

Міністерство освіти і науки України
Рівненський державний гуманітарний університет

На правах рукопису

ПРИСЯЖНЮК Олена Вікторівна

УДК 519.6:532.5

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ КОНВЕКТИВНО-ДИФУЗІЙНОГО ТЕПЛОМАСОПЕРЕНЕСЕННЯ В ПОРИСТИХ ТА МІКРОПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ МЕТОДАМИ ТЕОРІЇ ЗБУРЕНЬ

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук

*Ідентичний цього
примірника та інших
примірників дисертації
засвідчую:*
Вч. секретар
8 35.052.05



Науковий керівник:
Бомба Андрій Ярославович
доктор технічних наук, професор

Рівне – 2016

ЗМІСТ

Вступ	4
Розділ 1. Проблеми математичного моделювання процесів конвективної дифузії в пористих та мікропористих середовищах (огляд літературних джерел, постановка задач дослідження).....	12
1.1. Огляд літературних джерел з проблеми математичного моделювання процесів конвективної дифузії у пористих та біпористих середовищах	12
1.2. Асимптотичний метод розв'язання сингулярно збурених крайових задач конвективної дифузії в пористому середовищі	20
1.3. Висновки до першого розділу та загальна постановка задач дослідження.....	26
Розділ 2. Модельні сингулярно збурені задачі конвективно-дифузійного тепломасоперенесення в пористих середовищах.....	29
2.1. Математичне моделювання сингулярно збуреного процесу багатокomпонентного конвективно-дифузійного масоперенесення розчинних речовин у пористому середовищі	29
2.2. Асимптотичний метод розв'язання модельних сингулярно збурених задач типу «конвекція-дифузія-тепломасообмін» в пористих середовищах	39
2.2.1. Побудова асимптотичних наближень розв'язків сингулярно збурених крайових задач типу «конвекція-дифузія-тепломасообмін» в двозв'язних криволінійних областях	39
2.2.2. Моделювання просторового сингулярно збуреного процесу конвективно-дифузійного тепломасоперенесення в пористому середовищі з урахуванням хімічної реакції	44
2.3. Математичне моделювання процесу масоперенесення в тонкій трубці з врахуванням масообміну із зовнішнім середовищем через бічну поверхню	50
2.4. Результати числових експериментів.....	54
2.5. Висновки до другого розділу.....	65

Розділ 3. Моделювання сингулярно збурених процесів конвективно-дифузійно-адсорбційного масоперенесення в мікропористих середовищах	66
3.1. Асимптотичний метод розв'язання модельних сингулярно збурених задач процесу однокомпонентного масоперенесення в біпористих середовищах	67
3.2. Ідентифікація параметрів нелінійних сингулярно збурених процесів конвективної дифузії в мікропористих середовищах ...	73
3.3. Математичне моделювання просторових сингулярно збурених процесів конвективно-дифузійного масоперенесення в багат шарових біпористих середовищах	79
3.4. Результати комп'ютерного моделювання сингулярно збуреного процесу конвективно-дифузійного масоперенесення в мікропористому середовищі	92
3.5. Висновки до третього розділу	98
Розділ 4. Числово-асимптотичні методи дослідження процесів багатокомпонентного тепломасоперенесення в біпористих середовищах	100
4.1. Моделювання сингулярно збурених процесів конвективно-дифузійного масоперенесення двох сортів розчинних речовин у мікропористих середовищах.....	100
4.2. Сингулярно збурені процеси багатокомпонентного конвективно-дифузійного тепломасоперенесення в мікропористих середовищах	109
4.3. Математичне моделювання процесів первинної очистки стічних вод із використанням мікропористих частинок	114
4.4. Результати комп'ютерного моделювання	118
4.5. Висновки до четвертого розділу	123
Висновки	125
Список використаних джерел.....	127
Додатки	149

ВСТУП

Актуальність теми. Математичне моделювання процесів конвективно-дифузійного масоперенесення з урахуванням масообміну знаходить важливі застосування при вирішенні проблем очищення рідин шляхом фільтрування, а також прогнозування забруднення атмосфери, поверхневих та підземних вод шкідливими домішками тощо. На теперішній час перспективним є використання фільтрів з мікропористим завантаженням для очищення забруднених технологічних потоків, що дає можливість зменшити розміри відповідних пристроїв, створити відносно недорогі, швидкі і ефективні методи очистки зон забруднення.

На сьогодні вже відомі математичні моделі дифузійно-адсорбційного масоперенесення в неоднорідних схильних до деформації і двопористих (у тому числі мікропористих) середовищах. Проте актуальним залишається дослідження такого роду процесів у випадку наявності домінуючих складових механізму перенесення, що приводить до появи малих параметрів у відповідних математичних моделях. Зокрема, при дослідженні багатоконпонентного тепломасоперенесення в мікропористих середовищах, необхідно враховувати низку факторів, таких як співвідношення між величинами параметрів, що характеризують ті чи інші складові процесу, залежність фільтрувальних властивостей таких матеріалів від температури (наприклад, в одних випадках мікропористий матеріал не пропускає тепло, а за інших умов – у зворотньому напрямку не пропускає вологу) тощо. Їх урахування призводить до ускладнення математичних моделей процесів сингулярностями, породженими малими параметрами. Тому постає актуальна задача розробки нових або удосконалення існуючих методів розв'язання відповідних крайових задач. Принцип локалізації, що використовується у методах теорії збурень, дозволяє одночасно отримати і достатню точність, і значне спрощення процесу розв'язування. Асимптотичний метод розв'язування типових модельних крайових задач для сингулярно збурених параболічних та еліптичних рівнянь на теперішній час

ефективно використовується для дослідження процесів конвективної дифузії при фільтрації в одно- та багатозв'язних, плоских і просторових криволінійних областях, за умови превалювання певних складових процесу над іншими. Виникає природне запитання стосовно можливості його розвитку для розв'язання нелінійних систем сингулярно збурених рівнянь з локально-іншорідними особливостями, що забезпечить можливість прогнозування аналогічних процесів багатокомпонентного масоперенесення у мікропористих середовищах.

Таким чином, *актуальним є науково-технічне завдання моделювання процесів багатокомпонентного тепломасоперенесення у мікропористих середовищах (фільтрах) за умови домінування одних складових цих процесів над іншими та розвитку асимптотичних методів розв'язання відповідних сингулярно збурених крайових задач.*

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалась як частина планів науково-дослідних робіт Рівненського державного гуманітарного університету (РДГУ), зокрема “Системне математичне моделювання нелінійних збурень процесів типу “фільтрація-конвекція-дифузія” з післядією при неповних даних” (номер державної реєстрації 0109U001065), “Просторові аналоги крайових задач на квазіконформні відображення і проблеми моделювання нелінійних процесів у пористих середовищах” (номер державної реєстрації 0112U001014). У рамках виконання цих науково-дослідних робіт автором розроблено нові математичні моделі сингулярно збурених процесів багатокомпонентного тепломасоперенесення в пористих та мікропористих середовищах. Пробудовано асимптотичні розклади відповідних крайових задач та на цій основі розроблено алгоритми для розрахунку концентрацій розчинних речовин, що фільтруються в однорідних та шаруватих середовищах.

Мета і задачі дослідження. Метою роботи є математичне моделювання технологічних процесів конвективно-дифузійного тепломасоперенесення розчинних речовин в пористих та мікропористих середовищах (фільтрах) у

випадку переважання одних їх складових над іншими та розвиток методів теорії збурень розв'язання відповідних нелінійних сингулярно збурених задач.

Для досягнення поставленої мети визначені такі задачі дослідження:

- вдосконалити математичні моделі сингулярно збурених процесів конвективно-дифузійного тепломасоперенесення за умов масообміну в пористих середовищах;
- розробити підхід до моделювання процесів очищення технологічних потоків з використанням мікропористих сорбентів у випадках превалювання одних складових процесу над іншими та розвинути методи асимптотичного наближення розв'язків відповідних сингулярно збурених задач в однорідних та шаруватих областях;
- розробити алгоритми розв'язування відповідних крайових задач для плоских та просторових криволінійних областей, на основі чого провести числові розрахунки та здійснити аналіз отриманих результатів;
- узагальнити розроблені математичні моделі і методи на випадок моделювання процесу тепломасоперенесення багатокомпонентних забруднень в мікропористих середовищах.

Об'єктом дослідження є процеси очищення технологічних потоків шляхом фільтрування з використанням пористих та мікропористих матеріалів.

Предметом дослідження є нелінійні математичні моделі процесів типу «конвекція-дифузія-тепломасообмін» у пористих та мікропористих середовищах складної конфігурації у випадках превалювання одних складових процесу над іншими та асимптотичні методи розв'язання відповідних сингулярно збурених задач.

Методи дослідження. У роботі використано методику узагальнення відомих класичних моделей шляхом переходу до відповідних “збурених” задач. Це дозволило використати класичні форми законів, що описують процеси руху рідини в пористих середовищах, а при побудові асимптотичних наближень їх розв'язків, доповнювати відомі розв'язки відповідних вироджених задач

поправками з використанням методу примежових функцій. Також у процесі розв'язання поставлених задач використано числові та аналітичні методи розв'язання крайових задач.

Наукова новизна одержаних результатів:

1. Вперше сформовано математичну модель сингулярно збуреного процесу конвективно-дифузійно-адсорбційного масоперенесення розчинної речовини в однорідному та кусково-однорідному біпористому середовищі, що на відміну від існуючих, враховує механізм конвективного перенесення, а також уточнює розрахунок розподілу концентрації в фільтрі з мікропористим завантаженням.

2. Вперше одержано розв'язки класу сингулярно збурених задач типу конвекція-дифузія-масообмін у криволінійних областях з локально-іншорідними особливостями, що забезпечує можливість прогнозування такого роду процесів у мікропористих середовищах, у тому числі за умов ідентифікації параметрів.

3. Вперше побудовано математичну модель сингулярно збуреного процесу багатокомпонентного конвективно-дифузійно-адсорбційного масоперенесення розчинної речовини в однорідному мікропористому середовищі (фільтрі), за умов врахування масообміну та взаємовпливу компонент; одержано асимптотичне розв'язання розв'язків відповідних крайових задач, що націлено на оптимальне налаштування параметрів процесів очищення технічних рідин від багатокомпонентного забруднення та є основою для розробки системи автоматизованого керування відповідними процесами.

4. Удосконалено математичну модель процесу конвективно-дифузійного тепломасоперенесення розчинних речовин з врахуванням масообміну за умови домінування одних його складових над іншими, що дало змогу уточнити динаміку зміни концентрації окремих компонент багатокомпонентної суміші.

5. Отримав подальший розвиток метод асимптотичних розв'язків розв'язків сингулярно збурених крайових задач стосовно дослідження процесів конвективно-дифузійного перенесення в тонкій трубці за умов

тепломасообміну на бічній границі, що, окрім забезпечення можливості врахування відведення забруднення через стінки-пастки, також дозволяє прогнозувати відбір ґрунтового тепла з допомогою ґрунтового теплообмінника.

