський // Електроніка та інформаційні технології (ЕЛІТ-2012): науково-практична конференція, 30 серпня-2 вересня 2012 р.: тези доповідей. - Львів-Чинадієво: Львівський Національний Університет ім. Івана Франка, 2012. - С. 77-79.
- [30] Джала В.Р. Радіохвильовий НВЧ неруйнівний контроль діелектричних та композитних матеріалів / В.Р. Джала, А.Т. Синявський // Неруйнівний контроль та технічна діагностика: національна науково-технічна конференція і виставка,

20–23 листопада 2012 р.: матеріали конференції. - Київ, 2012. - С. 216-220.

- [31] Джала В.Р. Радиоволновой неразрушающий контроль диэлектрических композитных материалов с локальными дефектами / В.Р. Джала, А.Т. Синявський // Композиционные материалы в промышленности: міжнародна конференція, 4–8 червня 2012 р.: матеріали конференції. – Ялта, 2012.- С. 201-202.
- [32] Nazarchuk Z. Hilbert-Riemann problems in recovering parameters of a plane layered dielectric on conducting substrate / Z. Nazarchuk, A. Synyavskyy, M. Shahin // Direct and inverse problems of electromagnetic and acoustic wave theory (DIPED-2011): international seminar/workshop, 26-29 september 2011: proc. – Lviv: Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, 2011. – P. 86-89.
- [33] Synyavskyy A. Characterization of solutions to the inverse scattering problem for Helmholtz equation with given absolute value of the reflection coefficient / A. Synyavskyy, M. Shahin, Z. Nazarchuk // Функціональний аналіз: міжнародна конференція, 17-21 листопада 2010 р.: – праці конференції. - Львів: Львівський Національний Університет ім. Івана Франка, 2010. - С. 65-66.
- [34] Synyavskyy A. One-dimensional electromagnetic inverse scattering problem for discontinuity function of permittivity / A. Synyavskyy, Z. Nazarchuk // Інтегральні рівняння: міжнародна конференція, 25-27 серпня 2010 р.: тези доповідей. – Львів: Львівський Національний Ун-т ім. Івана Франка, 2010. – С.152-156.
- [35] Синявський А. Реконструкція неперервної функції провідності на основі розв'язання одновимірної оберненої задачі розсіювання / А.Т. Синявський // Радіофізика, Електроніка, Фотоніка та Біофізика: Харківська конференція молодих науковців Інституту радіофізики та електроніки ім. О.Я.Усикова НАН України, 1-3 грудня 2009 р.: тези доповідей. – Харків, 2009. – С. 109.
- [36] Synyavskyy A. Near-field shape reconstruction of a two-dimensional perfect conductor by multiple random excitations / A. Synyavskyy, M. Shahin // Direct and inverse problems of electromagnetic and acoustic wave theory (DIPED-2009): international seminar/workshop, 21-24 september 2013: proc. – Lviv Pidstryhach

Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, 2009. - P. 219-222.

- [37] Synyavskyy A.T. High-resolution electromagnetic imaging in a plain layered structure / A.T. Synyavskyy, M. Shahin // The Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM'2009): міжнародна конференція, 24-28 лютого 2009 р.: праці конференції. – Поляна-Львів: НУ “ЛП”, 2009. - С. 158-162.
- [38] Modelski J. A new numerical method for Zakharov-Shabat's inverse scattering problem solution / J. Modelski, A. Synyavskyy // Microwaves, Radar and Wireless Communications (MIKON'2006): international conference, 22-24 May 2006: proc. – Krakow (Poland), 2006. - Vol.1 - P. 191-194.
- [39] Synyavskyy A.T. Identification of plane layered structure from specified angular characteristic of reflectivity / A.T. Synyavskyy, J. Modelski // Modern Problems of Radio Engineering, Telecommunications and Computer Science (TCSET'2006): міжнародна конференція, 28 лютого – 4 березня 2006 р.: праці конференції. – Славське-Львів: НУ “ЛП”, 2006. - P. 256-259.
- [40] Синявський А.Т. Особливості реалізації варіаційного підходу до погодження зображень / Синявський А.Т. // Проблеми корозійно-механічного руйнування, інженерія поверхні, діагностичні системи: відкрита науково-технічна конференція молодих науковців і спеціалістів Фізико-Механічного Інституту ім. Г.В.Карпенка НАН України, 21-23 вересня. 2005 р.: збірник праць. - Львів, 2005. – С. 363-366.
- [41] Synyavskyy A. Three-dimensional reconstruction of the microstructure surface from its stereo images / A. Synyavskyy, B. Rusyn // Telecommunications in Modern Satellite, Cable and Broadcasting Services (TELSIKS'2005): international conference, 28-30 september 2005: proceedings of papers. - Niš (Serbia): University of Niš, 2005. - P. 449-502.
- [42] Modelski J. Inversion based approach to synthesis of plane multilayered structures with specified scattering pattern / J. Modelski, A. Synyavskyy // 34-th European Microwave Conference (European Microwave Week): international conference; 11-15 october 2004: proceedings of papers. – Amsterdam (Netherlands), 2004. –

Vol. 2. - P. 885–888.

- [43] Synyavskyy A. Four-element smart antenna for direction estimation and fading reduction in two-wave propagation condition / A. Synyavskyy, K. Kurek, J. Modelski, Y. Yashchyshyn // 6-th European conference on wireless technology (European Microwave Week 2003): international conference, 9-10 october 2003: proceedings of paper. - Munich (Germany). – P. 191-195.
- [44] Synyavskyy A. Determination of multilayered permittivity profile from specified angular dependence of reflection coefficient / A. Synyavskyy, J. Modelski, Y. Yashchyshyn // Direct and inverse problems of electromagnetic and acoustic wave theory (DIPED-2003): international seminar/workshop, 23-25 september 2003: proc. – Lviv: Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, 2003. - P. 43-46.
- [45] Synyavskyy A. Synthesis of multilayered structures based on the approximation of one-dimensional inverse scattering problem solution / A. Synyavskyy, J. Modelski, Y. Yashchyshyn // Colloquium on microwave communications (MICROCOLL'2003): international conference 10-11 september 2003: proc. – Budapest (Hungary), 2003. - P. 181-184.
- [46] Yashchyshyn Y.M. Evaluation of possibilities of solving the inverse scattering problem for multilayered structures in the case of plane wave / Y.M. Yashchyshyn, A.T. Synyavskyy, J. Modelski // The experience of designing and application of CAD systems in microelectronics (CADSM'2003): міжнародна конференція, 18-22 лютого 2003: праці конференції. – Львів-Славське: НУ “ЛІП”, 2003. - P. 307-310.
- [47] Прудыус И.Н. Визуализация объектов микроволновыми однопозиционными радиолокационными системами / И.Н. Прудыус, А.Т. Синявский // СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии (КрыМиКо'2002): международная конференция, 9-13 сентября 2002 г.: материалы конференции. – Севастополь: Вебер, 2002. – С. 558-600.
- [48] Synyavskyy A. Analytical form of distribution functions of received signals for high resolution coherent radar / A. Synyavskyy, N. Synyavska // Microwaves, Radar and

Wireless Communications (MIKON'2002): international conference, 20-22 may 2002: proc. - Gdansk (Poland), 2002. - Vol. 1. - P. 168-171.

- [49] Prudyus I. Nonlinear images processing based on a changing of distributions at parametric and nonparametric stochastic estimation / I. Prudyus, A. Synyavskyy // Modern problems of radio engineering, telecommunications and computer science (TCSET'2002): міжнародна конференція, 18-23 лютого 2002 р.: праці конференції. – Львів-Славське: НУ “ЛП”, 2002. – P.210–212.
- [50] Prudyus I. Beamforming in high resolution single-position imaging radars / I. Prudyus, A. Synyavskyy, L. Lazko // Telecommunications in modern satellite, cable and broadcasting services (TELSIKS'2001): international conference, 19-21 september 2001: proc. – Niš (Yugoslavia): University of Niš , 2001. - Vol. 1. - P. 53-56.
- [51] Прудюс І.Н. Особливості числового моделювання процесів розсіювання на основі Wavelet перетворення / І.Н. Прудюс, Й.А. Захарія, А.Т. Синявський // Актуальні проблеми теоретичної електротехніки: наука і дидактика: спільно українсько-польська школа-семінар, 3-7 вересня 2001 р.: збірник рефератів. – Алушта: НУ “ЛП” - Politechnika Warszawska, 2001. - С. 144-147.
- [52] Prudyus I.N. Numerical solution of scattering problem of space-nonuniform waves at radar imaging process simulation / I.N. Prudyus, Y.A. Zakharia, A.T. Synyavskyy // Zastosowania elektromagnetyzmu w nowoczesnych technicach i informatyce: scientific conference, 25-27 june 2001: proc. – Bydgoszcz-Wenecija (Poland): Polskie Towarzystwo Zastosowań Elektromagnetyzmu, 2001. - P. 100-103.
- [53] Roeseler W.G. Composite structures: the first 100 years / W.G. Roeseler, B. Sarh, M.U. Kismarton // Composite materials: 16-th international conference (ICCM'2007), July 8-13, 2007: conference papers - Kyoto, Japan, 2007. - P. 1-10.
- [54] Ключев В.В. Неразрушающий контроль и диагностика: Справочник / В.В. Ключев. - [2-е изд.] – М.: Машиностроение, 2003. – 656 с.
- [55] Chadan K. Inverse problem in quantum scattering theory / K. Chadan, P.C. Sabatier. – Springer-Verlag: New-York, 1997. – 347 p.

- [56] Pike R. Scattering and inverse scattering in pure and applied science / R. Pike, P. Sabatier. – San Diego: Academic press, 2002. – 1831 p.
- [57] Newton R.G. Inverse Schrödinger scattering in three dimensions / R.G. Newton. - Berlin: Springer Verlag, 1989. – 170 p.
- [58] An introduction to inverse scattering and inverse spectral problems / K. Chadan, D. Colton, L. Päivärinta, W. Rundell. – SIAM, 1997. – 208 p.
- [59] Неразрушающий контроль: Справочник: В 8 т. / Под общ. ред. В.В. Клюева. Т. 6: В 3 кн. Кн. 1: В.В. Клюев, В.Ф. Мужичкий, Э.С. Горкунов, В.Е. Щербинин. Магнитные методы контроля. Кн. 2: В.Н. Филинов, А.А. Кеткович, М.В. Филинов. Оптический контроль. Кн. 3: В.И. Матвеев. Радиоволновой контроль. – [2-е изд.] – М.: Машиностроение, 2006. – 832 с.
- [60] Chen F.C. Time-domain ultra-wideband radar system for nondestructive evaluation / F.C. Chen, W.C.Chew // URSI Radio science meeting, July 21-26, 1996: proceedings. - Baltimore, MD, 1996. - P. 179.
- [61] Cristofani E. Nondestructive testing potential evaluation of a terahertz frequency-modulated continuous-wave imager for composite materials inspection / E. Cristofani, F. Friederich, S. Wohnsiedler [et al.]// SPIE Opt. Eng. – 2014. - Vol. 53, No. 3. - Art. 031211.
- [62] Gladwell G.M.L. Inverse problems in scattering: An introduction / G.M.L. Gladwell. – Springer, 1993. – 380 p.
- [63] Orfanidis S.J. Electromagnetic waves and antennas / S.J. Orfanidis. - Piscataway, NJ: Rutgers University Press, 2008. – 973 p.
- [64] Бреховских Л.М. Акустика слоистых сред / Л.М. Бреховских, Л.М. Годин. - М.: Наука, 1989. – 416 с.
- [65] Cui T.J. Nonlinear differential equation for the reflection coefficient of an inhomogeneous lossy medium and its inverse scattering solutions / T.J. Cui, C.H. Liang // IEEE Trans. Antenna and propagations. - 1994. - Vol.42, No.5. - P. 621-626.
- [66] Goupillaud P.L. An approach to inverse filtering of near-surface segment effects from seismic records / P.L. Goupillaud // Geophysics. – 1961. – Vol.26, No.6 – P.754–760.

- [67] Colton D. Integral equation methods in scattering theory / D. Colton, R. Kress. - SIAM, 2013. – 271 p.
- [68] Monk P. Finite element methods for Maxwell's equations / P. Monk. - Oxford University Press, 2003. – 450 p.
- [69] Nazarchuk Z.T. Singular integral equations in diffraction theory / Z.T. Nazarchuk. - Lviv: Physico-mechanical institute, 1994. – 210 p.
- [70] Stratton J.A. Electromagnetic theory / J.A. Stratton. - New-York, NY: McGraw-Hill Book Company, Inc. - 1941. – 640 p.
- [71] Chew W.C. Waves and field in inhomogeneous media / W.C. Chew. - New-York, NY: IEEE Press, 1995. – 632 p.
- [72] Марков Г.Т. Возбуждение электромагнитных волн / Г.Т. Марков, А.Ф. Чаплин, М.-Л.: Энергия, 1967. – 191 с.
- [73] Barnetta A.H. Stability and convergence of the method of fundamental solutions for Helmholtz problems on analytic domains / A.H. Barnetta, T. Betckeb // Journal of Computational Physics. - 2008. – Vol. 227, Issue 14. - P. 7003–7026.
- [74] Beylkin G. Fast Wavelet transforms and numerical algorithms I / G. Beylkin, R. Coifman, V. Rokhlin // Comm. Pure Appl. Math. - 1991. – Vol. 44, Issue 2. – P. 141-183.
- [75] Ньютон Р. Теория рассеяния волн и частиц / Р. Ньютон. - М: Мир, 1969. – 600 с.
- [76] Рид М. Методы современной математической физики. Т. 3. Теория рассеяния / М. Рид, Б. Саймон.- М.: Мир, 1982. – 433 с.
- [77] Medgyesi-Mitschang L.N. Generalized method of moments for three-dimensional penetrable scatterers / L.N. Medgyesi-Mitschang, J.M. Putnam, M.B. Gedera // Journal of the Optical Society of America A. - 1994. - Vol. 11, Issue 4. - P. 1383-1398.
- [78] Lean M.H. Novel integral formulation for scattering from multilayered dielectric cylinders of arbitrary cross section / M.H. Lean // IEEE Transactions on Magnetics. - 2004. - Vol. 40, Issue. 2. - P. 1476–1479.

- [79] Kaklamani D.I. Aspects of the method of auxiliary sources (MAS) in computational electromagnetics / D.I. Kaklamani, H.T. Anastassiou // IEEE Antennas and Propagation Magazine. - 2002. - Vol. 44, No. 3. - P. 48–64.
- [80] Tang C.C.H. Backscattering from dielectric coated infinite cylindrical obstacles / C.C.H. Tang // J. Appl. Phys. - 1957. – Vol. 28, Issue 5. – P. 628-633.
- [81] Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1986. – 287 с.
- [82] Lavrentiev M.M. Some improperly posed problems of mathematical physics / M.M. Lavrentiev. - New York, NY: Springer, 1967. -75 p.
- [83] Blohbaum J. Optimisation methods for an inverse problem with time-harmonic electromagnetic waves: an inverse problem in electromagnetic scattering / J. Blohbaum // Inverse problems. - 1989. – Vol. 5, No 4. - P. 463-482.
- [84] Farhat C. On the solution of three-dimensional inverse obstacle acoustic scattering problems by a regularized Newton method / C. Farhat, R. Tezaur, R. Djellouli // Inverse Problems. - 2002. - Vol. 18, No 5. – P. 1229–1246.
- [85] Gutman S. Two versions of quasi-Newton method for multidimensional inverse scattering problem / S. Gutman, M. Klibanov // J. Comput. Acoust. - 1993. - Vol. 1, No. 2 - P. 197-228.
- [86] van den Berg R. Gradient methods in inverse acoustic and electromagnetic scattering / R. van den Berg, R. Kleinman // Large-scale optimization with applications, Part I: Optimization in inverse problems and design (eds. Biegler [et al.]). – Berlin: Springer, 1977. – P. 173–194.
- [87] Dorn O. Level set methods for inverse scattering. Topical review / O. Dorn, D. Lesselier // Inverse Problems. - 2006. - Vol. 22. – P. R67-R131.
- [88] Serranho P. A hybrid method for inverse scattering for shape and impedance / P. Serranho // Inverse Problems. – 2006. - Vol. 22, No 2. – P. 663–680.
- [89] Chapko R. A hybrid method for inverse boundary value problems for an inclusion in semi-infinite two-dimensional domains / R. Chapko, N. Vintoniyak // Journal of Integral Equations and Applications. - 2007. – Vol. 19, No 3. – P. 309-331.
- [90] Ramm A.G. Optimization methods in direct and inverse scattering / A.G. Ramm,

S. Gutman // Continuous Optimization. - 2005. – Vol. 99. – P. 51-110.

- [91] Goldberg D.E. Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning / D.E.Goldberg. –Boston, MA: Addison-Wesley, 1989. – 412 p.
- [92] Chakravarty S. Application of a microgenetic algorithm (MGA) to the design of broad-band microwave absorbers using multiple frequency selective surface screens buried in dielectrics / S. Chakravarty, R. Mittra, N.R. Williams // IEEE Trans. on Antennas and Propagation. - 2002. - Vol. 50. - P. 284-296.
- [93] Khruslov E.Ya. Review article: Inverse scattering method in electromagnetic sounding theory / E.Ya. Khruslov, D.G. Shepelsky // Inverse problems. - 1994. – Vol. 10, No 1. – P. 1-37.
- [94] Jaggard D. The electromagnetic inverse scattering problem for layered dispersionless dielectrics / D. Jaggard, P. Frangos // IEEE Transactions on Antennas. - 1987. - Vol. 35, Issue 8. – P. 934-946.
- [95] Aktosun T. Inverse theory: problem on the line. / T. Aktosun, M. Klaus // Scattering and inverse scattering in pure and applied science (eds. E.R. Pike, P.C. Sabatier). – London: Academic Press, 2001. - P. 770-785.
- [96] Newton R.G. Inversion of reflection data for layered media: a review of exact methods / R.G. Newton // Geophysical Journal International. - 1982. – Vol. 69, No. 2. - P. 571-572.
- [97] Фаддеев Л.Д. Обратная задача квантовой теории рассеяния / Л.Д. Фаддеев // Успехи математических наук. - 1959. – Т. 14, Вып. 4(88). -С. 57–119.
- [98] Delsarte J. Sur certaines transformations fonctionelles relative aux equations lineaires aux derives partielles du second ordre / J. Delsarte // C.R. Acad. Sci. Paris. -1938. - Vol. 206. - P. 178-182.
- [99] Марченко В.А. Некоторые вопросы теории дифференциального оператора второго порядка / В.А. Марченко // ДАН. – 1950. – Т. 72. - С. 457-460.
- [100] Марченко В.А. Восстановление потенциальной энергии по фазе рассеянных волн / В.А.Марченко // ДАН. – 1955. – Т. 104. - С. 695-698.
- [101] Гельфанд И.М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции / И.М. Гельфанд, Б.М. Левитан // Известия АН СССР,

Сер. матем. – 1951. – Т. 15, № 4. – С. 309-360.

- [102] Агранович Ж.С. Обратная задача теории рассеяния / Ж.С. Агранович, В.О. Марченко. – Харьков: Видавництво Харківського державного університету, 1960 – 267 с.
- [103] Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения / В.А. Марченко. – К.: Наукова думка, 1977. – 332 с.
- [104] Крейн М.Г. Об определении потенциала частицы по ее S-функции / М.Г. Крейн // ДАН СССР. - 1955. – Т. 105, №3. - С. 433-436.
- [105] Kay I. Inverse scattering papers: 1955-1962 / I. Kay, H.E. Moses - Brookline, Mass: Math Sci Press, 1982. –306 p.
- [106] Burridge R. The Gelfand-Levitan, the Marchenko, and the Gopinath-Sondhi integral equations of inverse scattering theory, regarded in the context of inverse impulse-response problems / R. Burridge // Wave Motion. - 1980. – Vol. 2, Issue 4. - P. 305-323.
- [107] Coen S. Inverse scattering of a layered and dispersionless dielectric half-space, Part I: Reflection data from plant waves at normal incidence / S. Coen // IEEE Trans. Antennas Propagation. - 1981. - Vol. 29. - P. 726-732.
- [108] Balanis G.N., Inverse scattering: determination of inhomogeneities in sound speed / G.N. Balanis // J. Math. Phys. - 1982. - Vol. 23, No 12.- P. 2562-2568.
- [109] Krueger R.J. Inverse problems for nonabsorbing media with discontinuous material properties / R.J. Krueger // Journal of mathematical physics. - 1982. – Vol. 23, No 3. - P.396-404.
- [110] Bruckstein A.M. Inverse scattering with noisy data / A.M. Bruckstein, I. Koltracht, T. Kailath // SIAM J. Sci. Stat. Comput. - 1986. – Vol. 7, No 4. - P.1331-1349.
- [111] Tijhuis A.G. Electromagnetic inverse profiling: theory and numerical implementation / A.G. Tijhuis.- Zeist: VSP, 1987. - 466 p.
- [112] Березанский Ю.М. О теореме единственности в обратной задаче спектрального анализа для уравнения Шредингера / Ю.М. Березанский // Труды ММО. – 1958. – № 7. – С. 3-62.
- [113] Kay I. The inverse scattering problem when the reflection coefficient is a rational

function / I. Kay // *Comm. Pure Appl. Math.* - 1960. - Vol. 13. - P. 371-393.

- [114] Albeverio S. Inverse scattering for discontinuous impedance Schrodinger operators: a model example / S. Albeverio, R. Hryniv, Ya. Mykytyuk // *Journal of Physics A.* – 2011. - Vol. 44. – P. 345204-345212.
- [115] Aktosun T. Wave scattering in one dimension with absorption / T. Aktosun, M. Klaus, C. van der Mee // *J. Math. Phys.* - 1998. – Vol. 39, No. 4. – P. 1957-1992.
- [116] Krueger R.J. An inverse problem for a dissipative hyperbolic equation with discontinuous coefficients / R.J. Krueger // *Quart. of Applied Math.* – 1976. – Vol. 34, No. 2. – P. 129-147.
- [117] Jaulent M. Inverse scattering problem in absorbing media / M. Jaulent // *J. Math. Phys.* – 1976. – Vol. 17, No. 7. – P. 1351-1360.
- [118] Kristensson G. Direct and inverse scattering in time domain for a dissipative wave equation. Part 2: Simultaneous reconstruction of dissipation and phase velocity profile / G. Kristensson, R.J. Krueger // *J. Math Phys.* – 1987. - Vol. 28, No. 2. - P. 360-370.
- [119] van der Mee C. Inverse scattering for a Schrödinger equation with energy dependent potential / C. van der Mee, V. Pivovarchik // *J. Math. Phys.* - 2001. – Vol 42, No 1. – P. 158-181.
- [120] Jaulent M. The inverse s-wave scattering problem for a class of potentials depending on energy / M. Jaulent, C. Jean // *Communications in Mathematical Physics.* - 1972. – Vol. 28, No. 3. - P. 177-220.
- [121] Thaller B. *The Dirac Equation* / B. Thaller. – Berlin, Springer, 1992. - 357 p.
- [122] Nizhnik L.P. *Inverse scattering problems for hyperbolic equations* / Nizhnik L.P. - К.: Naukova Dumka, 1991. – 232 с.
- [123] Jaulent M. The inverse scattering problem for LCRG transmission lines / M. Jaulent // *J. Math. Phys.* – 1982. – Vol. 23, No. 12. – P. 2286-2290.
- [124] Захаров В.Е. Точная теория двумерной самофокусировки в одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах / В.Е. Захаров, А.Б. Шабат // *Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики.* – 1971. – Вып. 61, № 1(7). – С. 118-134.

- [125] Ablowitz M.J. The inverse scattering transform-Fourier analysis for nonlinear problems / M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newell, H. Segur // *Studies in Appl. Math.* – 1974. – Vol. 53, No. 4. - P. 249-315
- [126] Faddeev L.D. Quantum theory of solitons / L.D. Faddeev, V.E. Korepin // *Physics Reports.* - 1978. – Vol. 42, Issue 1. – P. 1–87.
- [127] Sattinger D.H. Energy dependent scattering theory / D.H. Sattinger, J. Szmigielski // *Differential Integral Equations.* - 1995. – Vol. 8, No 5. – P. 945–959.
- [128] Jaulent M. Connection between Zakharov-Shabat and Schrödinger-type inverse-scattering transforms / M. Jaulent, I. Miodek // *Lettere al Nuovo Cimento.* - 1977. – Vol. 20, Issue 18. – P. 655-660.
- [129] Tsutsumi M. On the inverse scattering problem for the one-dimensional Schrödinger equation with an energy dependent potential / M. Tsutsumi // *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* - 1981. - Vol. 83, Issue 1.- P. 316–350.
- [130] Shepelsky D. A Riemann-Hilbert problem for propagation of electromagnetic waves in an inhomogeneous, dispersive waveguide / D. Shepelsky // *Math. Phys. Anal. Geom.* – 2000. – Vol. 3, No. 2. - P. 179-193.
- [131] Shepelsky D. The inverse problem of reconstruction of the medium's conductivity in a class of discontinuous and increasing functions / D. Shepelsky // *Spectral operator theory and related topics. Advances in soviet mathematics* (ed. V.A. Marchenko). – Providence: AMS, 1994. – Vol. 19. – P. 209-232.
- [132] Hryniv R. Inverse spectral problems for energy-dependent Sturm-Liouville equation / R. Hryniv, N. Pronska // *Inverse Problems.* - 2012. – Vol. 28, No 8. – P. 085008-085027.
- [133] Бердичевский М.Н. Модели и методы магнитотеллурики / В.И. Бердичевский, В.И. Дмитриев. - М.: Научный мир, 2009. – 680 с.
- [134] Boutet de Monvel A. Inverse scattering problem for a stratified bi-isotropic medium at oblique incidence / A. Boutet de Monvel, D. Shepelsky // *Inverse Problems.* – 1998. – Vol. 14, No. 1. – P. 29-40.
- [135] Kristensson G. The inverse scattering problem for a homogeneous bi-isotropic slab using transient data / G. Kristensson, S. Rikte // *Inverse problems in mathematical*

physics: lecture notes in physics, 1993. - Vol. 422. - P. 112-125.

- [136] Gopinath B. Inversion of the telegraph equation and the synthesis of nonuniform lines / B. Gopinath, M.M. Sondhi // *Proceedings of the IEEE*. - 1971. – Vol. 59, Issue 3. - P. 383-392.
- [137] Krueger R.J. Inverse problems for nonabsorbing media with discontinuous material properties / R.J. Krueger // *Journal of mathematical physics*. - 1982. – Vol. 23, No. 3. - P. 396-404.
- [138] Grinberg N.I. The inverse scattering problem for the wave equation on the line with discontinuous velocity / N.I. Grinberg // *Russ. Math. Surv.* - 1988. – Vol. 43, No. 5. - P. 231-232.
- [139] Aktosun T. Recovery of discontinuities in a non-homogeneous medium / T. Aktosun, M. Klaus, C. van der Mee // *Inverse Problems*. – 1996. – Vol. 12, No. 1. – P. 1-25.
- [140] Aktosun T. Inverse wave scattering with discontinuous wave speed / T. Aktosun, M. Klaus, C. van der Mee // *Journal of Mathematical Physics*. – 1995. - Vol. 36, No. 6. - P. 2880-2928.
- [141] Cheney M. Recovery of surface parameters from stepped-frequency radar returns / M. Cheney, D. Isaacson, V.I. Lytle, S.F. Ackley // *Mathematics and Computers in Simulation*. - 1999. – Vol. 50, No. 5-6. – P. 527-539.
- [142] Sylvester J. Layer Stripping / J. Sylvester // *Surveys on solution methods for inverse problems* (ed. D.Colton [et al.]). – Vienna: Springer, 2000. – P. 83-106.
- [143] Yagle A.E. A layer stripping solution of the inverse problem for a one-dimensional elastic medium / A.E. Yagle, B.C. Levy // *Geophysics*. - 1985. – Vol. 50, No. 3. - P. 425-433.
- [145] Cheney M. Three-dimensional inverse scattering: layer-stripping formulas and ill-posedness results / M. Cheney, G. Kristensson // *Inverse Problems*. - 1988. - Vol. 4, No. 3. - P. 625-642.
- [146] Ware J.A. Continuous and discrete inverse-scattering problems in a stratified elastic medium. I. Plane waves at normal incidence / J.A. Ware, K. Aki // *The Journal of the acoustical society of America*. – 1969. - Vol. 45, No. 1. – P. 911-921.

- [149] Albeverio S. Inverse scattering for non-classical impedance Schrödinger operators / S. Albeverio, R.O. Hryniv, Y.V. Mykytyuk, P.A. Perry // *Operator methods in mathematical physics.* – Basel: Springer, 2013. – Vol. 227. – P. 1-42.
- [148] Дробахін О.О. Розв'язок зворотної задачі для багатошарових діелектричних структур: монографія // О.О. Дробахін, С.Г. Алексін. – Дніпропетровськ: ДНУ, 2012.– 237 с.
- [149] Yagle A.E. A layer stripping fast algorithm for reconstructing a lossy layered medium / A.E. Yagle // *J. Acoust. Soc. Am.* - 1987. – Vol. 82, No 3. – P. 927-936.
- [150] Klivanov M.V. The phase retrieval problem / M.V. Klivanov, P.E. Sacks, A.V. Tikhonravov // *Inverse Problems.* - 1995. –Vol. 11, No. 1. - P. 1-28.
- [151] Tikhonravov A.V. Numerical study of the phaseless inverse scattering problem in thin-film optics / A.V. Tikhonravov, M.V. Klivanov, I.V. Zuev // *Inverse Problems.* - 1995. – Vol. 11, No 1. – P. 251–270.
- [152] Aktosun T. Inverse problem on the line without phase information / T. Aktosun, P.E. Sacks // *Inverse Problems.* - 1998. - Vol. 14, No 2. – P. 211–224.
- [153] Kristensson G. Time domain inversion techniques for electromagnetic scattering problems. Invariant imbedding and inverse problems / G. Kristensson, R.J. Krueger // *Invariant Imbedding and Inverse Problems* [eds. J.P. Coronnes, G. Kristensson, P. Nelson, D.L. Seth], SIAM. - 1992. – Vol.63 – P. 1-29.
- [154] Weston V.H. On the inverse problem for a hyperbolic dispersive partial differential equation / V.H. Weston // *J. Math. Phys.* - 1972. – Vol. 13. – P. 1952-1956.
- [155] He S. Analysis of the Green's function approach to onedimensional inverse problems. I. One parameter reconstruction / S. He, S.I. Kabanikhin, V.G. Romanov, S. Ström // *J. Math. Phys.* - 1993. – Vol. 34. – P. 5724-5746.
- [156] Huang J.-I. Solution to the inverse problem of the 1-D wave equation / J.-I. Huang // *Journal of Mathematical Physics.* - 1989. - Vol. 30, Issue 3. - P. 735-744.
- [157] Carroll R. Impedance profile recovery from transmission data / R. Carroll, F. Santossa // *J. Acoustic Soc. Am.* - 1984. – Vol. 76, No 3. – P. 935-941.
- [158] Rakesh, Impedance inversion from transmission data for the wave equation / Rakesh, P. Sacks // *Wave Motion.* - 1996. – Vol. 24. - P. 263-274.

- [159] Jijun L. On uniqueness of an inverse problem for a 1-D wave equation from transmission data / L. Jijun, W. Yuanming // *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1997. - Vol. 57, No. 1. - P. 195-204.
- [160] Aktosun T. Inverse Schrödinger scattering on the line with partial knowledge of the potential / T. Aktosun // *SIAM J. Appl. Math.* - 1996. - Vol. 56, No. 1. - P. 360-370.
- [161] Batrakov D.O. Solution of a general inverse scattering problem using the distorted Born approximation and iterative technique / D.O. Batrakov, N.P. Zhuck // *Inverse Problems*. - 1994. - Vol. 10, No. 1. - P. 39-54.
- [162] Jordan A.K. Renormalization of an inverse-scattering theory for discontinuous profiles / A.K. Jordan, H.D. Ladouceur // *Phys. Rev. A*. - 1987. - Vol. 36, No. 9. - P. 4245-4253.
- [163] Akhar M. Reconstruction permittivity profiles using integral transforms and improved renormalization techniques / M. Akhar, A. Omar // *IEEE Trans. Microwave theory and techniques*. - 2000. - Vol. 48, No. 8. - P. 1385-1393.
- [164] Ge D.B. A direct profile inversion for weakly conducting layered medium / D.B. Ge, L.-J. Chen // *IEEE Transactions on Antennas*. - 1991. – Vol. 39, Issue 7. - P. 907-908.
- [165] Mikhnev V.A. Two-step inverse scattering method for one-dimensional permittivity profiles / V.A. Mikhnev, P. Vainikainen // *IEEE Trans. Antennas and propagation*. - 1995. - Vol. 48, No. 2. - P. 293-298.
- [166] Cui T.J. Reconstruction of the permittivity profile of an inhomogeneous medium using an equivalent network method / T.J. Cui, C.H. Liang // *IEEE Trans. Antennas and propagation*. - 1995. - Vol. 41, No. 12. - P. 1719-1726.
- [167] Колодий Б.И. Решение прямых и обратных задач неразрушающего волнового контроля слоистых диэлектриков с расслоениями / Б.И. Колодий, О.Б. Лящук // *Неразрушающие методы и средства контроля: X всесоюзная научно-техническая конференция, 1984 г.: тезисы доклада., ч. I – М., 1984. - С. 107.*
- [168] Лящук О.Б. Решение некоторых задач отражения электромагнитных волн от плоскостойких диэлектриков численными методами: дисертація на здобуття наукового ступеня канд. тех. наук / О.Б. Лящук. - Львів, 1987. – 237 с.
- [169] Джала В.Р. Метод і пристрій для вимірювання комплексного коефіцієнта

відбивання у радіохвильовому діапазоні довжин хвиль / В.Р. Джала, Л.І. Капко // Відбір і обробка інформації. – 2006. – Том 100, № 24. - С. 13-18.