Практичне значення одержаних результатів. Проведені в роботі дослідження дають можливість аналізувати та прогнозувати процеси масоперенесення розчинних речовин у біпористих середовищах з урахуванням взаємовпливу різних складових процесу, зокрема масообміну та температурного режиму. Розроблені алгоритми та програмні процедури дозволяють враховувати структуру та характеристики середовища, особливості переносу на мікро- і макрорівні, режимно-технологічні параметри (константи рівноваги та масообміну, швидкості хімічних реакцій тощо), що є необхідним для оптимального налаштування процесів очистки технологічних потоків з використанням мікропористих адсорбентів для отримання необхідної якості вихідних продуктів.

Результати роботи використано науково-дослідним виробничим бізнес-центром Національного університету водного господарства та природокористування (НДВБЦ НУВГП) у робочих проектах на об'єктах “Реконструкція котельні студмістечка НУВГП у м. Рівне вул. Чорновола, 49в (перша, друга черга)” (г/д 30-12-06/36-08-12) та для розробки науково-технічної документації “Обстеження та рекомендації щодо покращення тепловологісного режиму будівлі фільтрів насосної станції «Новий двір» в м. Рівне” (г/д 30-15-03). Розроблені в дисертаційній роботі рекомендації прийняті ТОВ «РЕМБ» (м. Рівне) до впровадження в проектно-розрахункових роботах при розробці та налаштуванні роботи системи пом'якшення води на котельні Більськовільської ЗОШ І-ІІІ ст. (Рівненська обл., Володимирецький р-н., с. Більська Воля, вул. Шкільна, 14).

Окремі викладені в дисертаційній роботі матеріали використано у навчальному процесі РДГУ при підготовці спецкурсів: “Проблеми оптимізації і керування процесами і системами”, “Сучасні проблеми прикладної математики” та “Проблеми ідентифікації”. Розроблені моделі та алгоритми

використовувалися для розв'язання відповідних задач у науково-дослідній лабораторії “Математичне моделювання нелінійних збурень процесів та систем” кафедри інформатики та прикладної математики РДГУ. Більшість результатів, отриманих у роботі, подано у вигляді формул, алгоритмів, ілюстрацій та графіків, які можуть бути включені у посібники та довідники і використані в інженерній практиці.

Особистий внесок здобувача полягає у безпосередньому проведенні теоретико-розрахункових досліджень, оформленні проміжних результатів роботи у вигляді публікацій і доповідей. Всі результати, що складають основний зміст дисертаційної роботи, отримані автором самостійно.

У публікаціях, написаних у співавторстві, здобувачеві належить: в [14, 17, 19–22, 24, 35, 36, 117, 186–187] – розробка підходу до розв'язання сингулярно збурених задач одно- та багатокomпонентного конвективно-дифузійно-адсорбційного масоперенесення в однорідному мікропористому середовищі із використанням асимптотичної методології теорії збурень, побудова алгоритму для знаходження концентраційних розподілів в міжчастинковому просторі та в пористих частинках; у [23, 34, 137] – побудова асимптотичного розв'язку задачі конвективно-дифузійно-адсорбційного масоперенесення в багатощаровому мікропористому середовищі, програмна реалізація відповідних алгоритмів; в [15, 16, 29, 30, 31] – розробка алгоритму числової ідентифікації коефіцієнтів дифузії в міжчастинковому просторі та в порах частинок, коефіцієнта впливу внутрішньочастинкового перенесення на міжчастинкове та коефіцієнта адсорбційної рівноваги; у роботі [25] – побудова математичної моделі нестационарного процесу конвективно-дифузійного поширення тепла в трубі ґрунтового теплообмінника, виконання комп'ютерних розрахунків і їх аналіз; в статті [33, 138, 139] – дослідження неізотермічного процесу багатокomпонентного масоперенесення в пористому середовищі; в [26, 113] – розробка алгоритму розв'язання та програмна реалізація, аналіз отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації. Матеріали дисертаційної роботи обговорювалися на таких наукових конференціях: VIII International Conference «Porous materials. Theory and Experiment» (INTERPOR'12) (Lviv-Briukhovychi, 2012); Міжнародній науковій конференції «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь» (м. Київ, 2012 р.); Всеукраїнській науковій конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів» (м. Рівне, 2013 р.); XVI Міжнародному симпозиумі «Методи дискретних особливостей в задачах математичної фізики» (МДОЗМФ-2013) (Харків-Херсон, 2013 р.); Міжнародній науковій конференції «Питання оптимізації обчислень» (ПОО-XL) (Кацивелі, 2013 р.); III Міжнародній конференції «Компьютерное моделирование в наукоемких технологиях» (м. Харків, 2014 р.); VII Міжнародній науковій конференції імені І. І. Ляшка «Обчислювальна та прикладна математика» (м. Київ, 2014 р.); II науково-технічній конференції «Обчислювальні методи і системи перетворення інформації» присвяченій пам'яті професора Б.О. Попова (м. Львів, 2014 р.); Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів» (м. Рівне, 2015 р.); Шістнадцятій міжнародній науковій конференції ім. акад. Михайла Кравчука (Київ, 2015); III International Conference «Mathematics for Life Sciences» (Rivne, 2015); XXI Всеукраїнській науковій конференції «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» (APAMCS-2015) (Львів, 2015); Науково-технічній конференції «Мікро- та нанонеоднорідні матеріали: моделі та експеримент» (Львів, 2015); IV Всеукраїнській науково-практичній конференції студентів, аспірантів та науковців «Інформаційні технології в професійній діяльності» (м. Рівне, 2010 р.); XV Всеукраїнській (X Міжнародній) студентській науковій конференції з прикладної математики та інформатики ШКПМІ-2012 (м. Львів, 2012 р.); III та V Всеукраїнських школах-семінарах молодих вчених і студентів АСІТ (м. Тернопіль, 2013 р. та 2015 р.); звітних науково-практичних конференціях викладачів, аспірантів та студентів РДГУ (2012–2015 рр.).

У повному обсязі дисертація обговорювалася на розширеному науковому семінарі кафедри інформатики та прикладної математики Рівненського державного гуманітарного університету та кафедри прикладної математики Національного університету водного господарства та природокористування, науковому семінарі кафедри математичної фізики та кафедри моделювання систем та технологій Харківського національного університету імені В. Каразіна, науковому семінарі кафедри прикладної математики Інституту прикладної математики та фундаментальних наук Національного університету «Львівська політехніка», науковому семінарі кафедри комп'ютерних наук Тернопільського національного економічного університету.

Публікації. За матеріалами роботи опубліковано 29 наукових праць, у тому числі 12 статей, з яких 9 у фахових наукових виданнях з технічних наук, у тому числі у виданнях, що реферуються в міжнародних наукометричних базах даних: ISI Thomson Reuters [14], Cambridge Scientific Abstracts [22], Ulrich's Periodicals Directory [137], INSPEC [22, 25, 140]; 3 праці опубліковано без співавторів.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел (212 найменувань) та додатків.

РОЗДІЛ 1

ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ КОНВЕКТИВНОЇ ДИФУЗІЇ В ПОРИСТИХ ТА МІКРОПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩА (ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ, ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ)

1.1. Огляд літературних джерел з проблеми математичного моделювання процесів конвективної дифузії у пористих та біпористих середовищах

Проблеми переносу в пористих середовищах мають велике прикладне значення. Основні проблеми при вивченні процесів тепломасообміну пов'язані з постановкою і розв'язанням задач при високій щільності теплових потоків і великих швидкостях течії, при фазових і хімічних перетвореннях.

Процес масообміну полягає у перенесенні деякої речовини, представленої у формі молекул, атомів, іонів, в просторі з неоднорідною концентрацією або при неоднорідних полях температур і тисків. Цей процес перенесення маси між фазами відбувається до настання певного стану, що називається станом рівноваги і при якому з першої фази в другу переноситься така ж кількість речовини, як і з другої в першу. Для масообміну в межах однієї фази - після вирівнювання концентрації речовини по всьому об'єму середовища. Окрім того, речовина може переноситися під одночасним впливом декількох градієнтів – градієнту концентрації, градієнту температури чи градієнту тиску, такий вид масоперенесення називається молекулярною дифузією і розрізняють відповідно концентраційну дифузію, термодифузію та бародифузію. Процес перенесення маси, окрім молекулярної дифузії, може здійснюватися і під дією конвекції і на відміну від останньої, молекулярна дифузія як правило має місце в нерухомих потоках або в приграничних шарах, що знаходяться поблизу межі розділу фаз і обумовлена хаотичним рухом частинок речовини.

При дифузійному переносі, напрямок перенесення речовини визначається градієнтом концентрації в окремих точках системи, і речовина завжди переходить з фази, де її концентрація вище рівноважної, у фазу чи область, в якій її концентрація нижче рівноважної (або від більшого градієнта до меншого). Швидкість масопередачі пов'язана з механізмом переносу речовини між фазами, які приймають участь у масообміні.

До розробки основних положень теорії масоперенесення долучилися такі видатні вчені, як А. Фік, А. Дарсі [192], І.-Ж. Ленгмюр, М.Є. Жуковський, П.Я. Полубаринова-Кочина [133-134], Н.В. Герсеванов, Р. Колінз [88], Я. Бер [49], Г. І. Бернблатт [8], В.І. Аравін [6], С.М. Нумеров [121], А.В. Ликов [107-108], М. Шірато, Н. Н. Веригін [55-56], Б.С. Шержуков [170], Ж. Каргер [199], Д. Ритвен [199, 209], С. Корнер, Ж. Фресард [196], Д.Ф. Шульгін, В.Н. Ніколаєвський [37], С.Ф. Авер'янов [1], А. Шейдергер [169] та інші. Проблеми математичного моделювання переносу різної природи, як в однорідних так і неоднорідних пористих середовищах розглянуті в працях А.М. Когановського [87], І.М. Федоткіна, Р. Лоренца, І.І. Ляшка [104-106], С.І. Ляшка, В.І. Лаврика [96-97, 116], І.В. Сергієнка [152-154], В.В. Скопецького [168], Я.Г. Савули [95, 147], В.С. Дейнеки [69-72], М. Р. Петрика [99], Є. Я. Чаплі [166], О.Ю. Чернухи [143], Б. В. Гери [64, 114], Я.Й. Бурака [45], В.М. Булавацького [39-41], А.Я. Бомби [13, 18, 27-28], А. П. Власюка [59-62], О. Я. Олійника [80, 122-124], В. Ф. Півня [131, 206], Г.А. Шинкаренка, В.М. Шестакова [171] та ін. [5, 89, 98, 101, 111, 126, 177, 190, 191, 197]. В цих працях розглядаються постановки змішаних крайових задач для рівнянь переносу в частинних похідних, що описують різні види переносу в однорідних на неоднорідних середовищах, в основному на макрорівні і без врахування внутрішньої структури пористих частинок.