- [170] Джала В.Р. Радіохвильова діагностика плоскошарових діелектриків на підставі розв'язку оберненої задачі / В.Р. Джала, Л.І. Капко // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2009. – Т. 45, № 3. - С. 117-122.
- [171] Оліярник Ю.П. Розв'язування оберненої задачі електромагнітного зондування шаруватих діелектриків інтервальним методом гілок і меж / Ю.П. Оліярник, Я.П. Кулинич // Відбір і обробка інформації. – 2003. – Том 95, № 19 - С. 16-21.
- [172] Rose J.H. Physical basis of three-dimensional inverse scattering for the plasma wave equation / J.H. Rose, B. DeFacio, M. Cheney // J. Optical Soc. of America, A. - 1985. – No 2. – P. 1954-1957.
- [173] Rose J.H. Three-dimensional inverse scattering: plasma and variable velocity wave equations / J.H. Rose, M. Cheney, B. DeFacio // J. Math. Phys. - 1985. – Vol. 26. – P. 2803-2813.
- [174] Coen S. Velocity and density of a two-dimensional acoustic medium from point source surface data / S. Coen, M. Cheney, A. Weglein // J. Math. Phys. - 1984. – Vol. 25. – P. 1857-1861.
- [175] Cheney M. Inverse scattering in dimension two / M. Cheney // J. Math. Phys. - 1984. – Vol. 25. - P. 94-107.
- [176] Фаддеев Л.Д. Обратная задача квантовой теории рассеяния. II / Л.Д. Фаддеев // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. – 1974. – Том 3. - P. 93–180.
- [177] Faddeev L.D. The inverse problem in the quantum theory of scattering / L.D. Faddeev // Uspekhi Mat. Nauk. - 1959. – Vol. 14, Issue 4(88). - P. 57–119.
- [178] Новиков Р.Г. $\bar{\partial}$ -уравнение в многомерной обратной задаче рассеяния / Р.Г. Новиков, Г.М. Хенкин // УМН. - 1987. – Том 42, № 3(255). – P. 93–152.
- [179] Henkin G.M. A multidimensional inverse problem in quantum and acoustic scattering / G.M. Henkin, R.G. Novikov // Inverse problem. - 1988. – Vol. 4, No. 1. - P. 103-121.
- [180] Novikov R.G. The $\bar{\partial}$ -approach to monochromatic inverse scattering in three dimensions / R.G. Novikov // Journal of Geometric Analysis. - 2008. - Vol. 18,

Issue 2. - P. 612-631.

- [181] Novikov R.G. The inverse scattering problem on a fixed energy level for the two-dimensional Schrodinger operator / R.G. Novikov // Journal of functional analysis. - 1992. – Vol. 103. –P. 409-463.
- [182] Novikov R.G. Rapid convergence approximation in inverse quantum scattering in dimension 2 / R.G. Novikov // Physics Letter A. - 1998. – Vol. 238. - P. 73-78.
- [183] Novikov R.G. Multidimensional inverse spectral problem for the equation $-\Delta\psi+(v(x)-Eu(x))\psi=0$ / R.G. Novikov // Functional Analysis and Its Applications. - 1988 Vol. 22, No. 4. - P. 263-272.
- [184] Isakov V. Inverse problems for partial differential equations / V. Isakov. - New York, NY: Springer-Verlag, 1998. - 284 p.
- [185] Colton D. Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory / D. Colton, R. Kress. – Berlin: Springer Verlag, 1992. – 305 p.
- [186] Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике / Н.И. Мусхелишвили. - М.: Наука, 1968. – 512 с.
- [187] Newton R. On a generalized Hilbert problem / R. Newton // Journal of Mathematical Physics. - 1982. - Vol. 23, No. 12. - P. 2257-2265.
- [188] Elschner J. Uniqueness in inverse transmission scattering problems for multilayered obstacles / J. Elschner, G. Hu // Inverse Problems Imaging. - 2011. – No. 5. – P. 793-813.
- [189] Beals R. Multidimensional inverse scattering and nonlinear partial differential equations / R. Beals, R.R. Coifman // Proc. Symp. Pure Math. - 1985. – Vol. 43. – P. 45-70.
- [190] Alexeenko N.V. Solution of three-dimensional acoustical inverse scattering problem based on Novikov-Henkin algorithm / N.V. Alexeenko, V.A. Burov, O.D. Romyantseva // Acoust. Phys. - 2005. – Vol. 51, No. 4. – P. 367-375.
- [191] Bogatyrev A.V. Numerical realization of algorithm for exact solution of two-dimensional monochromatic inverse problem of acoustical scattering /

A.V. Bogatyrev, V.A. Burov, S.A. Morozov, O.D. Rumyantseva, E.G. Sukhov // *Acoustical Imaging*. - 2000. – Vol. 25. – P. 65-70.

- [192] Burov V.A. Reconstruction of fine-scale structure of acoustical scatterer on large-scale contrast background / V.A. Burov, S.A. Morozov, O.D. Rumyantseva // *Acoustical Imaging*. - 2002. – Vol. 26. – P. 231-238.
- [193] Burov V.A. Exact solution for two-dimensional monochromatic inverse scattering problem and secondary sources space spectrum / V.A. Burov, S.A. Morozov, O.D. Rumyantseva, E.G. Sukhov [et al.] // *Acoustical Imaging*. - 2000. – Vol. 24. – P. 73-78.
- [194] Ramm A. Inverse problems. Mathematical and analytical techniques with application to engineering / A. Ramm. – New-York, NY: Springer, 2005. – 442 p.
- [195] Calderon A.P. On an inverse boundary value problem / A.P. Calderon // *Mat. apl. comput.*, 2006. - Vol. 25, No. 2-3. - P. 133-138.
- [196] Nachman A. Global uniqueness for a two-dimensional inverse boundary value problem / A. Nachman // *The Annals of Mathematics, Second Series*. - 1996. - Vol. 143, No. 1. - P. 71-96.
- [197] Sabatier P.C. Remark on the three-dimensional mixed impedance potential equation / P.C. Sabatier // *Inverse Problems*. - 1987. – Vol. 3, No. 4. – P. L83-L86.
- [198] Päivärinta L. Recovery of jumps and singularities in the multidimensional Schrödinger operator from limited data / L. Päivärinta, V. Serov // *Inverse problems and imaging*. - 2007. – Vol 1, No. 3. - P. 525-535.
- [199] Chung C.-B. Identification of spatially discontinuous parameters in second-order parabolic systems by piecewise regularization / C.-B. Chung, C. Kravaris // *Inverse problems*. - 1988. – Vol. 4.- P. 973-994.
- [200] Hopcraft K.I. An introduction to electromagnetic inverse scattering / K.I. Hopcraft, P.R. Smith. - Dordrecht: Springer, 1992. - 228 p.
- [201] Inverse problems in mathematical physics: proceedings of the Lapland conference on inverse problems, 14–20 June 1992, Saariselkä Finland, 14–20 June 1992 / eds. L. Päivärinta, E. Somersalo. – Berlin: Springer, 1993. – 256 p.

- [202] Cakoni F. Qualitative methods in inverse scattering theory / D. Colton, F. Cakoni – Berlin: Springer Verlag, 2006. – 227 p.
- [203] Colton D. The linear sampling method in inverse electromagnetic scattering / D. Colton, F. Cakoni, P. Monk. - SIAM, 2011. – 138 p.
- [204] Kirsch A. The factorization method for inverse problems / A. Kirsch, N. Grinberg. - Oxford University Press., 2008. - 207 p.
- [205] Potthast R. Point sources and multipoles in inverse scattering theory / R. Potthast. - Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2001. – 261 p.
- [206] Yaman F. A survey on inverse problems for applied sciences / F. Yaman, V. Yakhno, R. Potthast // Mathematical Problems in Engineering. – 2013. – Vol. 2013. – Article ID 976837. - 19 p.
- [207] Potthast R. A survey on sampling and probe methods for inverse problems. Topical Review / R. Potthast // Inverse Problems. - 2006. – Vol. 22. - P. R1-R47.
- [208] Sylvester J. The Dirichlet to Neumann map and applications / J. Sylvester, G. Uhlmann // Inverse problems in partial differential equations: conference, July 29–August 4, 1989 : proceedings. – Philadelphia: SIAM, 1990. - P. 101-139.
- [209] Uhlmann G.A. Developments in inverse problems since Calderon's foundational paper / G.A. Uhlmann // Harmonic analysis and partial differential equations. - Chicago, IL: Univ. Chicago Press, 1999. - P. 295-345.
- [210] Colton D. A simple method for solving inverse scattering problems in the resonance region / D. Colton, A. Kirsch // Inverse Problems. - 1996. - Vol. 12, No. 4. – P. 383–393.
- [211] Kress R. Linear integral equations / R. Kress. - New York, NY: Springer, 1999. – 412 p.
- [212] Guo Y. Toward a time domain approach to the linear sampling method / Y. Guo, P. Monk, D. Colton // Inverse problems. - 2013. –Vol. 29. – Art. 095016 (17 p.).
- [213] Kirsch A. The MUSIC-algorithm and the factorization method in inverse scattering theory for inhomogeneous media / A. Kirsch // Inverse Problems. - 2002. – Vol. 18. – P. 1025–1040.

- [214] Kirsch A. The factorization method for Maxwell's equations / A. Kirsch // *Inverse Problems*. - 2004. – Vol. 20. – P. S117–S134.
- [215] Kusiak S. The scattering support / S. Kusiak, J. Sylvester // *Comm. Pure Appl. Math.* – 2003. - Vol. 56, No. 11. – P. 1525–1548.
- [216] Ikehata M. Reconstruction of a source domain from the Cauchy data / M. Ikehata // *Inverse Problems*. - 1999. – Vol. 15. – P. 637–645.
- [217] Cakoni F. Transmission eigenvalues / F. Cakoni, H. Haddar // *Inverse Problems*. - 2013. – Vol. 29, No. 10. – P. 100201-100203.
- [218] Haddar H. An application of the reciprocity gap functional to electromagnetic inverse scattering theory / H. Haddar, D. Colton // *Inverse Problems*. - 2005. – Vol. 21, No 1. - P. 383-398.
- [219] Haddar H. Analysis of two linear sampling methods applied to electromagnetic imaging of buried objects / H. Haddar, F. Cakoni, M.B. Fares // *Inverse problems*. - 2006. - Vol. 22. - P. 845-867.
- [220] Borcea L. Filtering random layering effects in imaging / L. Borcea, F. Gonzalez del Cueto, G. Papanicolaou, C. Tsogka // *SIAM Multiscale Model. Simul.* - 2006. – Vol. 8, No 3. - P. 751-781.
- [221] Griesmaier R. An asymptotic factorization method for inverse electromagnetic scattering in layered media / R. Griesmaier // *SIAM J. Appl. Math.* - 2008. – Vol. 68.- P. 1378-1403.
- [222] Gustafsson M. An optimization approach to multi-dimensional time domain acoustic inverse problems / M. Gustafsson, S. He // *J. Acoust. Soc. Am.* - 2000. - Vol. 108, No. 4. -P. 1548-1556.
- [223] Gustafsson M. An optimization approach to two-dimensional time domain electromagnetic inverse problems / M. Gustafsson, S. He // *Radio Science*. - 2000. - Vol. 35, No. 2. - P. 525-536.
- [224] Gustafsson M. A wave-splitting based optimization approach to multi-dimensional time-domain electromagnetic inverse problems / M. Gustafsson, S. He // *Mathematics and Computers in Simulation*. – 1999. - Vol. 50, No. 5-6. - P. 541-551.
- [225] Maniatis T. Two-dimensional dielectric profile reconstruction based on spectral-

domain moment method and nonlinear optimization / T. Maniatis, K. Nikita, N. Uzunoglu // IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques. - 2000.- Vol. 48, No. 11.- P. 1831-1840.

- [226] Levenger K. A method for the solution of certain non-linear problems in least squares / K. Levenger // Quarterly of Applied Mathematics. - 1944. – Vol. 2. – P. 164–168.
- [227] Marquardt D. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters / D. Marquardt // SIAM Journal on Applied Mathematics, 1963. –Vol. 11, No 2. - P. 431–441.
- [227] Prosser R.T. Formal solution of the inverse scattering problem / R.T. Prosser // J. Math. Phys. - 1969. - Vol. 10.- P. 1819-1822.
- [228] Oristaglio M. Wavefield imaging and inversion in electromagnetics and acoustics : Report No. Et/EM 1995-21 / M. Oristaglio, H. Blok. - Delft: Centre for technical geoscience Delft university of technology, 2000. – 167 p.
- [229] Habashy T.M. On some inverse methods in electromagnetics / T.M. Habashy, R. Mittra // Journal of Electromagnetic Wave and Applications. - 1987. - Vol. 1, No. 1. - P. 25-58.
- [230] Boerner W.-M. Introduction to the special issue on inverse methods in electromagnetics / W.-M. Boerner, A. Jordan, I. Kay // IEEE Transactions on Antennas. - 1981. – Vol.29, Issue. 2. - P. 185-189.
- [231] Borcea L. High contrast impedance tomography / L. Borcea, J.G. Berryman, G.C. Papanicolaou // Inverse Problems. - 1996. – Vol. 12. - P. 835-858.
- [232] Natterer F. The mathematics of computerized tomography/ F. Natterer. - SIAM, 2001. - 226 p.
- [233] Langenberg K.-J. Inverse scattering with acoustic, electromagnetic and elastic waves as applied in nondestructive evaluation / K.J. Langenberg, M. Brandfass, R.Hannemann, (et al.) // Wavefield Inversion / ed.: A. Wirgin. – Vienna: Springer, 1999. - P. 59-118.
- [234] Langenberg K.J. Principles of microwave imaging and inverse scattering / K.J. Langenberg, M. Brandfass, K. Mayer, T. Kreutter, A. Brüll, A. Fellingner, D. Huo

// EARSel Advance in remote sensing, 1993. – Vol. 2, No. 1. - P. 163-186.

- [235] Devaney A.J. A filtered backpropagation algorithm for diffraction tomography / Devaney A.J. // Ultrason. Imag. - 1982. - Vol. 4. - P. 336–350.
- [236] Devaney A.J. Inversion formula for inverse scattering within the Born approximation / A.J. Devaney // Opt. Lett. - 1982. - Vol. 7, No 3. – P. 111-112.
- [237] Stolt R. Migration by Fourier transform / R. Stolt // Geophys. – 1978. - Vol. 43. - No. 1. - P. 23-48.
- [238] Sakamoto T. A target shape estimation algorithm for pulse radar systems based on boundary scattering transform / T. Sakamoto, T. Sato // IEICE Transactions on Communications. - 2004. - Vol. E87–B., No. 5.- P. 1357–1365.
- [239] Cheney M. A mathematical tutorial on synthetic aperture radar / M. Cheney // SIAM Rev. - 2001. - Vol. 43, No. 2. - P. 301–312.
- [240] Cheney M. Fundamentals of radar imaging / M. Cheney, B. Borden. – Philadelphia: SIAM, 2009. – 140 p.
- [241] Van Trees H.L. Optimum array processing. Part IV / H.L. Van Trees // Detection, estimation and modulation theory. – Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc., 2002. – 1317 p.
- [242] Capon J. High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis / J. Capon // Proc. IEEE. - 1969. - Vol. 57. – P, 1408-1418.
- [243] Bruckstein A.M. Inverse scattering for discrete transmission-line models / A.M. Bruckstein, T. Kailath // SIAM Review. - 1987. – Vol. 29, No. 3. - P. 359-389.
- [244] Никольский В.В. Электродинамика и распространение радиоволн / В.В. Никольский, Т.И. Никольская - М.: Наука, 1989. - 544 с.
- [245] Hryniv R. Inverse spectral problems for Dirac operators with summable potentials / R. Hryniv, S. Albeverio, Ya.V. Mykytyuk // Russian J. Math. Phys. – 2005. – Vol. 12, No. 4. – P. 406–423.
- [246] Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. - М.: Наука. Гл. ред. физ. -мат. лит., 1973. -749 с.
- [247] Deift P. Inverse scattering on the line / E. Deift, E. Trubowitz // Comm. Pure Appl. - 1979. - Vol. 32. – P. 121–251.