Процеси міграції речовини у водонасичених пористих середовищах при її малих концентраціях у розчині (до 10 г/л) і незначних змінах температури можна описати наступною системою диференціальних рівнянь [18]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v} = \kappa \cdot \text{grad } \varphi, \text{div } \vec{v} = 0; \\ (\sigma \cdot C_j)'_t = \text{div} (D_j \cdot \text{grad } C_j) - \vec{v} \cdot \text{grad } C_j + \sum_{k=1}^m f_{k,j}^* (C_k, C_j) - \\ - \sum_{k=1}^m f_{j,k}^* (C_j, C_k) - \tilde{f}_j (C_j, U_j) + \tilde{\tilde{f}}_j (U_j, C_j), \\ (\sigma \cdot U_j)'_t = \sum_{k=1}^m f_{k,j}^{**} (U_k, U_j) - \sum_{k=1}^m f_{j,k}^{**} (U_j, U_k) + \tilde{f}_j (C_j, U_j) - \tilde{\tilde{f}}_j (U_j, C_j), \\ j = \overline{1, m}, k = \overline{1, m}, m \in N, \end{array} \right. \quad (1.1)$$

де φ і \vec{v} – відповідно потенціал і вектор швидкості фільтрації, $\kappa = \kappa(x, y, z, U_j)$ – коефіцієнт (тензор) фільтрації, C_j і U_j – відповідно масові концентрації j -ї компоненти речовини у фільтраційному розчині і на скелеті пористого середовища у точці (x, y, z) в момент часу t , $D_j = D_j(x, y, z, C_j)$ – коефіцієнт (тензор) конвективної дифузії j -ї компоненти речовини у водному потоці ($j = \overline{1, m}$), $\sigma = \sigma(x, y, z, U_j)$ – пористість середовища, $f_{j,k}^* (C_j, C_k)$ і $f_{j,k}^{**} (U_j, U_k)$ – неперервні обмежені функції, які характеризують швидкість протікання масообмінних процесів між j -ю і k -ю компонентами речовини відповідно у фільтраційному розчині і на скелеті пористого середовища ($j = \overline{1, m}, k = \overline{1, m}$), $\tilde{f}_j (C_j, U_j)$ і $\tilde{\tilde{f}}_j (U_j, C_j)$ – неперервні обмежені функції, які характеризують швидкості протікання відповідно сорбційних і десорбційних процесів j -ї компоненти речовини ($j = \overline{1, m}$).

Фільтраційні процеси, як правило, протікають в обмежених областях. На границі S фільтраційної області або на її частині задаються крайові умови, найбільш прості і широко поширені із яких умови:

а) $\varphi|_S = \tilde{\varphi} = \text{const}$ – на ділянках границі S , які є входами і (або) виходами фільтраційної течії;

б) $\varphi'_n|_S = 0$ – на водонепроникних ділянках границі S області фільтрації, де \vec{n} – нормаль до границі.

На межах розділів сусідніх однорідних шарів з різними властивостями задаються умови рівності потенціалів і швидкостей:

$$\varphi|_{S_-} = \varphi|_{S_+}, \quad v|_{S_-} = v|_{S_+}.$$

При постановці задач конвективної дифузії на вході S_* фільтраційної течії, зазвичай, граничною умовою задається:

а) закон надходження і розподілу величин концентрації розчиненої у воді речовини $C|_{S_*} = c_*$;

б) умова Данквертса $D \cdot C'_n - v_n \cdot (C - c_*)|_{S_*} = 0$ (що враховує як конвективний, так і дифузійний механізми підведення речовини).

На водонепроникних ділянках границі \tilde{S} області фільтрації виконуються умови: $C|_{\tilde{S}} = c_*$ або $C'_n|_{\tilde{S}} = 0$ (врахування або відсутності додаткових джерел надходження величин концентрації розчиненої у воді речовини), а на ділянці виходу фільтраційного потоку S^* можна приймати одну з наступних граничних умов:

а) задано закон розподілу величин концентрації речовини $C|_{S^*} = c^*$;

б) задана умова Данквертса $D \cdot C'_n - v_n \cdot (C - c^*)|_{S^*} = 0$ (такі умови приймаються, якщо не спостерігається інтенсивного відводу вод на виході фільтраційного потоку);

в) задана умова, що враховує тільки конвективний перенос через границю $C'_n|_{S^*} = 0$ (у випадку інтенсивного відводу вод на виході фільтраційного потоку).

На межі розділу сусідніх однорідних шарів з різними властивостями задаються умови рівності концентрацій і потоків речовин:

$$C_{S_{*-}} = C_{S_{*+}}, \quad D_* \cdot C'_n - v_n \cdot C|_{S_{*-}} = D^* \cdot C'_n - v_n \cdot C|_{S_{*+}},$$

де D_* , D^* – коефіцієнти конвективної дифузії у сусідніх шарах, v_n – нормальна складова швидкості на межі розділу.

Початкова умова має вигляд $C(M, t) = c_0(M)$, де $c_0(M)$ – задана функція

розподілу концентрацій речовини в області фільтрації в момент часу t до настання процесу забруднення або промивання пористого середовища, M – довільна точка області фільтрації.

Власюком А. П., Мартинюком П. М. та їх учнями [60-61, 109] процес однокомпонентного тепломасоперенесення при фільтрації сольових розчинів у недеформованих ґрунтових середовищах в загальноприйнятих позначеннях запропоновано описувати наступною системою диференціальних рівнянь:

$$\operatorname{div}(D(C)\operatorname{grad} C + D_T(C)\operatorname{grad} T) - \vec{V}(C)\operatorname{grad} C = \sigma \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t}, \quad (1.2)$$

$$\vec{V}(C) = -\kappa(C, T)\operatorname{grad} \varphi + v(c)\operatorname{grad} C + v_1\operatorname{grad} T, \quad \operatorname{div}\vec{V} = 0, \quad (1.3)$$

$$\operatorname{div}(\lambda\operatorname{grad} T) - \rho c_\rho \vec{V}(C)\operatorname{grad} T = c_n \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = f(C, N, C_*, N_*, T, \gamma_1, \dots, \gamma_n). \quad (1.5)$$

Тут рівняння (1.2), (1.3) описують масоперенесення і фільтрацію сольових розчинів в неізотермічних умовах, рівняння (1.4) описує теплоперенесення в ґрунтових масивах, (1.5) – масообмін між рідкою і твердою фазами.

Проте при математичному моделюванні багатокомпонентних процесів виникає потреба врахувати можливість втрати чи набуття концентрації забруднюючих речовин у фільтраційній течії внаслідок їхньої реакції. Більшість таких реакцій проходять з виділенням чи поглинанням енергії, тому необхідно враховувати вплив зміни температури середовища на швидкість перебігу дифузійних та масообмінних (породжених хімічними реакціями) процесів.

Згідно кінетичного закону діючих мас швидкість елементарної реакції при заданій температурі пропорційна добутку концентрацій реагуючих речовин в степені, що показує кількість моль речовини, що вступають у реакцію [194]:

$$\frac{dC}{dt} = k(T) \cdot C_1^{n_1} \cdot C_2^{n_2} \cdot \dots \cdot C_i^{n_i}, \quad (1.6)$$

де $k(T)$ – швидкість хімічної реакції. Рівняння (1.6) справедливо для елементарних реакцій. Для складних реакцій показники степеня в рівнянні (1.6)

називаються порядками реакції і можуть приймати не тільки цілочисельні значення. Константа швидкості хімічної реакції залежить від температури.

Отже, при дослідженні багатокомпонентного масоперенесення в пористих середовищах в низці випадків необхідно враховувати взаємовплив температури середовища на розподіл концентрації розчинних речовин з метою інтенсифікації процесів очищення забруднених технологічних потоків.

Перспективним напрямком також є використання мікропористих матеріалів для видалення домішок з газових та водних потоків. На сьогодні існує ряд підходів до моделювання процесів масоперенесення в пористих каталітичних (біпористих) середовищах, які дозволяють в достатній мірі враховувати вплив масоперенесення на рівні частинок. Дослідженню процесів дифузійно-адсорбційного масоперенесення в біпористих середовищах присвячено значну кількість праць закордонних авторів – Р. Бартера, Н. Чена [189], Ж. Каргера, Д. Ритвена [209], Ж. Фресарда, Є. Воробйова, С. Леклерка [203, 205] та ін. [181, 207, 208], а також вітчизняних – В.С. Дейнеки, К.В. Сергієнка, М.Р. Петрика [127-130, 193, 202-205]. В них розглядаються моделі молекулярного транспорту в кристалічних тілах, який спричиняється двома видами дифузії: дифузією в макропорах, за рахунок порожнин між кристалічними частинками адсорбенту і дифузією в мікропорах частинок. Модель однокомпонентного адсорбційного масоперенесення в каталітичному середовищі частинок мікропористої структури представлено у вигляді системи диференціальних рівнянь вигляду:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_{\text{inter}} \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} - \theta_{\text{intra}} \left(\frac{\partial q}{\partial r} \right)_{r=R}, \quad \frac{\partial q}{\partial t} = D_{\text{intra}} \left(\frac{\partial^2 q}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial q}{\partial r} \right), \quad (1.7)$$

з початковими та крайовими умовами

$$c(t, z)|_{t=0} = 0, \quad q(t, r, z)|_{t=0} = 0, \quad (1.8)$$

$$c(t, z)|_{z=l} = c_{\infty}, \quad q(t, r, z)|_{r=R} = k \cdot c(t, z), \quad \frac{\partial c(t, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial q(t, r, z)}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0. \quad (1.9)$$

Перше з рівняння (1.7) описує масоперенесення у міжчастинковому просторі, друге описує внутрішньочастинкове масоперенесення з поточною

концентрацією $q(t, r, z)$, що пов'язана з концентрацією в міжчастинковому просторі $c(t, z)$ другою з крайових умов (1.9) – умовою рівноваги на поверхні частинок. Коефіцієнти D_{inter} та D_{intra} відповідно характеризують швидкість протікання процесів масоперенесення в міжчастинковому просторі та в порах частинок, а коефіцієнт $\theta_{intra} = 3 \frac{(1 - \varepsilon_{inter}) D_{intra}}{\varepsilon_{inter} R}$ характеризує вплив внутрішньочастинкового перенесення на міжчастинкове. Тут l – довжина зразка, R – радіус мікропористих частинок, ε_{inter} – пористість. Дана методологія поширена на випадок моделювання та дослідження розв'язків крайових задач переносу з системою двофазного дворівневого і n -рівноважного масоперенесення в однорідних і багатоінтерфейсних неоднорідних середовищах пористої структури з мікро- і нанопористими просторово розподіленими диференціальними та інтегральними включеннями, а також на випадок моделювання та дослідження розв'язків двофазних інтегро-диференціальних крайових задач типу „фільтрація-консолідація” з системою двофазного дворівневого і n -рівноважного масоперенесення в однорідних і багатоінтерфейсних неоднорідних середовищах пористої структури. На цій основі для розглянутих моделей переносу з використанням їх аналітичних розв'язків, градієнтних методів та даних фізичного експерименту запропоновані ефективні алгоритми і програмні процедури наближеного розв'язання зворотніх задач для визначення розподілів кінетичних коефіцієнтів (коефіцієнтів дифузії, коефіцієнтів консолідації на мікро- і макрорівнях). Модельну конструкцію (1.7) за додаткової умови рівноваги із (1.9) називатимемо системою диференціальних рівнянь з локально-іншорідними особливостями.