- [248] Poularikas A.D. The transforms and applications handbook / A.D. Poularikas - Boca Raton: CRC Press, 2000. – 1120 p.
- [249] Jaggard D.L. The electromagnetic inverse scattering problem for layered dispersionless dielectrics / D.L. Jaggard, P.V. Frangos // IEEE Trans. Antennas and Propagation. – 1987. – Vol. 35, No. 8. – P. 934-945.
- [250] Frangos P.V. A numerical solution to the Zakharov-Shabat inverse scattering problem / P.V. Frangos, P.V. Jaggard // IEEE Trans. Antennas and Propagation. – 1991. – Vol. 39, No. 1. – P. 74-79.
- [251] Xiao G. An efficient algorithm for solving Zakharov-Shabat inverse scattering problem / G. Xiao, K. Yashiro // IEEE Trans. Antennas and propagation. – 2002. – Vol. 50, Issue 6. – P. 807-811.
- [252] Sacks P. An inverse problem in coupled mode theory / P. Sacks // J. Math. Phys. -2004. – Vol. 45. - P. 1699-1710.
- [253] Khanh B.D. A numerical resolution of the Gelfand-Levitan equation / B.D. Khanh // Journal of Computational and Applied Mathematics. - 1996. – Vol. 72, Issue 2. – P. 235–244.
- [254] Ahmad F. A numerical solution to the Gel'fand-Levitan-Marchenko equation / F. Ahmad, M. Razzaghi // Appl. Math. Comput. - 1998. - Vol. 89, No 1-3. – P. 31-39.
- [255] Song G.-H. Inverse scattering problem for the coupled-wave equations when the reflection coefficient is a rational function / G.-H. Song, S.-Y. Shin // Proceedings of the IEEE. – 1983. – Vol 71, No. 2 – P. 266-268.
- [256] Gilbert R.P. Inverse problem for wave propagation in a perturbed layered half-space / R.P. Gilbert, K. Hackl, Y. Xu // Mathematical and Computer Modelling - 2007. – Vol. 45. - P. 21-33.
- [257] Solimene R. Localizing a buried planar perfect electric conducting interface by multi-view data / R. Solimene, R. Barresi, G. Leone // J. Opt. A: Pure Appl. Opt. - 2008. - Vol. 10, No.1. - P. 1-11.
- [258] Zhang H. An improved method for microwave nondestructive dielectric measurement of layered media / H. Zhang, S.Y. Tan, H.S. Tan // Progress In Electromagnetics Research B - 2008. - Vol. 10. - P. 145-161.

- [259] Hryniv R. Inverse scattering on the half-line for ZS-AKNS systems with integrable potentials / R. Hryniv, S. Manko // *Integr. Equ. Oper. Theory*. - 2016. – Vol. 84. – P. 323–355.
- [260] Aktosun T. Inverse problems for selfadjoint Schrödinger operators on the half line with compactly supported potentials / T. Aktosun, P. Sacks, M. Unlu // *Journal of Mathematical Physics*. - 2015. – Vol. 56, No 1 - P. 219–231.
- [261] Leung Y.-J. Complex transmission eigenvalues for spherically stratified media / Y.-J. Leung, D. Colton // *Inverse Problems*. - 2013. - Vol. 28, Issue 7. – P. 075005-075015.
- [262] Aktosun T. Reconstruction of the wave speed from transmission eigenvalues for the spherically symmetric variable-speed wave equation / T. Aktosun, V.G. Papanicolaou // *Inverse Problems*. - 2013. – Vol. 29, Issue 6.- P. 065007- 065025.
- [263] Kay S.M. *Fundamentals of Statistical signal processing: estimation theory* / Kay S.M. Kay. – Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1993. – 595 p.
- [264] Tribolet J.M. A new phase unwrapping algorithm / J.M. Tribolet // *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*. – 1977. - Vol. 25. - P. 170-177.
- [265] Bryant G.H. *Principles of microwave measurements* / G.H. Bryant. – London: IEE, 1993. - 415 p.
- [266] Вишин Г.М. *Многочастотная радиолокация* / Г.М. Вишин. - М., Воениздат., 1973. – 92 с.
- [267] Завьялов А.С. *Измерение параметров материалов на сверхвысоких частотах* / А.С. Завьялов, Г.Е. Дунаевский. – Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1985. – 215 с.
- [268] Roome S.J. Analysis of quadrature detectors using complex envelope notation / S.J. Roome // *IEE Proceedings F: Radar and Signal Processing*. – 1989. – Vol. 136, Issue 2. – P. 95–100.
- [269] Claerbout J.F., Synthesis of a layered medium from its acoustic transmission response / J.F. Claerbout // *Geophysics*. - 1968. – 33. – P. 264-269.
- [270] Yagle A.E. The lattice algorithm of linear prediction applied to the inverse scattering problem given transmission data / A.E. Yagle // *Acoustics, speech, and signal Processing : international conference (ICASSP-88), 11-14 April 1988: proceedings*. -

New York City, 1988. - Vol. 3. - P. 1655-1658.

- [271] Тихонов А.Н. Методы оптимизации второго порядка в задачах синтеза многослойных покрытий / А.Н. Тихонов, А.В. Тихонравов, М.К. Трубецков // Ж. вычисл. матем. и матем. Физики – 1993. – Т. 33, № 10. - С.1518-1535.
- [272] Mashreghi J. Hilbert transform of $\log |f|$ / J. Mashreghi // Proceedings of the American Mathematical Society. – 2002. - Vol. 130, No. 3. - P. 683–688.
- [273] Ключев В.В. Приборы для неразрушающего контроля материалов и изделий / В.В. Ключев – М.: Машиностроение, 1986. – 488 с. – (Справочник: в 2-х кн.; кн. 1.)
- [274] Ермолов И.Н. Методы и средства неразрушающего контроля качества: учебное пособие (для инж.-техн. специальностей вузов) / И.Н. Ермолов, Ю.Я. Останин – М.: Высш. шк., 1988. – 368 с.
- [275] Michalski K.A. Multilayered media Green's functions in integral equation formulations / K.A. Michalski, J.R. Mosig // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. - 1997. - Vol. 45, No 3.- P. 508-519.
- [276] Aksun M.I. A robust approach for the derivation of close-form Green's function / M.I. Aksun // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. - 1996. - Vol. 44, No 5. - P. 651-658.
- [277] Hua Y. On SVD for estimating generalized eigenvalues of singular matrix pencil in noise / Y. Hua, T.K. Sarkar // IEEE Transactions on Signal Processing. - 1991. – Vol. 39. - P. 892-900.
- [278] Roberts P.P. Design of microwave filters by inverse scattering / P.P. Roberts, G.E. Town // IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques. - 1995. - Vol. 43, No. 4. - P. 739-743.
- [279] Thelen A. Design of Optical Interference Coatings / A. Thelen. - New York, NY: McGraw-Hill, 1989. - 269 p.
- [280] Felsen L.B. Radiation and scattering of waves / L.B. Felsen, N. Marcuvitz, Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1973 – 888 p.
- [281] Chew W.C. The layered medium Green's function – a new look / W.C. Chew, J.S. Zhao, T.J. Cui // Microwave and optical technology letters. - 2001. -

Vol. 31, No. 4. - P. 252-255.

- [282] Van Trees H.L. Detection, estimation and filtering theory. Part I / H.L. Van Trees, K.L. Bell. Z. Tian // Detection, estimation and modulation theory [2nd ed.]. - Hoboken, NJ: Wiley, 2013. -1176 p.
- [283] Eskin G. The inverse backscattering problem in three dimensions / G. Eskin, J. Ralston // Comm. Math. Phys. - 1989. - Vol. 124. - P. 169-215.
- [284] Moses H. Calculation of the scattering potential from reflection coefficients / H. Moses // Phys. Rev. - 1980. - Vol. 102. - P. 559-567.
- [285] Prosser R. Formal solutions of inverse scattering problems. III / R. Prosser // J. Math. Phys. - 1980. - Vol. 21. - P. 2648-2653.
- [286] Haddar H. The convex back-scattering support / H. Haddar, S. Kusiak, J. Sylvester // SIAM Journal on Applied Mathematics. - 2005. - Vol. 66., Issue 2. - P. 591-615.
- [287] Stoica P. Spectral Analysis of Signals / P. Stoica, R. Moses. – Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2005. – 480 p.
- [288] Hua Y. High-resolution and robust signal processing / Y. Hua, A.B. Gershman, Q. Cheng. – Basel, NY: Marcel Dekker, 2004. – 448 p.
- [289] Hippenstiel R.D. Detection theory: applications and digital signal processing / R.D. Hippenstiel. – New York: CRC Pres, 2004. – 344 p.
- [290] Марпл С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения / С.Л. Марпл. – М.: Мир, 1990. – 547 с.
- [291] Schmidt R. Multiple emitter location and signal parameter estimation / R. Schmidt // IEEE Trans. Antennas Propagation. – 1986. – Vol. 34, No 3. – P. 276–280.
- [292] Roy R. ESPRIT—estimation of signal parameters via rotational invariance techniques / R. Roy, T. Kailath // IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing. - 1989. - Vol. 37, No. 7. - P. 984–995.
- [293] Uber J.A. Estimation of the dimensionality of the signal subspace: a dissertation for the degree of Doctor of Philosophy / J.A. Uber. – George Mason University, Fairfax, 2003. – 183 p.
- [294] Akaike H. A new look at the statistical model identification / H. Akaike // IEEE Trans. Automat. Contr. - 1974. - Vol. 19. - P. 716–723.

- [295] Rissanen J. Modeling by the shortest data description / J. Rissanen // *Automatica*. - 1978. - Vol. 14. - P. 465–471.
- [296] Shan T.J. On spatial smoothing for directional of arrival estimation of coherent signals / T.J. Shan, M. Wax, T. Kailath // *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*. - 1985. - Vol. 33. - P. 806–811.
- [297] Wax M. Direction finding of coherent signals via spatial smoothing for uniform circular arrays / Wax M., Sheinvald J. // *IEEE Transactions on antennas and propagation*. - 1994. - Vol. 42., No. 5 – P. 613-620.
- [298] Stoica P. Maximum likelihood array processing for stochastic choerent sources / P. Stoica, B. Ottersten, M. Viberg, R.L. Moses // *IEEE Trans. Signal. Proc.* - 1996. – Vol. 44, No 1. - P. 96-105.
- [299] Boman K. Low angle estimation: models, methods and bounds / K. Boman, P. Stoica // *Digital Signal Processing*. - 2001. – Vol 1. - P. 35-79.
- [300] Born M. Principles of optics / M. Born, E. Wolf. – London: Pergamon, 1986. – 854 p.
- [301] Hartley R. Multiple view geometry in computer vision // R. Hartley, A. Zisserman. – Cambridge: Cambridge University Press, 2004. -650 p.
- [302] Faugeras O. Three-dimensional computer vision: a geometric viewpoint / O. Faugeras. – Boston: MIT press, 1993. - 695 pp.
- [303] Horn B.K. Determining optical flow / B.K. Horn, B.G. Schunk // *Artificial Intelligence*. - 1981. - Vol. 17. – P. 185-204.
- [304] Zhang Z. A robust technique for matching two uncalibrated images through the recovery of the unknown epipolar geometry / Z. Zhang, R. Deriche, O. Faugeras, Q.-T. Luong // *Artificial Intelligence Journal*. – 1995. - Vol. 78. - P. 87-119.
- [305] Alvarez L. Dense disparity map estimation respecting image discontinuities: A PDE and scale-space based approach / L. Alvarez, R. Deriche, J. Sánchez, J. Weickert. - Sophia Antipolis: INRIA, 2000. – 31 p. (Technical report N° 3874).
- [306] Fusiello A. A compact algorithm for rectification of stereo pairs / A.Fusiello, E.Trucco, A.Verri // *Machine Vision and Applications*. – 2000. – Vol. 12. – P. 16–22.

- [307] Scharstein D. A taxonomy and evaluation of dense two-frame stereo correspondence algorithms / D. Scharstein, R. Szeliski // *International J. Computer Vision.* – 2002. - Vol. 47, No. 1. - P. 7-42.
- [308] Cox I. A maximum likelihood stereo algorithm / I. Cox, S. Hingorani, S. Rao, B. Maggs // *Computer Vision, Graphics and Image Processing.* – 1996. - Vol. 63, No. 3. – P. 542-567.
- [309] Jones D.G. A computational framework for determining stereo correspondence from a set of linear spatial filters / D.G. Jones, J. Malik // *Computer vision: second European conference, 19-22 May 1992: proceedings.* - Santa Margherita Ligure, 1992. - P. 395-410.
- [310] Boykov Y. An experimental comparison of min-cut/max-flow algorithms for energy minimization in vision / Y. Boykov, V. Komolgorov // *IEEE Transactions on PAMI,* 2004. - Vol. 26, No. 9. - P. 1124-1137.
- [311] Горшков А.Г. Теория упругости и пластичности / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, Д.В. Тарлаковский. - М.: ФИЗМФТЛИТ, 2002. - 416 с.
- [312] Цлаф Л.Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения / Л.Я. Цлаф. - М.: Наука, 1966. – 197 с.
- [313] Ched'hotel C. A variational approach to multi-modal image matching / C. Ched'hotel, G. Hermosillo, O. Faugeras // *Variational and level set methods in computer vision: IEEE Workshop, 13 July 2001: proceedings.* Vancouver, 2001. - P. 21-28.
- [314] Nagel H.-H. An investigation of smoothness constraints for the estimation of displacement vector fields from images sequences / H.-H. Nagel, W. Enkelmann // *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* - 1986. – Vol. 8. – P. 565-593.

ДОДАТОК А

ВЛАСТИВОСТІ КОЕФІЦІЄНТІВ ЙОСТА ДЛЯ БАГАТОШАРОВОЇ СТРУКТУРИ

Твердження А.1. Нехай $l_q = \sqrt{\varepsilon_q} d_q$ – оптична довжина q -го шару діелектричної структури. Тоді кількість експоненціальних доданків M_j з різними коефіцієнтами та значеннями аргументів у сумах (2.67), (2.68), $j = \overline{0, (N-1)}$ є рівною:

– $M_j = 2^{N-j}$, якщо у структурі немає шарів з однаковою оптичною товщиною, тобто $l_w \neq l_q, \forall w, q \in \{1, 2, \dots, (N-j)\} \mid w \neq q$;

– $M_j = N - j + 1$, якщо структура складається тільки з шарів однакової оптичної товщини $l_w = l_q, \forall w, q \in \{1, 2, \dots, (N-j)\}$.

У загальному випадку кількість експоненціальних доданків лежить у межах $(N - j + 1) \leq M_j \leq 2^{N-j}$.

Обґрунтування цього твердження можна здійснити на підставі виразу (2.50). Кожна операція перемноження матриці на матрицю в (2.50) подвоює кількість експоненціальних доданків, якщо у структурі немає шарів з однаковою оптичною довжиною. Наявність шарів з однаковою оптичною довжиною приводить до рекомбінації експоненційних доданків з однаковими аргументами, тому кількість експонент при перемноженні двох матриць у виразі (2.50) у цьому випадку збільшується щонайменше на одиницю.

Твердження А.2. Значення аргументів $\nu_j(p)$, $p = \overline{1, M_j}$ експоненціальних доданків у сумах (2.67), (2.68) є однаковими та визначаються комбінаціями $(\pm l_1 \pm l_2 \pm l_3 \dots \pm l_{N-j}) \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$. При цьому мінімальне значення аргумента

$v_j(1) = -(l_1 + l_2 + l_3 \dots + l_{N-j})\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ матиме доданок з індексом $p=1$, а максимальне значення $v_j(M_j) = (l_1 + l_2 + l_3 \dots + l_{N-j})\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ – доданок з індексом $p=M_j$.

Як видно з виразу (2.50), кожне перемноження матриць збільшує у два рази множину експоненціальних аргументів. При цьому нові значення аргументів будуть відрізнятися від свого попереднього на величину $\pm l_q \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$.