Проте актуальним залишається питання врахування конвективного масоперенесення в однорідних та шаруватих середовищах частинок мікропористої структури, що приводить до розв'язання сингулярно збурених задач, оскільки сорбція та дифузія є малими в порівнянні з конвективною складовою процесу.

В якості методів математичного моделювання і дослідження масоперенесення різної природи використовуються аналітичні [7, 11, 38, 58, 63, 68, 92-94] та наближені методи теорії крайових задач [3, 4, 9, 50, 83, 103, 125, 132, 183]. Для аналітичного розв'язання крайових задач, що описуються рівняннями в частинних похідних, найчастіше застосовують класичні методи (метод характеристик, метод відокремлення змінних (метод Фур'є), метод джерел (функцій Гріна), метод Рімана, метод потенціалів) та методи інтегральних перетворень. Так в працях [99, 115] в якості методики відшукування розв'язків задачі використовувались поряд із класичними методами застосовуються методи інтегральних перетворень Фур'є, Лапласа, Бесселя, які забезпечують високий ступінь адекватності отриманих модельних розв'язків, збіжність розв'язків до початкових та крайових умов і при цьому надають можливість враховувати впливи широкого класу фізичних та технологічних чинників.

Застосування чисельних методів дає практичні алгоритми для побудови наближених розв'язків крайових задач для всієї області зміни аргументів. Для розв'язання крайових задач для рівнянь в частинних похідних ефективно застосовуються такі чисельні методи як: методи скінченних різниць (сіток), варіаційно-різницеві методи, методи скінченних елементів, статистичні методи. Серед цих методів, найбільш широке застосування для побудови розв'язків моделей у вигляді крайових задач для рівнянь в частинних похідних для моделей переносу отримав метод скінченних різниць [65, 148-150, 172]. Серед варіаційно-різницевих методів, в яких дискретна модель переносу одержується з використанням варіаційного формулювання, найбільш використовуваними є метод локальних колокацій та метод скінченних елементів.

Розробці різних методів чисельного та чисельно-аналітичного розв'язання одно- та двовимірних задач масоперенесення (волого-, солеперенесення, розповсюдження забруднень у навколишньому середовищі, та суміжних) присвячені роботи І.І. Ляшка, І.В. Сергієнка, В.В. Скопецького, М.З. Згуровського [74, 168], В.С. Дейнеки, В.М. Булавацького, Я.Й.Бурака, А.П.Власюка та ін.

1.2. Асимптотичний метод розв'язання сингулярно збурених крайових задач конвективної дифузії в пористому середовищі

Загальновідомо, що при моделюванні процесів фільтрування їх компоненти (конвекція, дифузія, масообмін, різні співвідношення між параметрами) входять не рівнозначно одні із них переважають над іншими. Диференціальні рівняння, що описують такі процеси як правило містять малі параметри, а відповідні задачі доцільно розв'язувати з допомогою методів теорії збурень. Теоретичні дослідження в області теорії сингулярних збурень ведуться досить давно.

Слід зазначити, що асимптотичні методи, які виявилися ефективним інструментом дослідження сингулярно збурених задач, з'явилися задовго до середини минулого століття. Одними з творців асимптотичної теорії були французькі вчені П.Лаплас і А. Пуанкаре. У працях П. Лапласа, пов'язаних із завданнями небесної механіки, асимптотичні методи розроблялися і застосовувалися як спосіб наближеного обчислення значень функції в околі її особливих точок. А. Пуанкаре заклав основи сучасної асимптотичної теорії, ввів у вживання її основні терміни і довів фундаментальні теореми. Істотний внесок у розвиток асимптотичних методів вніс російський вчений А.М.Ляпунов. Теорія стійкості по суті є теорією асимптотичного дослідження систем диференціальних рівнянь.

Що стосується дослідження сингулярно збурених диференціальних рівнянь методами теорії збурень, то початок вони беруть з робіт А.Н.Тихонова [159], які присвячені системам нелінійних звичайних диференціальних рівнянь, в яких одне з рівнянь має множником при старшій похідній малий параметр. Розв'язок даної системи містить "швидку" і "повільну" компоненти (зараз такі системи називаються системами Тихонівського типу). А.Н.Тихонов вивів умови, за яких розв'язок не виродженої задачі прямує до розв'язку виродженої задачі коли малий параметр прямує до нуля. Ці статті мали істотний вплив на

даний напрям прикладної математики. Слідом за цими статтями з'явився ряд робіт М.І. Вішика і Л.А. Люстерніка [57, 102], в яких був сформульований загальний підхід до побудови асимптотичних розв'язків лінійних рівнянь в частинних похідних з малими параметрами при деяких з старших похідних. Цей підхід – ідея асимптотичного розкладу розв'язку за малим параметром – отримав назву методу Вішика-Люстерника.

У роботах В.Ф. Бутузова [46-48, 188] розглядаються різні крайові задачі для рівнянь в частинних похідних еліптичного, параболічного та гіперболічного типу областях з негладкою границею; розроблені методи для наближення розв'язку в околі кутових точок: метод кутових примежових функцій і ідея згладжування членів асимптотики. Роботи А. Б. Васильєвої [53, 54] присвячені широкому класу задач, як для звичайних диференціальних рівнянь, так і для рівнянь в частинних похідних. Так, нею розроблені методи асимптотичного розв'язання початкових і крайових задач для лінійних і нелінійних сингулярно збурених рівнянь та їх систем – метод примежових функцій, досліджені питання, пов'язані з періодичними рішеннями і стійкістю рішень. А.Б. Васильєвою, В.Ф. Бутузовим та їх учнями створена й інтенсивно розвивається теорія існування і стійкості контрастних структур для крайових задач.

У роботах В.Ф. Бутузова та А.Б. Васильєвої широкий розвиток і застосування отримав так званий метод пограничних функцій та метод згладження “негладкостей”. Суть методу покажемо на прикладі задачі [53]:

$$\varepsilon^2 \Delta u - v^2(x, y)u = g(x, y, \varepsilon), (x, y) \in (0, a) * (0, b) = \Omega, u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (1.10)$$

Тут $\varepsilon > 0$ – малий параметр, $v(x, y)$ і $g(x, y, \varepsilon)$ – достатньо гладкі функції, $v(x, y) > 0$ в області Ω .

Асимптотичний розклад її розв'язку В.Бутузовим отримано у вигляді:

$$u_\varepsilon = \bar{u} + P + R,$$

де $\bar{u} = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \bar{u}_i(x, y)$ – регулярна частина асимптотики, P – примежові функції,

вплив яких суттєвий близько сторін прямокутника, а P – кутові функції, вплив яких суттєвий близько вершин прямокутника. У відповідності до числа сторін прямокутника Π – функції складаються із чотирьох доданків:

$$\Pi = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i (\widehat{\Pi}_i(x, \eta) + \underline{\Pi}_i(\xi, y) + \widehat{\Pi}_i(x, \eta_*) + \underline{\Pi}_i(\xi_*, y)),$$

де $\eta = y/\varepsilon$, $\xi = x/\varepsilon$, $\eta_* = (b-y)/\varepsilon$, $\xi_* = (a-x)/\varepsilon$ – примежові змінні-розтяги.

Функції $\widehat{\Pi}_i(x, \eta)$, що служать для опису примежового шару в околі сторони $y=0$, визначаються з допомогою оператора $\partial_{\eta\eta}^2 - v^2(x, 0)$, $\eta > 0$ і граничних умов $\widehat{\Pi}_i(x, 0) = -\bar{u}_i(x, 0)$, $\widehat{\Pi}_i(x, \infty) = 0$. Тим самим $\widehat{\Pi} = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \widehat{\Pi}_i(x, \eta)$ функції ліквідовують нев'язку, внесену в граничні умови на стороні $y=0$ регулярною частиною асимптотики. Для $\widehat{\Pi}_0(x, \eta)$ одержимо вираз:

$$\widehat{\Pi}_0(x, \eta) = -\bar{u}_0(x, 0)e^{-v(x, 0)\eta}. \quad (1.11)$$

Далі можна послідовно знайти в явному вигляді $\widehat{\Pi}_i(x, \eta)$ для $i=1, 2, \dots$. Всі ці функції мають експоненціальну оцінку: $|\widehat{\Pi}_i(x, \eta)| \leq \alpha e^{-\lambda\eta}$.

Аналогічно, знаходяться функції $\underline{\Pi}_i(\xi, y)$, $\widehat{\Pi}_i(x, \eta_*)$ і $\underline{\Pi}_i(\xi_*, y)$.

Зазначимо, що примежові функції $\widehat{\Pi}_i(x, \eta)$, ліквідовуючи нев'язку в граничній умові на стороні $y=0$, в свою чергу вносять додаткові умови на сторонах $x=0$ і $x=a$. Ці нев'язки суттєві біля кутових точок $(0, 0)$ і $(a, 0)$, а далі з ростом y вони експоненціально затухають. Аналогічні нев'язки вносять функції $\underline{\Pi}_i(\xi, y)$ на сторони $y=0$ і $y=b$, функції $\widehat{\Pi}_i(x, \eta_*)$ – на сторони $x=0$ і $x=a$, а функції $\underline{\Pi}_i(\xi_*, y)$ на сторони $y=0$ і $y=b$.

Для ліквідації цих неузгодженостей і вводяться кутові функції. В відповідності з числом вершин прямокутника P -функції складаються із чотирьох доданків:

$$P = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i (\widehat{P}_i(\xi, \eta) + \underline{P}_i(\xi, \eta_*) + \widehat{P}_i(\xi_*, \eta_*) + \underline{P}_i(\xi_*, \eta)). \quad (1.12)$$

Зокрема, функції $\widehat{P}_i(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \widehat{P}_i(\xi, \eta)$ служать для ліквідації неузгодженостей, внесених функціями $\widehat{\Pi}_i(x, \eta)$ в граничну умову на стороні $x=0$ і функціями $\underline{\Pi}_i(\xi, y)$ в граничну умову на стороні $y=0$. Рівняння для функцій $\widehat{P}_i(\xi, \eta)$ отримуються із вихідного рівняння (1.10) (точніше, із однорідного рівняння, що відповідає (1.10)) стандартним способом: переходом до змінних $\eta = y/\varepsilon$, $\xi = x/\varepsilon$, розкладом коефіцієнта $v^2(\varepsilon\xi, \varepsilon\eta)$ в ряд по степеням ε і прирівнюванням коефіцієнтів при однакових степенях ε в обох частинах рівняння. Отже матимемо такі задачі:

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \widehat{P}_i(\xi, \eta) + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \widehat{P}_i(\xi, \eta) - v^2(0, 0) \widehat{P}_i(\xi, \eta) = p_i(\xi, \eta), \xi > 0, \eta > 0,$$

$$\widehat{P}_i(0, \eta) = -\widehat{\Pi}_i(0, \eta), \widehat{P}_i(\xi, 0) = -\underline{\Pi}_i(\xi, 0),$$

$$\widehat{P}_i(\xi, \eta) \rightarrow 0 \text{ при } (\xi + \eta) \rightarrow \infty, \quad (1.13)$$

де $p_i(\xi, \eta)$ рекурентно виражаються через функції $\widehat{P}_s(\xi, \eta)$ з номерами $s < i$, зокрема $p_0(\xi, \eta) = 0$. Розв'язки задач (1.12) можна послідовно виразити в явному вигляді через функцію Гріна. Зокрема, в [53] авторами показано, що вони мають наступну експоненціальну оцінку:

$$|\widehat{P}_i(\xi, \eta)| \leq c e^{-\chi(\xi + \eta)}.$$

Аналогічно знаходяться і решта кутових функцій і мають таку ж оцінку.