Твердження А.3. З попереднього твердження випливає, що для впорядкованих аргументів $v_j(1) < \dots < v_j(p) < \dots < v_j(M_j)$, $p = \overline{1, M_j}$ в експонентах сум (2.67), (2.68) властива симетрія абсолютних значень, так що

$$\begin{aligned} -v_j(p) &= -v_j(q), \quad p = \overline{1, M_j/2}, \quad q = \overline{(M_j/2 + 1), M_j} \text{ для парних } M_j; \\ -v_j(p) &= -v_j(q), \quad p = \overline{1, (M_j - 1)/2}, \quad q = \overline{((M_j + 1)/2), M_j} \text{ для непарних } M_j. \end{aligned}$$

Твердження А.4. Значення дійсних коефіцієнтів при експонентах із максимальним та мінімальним значенням аргументу в сумах (2.67), (2.68) співвідносяться як

$$\frac{\beta_j(1)}{\alpha_j(1)} = \frac{\alpha_j(M_j)}{\beta_j(M_j)} = \frac{(\rho_{j+1} - \rho_j)}{(\rho_{j+1} + \rho_j)}, \quad (\text{A.1})$$

де $\alpha_j(1) = X_j(1)(\rho_{j+1} + \rho_j)/(2\rho_{j+1})$ та $\beta_j(1) = X_j(1)(\rho_{j+1} - \rho_j)/(2\rho_{j+1})$ – коефіцієнти при експоненційному доданку з найменшим значенням аргумента;

$\alpha_j(M_j) = Y_j(M_j)(\rho_{j+1} - \rho_j)/(2\rho_{j+1})$ та $\beta_j(M_j) = Y_j(M_j)(\rho_{j+1} + \rho_j)/(2\rho_{j+1})$ – коефіцієнти при доданку з найбільшим значенням аргумента експоненти; $X_j(1)$ та $Y_j(M_j)$ – деякі величини, що в загальному випадку залежать від значень характеристичних імпедансів $\rho_{j+1}, \rho_{j+2}, \dots, \rho_{N+1}$.

На достовірність цього твердження вказує структура першої матриці-множника у виразі (2.50), елементи якої безпосередньо визначають саме такий характер співвідношення (A.1).

Твердження А.5. У частковому випадку, якщо в структурі немає шарів з однаковими оптичними довжинами: $l_w \neq l_q, \quad \forall w, q \in \{1, 2, \dots, (N - j)\} \mid w \neq q$, відношення всіх коефіцієнтів $\alpha_j(p)$ та $\beta_j(p)$, $p = \overline{1, M_j}$ при експонентах з однаковим значенням аргументів може набувати одного з двох значень

$$\frac{\beta_j(p)}{\alpha_j(p)} \in \left\{ \frac{(\rho_{j+1} - \rho_j)(\rho_{j+1} + \rho_j)}{(\rho_{j+1} + \rho_j)(\rho_{j+1} - \rho_j)} \right\}. \quad (\text{A.2})$$

Твердження А.6. Якщо елементи векторів $\alpha'_j = [\alpha'_j(1), \alpha'_j(2), \dots, \alpha'_j(M_j)]^T$ та $\beta'_j = [\beta'_j(1), \beta'_j(2), \dots, \beta'_j(M_j)]^T$ (символ $[]^T$ означає транспонування) для $q = \overline{1, M_j}$ та $j = \overline{0, (N - 1)}$ визначено формулою

$$\begin{bmatrix} \alpha'_{j+1}(q) \\ \beta'_{j+1}(q) \end{bmatrix} = \frac{1}{2\rho_j} \begin{bmatrix} (\rho_{j+1} + \rho_j) & -(\rho_{j+1} - \rho_j) \\ -(\rho_{j+1} - \rho_j) & (\rho_{j+1} + \rho_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_j(q) \\ \beta_j(q) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

то в кожному з векторів α'_{j+1} та β'_{j+1} буде однакова кількість M_{j+1} ненульових елементів, і ця кількість на загал є меншою, ніж M_j : тобто, $M_j > M_{j+1}$.

Обґрунтування цього твердження можна отримати, використавши обернене перетворення до (2.50)

$$\begin{bmatrix} A_{j+1}(\omega) \\ B_{j+1}(-\omega) \end{bmatrix} = \frac{1}{2\rho_j} \begin{bmatrix} (\rho_{j+1} + \rho_j)e^{ik_{j+1}d_{j+1}} & -(\rho_{j+1} - \rho_j)e^{ik_{j+1}d_{j+1}} \\ -(\rho_{j+1} - \rho_j)e^{-ik_{j+1}d_{j+1}} & (\rho_{j+1} + \rho_j)e^{-ik_{j+1}d_{j+1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_j(\omega) \\ B_j(-\omega) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Перетворення (А.4) для коефіцієнтів при експонентах з однаковим значенням аргумента в сумах (2.67), (2.68) матиме вигляд (А.3). Крім того, нерівність $M_j > M_{j+1}$ впливає безпосередньо з твердження А.1.

Твердження А.7. Нехай, $F := \{f_1, f_2, f_3, \dots, f_{M_{j+1}}\}$ – множина індексів ненульових елементів $\alpha'_{j+1}(q) \neq 0$ $q \in F$ у векторі α'_{j+1} , а $G := \{g_1, g_2, g_3, \dots, g_{M_{j+1}}\}$ – множина індексів ненульових елементів $\beta'_{j+1}(q) \neq 0$ $q \in G$ у векторі β'_{j+1} , обчислених за формулою (А.3). Припустимо також, що індекси в кожній з цих множин впорядковані так, що $\nu_j(f_1) < \nu_j(f_2) < \dots < \nu_j(f_{M_{j+1}})$ та $\nu_j(g_1) < \nu_j(g_2) < \dots < \nu_j(g_{M_{j+1}})$. Тоді справедлива рівність

$$2\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} l_{j+1} = |\nu_j(f_1) - \nu_j(g_1)| = |\nu_j(f_2) - \nu_j(g_2)| = \dots = |\nu_j(f_{M_{j+1}}) - \nu_j(g_{M_{j+1}})|. \quad (\text{А.5})$$

При цьому значення коефіцієнтів сум (2.67), (2.68) для $(j+1)$ -го шару можна визначити для $p = \overline{1, M_{j+1}}$ як

$$\alpha_{j+1}(p) = \alpha'_{j+1}(f_p); \quad (\text{А.6})$$

$$\beta_{j+1}(p) = \beta'_{j+1}(g_p); \quad (\text{А.7})$$

$$\nu_{j+1}(p) = \nu_j(f_p) + \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} l_{j+1}; \quad (\text{А.8})$$

$$\text{або } \nu_{j+1}(p) = \nu_j(g_p) - \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} l_{j+1}. \quad (\text{А.9})$$

Справедливість цього твердження випливає з обґрунтування твердження А.2 та формули (2.50).

ДОДАТОК Б

**МЕТОДИКА ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ
ОДНОРІДНОГО ДІЕЛЕКТРИЧНОГО ШАРУ ЗА ЗАДАНИМ АБСОЛЮТНИМ
ЗНАЧЕННЯМ КОЕФІЦІЄНТА ВІДБИТТЯ АБО КОЕФІЦІЄНТА
ПРОХОДЖЕННЯ**

Для однозначного розв'язання оберненої задачі при заданому абсолютному значенні коефіцієнтів відбиття або проходження, параметри ϵ_1 та d_1 першого тестового шару повинні бути відомими. Для цього можна скористатися взірцем – плоским діелектричним листом з відомою діелектричною проникністю та товщиною, або провести додатковий експеримент, який дозволить визначити параметри такого діелектричного листа, як показано на рис. Б.1.

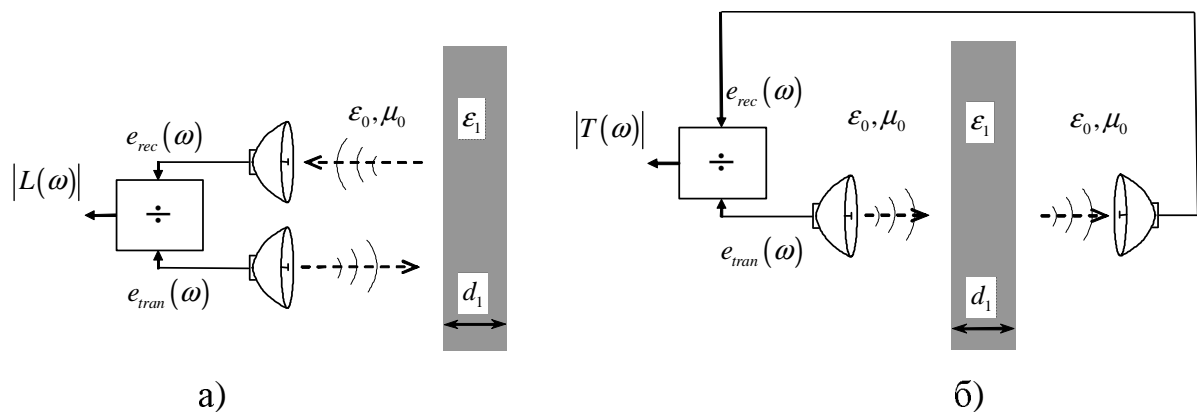


Рис. Б.1. Схема експерименту для визначення діелектричної проникності та товщини однорідного плоского діелектрика за вимірними абсолютним значенням коефіцієнта відбиття – а) та коефіцієнта проходження – б)

Покажемо, що задачу про визначення діелектричної проникності та товщини однорідного плоского діелектрика можна вирішити однозначно. З виразу (2.50) можна встановити, що коефіцієнт відбиття для однорідного діелектрика рівний

$$L(\omega) = \frac{r_1 + r_2 \exp(2ik_1 d_1)}{1 + r_1 r_2 \exp(2ik_1 d_1)}, \quad (\text{Б.1})$$

де r_1 та r_2 - сталі, які визначаються параметрами розділу середовищ.

З виразу (Б.1) випливає, що квадрат абсолютного значення коефіцієнта відбиття, який можна виміряти, виражається формулою

$$|L(\omega)|^2 = L(-\omega)L(\omega) = \frac{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos(2k_1d_1)}{1 + r_1^2r_2^2 + 2r_1r_2 \cos(2k_1d_1)}. \quad (\text{Б.2})$$

Звідси отримуємо квадрат абсолютного значення коефіцієнта розсіювання, який є косинусоїдальною функцією

$$|B_0(\omega)|^2 = \frac{|L(\omega)|^2}{1 - |L(\omega)|^2} = \frac{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos(2k_1d_1)}{1 + r_1^2r_2^2 - r_1^2 - r_2^2} = y_0 + y_1 \cos(2k_1d_1), \quad (\text{Б.3})$$

де ненульові середні значення y_0 і амплітуду y_1 задають вирази:

$$y_0 = \frac{r_1^2 + r_2^2}{1 + r_1^2r_2^2 - r_1^2 - r_2^2} \quad \text{та} \quad y_1 = \frac{2r_1r_2}{1 + r_1^2r_2^2 - r_1^2 - r_2^2}. \quad (\text{Б.4}) \text{ та } (\text{Б.5})$$

У випадку, коли однорідний діелектрик розташовано у вільному просторі, в якому вимірюється абсолютне значення коефіцієнта відбиття, має місце тотожність $r_1 = -r_2 = r = (\rho_1 - \rho_0)/(\rho_1 + \rho_0)$. Отже, вирази (Б.4) та (Б.5) набувають вигляду:

$$y_0 = -y_1 = \frac{2r^2}{(r^2 - 1)^2}. \quad (\text{Б.6})$$

Тоді для функції квадрату модуля спектрального коефіцієнта $|B_0(\omega)|^2$ середнє значення та амплітуда косинусоїдальної гармонічної складової є однаковими і рівними величині Y , а сам коефіцієнт має вигляд

$$\frac{|L(\omega)|^2}{1 - |L(\omega)|^2} = -\frac{2r^2}{(r^2 - 1)^2} (1 - \cos(2k_1d_1)). \quad (\text{Б.7})$$

Оцінивши за результатами вимірювань значення $Y = -2r^2/(r^2 - 1)^2$ та аргумент функції $\cos(2k_1d_1)$, можна розв'язати обернену задачу. Її розв'язання зводиться до рівняння четвертого порядку:

$$r^4 - 2\frac{(Y+1)}{Y}r^2 + 1 = 0. \quad (\text{Б.8})$$

Тоді шукане значення діелектричної проникності визначаємо з виразу

$$\varepsilon_1 = \frac{(1-r)^2}{(1+r)^2}, \quad (\text{Б.9})$$

де $r = \pm \sqrt{1 + \frac{1}{\alpha} \pm \frac{1}{\alpha} \sqrt{1 + 2\alpha}}$ - корені рівняння (Б.8).

Товщину діелектрика можна оцінити за значенням аргумента косинусоїдальної складової $\cos(2k_1 d_1)$, якою виражається квадрат модуля коефіцієнта розсіювання (Б.7).

Вираз Б.3 можна також записати через коефіцієнт проходження $|T_0(\omega)|^2$ плоскої хвилі через однорідний діелектричний шар. Для цього використаємо тотожність $|B_0(\omega)|^2 = |A_0(\omega)|^2 - 1 = 1/|T_0(\omega)|^2 - 1$.

Отже, описану вище процедуру визначення параметрів невідомого однорідного діелектричного шару можна реалізувати у випадку, коли вихідними даними є результати вимірювання абсолютного значення коефіцієнта проходження у заданому частотному діапазоні.

ДОДАТОК В

ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ ПЕРШИХ ДВОХ ПОВЕРХОНЬ РОЗДІЛУ В ШАРУВАТІЙ СТРУКТУРІ

Експериментально виявлено [29-31], що перетворення Фур'є від функції $u(\omega) = |1 - R(\omega)|^2$ дає можливість розділити у часовій області відбиття від першої та другої поверхонь розділу. Щоб пояснити такий ефект, проаналізовано окремо складові виразу

$$u(\omega) = |1 - R(\omega)|^2 = 1 + |R(\omega)|^2 - 2\operatorname{Re}(R(\omega)). \quad (\text{B.1})$$

Аналогічний запис справедливий у випадку розсіювання плоских хвиль від діелектричної структури з ідеально-провідною основою. Тоді функцію $R(\omega)$ заміняють коефіцієнтом відбиття $\tilde{R}(\omega)$ від такої ж структури з провідною основою.

Результати проведеного аналізу сформулюймо у вигляді таких тверджень:

Твердження В.1. Для заданої функції $u(\omega)$ можна наближено знайти та окремо розділити домінуючі коефіцієнти збіжних тригонометричних рядів, яким відповідають функції $\operatorname{Re}(R(\omega))$ та $|R(\omega)|^2$.

Твердження В.2. Для збіжних тригонометричних рядів, якими подано функції $\operatorname{Re}(R(\omega))$ та $\operatorname{Re}(\tilde{R}(\omega))$, перші два доданки містять достатню інформацію для визначення параметрів матеріалів, які утворюють перші дві поверхні розділу шаруватої структури.

Обґрунтування цих тверджень почнемо з аналізу властивостей функцій для комплексних коефіцієнтів відбиття $R(\omega)$ та $\tilde{R}(\omega)$.

Відомо, що коефіцієнт відбиття $R(\omega) = B_0(\omega)/A_0(\omega)$ можна також подати у вигляді ряду комплексних експонент

$$R(\omega) = B_0(\omega) \sum_{n=0}^{\infty} (1 - A_0(\omega))^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n \exp(i\omega\tau_n). \quad (\text{B.2})$$

Беручи до уваги те, що значення аргументів τ_n у комплексних експонентах для функцій $A_0(\omega)$ та $B_0(\omega)$ є дійсними і додатними згідно з виразами (2.67) та

(2.68), можна зробити висновок, що всі комплексні експоненти у виразі (В.2) також матимуть додатні дійсні значення аргументів τ_n . Це твердження випливає з властивості множення двох поліномів, де коефіцієнти поліному можна подати як результат дискретної згортки коефіцієнтів поліномів, які перемножують.

Очевидно, що ряд (В.2) є збіжним, і найбільші значення коефіцієнтів ряду σ_n групуватимуться в підмножині малих значень n за умови, що τ_n впорядковані: $0 \leq \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n$. Можна показати, що перші два коефіцієнти характеризуватимуть першу та другу поверхні розділу. Для цього використаємо частковий коефіцієнт відбиття

$$R_j(\omega) = \frac{R_{j+1}(\omega) - r_{j,j+1} \exp(i2\omega s_j)}{1 - R_{j+1}(\omega) r_{j,j+1} \exp(-i2\omega s_j)}, \quad (\text{В.3})$$

де $r_{j,j+1} = (\rho_j - \rho_{j+1}) / (\rho_j + \rho_{j+1})$ – коефіцієнт відбиття плоскої хвилі від поверхні розділу двох середовищ з хвильовими опорами ρ_j та ρ_{j+1} . Значення часткового коефіцієнта відбиття у такому формулюванні визначатиме коефіцієнт відбиття всієї структури $R(\omega) = R_0(\omega)$.