Паралельно розвивалися й інші методи теорії збурень. Зокрема, метод регуляризації для сингулярно збурених диференціальних та інтегродиференціальних рівнянь, розроблений С.А.Ломовим [100], перетворився в самостійний напрям теорії сингулярних збурень і отримав свій розвиток в дослідженнях його учнів, відомий як метод «зрощування».

Роботи В.Г.Сушко [157, 158] присвячені вивченню лінійних і нелінійних рівнянь в частинних похідних параболічного, еліптичного та змішаного типу з внутрішніми перехідними шарами, що виникають через негладкість розв'язку виродженої задачі або в результаті нелінійності рівняння.

Серед методів обґрунтування справедливості побудованих асимптотичних розв'язків можна назвати метод апріорних оцінок, принцип максимуму, метод послідовних наближень, метод інтегральних нерівностей, метод бар'єрних функцій. Останній з названих методів, великий внесок у розробку якого внесли С. Н. Бернштейн, С. А. Чаплигін, М. Нагумо, є не тільки способом обґрунтування асимптотичних розв'язків, а й у ряді випадків застосовується для доведення існування точного розв'язку крайових задач.

Також розвитком і використанням асимптотичних методів займалися В. Вазов [51], М. Ван-Дайк [52], П. Файф, Р. О'Маллі, К. Чанг, Ф. Хауес, Н. Н. Мойсеев, Н. Левінсон, С. Каменомостська, Є. Жидков, Д. Аронсон, О. Ладиженська, Б. Панайоті, В. П. Маслов [112], В. О. Митропольский, Н. Н. Боголюбов [12], С. Ф. Фещенко [163], І. М. Федоткін [162], А. М. Айзен, В. Г. Сушко [158, 159], А. Найфе [119], В. С. Берман [10], О. М. Буличова [42-44], Е. Т. Копсон, В. А. Треногін [160, 161], В. В. Городецький, А. Я. Бомба та багато інших [77, 79, 81, 90, 120, 173, 175, 176, 183, 184, 201, 210-212].

Використовуючи ідеї переходу до координат області комплексного потенціалу у рівнянні конвективної дифузії та відповідних крайових і початкових умовах, А. Я. Бомба, А. П. Власюк та їх учні розв'язали ряд нелінійних сингулярно-збурених крайових задач масоперенесення при фільтрації в неоднорідних анізотропних пористих середовищах. В роботах [27, 84, 86] цю методику С. С. Каштаном, Д. О. Пригорницьким та І. М. Присяжнюком поширено на випадки багатозв'язних областей, а в [18, 86, 155, 156], за допомогою поєднання методу квазіконформних відображень та асимптотичного методу, Ю. Є. Климюком знайдено наближення розв'язків сингулярно збурених задач конвективної дифузії для просторових криволінійних областей.

Ці ж підходи також використано, модифіковано та розвинуто С. В. Барановським [27] при побудові асимптотичних наближень розв'язків нелінійних сингулярно збурених задач для рівнянь конвективної дифузії в областях з вільними межами, які виникають при математичному моделюванні

та дослідженні процесів розмиву дна русел.

В даний час асимптотичну теорію сингулярно збурених диференціальних рівнянь ще не можна вважати остаточно сформованою. Багато питань, що виникають при вивченні конкретних прикладних задач, все ще залишаються відкритими. Асимптотичні методи дослідження сингулярно збурених диференціальних рівнянь продовжують розвиватися, незважаючи на інтенсивний розвиток чисельних методів. Справа в тому, що сингулярно збурені задачі при чисельному моделюванні, як правило, призводять до систем лінійних рівнянь з погано обумовленою матрицею. Тому при розв'язанні різницевого аналога сингулярно збуреної задачі відіграє помітну роль похибка машинного округлення чисел, яка може зробити точність наближеного розв'язку неприйнятною. Крім цього, при використанні класичних різницевих схем для розв'язання рівнянь з малим параметром при старшій похідній виявляється, що ці схеми дають достатню точність, якщо крок сітки значно менше величини малого параметра, тому для стійкості різницевої схеми потрібно дуже невеликий крок сітки, що призводить до величезних витрат машинних ресурсів.

Для моделювання жорстких задач, розв'язки яких одночасно мають області як швидкої, так і повільної зміни, потрібні спеціальні числові алгоритми, які враховують апріорну інформацію про структуру розв'язку. Асимптотичний аналіз розв'язку може служити основою для розробки стійких і ефективних чисельних алгоритмів на нерівномірних сітках, застосовних до жорстких задач.

Один з прикладів проблем, пов'язаних із застосуванням класичних числових методів до розв'язання сингулярно збурених задач, наведений у статті А. М. Ільїна [78], там же запропонований спосіб створення спеціальних обчислювальних методів, заснованих на асимптотичному поданні розв'язку задачі. Таким чином, чисельні та асимптотичні методи не виключають, а взаємно доповнюють один одного.

Асимптотичні та чисельно-асимптотичні методи, з урахуванням можливостей сучасних інформаційних технологій, є достатньо гнучкими для багатократних рекурентних обчислень та побудов явно визначених просторово-часових розподілів фізичних параметрів та їх градієнтів. Вони є ефективними також при розв'язуванні зворотних задач по визначенню чи уточненню внутрішніх кінетичних параметрів систем (коефіцієнтів дифузії, констант адсорбції, коефіцієнтів консолідації тощо). Такі методи не потребують кардинального перероблення та модифікації програмних продуктів при зміні конструктивних параметрів робочих областей чи режимних характеристик систем.

1.3. Висновки до першого розділу та загальна постановка задач дослідження

Проведений аналіз результатів досліджень свідчить про те, що практика сьогодні, як ніколи, вимагає побудови все більш повних, точних і адекватних моделей, що описують сингулярно збурені процеси багатоконпонентного тепломасоперенесення в пористих та мікропористих середовищах, а також розвитку методів їх розв'язання та дослідження, що дозволить враховувати взаємовплив характеристик досліджуваного процесу.

Асимптотичний метод розв'язування типових крайових модельних задач для сингулярно збурених параболічних та еліптичних рівнянь на даний час ефективно використовується для дослідження процесів конвективної дифузії при фільтрації в одно- та багатозв'язних, плоских і просторових криволінійних областях, за умови превалювання певних складових процесу над іншими і виникає природне запитання стосовно можливості його розвитку для розв'язання систем сингулярно збурених рівнянь з локально-іншорідними особливостями, що забезпечить можливість прогнозування аналогічних процесів масоперенесення в мікропористих середовищах.

Таким чином, визначені наступні задачі дослідження: вдосконалити

математичні моделі сингулярно збурених процесів конвективно-дифузійного тепломасоперенесення за умов масообміну в пористих середовищах; розробити підхід до моделювання процесів очищення технологічних потоків з використанням мікропористих сорбентів у випадках превалювання одних складових процесу над іншими та розвинути методи асимптотичного наближення розв'язків відповідних сингулярно збурених задач в однорідних та шаруватих областях; розробити алгоритми розв'язування відповідних крайових задач для плоских та просторових криволінійних областей, на основі чого провести числові розрахунки та здійснити аналіз отриманих результатів; узагальнити розроблені математичні моделі і методи на випадок моделювання процесу тепломасоперенесення багатокомпонентних забруднень в мікропористих середовищах.

Модельна задача сингулярно збуреного процесу конвективно-дифузійного тепломасоперенесення в біпористих середовищах з урахуванням масообміну та зворотнього впливу характеристик процесу (температури, що зростає в результаті екзотермічної хімічної реакції між забруднюючими речовинами) на характеристики середовища (коефіцієнти дифузії, масообміну) описується системою диференціальних рівнянь:

$$\sigma_1 \frac{\partial C_j}{\partial t} = \sum_{s=1}^m \operatorname{div} (D_{js}(T) \cdot \operatorname{grad} C_s) + \operatorname{div} (D_T \cdot \operatorname{grad} T) - \vec{v} \cdot \operatorname{grad} C_j + \\ + \tilde{f}_j(C_1, \dots, C_j, T) - D_{*j}^*(T) (U_j)' \Big|_{r=R}, \quad (1.14)$$

$$\sigma_2 \frac{\partial U_j}{\partial t} = \sum_{s=1}^m r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(D_{js}^*(T) \frac{1}{r^2} \frac{\partial U_s}{\partial r} \right) - \tilde{f}_j^*(U_1, \dots, U_j, T), \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div} (D_T \cdot \operatorname{grad} T) - \vec{v} \cdot \operatorname{grad} T + \tilde{f}_j^{**}(C_1, \dots, C_j, T), \quad (1.16)$$

$$\vec{v} = \kappa \cdot \operatorname{grad} \varphi, \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (1.17)$$

де φ і \vec{v} – відповідно потенціал і вектор швидкості фільтрації, $\kappa = \kappa(x, y, z, C_j, T)$ – коефіцієнт (тензор) фільтрації, C_j і U_j – відповідно масові

концентрації j -ї компоненти речовини у фільтраційному розчині і в мікрочастинках (на сферах з центром в точці (x, y, z) радіуса r , $0 \leq r \leq R$) в момент часу t , $D_{js}(T)$ та $D_{js}^*(T)$ – коефіцієнти (тензори) конвективної дифузії j -ї компоненти речовини за умови присутності s -ї компоненти у фільтраційному потоці та в мікропористих частинках відповідно ($j = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, m}$), D_T – коефіцієнт термодифузії, σ_1 σ_2 – пористість відповідно середовища та мікрочастинок, $\tilde{f}_j(C_1, \dots, C_j, T)$ і $\tilde{f}_j^*(U_1, \dots, U_j, T)$ – неперервні обмежені функції, які характеризують швидкість протікання масообмінних процесів між j -ю і s -ю компонентами речовини відповідно у фільтраційному розчині і в мікрочастинках ($j = \overline{1, m}$, $s = \overline{1, m}$), $\tilde{f}_{js}^{**}(C_j, C_s, T)$ – неперервні обмежені функції, які характеризують швидкість теплоутворення в результаті масообміну, $D_{*j}^*(T)$ – неперервні обмежені функції, які характеризують швидкість протікання сорбційних процесів j -ї компоненти речовини (швидкість переходу концентрації з міжчастинкового простору у внутрішньочастинковий).