Коефіцієнти відбиття діелектричних структур $R_j(\omega)$ задовольняють умову $|R_i(\omega)| < 1$, що випливає з тотожності $\det(M_\Sigma) = A_0(\omega)A_0(-\omega) - B_0(\omega)B_0(-\omega) = 1$. Для двох різних середовищ завжди виконується умова $|r_{j,j+1}| < 1$, а отже, знаменник у виразі (В.3) ніколи не перетворюється в нуль. Це дає можливість записати коефіцієнти відбиття у вигляді геометричної прогресії

$$R_j(\omega) = -r_{j,j+1} \exp(i2\omega s_j) + R_{j+1}(\omega) + \left(R_{j+1}(\omega) - r_{j,j+1} \exp(i2\omega s_j) \right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(R_{j+1}(\omega) r_{j,j+1} \exp(-i2\omega s_j) \right)^n. \quad (\text{В.4})$$

Перепишемо цей збіжний ряд, увівши нову функцію $\underline{R}_j(\omega) = R_j(\omega) \exp(-i2\omega s_j)$, яка відповідає частковому коефіцієнту відбиття з додатковим фіксованим фазовим набігом. У результаті отримаємо збіжний ряд, аргументи комплексних експонент якого будуть дійсними додатніми величинами для дійсних значень ω :

$$\begin{aligned} \underline{R}_j(\omega) = & -r_{j,j+1} + \underline{R}_{j+1}(\omega) \exp(i2\omega d_j) + \\ & + \left(\underline{R}_{j+1}(\omega) \exp(i2\omega d_j) - r_{j,j+1} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\underline{R}_{j+1}(\omega) r_{j,j+1} \exp(i2\omega d_j) \right)^n. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Звідси можна зробити важливий висновок про фізичний зміст та значення перших членів ряду (B.2). З виразу (B.5) безпосередньо отримуємо значення коефіцієнтів $\tau_0 = 2s_0$ та $\sigma_0 = -r_{0,1} = (\rho_1 - \rho_0)/(\rho_1 + \rho_0)$, оскільки $\underline{R}_0(\omega) = R_0(\omega) \exp(-i2\omega s_0)$. Це вказує на те, що перший доданок характеризує відбиття тільки від першої поверхні розділу шаруватої структури, другий дає можливість встановити значення аргумента другої комплексної експоненти $\tau_1 = 2s_0 + 2d_0 = 2s_1$ та коефіцієнт при експоненті $\sigma_1 = -(1 - r_{0,1}r_{0,1})r_{1,2}$. Аргумент експоненти свідчить про те, що другий доданок завжди визначається розсіюванням хвиль від другої поверхні розділу. Значення τ_2 не можна встановити однозначно, оскільки воно залежить від співвідношення параметрів d_0 та d_1 . Зокрема, змінна τ_2 може набувати найменше з двох значень: $\tau_2 = 2s_0 + 2d_0 + 2d_1 = 2s_2$ або $\tau_2 = 2s_0 + 4d_0 = 2s_1 + 2d_0$. Очевидно, що доданки з індексом $n > 2$ також залежні від складної комбінації параметрів d_k , $k < n$. Тому однозначний взаємозв'язок між індексом n для параметра τ_n та номером поверхні розділу шаруватого середовища неможливий.

У другому розділі дисертації встановлено, що коефіцієнт відбиття $\tilde{R}(\omega)$ для структури з ідеально провідною поверхнею можна записати через коефіцієнт відбиття $R(\omega)$ такої ж діелектричної структури без ідеально провідної поверхні:

$$\tilde{R}(\omega) = R(\omega) - \exp(2i\omega s_N) K(\omega), \quad (\text{B.6})$$

де $K(\omega)$ – ряд комплексних експонент $K(\omega) = \kappa_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n \exp(i\omega \gamma_n)$, в якому $\gamma_n > 0$, а κ_n – дійсні коефіцієнти. Обґрунтування базується на твердженні, що жоден із множників у виразі $K(\omega) = A^{-1}(\omega) (A(\omega) - \exp(2i\omega s_N) B(-\omega))^{-1}$ не перетворюється в нуль на дійсній осі ω .

Отже, коефіцієнт відбиття для шаруватої структури з ідеально провідним екраном можна також подати так:

$$\tilde{R}(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n \exp(i\omega\tau_n) - \exp(2i\omega s_N) \left(\kappa_0 + \sum_{l=1}^{\infty} \kappa_l \exp(i\omega\gamma_l) \right) = \sum_{n=0}^n \tilde{\sigma}_n \exp(i\omega\tilde{\tau}_n). \quad (\text{B.7})$$

При цьому перші M доданків ряду для двох коефіцієнтів відбиття (B.2) та (B.7) будуть однакові: $\tau_n = \tilde{\tau}_n$ та $\sigma_n = \tilde{\sigma}_n$ для $n = \overline{1, M}$, якщо $\tau_n < 2s_N$. Отже, кількісно інтерпретувати ці доданки можна за формулами для коефіцієнта відбиття $R(\omega)$ діелектричної структури без ідеально провідної поверхні.

Подальший аналіз спрямовано на дослідження коефіцієнтів рядів для функцій $\text{Re}(R(\omega))$, $\text{Re}(\tilde{R}(\omega))$, $|R(\omega)|^2$ та $|\tilde{R}(\omega)|^2$. Знаючи характер розкладу в ряд коефіцієнтів відбиття $R(\omega)$ та $\tilde{R}(\omega)$, можна оцінити розклад у ряд їх дійсних частин $\text{Re}(R(\omega))$ та $\text{Re}(\tilde{R}(\omega))$. Зауважимо, що коефіцієнти σ_n та $\tilde{\sigma}_n$ при комплексних експонентах є дійсними, а аргументи експонент – уявні. Тому дійсна частина функцій $\text{Re}(R(\omega))$ та $\text{Re}(\tilde{R}(\omega))$ матиме вигляд тригонометричного ряду, що містить лише косинуси

$$\text{Re}(R(\omega)) = \sum_{n=0}^n \sigma_n \cos(\omega\tau_n), \quad (\text{B.8})$$

$$\text{Re}(\tilde{R}(\omega)) = \sum_{n=0}^n \tilde{\sigma}_n \cos(\omega\tilde{\tau}_n). \quad (\text{B.9})$$

Таким чином, твердження B.2 доведено.

Висновок про структуру тригонометричного ряду як форми запису функції $|R(\omega)|^2 = R(\omega)R(-\omega)$ можна зробити на основі правила множення поліномів. Під час перемноження коефіцієнтів рядів $R(\omega)$ та $R(-\omega)$ завжди утворюватимуться пари доданків зі спряженими комплексними експонентами $\sigma_n \sigma_m \exp(i\omega\tau_n) \exp(-i\omega\tau_m)$ та $\sigma_n \sigma_m \exp(-i\omega\tau_n) \exp(i\omega\tau_m)$, що в сумі дадуть $2\sigma_n \sigma_m \cos(\omega(\tau_n - \tau_m))$. Отже, функцію $|R(\omega)|^2$ запишемо у вигляді збіжного ряду парних функцій:

$$|R(\omega)|^2 = \eta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \cos(\omega\vartheta_n), \quad (\text{B.10})$$

де η_n та $0 < \vartheta_1 < \vartheta_2 < \dots < \vartheta_n < \pi$ – дійсні та додатні величини, а $\eta_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2$ – ненульовий коефіцієнт.

На відміну від ряду (В.8), де найменше значення аргумента τ_0 косинуса визначає подвійний шлях проходження хвилі до першої поверхні розділу $\tau_0 = 2s_0$, у ряді (В.10) найменше значення аргумента ϑ_1 косинуса не можна інтерпретувати однозначно. Не важко показати, що воно може визначати електричні товщини $\min(d_j / \sqrt{\epsilon_v \mu_v})$ найтоншого шару діелектричної структури. Для цього припустимо, що коефіцієнти ряду для $R(\omega)$ містять суму $\exp(i\phi) \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \exp(in2d_l \omega)$ для будь-якого $l \in [1, N]$. Тоді спряжена функція $R(-\omega)$ міститиме відповідно суму зі спряженими комплексними експонентами $\exp(-i\phi) \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \exp(-in2d_l \omega)$. Знаходячи функцію $|R(\omega)|^2$, коефіцієнти рядів $R(k)$ та $R(-k)$ перемножимо попарно у всіх можливих комбінаціях:

$$\begin{aligned} & (\exp(i\phi)\eta_n \exp(in2d_l \omega)) (\exp(-i\phi)\eta_{n+1} \exp(-i(n+1)2d_l \omega)) + \\ & + (\exp(-i\phi)\eta_n \exp(-in2d_l \omega)) (\exp(i\phi)\eta_{n+1} \exp(i(n+1)2d_l \omega)) = 2\eta_n \eta_{n+1} \cos(2d_l \omega). \end{aligned} \quad (\text{В.11})$$

Звідси значення аргументів деяких косинусів рівні подвоєним значенням електричних товщин шарів $2d_l / \sqrt{\epsilon_v \mu_v}$, перший серед таких аргументів відповідатиме найтоншому шару.

Загалом найменше значення аргумента ϑ_n косинуса в ряді (В.10) може бути найменшим значенням різниці $2|nd_j - md_l|$ для будь-яких цілих n та m та значень d_l та d_j з множини електричних товщин $d_l / \sqrt{\epsilon_v \mu_v}$ та $d_j / \sqrt{\epsilon_v \mu_v}$ для шарів $j \neq l \in [1, N]$ досліджуваної структури. Така неоднозначність про перше значення ряду (В.10) не дає можливості використати функцію $|R(\omega)|^2$ для опису структури.

Подібний висновок можна зробити для діелектричної шаруватої структури на плоскій ідеально провідній поверхні. Тут матимемо рівність $|\tilde{R}(\omega)|^2 = 1$, оскільки,

поширюючись крізь таку структуру за відсутності втрат енергії, плоска хвиля повністю відбивається. Математично це визначає умова $\det(M_\Sigma) = 1$.

Проведений аналіз також дає можливість встановити важливу відмінність між коефіцієнтами тригонометричних рядів, яким відповідають функції $\operatorname{Re}(R(\omega))$ та $|R(\omega)|^2$. Всі аргументи ϑ_n косинусів у ряді (В.10) належатимуть інтервалу $(0, \infty)$, в той час як аргументи τ_n косинусів ряду (В.8) є лише числами з півінтервалу $[\tau_0, \infty)$. Оскільки ряди (В.8) та (В.9) є збіжними, максимальні коефіцієнти η_n з відповідними аргументами ϑ_n у ряді (В.10) групуватимуться на початку інтервалу $(0, \infty)$, а максимальні коефіцієнти σ_n з відповідними аргументами τ_n – на початку півінтервалу $[\tau_0, \infty)$. Так як значення $\tau_0 = 2s_0$ можна контролювати відбивним фазовертачем та довжиною плечей моста, робимо важливий висновок про те, що за заданою функцією $u(\omega) = 1 + |R(\omega)|^2 - 2\operatorname{Re}(R(\omega))$, в яку входять ряди (В.8) та (В.10) з відповідними сталими коефіцієнтами, можна наближено виділити перші найбільш значущі коефіцієнти ряду (В.8) для функції $\operatorname{Re}(R(\omega))$, припустивши, що на півінтервалі $\vartheta_n \subset [\tau_0, \infty)$ значення відповідних коефіцієнтів η_n тригонометричного ряду для функції $|R(\omega)|^2$ є незначущими.

Модель сигналу шаруватої структури на ідеально провідній поверхні простіша: $u(\omega) = 1 + |\tilde{R}(\omega)|^2 - 2\operatorname{Re}(\tilde{R}(\omega)) = 2 - 2\operatorname{Re}(\tilde{R}(\omega))$, де не складно виділити коефіцієнти ряду для функції $\operatorname{Re}(\tilde{R}(\omega))$. Отже, перше твердження доведено.

Очевидно, що за дійсною частиною коефіцієнтів відбиття (В.8) та (В.9) можна безпосередньо встановити їх комплексні значення і сформулювати одновимірну обернену задачу розсіювання, яка має однозначний розв'язок [3, 7]. Але похибка оцінки коефіцієнтів рядів (В.8) та (В.9) за даними вимірювання $u_{\text{ex}}(\omega)$ призведе до втрати стійкості процедури розв'язання оберненої задачі. Це ще раз вказує на доцільність знаходження лише наближеного розв'язку, який трактуємо як оцінку параметрів перших поверхонь розділу.

ДОДАТОК Г

ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ ВІД ЕЛЕМЕНТАРНИХ ДЖЕРЕЛ НАД ПЛОСКО-НЕОДНОРІДНИМ СЕРЕДОВИЩЕМ

Для того, щоб багатовимірну обернену задачу розсіювання хвиль від елементарних розсіювачів у плоскошаруватих середовищах звести до одновимірної, окремо розглянемо задачу про визначення розподілу поля від елементарних джерел у вільному просторі. Покажемо, як змінюється цей розподіл за наявності таких середовищ. Найпростішими для аналізу джерелами електромагнітного поля є нескінченне лінійне джерело із струмом та точкове джерело.

Г.1 Випромінювання елементарних джерел у вільному просторі

Поле від лінійного джерела, розташованого вздовж осі Oy можна знайти з розв'язку рівняння Гельмгольца [70]

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_\rho^2 \right] \phi(x, z) = -\delta(x) \delta(z), \quad (\text{Г.1})$$

де k_ρ - хвильовий коефіцієнт; $\delta(\cdot)$ - дельта функція.

Рівняння (Г.1) у циліндричній системі координат матиме вигляд

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + k_\rho^2 \right] \phi(\rho) = -\delta(\rho), \quad (\text{Г.2})$$

де $\delta(\rho) = \delta(x) \delta(z)$.

Відомо, що функція Гріна є розв'язком такого рівняння. Припустивши часову залежність хвиль як $e^{-i\omega t}$ та забезпечивши умови випромінювання, функцію Гріна можна записати через функцію Ганкеля першого роду

$$\phi(\rho) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_\rho \rho). \quad (\text{Г.3})$$

Інший підхід до розв'язання рівняння (Г.1) полягає у використанні Фур'є перетворення

$$\phi(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ik_x x) \tilde{\phi}(k_x, z) dk_x. \quad (\Gamma.4)$$

Запишемо також Фур'є-зображення δ – функції у вигляді

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ik_x x) dk_x. \quad (\Gamma.5)$$

Застосувавши Фур'є перетворення до виразу (Г.1) та використавши тотожність (Г.5), отримаємо

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ik_x x) \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_\rho^2 - k_x^2 \right] \tilde{\phi}(k_x, z) dk_x = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(z) \exp(ik_x x) dk_x. \quad (\Gamma.6)$$

Останній вираз також можна привести до рівняння Гельмгольца

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_z^2 \right] \tilde{\phi}(k_x, z) = -\delta(z), \quad (\Gamma.7)$$

де $k_z^2 = k_\rho^2 - k_x^2$ - проекція хвильового вектора на вісь Oz .

Записаному в однорідній формі рівнянню (Г.7) задовольняють два фундаментальні розв'язки: $\exp(\pm ik_z z)$. Для того, щоб забезпечити особливість розв'язку рівняння (Г.7) у точці $z = 0$, запишемо його у вигляді

$$\tilde{\phi}(k_x, z) = \frac{i \exp(ik_z |z|)}{2k_z}. \quad (\Gamma.8)$$

Відновивши функцію $\phi(x, z)$ з її Фур'є – образу, отримуємо

$$\phi(x, z) = \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(ik_x x + ik_z |z|)}{k_z} dk_x. \quad (\Gamma.9)$$

Як видно, записаний розв'язок можна подати також у формі (Г.3), що дозволяє встановити важливу тотожність

$$H_0^{(1)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(ik_x x + ik_z |z|)}{k_z} dk_x. \quad (\Gamma.10)$$

Цю формулу можна трактувати також як розклад циліндричної хвилі у базисі плоских хвиль.

Подібний розклад поля випромінювання у базисі плоских хвиль можна встановити також для точкового джерела. Для цього запишемо рівняння Гельмгольца, яке дозволяє математично встановити поле, сформоване точковим джерелом

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 \right] \phi(x, y, z) = -\delta(x)\delta(y)\delta(z). \quad (\Gamma.11)$$

Його розв'язок для хвиль, що випромінюються у безмежність, має вигляд

$$\phi(r) = \frac{\exp(ik_0 r)}{4\pi r}. \quad (\Gamma.12)$$

Визначимо також Фур'є-прообраз розв'язку рівняння (Г.11):

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\phi}(k_x, k_y, k_z) \exp(ik_x x + ik_y y + ik_z z) dk_x dk_y dk_z. \quad (\Gamma.13)$$

Аналогічно до процедури встановлення поля від лінійного джерела, застосуємо Фур'є перетворення до рівняння (Г.11) у кожній з координат:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\phi}(k_x, k_y, k_z) [k_0^2 - k_x^2 - k_y^2 - k_z^2] \exp(ik_x x + ik_y y + ik_z z) dk_x dk_y dk_z = \\ = - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ik_x x + ik_y y + ik_z z) dk_x dk_y dk_z \end{aligned} \quad (\Gamma.14)$$

З останнього виразу безпосередньо отримаємо Фур'є - прообраз розв'язку

$$\tilde{\phi}(k_x, k_y, k_z) = -\frac{1}{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2 - k_z^2}. \quad (\Gamma.15)$$

Залишається відновити розв'язок рівняння з (Г.15), застосувавши обернене перетворення Фур'є

$$\phi(x, y, z) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(ik_x x + ik_y y + ik_z z)}{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2 - k_z^2} dk_x dk_y dk_z. \quad (\Gamma.16)$$

Як видно, підінтегральна функція має два полюси $k_z = \pm \sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2}$ і зникає у верхній комплексній півплощині при безмежно великих значеннях уявної частини аргументів k_x , k_y та k_z . Враховуючи аналітичність підінтегральної функції,

значення інтеграла можна обчислити за теоремою лишків. Отже, розкривши інтеграл за змінною k_z , матимемо розв'язок рівняння (Г.11) у вигляді

$$\phi(x, y, z) = \frac{i}{2(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(ik_x x + ik_y y + ik'_z |z|)}{k'_z} dk_x dk_y. \quad (\text{Г.17})$$

Прирівнявши отриманий розв'язок у інтегральній формі та розв'язок (Г.12) запишемо тотожність Вейла [71,72]

$$\frac{\exp(ik_0 r)}{r} = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(ik_x x + ik_y y + ik_z |z|)}{k_z} dk_x dk_y. \quad (\text{Г.18})$$

Цю тотожність можна розглядати як подання сферичної хвилі у формі суми безмежної кількості плоских хвиль.