Система (1.14)–(1.17) доповнюється початковим та граничними умовами. Зокрема, на поверхні мікропористої частинки задається умова адсорбційної рівноваги: $U_j(x, y, z, r, t)|_{r=R} = k_j(T)C_j(x, y, z, t)$, що пов'язує концентрації у внутрішньочастинковому просторі та міжчастинковому.

РОЗДІЛ 2

МОДЕЛЬНІ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНІ ЗАДАЧІ КОНВЕКТИВНО-ДИFUЗІЙНОГО ТЕПЛОМАСОПЕРЕНЕСЕННЯ В ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ

При дослідженні процесів розповсюдження багатокомпонентних забруднень у водонасичених пористих середовищах за допомогою математичного моделювання та проведення комп'ютерних експериментів виникає чимало труднощів, пов'язаних із врахуванням усіх видів взаємодій між компонентами забруднюючої речовини.

У цьому розділі поширено методику дослідження сингулярно збурених процесів однокомпонентної конвективної дифузії в пористих середовищах на випадок врахування тепло- та масообміну, породженого хімічною реакцією між компонентами дифундууючої речовини в одно- і двозв'язних плоских і просторових областях, обмежених лініями течії та екіпотенціальними лініями [18, 27].

2.1. Математичне моделювання сингулярно збуреного процесу багатокомпонентного конвективно-дифузійного масоперенесення розчинних речовин у пористому середовищі

Для кількісного опису масоперенесення в пористих середовищах записуємо наступні співвідношення:

а) рівняння переносу і дифузії рідини уздовж осей координат

$$u_x = v_x C - D_x \frac{\partial C}{\partial x}, u_y = v_y C - D_y \frac{\partial C}{\partial y}, u_z = v_z C - D_z \frac{\partial C}{\partial z},$$

де $v_x C, v_y C, v_z C$ – складові конвективного, а $-D_x \frac{\partial C}{\partial x}, -D_y \frac{\partial C}{\partial y}, -D_z \frac{\partial C}{\partial z}$ – дифузійного перенесення;

б) рівняння балансу маси речовини

$$-\frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{\partial u_z}{\partial z} + g = \sigma \frac{\partial C}{\partial t}.$$

Тут v_x, v_y, v_z – компоненти швидкості фільтрації, (м/добу); D_x, D_y, D_z – коефіцієнти гідродинамічної дисперсії (конвективної дифузії), (м²/добу); u_x, u_y, u_z – компоненти масової швидкості розчиненої речовини (кг/(м² · добу)); C – масова концентрація речовини в рідкій фазі, (кг/м³); g – інтенсивність внутрішніх джерел речовини (кг/(м²·добу)) у виділеному об'ємі. Записані рівняння слід розглядати разом з рівнянням фільтрації.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + g^* = \frac{\partial(\sigma\varphi)}{\partial t},$$

де $\kappa = \kappa(x, y, z, C)$ – коефіцієнт фільтрації, φ – напір, g^* – інтенсивність джерел надходження розчинної речовини до області фільтрації, σ – пористість.

Підставляючи перше рівняння у друге, отримаємо рівняння конвективної дифузії

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial C}{\partial z} \right) - \vec{v} \text{grad} C + g = \sigma \frac{\partial C}{\partial t}.$$

Як зазначалось, швидкість елементарної реакції при постійній температурі пропорційна добутку концентрацій реагуючих речовин в степені, що показує кількість моль речовини, що вступають у реакцію. Відповідно функція джерела матиме вигляд:

$$g = k \cdot C_1^{\alpha_1} \cdot C_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot C_m^{\alpha_m},$$

де k – константа швидкості хімічної реакції, α_i – стехіометричні коефіцієнти.

Розглядається сингулярно збурений процес конвективно-дифузійного масоперенесення чотирьох розчинних речовин при фільтрації в області $G = G_z \times (0, \infty)$, де G_z ($z = x + iy$) – двозв'язна криволінійна область (пористий пласт), обмежена двома замкненими гладкими контурами $L_* = \{z : f_*(x, y) = 0\}$ – внутрішній та $L^* = \{z : f^*(x, y) = 0\}$ – зовнішній (рис. 2.1,а). Три речовини (\tilde{C} , \tilde{U} , \tilde{H}) вступають у хімічну реакцію типу $a\tilde{C} + b\tilde{U} + c\tilde{H} = d \cdot \tilde{N}$, в результаті

чого утворюється четверта розчинна речовина \tilde{N} .

Відповідна модельна задача типу „конвекція-дифузія-масообмін” [139] матиме вигляд:

$$D_1 \left(\tilde{C}_{xx}(x, y, t) + \tilde{C}_{yy}(x, y, t) \right) - v_x(x, y) \tilde{C}_x(x, y, t) - v_y(x, y) \tilde{C}_y(x, y, t) - k \cdot a \cdot \tilde{C}^a(x, y, t) \cdot \tilde{U}^b(x, y, t) \cdot \tilde{H}^c(x, y, t) = \tilde{C}_t(x, y, t), \quad (2.1)$$

$$D_2 \left(\tilde{U}_{xx}(x, y, t) + \tilde{U}_{yy}(x, y, t) \right) - v_x(x, y) \tilde{U}_x(x, y, t) - v_y(x, y) \tilde{U}_y(x, y, t) - k \cdot b \cdot \tilde{C}^a(x, y, t) \cdot \tilde{U}^b(x, y, t) \cdot \tilde{H}^c(x, y, t) = U_t(x, y, t), \quad (2.2)$$

$$D_3 \left(\tilde{H}_{xx}(x, y, t) + \tilde{H}_{yy}(x, y, t) \right) - v_x(x, y) \tilde{H}_x(x, y, t) - v_y(x, y) \tilde{H}_y(x, y, t) - k \cdot c \cdot \tilde{C}^a(x, y, t) \cdot \tilde{U}^b(x, y, t) \cdot \tilde{H}^c(x, y, t) = \tilde{H}_t(x, y, t), \quad (2.3)$$

$$D_4 \left(\tilde{N}_{xx}(x, y, t) + \tilde{N}_{yy}(x, y, t) \right) - v_x(x, y) \tilde{N}_x(x, y, t) - v_y(x, y) \tilde{N}_y(x, y, t) + k \cdot d \cdot \tilde{C}^a(x, y, t) \cdot \tilde{U}^b(x, y, t) \cdot \tilde{H}^c(x, y, t) = \tilde{N}_t(x, y, t), \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \tilde{C}|_{L_*} &= \tilde{C}_*(M, t), \quad \tilde{C}|_{L^*} = \tilde{C}^*(M, t), \quad \tilde{C}(M, 0) = \tilde{C}_0^0(M), \\ \tilde{U}|_{L_*} &= \tilde{U}_*(M, t), \quad \tilde{U}|_{L^*} = \tilde{U}^*(M, t), \quad \tilde{U}(M, 0) = \tilde{U}_0^0(M), \\ \tilde{H}|_{L_*} &= \tilde{H}_*(M, t), \quad \tilde{H}|_{L^*} = \tilde{H}^*(M, t), \quad \tilde{H}(M, 0) = \tilde{H}_0^0(M), \\ \tilde{N}|_{L_*} &= \tilde{N}_*(M, t), \quad \tilde{N}|_{L^*} = \tilde{N}^*(M, t), \quad \tilde{N}(M, 0) = \tilde{N}_0^0(M), \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$(v_x, v_y) = \text{grad } \varphi(x, y), \quad \Delta \varphi = 0, \quad \varphi|_{L_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad (2.6)$$

де $\tilde{C}(x, y, t)$, $\tilde{U}(x, y, t)$, $\tilde{H}(x, y, t)$, $\tilde{N}(x, y, t)$ – відповідно концентрації чотирьох сортів розчинних речовин фільтраційної течії в точці (x, y) в момент часу t , φ , v_x , v_y – відповідно потенціал та компоненти його швидкості (швидкості фільтрації в пористому середовищі G_z), M – біжуча точка відповідної кривої, $D_i = d_i \cdot \varepsilon$ ($i = \overline{1, 4}$, d_i – задані додатні дійсні числа) – коефіцієнти дифузії i -го сорту розчинної речовини, $k = k^* \cdot \varepsilon$, де k^* – константа швидкості хімічної реакції, ε ($\varepsilon > 0$) – малий параметр (характеризує переваги одних складових процесу над іншими). Розглядається випадок, коли швидкість хімічної реакції співрозмірна зі швидкістю дифузійного перенесення розчинних речовин, яка

значно менша за швидкість конвективного перенесення

$$(\sqrt{v_x^2(x, y) + v_y^2(x, y)} > v_* \gg \varepsilon).$$

Функції $\tilde{C}_*(M, t)$, $\tilde{C}^*(M, t)$, $\tilde{C}_0^0(M)$, $\tilde{U}_*(M, t)$, $\tilde{U}^*(M, t)$, $\tilde{U}_0^0(M)$, $\tilde{H}_*(M, t)$, $\tilde{H}^*(M, t)$, $\tilde{H}_0^0(M)$, $\tilde{N}_*(M, t)$, $\tilde{N}^*(M, t)$, $\tilde{N}_0^0(M)$ – задані достатньо гладкі, сильно узгодженні (настільки, щоб можна було будувати нижче вказані асимптотичні розвинення розв’язку із заданою точністю) між собою на ребрах області G функції.

Розв’язавши задачу (2.6) шляхом конформного відображення $G_z^* \mapsto G_w$ (або $G_w \mapsto G_z^*$), де $G_w = \{\tilde{w} = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi^*; 0 < \psi < Q\}$ – відповідна G_z^* область комплексного потенціалу; $\psi = \psi(x, y)$ – функція течії (комплексно спряжена до $\varphi = \varphi(x, y)$) є розв’язаною, зокрема, знайдено поле швидкості $(v_x(x, y), v_y(x, y))$.

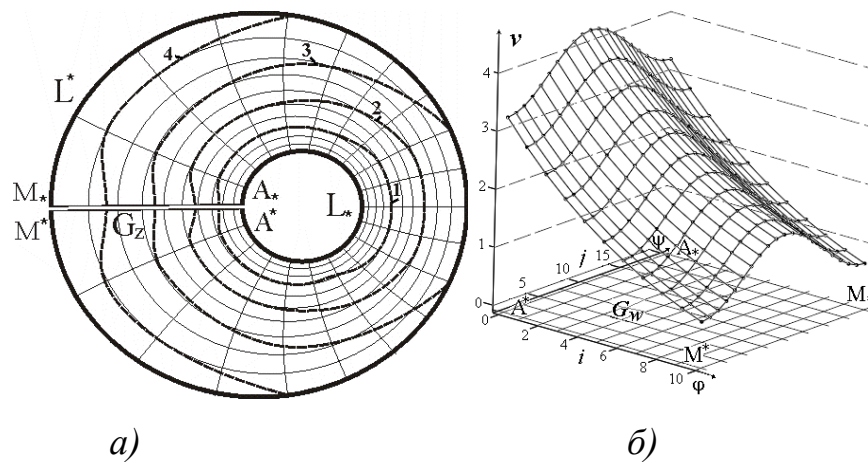


Рис.2.1. Фільтраційний фон (а) та поле швидкостей над відповідною їй областю комплексного потенціалу G_w (б)

Параметр $Q = \int_{AB} -v_y dx + v_x dy$ (потік через довільний поперечний переріз G_w) знаходиться в процесі розв’язку даної задачі (див., напр., [84]). Здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi)$, $y = y(\varphi, \psi)$ у рівняннях (2.1)–(2.4) та умовах (2.5), приходимо до відповідної задачі для області G_w (рис.2.1,б):

$$D_1 v^2(\varphi, \psi) \left(C_{\varphi\varphi}(\varphi, \psi, t) + C_{\psi\psi}(\varphi, \psi, t) \right) - v_\varphi^2(\varphi, \psi) C_\varphi(\varphi, \psi, t) - \\ - k \cdot a \cdot C^a(\varphi, \psi, t) \cdot U^b(x, y, t) \cdot H^c(\varphi, \psi, t) = C_t(\varphi, \psi, t), \quad (2.7)$$

$$D_2 v^2(\varphi, \psi) \left(U_{\varphi\varphi}(\varphi, \psi, t) + U_{\psi\psi}(\varphi, \psi, t) \right) - v_\varphi^2(\varphi, \psi) U_\varphi(\varphi, \psi, t) - \\ - k \cdot b \cdot C^a(\varphi, \psi, t) \cdot U^b(\varphi, \psi, t) \cdot H^c(\varphi, \psi, t) = U_t(\varphi, \psi, t), \quad (2.8)$$

$$D_3 v^2(\varphi, \psi) \left(H_{\varphi\varphi}(\varphi, \psi, t) + H_{\psi\psi}(\varphi, \psi, t) \right) - v_\varphi^2(\varphi, \psi) H_\varphi(\varphi, \psi, t) - \\ - k \cdot c \cdot C^a(\varphi, \psi, t) \cdot U^b(\varphi, \psi, t) \cdot H^c(\varphi, \psi, t) = H_t(\varphi, \psi, t), \quad (2.9)$$

$$D_4 v^2(\varphi, \psi) \left(N_{\varphi\varphi}(\varphi, \psi, t) + N_{\psi\psi}(\varphi, \psi, t) \right) - v_\varphi^2(\varphi, \psi) N_\varphi(\varphi, \psi, t) + \\ + k \cdot d \cdot C^a(\varphi, \psi, t) \cdot U^b(\varphi, \psi, t) \cdot H^c(\varphi, \psi, t) = N_t(\varphi, \psi, t), \quad (2.10)$$

$$C \Big|_{\varphi=\varphi_*} = C_*(\psi, t), \quad C \Big|_{\varphi=\varphi^*} = C^*(\psi, t), \quad C \Big|_{t=0} = C_0^0(\varphi, \psi),$$

$$U \Big|_{\varphi=\varphi_*} = U_*(\psi, t), \quad U \Big|_{\varphi=\varphi^*} = U^*(\psi, t), \quad U \Big|_{t=0} = U_0^0(\varphi, \psi),$$

$$H \Big|_{\varphi=\varphi_*} = H_*(\psi, t), \quad H \Big|_{\varphi=\varphi^*} = H^*(\psi, t), \quad H \Big|_{t=0} = H_0^0(\varphi, \psi),$$

$$N \Big|_{\varphi=\varphi_*} = N_*(\psi, t), \quad N \Big|_{\varphi=\varphi^*} = N^*(\psi, t), \quad N \Big|_{t=0} = N_0^0(\varphi, \psi), \quad (2.11)$$

де $C(\varphi, \psi, t) = \tilde{C}(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), t)$, $U(\varphi, \psi, t) = \tilde{U}(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), t)$,

$H(\varphi, \psi, t) = \tilde{H}(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), t)$, $N(\varphi, \psi, t) = \tilde{N}(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), t)$ інші функції $(C_*, C^*, C_0^0, U_*, U^*, U_0^0, H_*, H^*, H_0^0, N_*, N^*, N_0^0)$ – інтерпретуються аналогічно.

Розв'язок (C, U, H, N) задачі (2.7)–(2.11) у випадку тримолекулярної реакції типу $\tilde{C} + \tilde{U} + \tilde{H} = \tilde{N}$ ($a=b=c=d=1$) з точністю $O(\varepsilon^2)$ шукаємо у вигляді таких асимптотичних рядів:

$$C(\varphi, \psi, t) = C_0(\varphi, \psi, t) + \varepsilon^1 C_1(\varphi, \psi, t) + \sum_{i=0}^2 \varepsilon^i \Pi_i(\xi, \psi, t) + R_2^1(\varphi, \psi, t, \varepsilon), \quad (2.12)$$

$$U(\varphi, \psi, t) = U_0(\varphi, \psi, t) + \varepsilon^1 U_1(\varphi, \psi, t) + \sum_{i=0}^2 \varepsilon^i P_i(\xi, \psi, t) + R_2^2(\varphi, \psi, t, \varepsilon), \quad (2.13)$$

$$H(\varphi, \psi, t) = H_0(\varphi, \psi, t) + \varepsilon^1 H_1(\varphi, \psi, t) + \sum_{i=0}^2 \varepsilon^i T_i(\xi, \psi, t) + R_2^3(\varphi, \psi, t, \varepsilon), \quad (2.14)$$

$$N(\varphi, \psi, t) = N_0(\varphi, \psi, t) + \varepsilon^1 N_1(\varphi, \psi, t) + \sum_{i=0}^2 \varepsilon^i \Gamma_i(\xi, \psi, t) + R_2^4(\varphi, \psi, t, \varepsilon), \quad (2.15)$$

де $C_i(\varphi, \psi, t)$, $U_i(\varphi, \psi, t)$, $H_i(\varphi, \psi, t)$, $N_i(\varphi, \psi, t)$ ($i = \overline{0,1}$) – члени відповідних регулярних частин асимптотики, зокрема: C_0 , U_0 , H_0 , N_0 – розв’язок відповідної виродженої задачі (конвективного переносу); C_1 , U_1 , H_1 , N_1 – відповідні поправки, що враховують вплив дифузії всюди в даній області (за виключенням деякої її приграничної зони); $\Pi_i(\xi, \psi, t)$, $P_i(\xi, \psi, t)$, $T_i(\xi, \psi, t)$, $\Gamma_i(\xi, \psi, t)$ ($i = \overline{0,2}$) – функції типу примежового шару в околі $\varphi = \varphi^*$ (відповідні поправки на виході фільтраційного потоку із області G_z); $\xi = (\varphi^* - \varphi) \cdot \varepsilon^{-1}$ – відповідне регуляризуюче перетворення (змінна розтягу); R_2^1 , R_2^2 , R_2^3 , R_2^4 – залишкові члени.

Аналогічно до [27, 53, 136], після підстановки (2.12)–(2.15) в (2.7)–(2.11) та застосування процедури прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях ε , для знаходження функцій C_i , U_i , H_i , N_i ($i = \overline{0,1}$) приходимо до таких задач:

$$\begin{cases} v^2(\varphi, \psi) \cdot C_{i\varphi}(\varphi, \psi, t) + C_{it}(\varphi, \psi, t) = g_i^1(\varphi, \psi, t), \\ C_i(\varphi, \psi, 0) = h_i^1(\varphi, \psi), \quad C_i(\varphi_*, \psi, t) = b_i^1(\psi, t), \end{cases} \quad (2.16)$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi, \psi) \cdot U_{i\varphi}(\varphi, \psi, t) + U_{it}(\varphi, \psi, t) = g_i^2(\varphi, \psi, t), \\ U_i(\varphi, \psi, 0) = h_i^2(\varphi, \psi), \quad U_i(\varphi_*, \psi, t) = b_i^2(\psi, t), \end{cases} \quad (2.17)$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi, \psi) \cdot H_{i\varphi}(\varphi, \psi, t) + H_{it}(\varphi, \psi, t) = g_i^3(\varphi, \psi, t), \\ H_i(\varphi, \psi, 0) = h_i^3(\varphi, \psi), \quad H_i(\varphi_*, \psi, t) = b_i^3(\psi, t), \end{cases} \quad (2.18)$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi, \psi) \cdot N_{i\varphi}(\varphi, \psi, t) + N_{it}(\varphi, \psi, t) = g_i^4(\varphi, \psi, t), \\ N_i(\varphi, \psi, 0) = h_i^4(\varphi, \psi), \quad N_i(\varphi_*, \psi, t) = b_i^4(\psi, t), \end{cases} \quad (2.19)$$

$$g_0^j(\varphi, \psi, t) = 0, \quad h_1^j(\varphi, \psi) = 0, \quad b_1^j(\psi, t) = 0, \quad j = \overline{1,4}, \quad h_0^1(\varphi, \psi) = C_0^0(\varphi, \psi), \\ h_0^2(\varphi, \psi) = U_0^0(\varphi, \psi), \quad h_0^3(\varphi, \psi) = H_0^0(\varphi, \psi), \quad h_0^4(\varphi, \psi) = N_0^0(\varphi, \psi), \quad b_0^1(\psi, t) = C_*(\psi, t), \\ b_0^2(\psi, t) = U_*(\psi, t), \quad b_0^3(\psi, t) = H_*(\psi, t), \quad b_0^4(\psi, t) = N_*(\psi, t), \quad g_1^1(\varphi, \psi, t) = d_1 v^2(\varphi, \psi) \times$$

$$\begin{aligned} &\times (C_{0\varphi\varphi} + C_{0\psi\psi}) - k^* C_0 U_0 H_0, \quad g_1^2(\varphi, \psi, t) = d_2 v^2(\varphi, \psi) (U_{0\varphi\varphi} + U_{0\psi\psi}) - k^* C_0 U_0 H_0, \\ g_1^3(\varphi, \psi, t) &= d_3 v^2(\varphi, \psi) (H_{0\varphi\varphi} + H_{0\psi\psi}) - k^* C_0 U_0 H_0, \quad g_1^4(\varphi, \psi, t) = d_4 v^2(\varphi, \psi) (N_{0\varphi\varphi} + N_{0\psi\psi}) + \\ &+ k^* C_0 U_0 H_0. \end{aligned}$$