Іншу форму запису розв'язку (Г.11) можна встановити, подавши інтеграл у виразі (Г.18) у циліндричній системі координат, де хвильовий вектор записано як $\vec{k}_\rho = \vec{e}_x k_\rho \cos \alpha + \vec{e}_y k_\rho \sin \alpha$, а, відповідно, відстань $\vec{\rho} = \vec{e}_x \rho \cos \varphi + \vec{e}_y \rho \sin \varphi$. У результаті заміни змінних отримуємо

$$\frac{\exp(ik_0 r)}{r} = \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} k_\rho \frac{\exp(ik_\rho \rho \cos(\alpha - \varphi) + ik_z |z|)}{k_z} dk_\rho d\alpha. \quad (\text{Г.19})$$

Використавши інтегральне зображення функції Бесселя, можна встановити нову тотожність, що містить інтеграл Зомерфельда [70-72]

$$\frac{\exp(ik_0 r)}{r} = i \int_0^{+\infty} \frac{k_\rho}{k_z} J_0(k_\rho \rho) \exp(ik_z |z|) dk_\rho. \quad (\text{Г.20})$$

Застосуємо до (Г.20) властивість функції Бесселя $J_0(k_\rho \rho) = [H_0^{(1)}(k_\rho \rho) + H_0^{(2)}(k_\rho \rho)]/2$ та відому тотожність для функції Ганкеля $H_0^{(1)}(e^{i\pi} x) = -H_0^{(2)}(x)$. В результаті отримуємо іншу тотожність

$$\frac{\exp(ik_0 r)}{r} = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_\rho}{k_z} H_0^{(1)}(k_\rho \rho) \exp(ik_z |z|) dk_\rho. \quad (\text{Г.21})$$

Подання (Г.20) та (Г.21) розв'язку рівняння Гельмгольца для точкового джерела показують можливість розкладу сферичної хвилі у базисі циліндричних

хвиль. Іншою інтерпретацією цих тотожностей є розклад сферичної хвилі у базисі плоских хвиль.

Г.2 Розсіювання хвиль елементарним джерелом над шаруватою структурою

Якщо у попередньому пункті досліджено випромінювання елементарними джерелами у вільному просторі, то, маючи вираз для поля від таких джерел у вигляді комбінації плоских хвиль, стає можливим просто встановити взаємодію цього поля з шаруватою структурою. Логічно при цьому врахувати ефект розсіювання від плоскої структури, досліджуючи відбиття кожної з плоских хвиль, що формують поле від точкового джерела.

У цьому випадку проведемо аналіз електромагнітного поля елементарного струму з моментом Il спрямованого вздовж вектора $\vec{\alpha}$. У векторному вигляді такий струм запишемо як $\vec{J} = \vec{\alpha} Il \delta(\vec{r})$. Розв'язок рівнянь Максвела для вектора електричної напруженості електромагнітного поля від такого струму у вільному просторі має вигляд [70]

$$\vec{E}(\vec{r}) = i\omega\mu_0\mu \left(\vec{I} + \frac{\nabla\nabla}{k^2} \right) \cdot \vec{\alpha} Il \frac{\exp(ikr)}{4\pi r}, \quad (\text{Г.22})$$

де \vec{I} - одиничний оператор; $k = \omega\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}$ - хвильове число.

Відповідно вектор напруженості магнітного поля визначається як

$$\vec{H}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{\alpha} Il \frac{\exp(ikr)}{4\pi r}. \quad (\text{Г.23})$$

Як видно, в запис поля згідно з формулами (Г.22) та (Г.23) входить функція Гріна (Г.12). Це дозволяє скористатися встановленою раніше тотожністю (Г.21) для розкладу розподілу поля у базисі плоских хвиль.

Розглянемо частковий випадок, коли орієнтація струму співпадає з однією з осей, а саме випадок вертикального диполя, для якого $\vec{\alpha} = \vec{e}_z$. Тоді з виразів (Г.22) та (Г.23) встановимо складові векторів напруженості

$$E_z = \frac{i\omega\mu_0\Pi}{4\pi k^2} \left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\exp(ikr)}{r} \quad \text{та} \quad (\text{Г.24})$$

$$H_z = 0. \quad (\text{Г.25})$$

Підставляючи тотожність (Г.21) у формулу для напруженості електричного поля (Г.24), отримаємо

$$E_z = -\frac{\Pi}{8\pi\omega\epsilon\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_\rho^2}{k_z} H_0^{(1)}(k_\rho\rho) \exp(ik_z|z|) dk_\rho, \quad (\text{Г.26})$$

де $k_\rho^2 + k_z^2 = k^2$.

З формули (Г.6) видно, що поле в точці простору з координатами ρ та z є сукупністю плоских хвиль $\exp(ik_z|z|)$, які розповсюджуються з різними значеннями хвильового коефіцієнта k_z . За наявності плоскої діелектричної структури, в якій параметри змінюються вздовж координати Oz , а поверхня знаходиться на глибині d_1 , в точку реєстрації поля будуть також надходити розсіяні від діелектричної структури плоскі хвилі. За рахунок залежного від $k_z = k_0 \cos\theta_0$ коефіцієнта відбиття $R_{TM}(\omega, \theta_0)$ такі хвилі матимуть змінну амплітудно-фазову характеристику $R_{TM} \exp(ik_z z)$ та додатковий набіг фази $\exp(2ik_z d_1)$, спричинений подвійним проходженням хвилею шляху від джерела до поверхні шаруватої структури.

Зафіксуємо діелектричну проникність середовища над шаруватою структурою як ϵ_1 . Відповідний, хвильовий коефіцієнт рівний $k_1 = \omega\sqrt{\epsilon_1\epsilon_0\mu_0}$. Тоді напруженість електричного поля від вертикально розташованого диполя з моментом Π над плоскою структурою, що характеризується коефіцієнтом відбиття R_{TM} , можна визначити як [71]

$$E_z = -\frac{\Pi}{8\pi\omega\epsilon_1\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_\rho^2}{k_{1z}} H_0^{(1)}(k_\rho\rho) \left(\exp(ik_{1z}|z|) + R_{TM} \exp(ik_{1z}z + 2ik_{1z}d_1) \right) dk_\rho, \quad (\text{Г.27})$$

де проекція хвильового коефіцієнта k_z на вісь Oz визначається з виразу $k_{z1}^2 = k_1^2 - k_\rho^2$.

Для плоских структур з неоднорідною зміною діелектричної проникності коефіцієнт відбиття в (Г.27) можна визначити з рівнянь (5.26) та (5.27). У випадках розташування диполя вздовж інших осей, формули для визначення складових електромагнітного поля будуть містити також коефіцієнт відбиття для ТЕ поляризації хвилі. Очевидно, що значення напруженості поля у самому шаруватому середовищі буде визначатися коефіцієнтом проходження хвилі для відповідної поляризації.

Варто зазначити, що значення всіх складових поля від точкових джерел, що розсіюється структурою з плоскозмінним характером діелектричної проникності вздовж осі Oz , можна обчислити лише за значеннями магнітної та електричної складових, колінеарних до осі Oz [71].

Г.3. Числове знаходження розсіяного поля від точкового джерела

Задача числового знаходження розподілу електромагнітного поля від точкових джерел у плоских шаруватих структурах є об'єктом пильної уваги науковців. Проблема числового обчислення інтегралів типу Зомерфельда (Г.20), інтегралу (Г.10), а також інтегралів для визначення функції Гріна плоских багат шарових структур (наприклад, (Г.27)), полягає у тому, що підінтегральні вирази містять сингулярності, а також за певних значень параметрів можуть набувати характеру швидкоосцилюючих та слабозатухаючих функцій. Для обчислення функції Гріна у дальній зоні на основі інтегралів типу Зомерфельда використовують метод перевалу. На жаль, цей метод не можна застосувати для знаходження поля у довільній точці простору. Тому дослідники віддають перевагу числовим методам. Зокрема, для уникнення сингулярностей у підінтегральних виразах типовий шлях інтегрування (рис. Г.1.а) в інтегралах Зомерфельда (Г.20) та інтегралі (Г.10) модифікують, використовуючи властивості аналітичності.

Одним із найбільш ефективних методів обчислення функції Гріна багат шарових структур є метод комплексних джерел [275, 276]. Ідея цього методу

полягає у записі частини підінтегральних виразів в інтегралах типу (Г.10) та (Г.20) у формі ряду, та аналітичному інтегруванні кожного з членів ряду.

Крім того, показано, що доцільним є модифікація контуру інтегрування та розбиття його на дві частини, як зображено на рис. Г.1.б. Метою такої модифікації є усунення сингулярного впливу полюсів та наближення підінтегральної функції до такої, яку можна добре описати рядом комплексних експонент.

Для прикладу розглянемо подання функції Гріна шаруватої структури в двовимірному просторі. За аналогією до виразу (Г.27) функцію Гріна запишемо на основі тотожності (Г.10), що у загальному випадку має наступну форму:

$$G_{d,2D}(r|r') = \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_{2D}(R(k_\rho), T(k_\rho)) \frac{\exp(ik_\rho(x_0 - x) + ik_z z)}{k_z} dk_\rho, \quad (\text{Г.28})$$

де $R(k_\rho)$ та $T(k_\rho)$ - коефіцієнти відбиття та проходження плоских хвиль для досліджуваної багатошарової структури; $k_z = \sqrt{k^2 - k_\rho^2}$ - проекція хвильового вектора на вісь Oz .

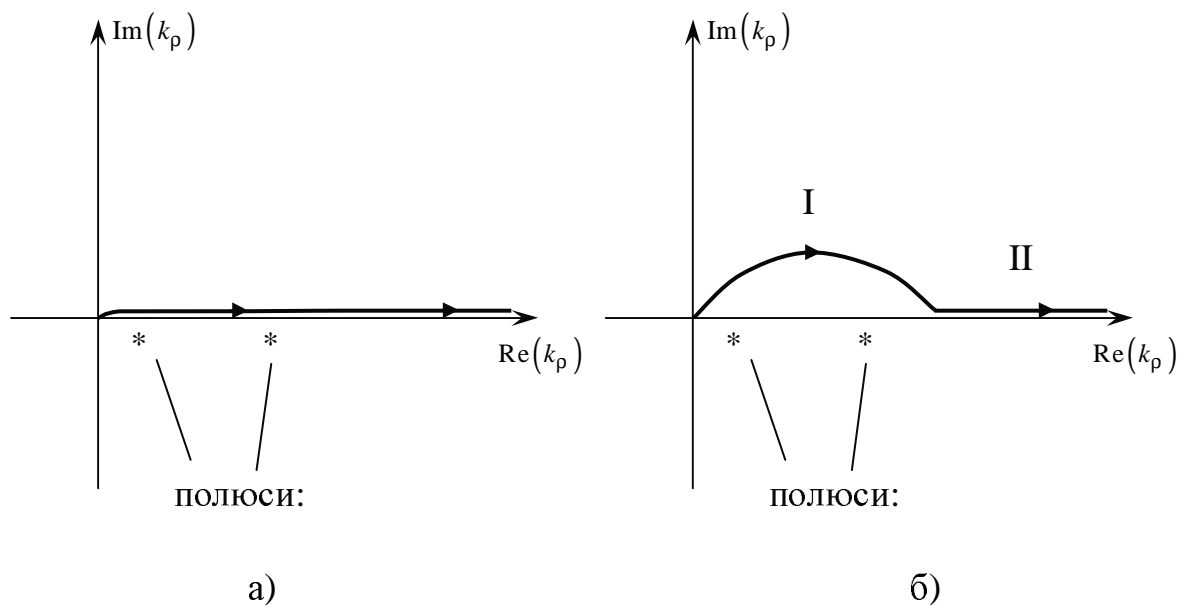


Рис. Г.1. Шлях інтегрування для інтегралу Зомерфельда при $\text{Re}(k_\rho) > 0$ – а) та модифікований шлях інтегрування у методі комплексних джерел [275, 276] – б)

Реалізація методу комплексних джерел включає числову апроксимацію функції $F_{2D}(R(k_\rho), T(k_\rho))$ сумою комплексних експонент

$$F_{2D}(R(k_\rho), T(k_\rho)) = \sum_{n=1}^N B_n \exp(i(\alpha_n - i\beta_n)k_z), \quad (\text{Г.29})$$

де коефіцієнти α_n , β_n та B_n знаходять числово за точно відомою функцією. Для цього доцільно використати узагальнений метод пучка матриць [277].

Після підстановки ряду (Г.29) в інтеграл (Г.28), суму винесемо з під знаку інтеграла. Скориставшись тотожністю (Г.10), функцію Гріна знайдемо у вигляді

$$\tilde{G}_{d,2D}(r|r') = \frac{i}{4} \sum_{n=1}^N B_n H_0^{(1)} \left(k_0 \sqrt{(x_0 - x)^2 + (z - \alpha_n - i\beta_n)^2} \right). \quad (\text{Г.30})$$

Як видно з отриманого виразу, обчислення поля точкового джерела над шаруватою структурою потребує лише однократного обчислення коефіцієнтів ряду α_n , β_n та B_n для знаходження функції Гріна в точках з різними координатами. Коефіцієнти ряду (Г.29) визначаються лише параметрами шаруватої структури, що відкриває можливість швидких обчислень. Цей факт вказує на явну перевагу даного підходу порівняно з іншими числовими алгоритмами інтегрування виразу (Г.28).

Очевидним стає використання назви такого підходу, оскільки математично результуюче поле можна подати сумою полів від джерел, що умовно розташовані на площині з комплексними координатами x та $\alpha_n + i\beta_n$ згідно з виразом (Г.30).

Метод комплексних джерел можна також узагальнити на тривимірний випадок, коли досліджується поле від диполя над шаруватою плоскою структурою, яке визначається у відповідності до формули (Г.27).

Для наочного демонстрування ефекту розсіювання електромагнітної хвилі від наявної в діелектричному шарі неоднорідності обчислимо функцію Гріна для безмежної нитки струму у двовимірному просторі. Досліджувану структуру зображено на рис. Г.2.

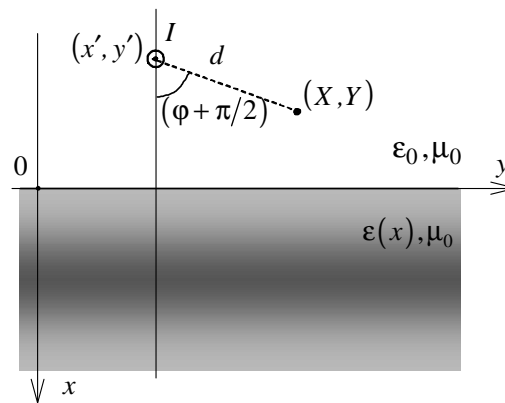


Рис. Г.2. Нитка з струмом над плоским неоднорідним діелектричним шаром

Коефіцієнт відбиття знайдемо числово шляхом дискретизації неперервних діелектричних профілів (рис. Г.3) та застосуванням матричного методу. Розрахунок розсіяного поля згідно з виразом (Г.30) проведемо для частоти $\omega = 2\pi \cdot 10 \cdot 10^9 \text{ рад/с}$ та координат розташування нитки зі струмом $x' = -0.005 \text{ м}$ та $y' = 0 \text{ м}$. Результати розрахунків (розсіяне поле) порівняймо для ближньої та дальньої зон, а саме на відстані $d = 0.01 \text{ м}$ та $d = 0.1 \text{ м}$ від джерела. Діаграми розсіювання подано на рис. Г.4.а та рис. Г.4.б, відповідно.

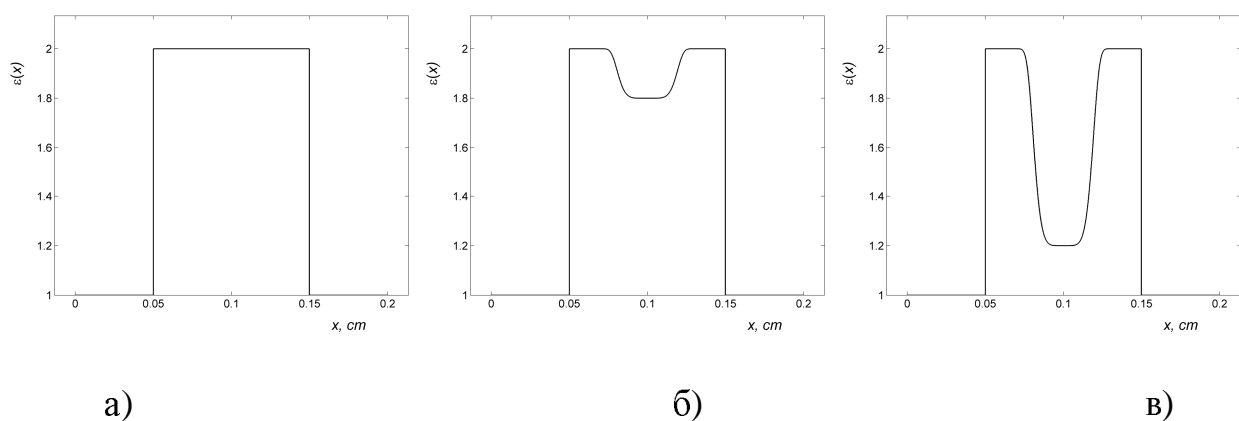


Рис. Г.3. Діелектричні профілі шарів з неоднорідностями,
від яких досліджується розсіяне поле

З рисунків видно, що наявність від неоднорідності проявляється у зменшенні екстремальних значень на діаграмі розсіювання. При цьому, у ближній зоні ефект

більш помітний. Зазначимо, що положення максимумів та мінімумів при зміні характеристик неоднорідності залишається однаковим.

Проведений теоретичний аналіз аналітичних та числових методів знаходження поля випромінювання точковими джерелами над шаруватою структурою підтвердив твердження про те, що виявити та охарактеризувати внутрішні неоднорідності діелектричного шару за розсіяним полем без належної обробки результатів вимірювань, практично неможливо. На прикладах, шляхом числового розв'язання прямої задачі розсіювання, показано зменшення екстремальних значень у діаграмі розсіювання точкового джерела при значній неоднорідності порівняно з однорідним діелектричним шаром. Очевидним є те, що для встановлення неоднорідності діелектричного шару за розсіяним полем від точкового джерела, необхідно розв'язувати обернену задачу розсіювання. Аналіз показав, що таку задачу можна звести до одновимірної, якщо за діаграмою розсіювання встановити змінний коефіцієнт відбиття.

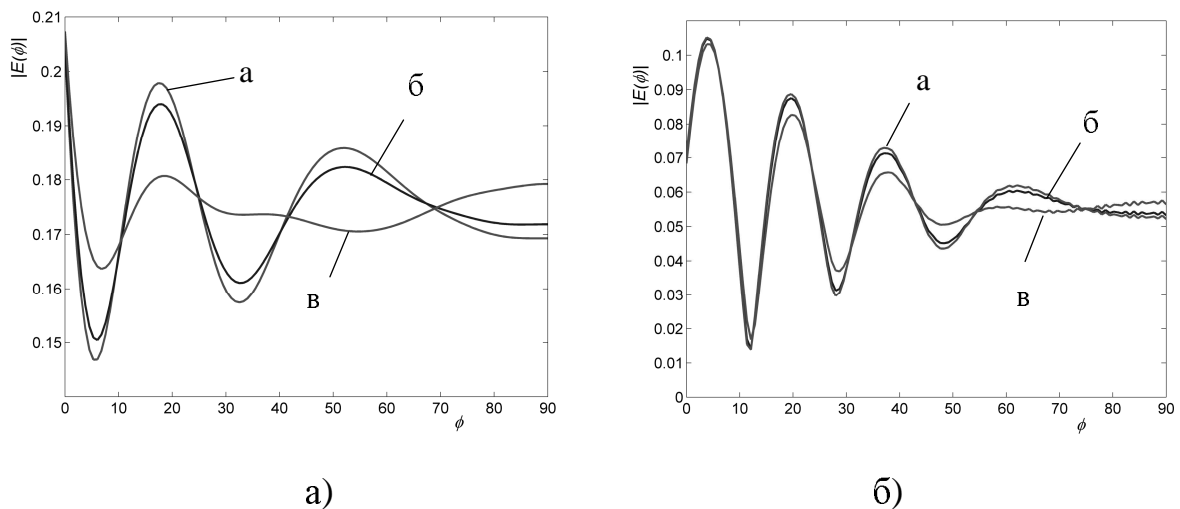


Рис. Г.4. Діаграми розсіювання, визначені на відстані $d = 0.01$ м від джерела, розташованого над діелектричним шаром для різних характеристик неоднорідності (криві позначено літерами у відповідності до рис. Г.3)

ДОДАТОК Д
АКТИ ВПРОВАДЖЕННЯ

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Технічний директор -

Головний інженер

Державного підприємства «АНТОНОВ»

професор, д.т.н. С.А.Бичков

«3» 03 2016 р.



АКТ

про впровадження результатів докторської дисертації

«Математичні моделі для підвищення ефективності оцінки параметрів неоднорідних середовищ за відомим розподілом розсіяного електромагнітного поля»

к.т.н. Синявського Андрія Тадейовича

На ДП «АНТОНОВ» знайдено практичне застосування результатів дисертації А.Т. Синявського, які стосуються запропонованих ним методів оцінювання параметрів матеріалів при здійсненні неруйнівного контролю плоскошаруватих структур, зокрема:

1) Методи розв'язання прямих та обернених задач розсіювання та їх програмна реалізація дозволили промодельовати процес неруйнівного контролю та оцінити можливість його використання за різних умов.

Математичне моделювання дозволило передбачити ступінь ефективності застосування надвисокочастотних методів для неруйнівної діагностики полімерних композитних матеріалів та конструкцій, що містять елементи з плоскими поверхнями розділу.

Результати комп'ютерного моделювання дають можливість оцінити імовірність виявлення дефектів та здійснити порівняння радіохвильових методів з іншими існуючими принципами контролю, в тому числі акустичного та вихрострумового.

2) Метод обробки результатів вимірювань дозволив ідентифікувати підповерхневі розклеювання в чарункових тришарових (сендвічевих) структурах,

які використовують при конструюванні та виробництві радіопроникних обтікачів літака. Варто зазначити, що такий метод вимірювань не використовує коштовні надвисокочастотні елементи, реєструючи лише амплітудні значення виміряного сигналу на виході квадратичного детектору в скінченому частотному діапазоні для сітки частот.

Достовірний неруйнівний контроль дає можливість вчасно виявляти дефекти в конструкціях, що в підсумку призводить до підвищення безпеки експлуатації літаків.


Заступник Головного фахівця із

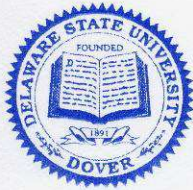
композиційних матеріалів ДП «АНТОНОВ», к.т.н.


А.В. Андреев

Начальник відділу неруйнівного

контролю ДП «АНТОНОВ»


В.Я. Дереча



DELAWARE STATE UNIVERSITY

COLLEGE OF MATHEMATICS, NATURAL SCIENCES, AND TECHNOLOGY

September 14, 2015

Certificate of Implementation

I, Mazen Shahin, a full professor at the Department of Mathematical Sciences at the College of Mathematics, Natural Sciences and Technology (CMNST) of Delaware State University, certify the following:

In 2007, I, as Director, and, Dr. Andriy Synyavskyy, as Co-Director, obtained a grant from the Mathematical Association of America (MAA) to support the implementation of 2007 summer research program of Undergraduate Delaware Research Experience in Applied Mathematics (U-DREAM) at the Delaware State University campus. The program was sponsored by the MAA and the National Science Foundation (NSF). The research program was entitled “**Numerical Spectral Line Estimation (NSLE).**” Dr. Synyavskyy used his research experience to design, develop, and implement 6-weeks summer program in 2007. He was in charge of design, development, and implementation of the teaching topics to provide students with the necessary foundation as well as developing research projects for the NSLE participants who were a group of undergraduate minority mathematics majors. Dr. Synyavskyy utilized his personal research knowledge and experience to instruct the students and to supervise them in their research projects. He has done a superb job in motivating the students and keeping them excited about their research experiences and final results.

Recently we have learned that Dr. Synyavskyy has completed his second dissertation for the Doctor of Science (D.Sc.). The title of his dissertation is “Mathematical models for increase of efficacy of estimate of inhomogeneous medium parameters from known distribution of scattered electromagnetic field.”

We can certify that the following results of Dr. Synyavskyy dissertation have been implemented:

- a) A generalized model of representation of observations in electromagnetic measurement systems that are aimed to simplify an indirect determination of parameters of distributed electromagnetic sources and reconstruction of a shape of unknown scatterer starting from distribution of electromagnetic field. In the NSLE program the mathematical model was used to demonstrate students a physical meaning of components of both reflected wave that scatters on a plane layered structure and waves that fall on a linear array of sensors from a distant sources;
- b) Generalized approach for estimation parameters of random processes, which corresponds to the proposed model of observations. The estimation approach allows the construction of new methods of solution to inverse scattering problems. Partial cases of the approach have been given to the participants of the NSLE program to master the statistical estimation and compare the approach with other methods of spectral estimation.

1200 N. DUPONT HIGHWAY • DOVER, DELAWARE 19901-2277 • (302) 857-6500 • FAX (302) 857-6503

Delaware State University is an equal opportunity employer and does not discriminate because of race, creed, national or ethnic origin, sex or disability.

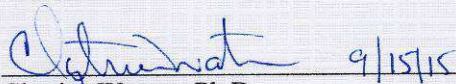
There are many important results and valuable benefits of application of Dr. Synyavskyy's ideas in organization and implementation of the NLSE program, which are worth mentioning:

- 1) The proposed model and approach were consistently reflected in teaching and research projects of the NLSE program and consequently they allowed students to become proficient in many aspects of mathematical modeling, statistical estimation and signal processing as well as to revise their knowledge of linear algebra, probability and analysis. They were introduced to the theory of inverse problems.
- 2) Students successfully completed their respective research projects of the program and prepared presentations at the Applied Mathematics Summer Workshop of the AMRC, Dover, DE, 2007 and the Joint Mathematics Meetings, San Diego, CA, January 2008.
- 3) The program allowed students to understand how real-life problems can be solved by mathematical tools and got motivated to pursue graduate programs and to conduct scientific research in future.
- 4) Students, who participated in the NLSE program, demonstrated a notable progress in their study and one of these students pursued a scientific career and successively obtained her MS and PhD degrees from DSU. She is currently an Assistant Professor at the University of Maryland at Eastern Shore.
- 5) Dr. Synyavskyy's ideas have been further developed in his research as a Visiting Research Scholar for one year (2007 – 2008) at the Applied Mathematics Research Center (AMRC) of DSU. He handled applications of the theory of inverse scattering in ground penetrating radar.
- 6) Dr. Synyavskyy's superb job with NLSE program contributed to a very productive collaboration with AMRC members that was reflected in regular common publications afterwards.

Sincerely yours,



Mazen Shahin, Ph.D.
 Professor, Department of Mathematical Sciences
 Director, Science and Mathematics Initiative for Learning Enrichment (SMILE)
 Director, Philadelphia Louis Stokes Alliance for Minority Participation (LSAMP)
 Director, Bridge to the Doctorate (BTD)
 Founder and Director, Science and Technology Academy for Residence Scholars (STARS)
 Delaware State University
mshahin@desu.edu, Office: +302-857-7055, Fax: +302-857-7050



Clytrice Watson, Ph.D.
 Interim Dean of College of Mathematics, Natural Sciences and Technology
 Delaware State University
 1200 N. DuPont Highway
 Dover, DE 19901, USA
cwatson@desu.edu, Phone: +302-857-6500, Fax: +302-857-6503





АКТ

про використання результатів роботи наукового співробітника
Фізико-механічного інституту ім. Г.В. Карпенка НАН України
Синявського Андрія Тадейовича

Цей акт складений про те, що у Львівському науково-дослідному радіотехнічному інституті знайшли застосування результати роботи наукового співробітника Синявського А.Т. „Розвиток методів візуалізації об’єктів та аналізу шаруватих структур стосовно проблем діагностики матеріалів і середовищ”, яку представлено на премію Президента України для молодих вчених за 2009 рік, а саме:

- метод просторової фільтрації, що забезпечує стійкий прийом сигналів від джерела випромінювання, яке розташовано над поверхнею розділу середовищ і виконуються умови двопроменевої моделі розповсюдження хвиль;
- метод формування діаграми спрямованості, що мінімізує вплив некогерентної паразитної завади;
- рекомендації щодо вибору структури приймальної системи з чотиріканальною антенною системою (багатоелементною антенною решіткою), яка дозволяє здійснювати прийом та оцінку координат джерела випромінювання за умови сильної когерентної завади
- визначення потенційної точності оцінювання координат випромінювачів електромагнітних хвиль, що розташовані над поверхнею розділу середовищ.

Перелічені результати використані при виконанні етапу НДР № 6929, де Синявський Андрій Тадейович був безпосереднім виконавцем. Впровадженні результати забезпечили можливість отримання суттєвого науково-технічного доробку для проведення наступних етапів ДКР „Астра”, в рамках якої виконувалася НДР № 6929.

Заступник Головного конструктора
ДКР „Астра” с.н.с.

В.П. Антонюк

ТЗОВ «ЮНІСЕРВІС»

79060, Україна,
м. Львів, вул. Наукова, 36, оф. 902
СДРПОУ 32182058
тел. +38 (0322) 40-95-35
факс: +38 (0322) 32-22-76
р/р 2600035713 в ВАТ «Райффайзен Банк Аваль», м. Львів
МФО 380805

А К Т

про використання результатів дисертації старшого наукового співробітника
Фізико-механічного інституту ім. Г.В. Карпенка НАН України
Синявського Андрія Тадейовича.

Даний акт складений про те, що у ТЗОВ «Юнісервіс» (м. Львів) знайшли застосування результати дисертації старшого наукового співробітника, кандидата технічних наук Синявського А.Т. «Математичні моделі для підвищення ефективності оцінки параметрів неоднорідних середовищ за відомим розподілом розсіяного електромагнітного поля». Предметом впровадження є:

- метод статистичного аналізу координат множини нерегулярних точок розсіювання у тривимірному просторі, що отримано системами тривимірної реконструкції. Такий аналіз дозволив створити статистичні моделі об'єктів у тримірному просторі, встановити ознаки цих об'єктів для класифікації та здійснити оцінку параметрів моделей за вихідними даними. В даному випадку первинним джерелом даних є скануючий лідар (оптичний локатор), а об'єктами вивчення - рослинність з різною структурою крон.

- метод погодження зображень для встановлення відповідності між даними, отриманими від лідару в тривимірному просторі, та ортофотопроекцією об'єктів дослідження. Метод дозволяє збільшити достовірність класифікації рослинності за рахунок об'єднання інформації, що отримано оптичними камерами видимого діапазону, з лідарними даними.

Ці методи у поєднанні з запропоновано моделлю крони дерева, що описує геометричне місце точок у тривимірному просторі, де розсіювання лазерного променя на кроні є найбільш ймовірним, дають можливість ідентифікувати окремі дерева за даними сканування та оцінювати основні параметри крон (висота, діаметр та ін.). Перелічені результати використано при створенні програмних продуктів, які інтегрованого в середовище AutoCAD для обробки даних від оптичного лазерного локатора фірми Leica Geosystems. Роботи в даному напрямі виконувалася впродовж 2006-2008 років в рамках проектів «Текстура» та «Контури» на замовлення ТЗОВ «ИнжГеоГис» (Росія).

Результати Синявського Андрія Тадейовича дозволили сформувати методологію автоматизованої обробки даних від лідару, яку реалізовано у вигляді функціонально завершених програмних продуктів. Використання цих програм на підприємстві ТЗОВ «ИнжГеоГис» спростило опрацювання великих обсягів даних лазерного сканування та декодування орто-фотознімків, що у кілька разів підвищило швидкість картографування територій з різними класами рослинності.

Частково, вищезгадані результати було викладено у статті «Разработка средств классификации растительности по высоте по данным лазерного отражения в среде AutoCAD» авторів Я.Ю.Варецький, А.Т.Синявський, Ю.В.Обух, Ю.І.Грицків, яку опубліковано в журналі «ГеоИнжиниринг» № 1(5) за 2008 рік.

Директор ТЗОВ "Юнісервіс",

к.т.н.



Ю.І. Грицків