У результаті їх розв'язання маємо:

$$\begin{aligned} C_0(\varphi, \psi, t) &= \begin{cases} C_*(\psi, t - f(\varphi, \psi)), & t \geq f(\varphi, \psi), \\ C_0^0(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi, t), & t < f(\varphi, \psi), \end{cases} \\ U_0(\varphi, \psi, t) &= \begin{cases} U_*(\psi, t - f(\varphi, \psi)), & t \geq f(\varphi, \psi), \\ U_0^0(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi, t), & t < f(\varphi, \psi), \end{cases} \\ H_0(\varphi, \psi, t) &= \begin{cases} H_*(\psi, t - f(\varphi, \psi)), & t \geq f(\varphi, \psi), \\ H_0^0(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi, t), & t < f(\varphi, \psi), \end{cases} \\ N_0(\varphi, \psi, t) &= \begin{cases} N_*(\psi, t - f(\varphi, \psi)), & t \geq f(\varphi, \psi), \\ N_0^0(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi, t), & t < f(\varphi, \psi), \end{cases} \\ C_1(\varphi, \psi, t) &= \begin{cases} \int_{\varphi_*}^{\varphi} v^{-2}(\tilde{\varphi}, \psi) \cdot g_1^1(\tilde{\varphi}, \psi, f(\tilde{\varphi}, \psi) + t - f(\varphi, \psi)) d\tilde{\varphi}, & t \geq f(\varphi, \psi), \\ \int_0^t g_1^1(f^{-1}(\tilde{t} + f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi, \tilde{t}) d\tilde{t}, & t < f(\varphi, \psi), \end{cases} \\ U_1(\varphi, \psi, t) &= \begin{cases} \int_{\varphi_*}^{\varphi} v^{-2}(\tilde{\varphi}, \psi) \cdot g_1^2(\tilde{\varphi}, \psi, f(\tilde{\varphi}, \psi) + t - f(\varphi, \psi)) d\tilde{\varphi}, & t \geq f(\varphi, \psi), \\ \int_0^t g_1^2(f^{-1}(\tilde{t} + f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi, \tilde{t}) d\tilde{t}, & t < f(\varphi, \psi), \end{cases} \\ H_1(\varphi, \psi, t) &= \begin{cases} \int_{\varphi_*}^{\varphi} v^{-2}(\tilde{\varphi}, \psi) \cdot g_1^3(\tilde{\varphi}, \psi, f(\tilde{\varphi}, \psi) + t - f(\varphi, \psi)) d\tilde{\varphi}, & t \geq f(\varphi, \psi), \\ \int_0^t g_1^3(f^{-1}(\tilde{t} + f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi, \tilde{t}) d\tilde{t}, & t < f(\varphi, \psi), \end{cases} \\ N_1(\varphi, \psi, t) &= \begin{cases} \int_{\varphi_*}^{\varphi} v^{-2}(\tilde{\varphi}, \psi) \cdot g_1^4(\tilde{\varphi}, \psi, f(\tilde{\varphi}, \psi) + t - f(\varphi, \psi)) d\tilde{\varphi}, & t \geq f(\varphi, \psi), \\ \int_0^t g_1^4(f^{-1}(\tilde{t} + f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi, \tilde{t}) d\tilde{t}, & t < f(\varphi, \psi), \end{cases} \end{aligned}$$

де $f(\varphi, \tilde{\psi}) = \int_{\varphi_*}^{\varphi} v^{-2}(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) d\tilde{\varphi}$ – час проходження виділеної частинки вздовж лінії течії $\psi = \tilde{\psi}$ від екіпотенціальної лінії $\tilde{\varphi} = \varphi_*$ до екіпотенціальної лінії $\tilde{\varphi} = \varphi$; f^{-1} – функція, обернена до функції f стосовно змінної φ (зазначимо, що така функція існує, оскільки підінтегральна функція v^{-2} – неперервно диференційована, обмежена, додатньо визначена).

Функції $\Pi = \sum_{i=0}^2 \Pi_i \varepsilon^i$, $P = \sum_{i=0}^2 P_i \varepsilon^i$, $T = \sum_{i=0}^2 T_i \varepsilon^i$, $\Gamma = \sum_{i=0}^2 \Gamma_i \varepsilon^i$ призначені для

усунення неузгодженостей, внесених побудованими регулярними частинами

відповідно $C = \sum_{i=0}^1 C_i \varepsilon^i$, $U = \sum_{i=0}^1 U_i \varepsilon^i$, $H = \sum_{i=0}^1 H_i \varepsilon^i$, $N = \sum_{i=0}^1 N_i \varepsilon^i$ в околі ділянки

$\varphi = \varphi^*$ (виходу фільтраційної течії). Таким чином повинні виконуватись умови:

$$(C + \Pi)|_{\varphi=\varphi^*} = C^* + O(\varepsilon^2), \quad (U + P)|_{\varphi=\varphi^*} = U^* + O(\varepsilon^2), \quad (H + T)|_{\varphi=\varphi^*} = H^* + O(\varepsilon^2),$$

$$(N + \Gamma)|_{\varphi=\varphi^*} = N^* + O(\varepsilon^2). \quad \text{Ці функції знаходимо в результаті розв'язку}$$

наступних задач:

$$d_1 \cdot v^2(\varphi^*, \psi) \Pi_{i\xi\xi}(\xi, \psi, t) + v^2(\varphi^*, \psi) \Pi_{i\xi}(\xi, \psi, t) = \sigma_i^1(\xi, \psi, t),$$

$$d_2 \cdot v^2(\varphi^*, \psi) (P_{i\xi\xi}(\xi, \psi, t)) + v^2(\varphi^*, \psi) P_{i\xi}(\xi, \psi, t) = \sigma_i^2(\xi, \psi, t),$$

$$d_3 \cdot v^2(\varphi^*, \psi) (T_{i\xi\xi}(\xi, \psi, t)) + v^2(\varphi^*, \psi) T_{i\xi}(\xi, \psi, t) = \sigma_i^3(\xi, \psi, t),$$

$$d_4 \cdot v^2(\varphi^*, \psi) (\Gamma_{i\xi\xi}(\xi, \psi, t)) + v^2(\varphi^*, \psi) \Gamma_{i\xi}(\xi, \psi, t) = \sigma_i^4(\xi, \psi, t),$$

$$\Pi_i \rightarrow 0, P_i \rightarrow 0, T_i \rightarrow 0, \Gamma_i \rightarrow 0 \text{ при } \xi \rightarrow \infty, \quad \Pi_i(0, \psi, t) = q_i^1(\psi, t),$$

$$P_i(0, \psi, t) = q_i^2(\psi, t), \quad T_i(0, \psi, t) = q_i^3(\psi, t), \quad \Gamma_i(0, \psi, t) = q_i^4(\psi, t), \quad i = \overline{0, 2},$$

$$\text{де } q_0^1(\psi, t) = C^*(\psi, t) - C_0(\varphi^*, \psi, t), \quad q_0^2(\psi, t) = U^*(\psi, t) - U_0(\varphi^*, \psi, t), \quad q_0^3(\psi, t) =$$

$$= H^*(\psi, t) - H_0(\varphi^*, \psi, t), \quad q_0^4(\psi, t) = N^*(\psi, t) - N_0(\varphi^*, \psi, t), \quad q_1^1(\psi, t) = -C_1(\varphi^*, \psi, t),$$

$$q_1^2(\psi, t) = -U_1(\varphi^*, \psi, t), \quad q_1^3(\psi, t) = -H_1(\varphi^*, \psi, t), \quad q_1^4(\psi, t) = -N_1(\varphi^*, \psi, t), \quad q_2^1(\psi, t) = 0,$$

$$q_2^2(\psi, t) = 0, \quad q_2^3(\psi, t) = 0, \quad q_2^4(\psi, t) = 0, \quad \sigma_0^1(\xi, \psi, t) = \sigma_0^2(\xi, \psi, t) = \sigma_0^3(\xi, \psi, t) =$$

$$= \sigma_0^4(\xi, \psi, t) = 0, \quad \sigma_1^1(\xi, \psi, t) = \Pi_{0r}(\xi, \psi, t), \quad \sigma_1^2(\xi, \psi, t) = P_{0r}(\xi, \psi, t), \quad \sigma_1^3(\xi, \psi, t) = T_{0r}(\xi, \psi, t),$$

$$\begin{aligned}
\sigma_1^4(\xi, \psi, t) &= \Gamma_{0t}(\xi, \psi, t), \quad \sigma_2^1(\xi, \psi, t) = \Pi_{1t}(\xi, \psi, t) + 2v^{-1}(\varphi^*, \psi)v_\xi(\varphi^*, \psi)\xi\Pi_{0t}(\xi, \psi, t) - \\
&- d_1v^2(\varphi^*, \psi)\Pi_{0\psi\psi}(\xi, \psi, t) + \tau(\xi, \psi, t), \quad \sigma_2^2(\xi, \psi, t) = P_{1t}(\xi, \psi, t) + 2v^{-1}(\varphi^*, \psi)v_\xi(\varphi^*, \psi)\xi \times \\
&\times P_{0t}(\xi, \psi, t) - d_1v^2(\varphi^*, \psi)P_{0\psi\psi}(\xi, \psi, t) + \tau(\xi, \psi, t), \quad \sigma_2^3(\xi, \psi, t) = T_{1t}(\xi, \psi, t) - d_1v^2(\varphi^*, \psi) \times \\
&\times T_{0\psi\psi}(\xi, \psi, t) + 2v^{-1}(\varphi^*, \psi)v_\xi(\varphi^*, \psi)\xi T_{0t}(\xi, \psi, t) + \tau(\xi, \psi, t), \quad \sigma_2^4(\xi, \psi, t) = \Gamma_{1t}(\xi, \psi, t) - \\
&- \tau(\xi, \psi, t) + 2v^{-1}(\varphi^*, \psi)v_\xi(\varphi^*, \psi)\xi\Gamma_{0t}(\xi, \psi, t) - d_1v^2(\varphi^*, \psi)\Gamma_{0\psi\psi}(\xi, \psi, t), \quad \tau(\xi, \psi, t) = \\
&= C_0(\varphi^*, \psi, t)U_0(\varphi^*, \psi, t)T_0 + H_0(\varphi^*, \psi, t)P_0\Pi_0 + \Pi_0U_0(\varphi^*, \psi, t)T_0 + C_0(\varphi^*, \psi, t)P_0T_0 + \\
&+ \Pi_0T_0P_0 + U_0(\varphi^*, \psi, t)H_0(\varphi^*, \psi, t)\Pi_0.
\end{aligned}$$

Розв'язавши їх, отримаємо:

$$\begin{aligned}
\Pi_0(\xi, \psi, t) &= \left(C^*(\psi, t) - C_0(\varphi^*, \psi, t) \right) \cdot e^{-\frac{\xi}{d_1}}, \\
P_0(\xi, \psi, t) &= \left(U^*(\psi, t) - U_0(\varphi^*, \psi, t) \right) \cdot e^{-\frac{\xi}{d_2}}, \\
T_0(\xi, \psi, t) &= \left(H^*(\psi, t) - H_0(\varphi^*, \psi, t) \right) \cdot e^{-\frac{\xi}{d_3}}, \\
\Gamma_0(\xi, \psi, t) &= \left(N^*(\psi, t) - N_0(\varphi^*, \psi, t) \right) \cdot e^{-\frac{\xi}{d_4}}, \\
\Pi_1(\xi, \psi, t) &= -C_1(\varphi^*, \psi, t) \cdot e^{-\frac{\xi}{d_1}} - \frac{\xi\Pi_{0t}(\xi, \psi, t)}{v^2(\varphi^*, \psi)}, \\
P_1(\xi, \psi, t) &= -U_1(\varphi^*, \psi, t) \cdot e^{-\frac{\xi}{d_2}} - \frac{\xi P_{0t}(\xi, \psi, t)}{v^2(\varphi^*, \psi)}, \\
T_1(\xi, \psi, t) &= -H_1(\varphi^*, \psi, t) \cdot e^{-\frac{\xi}{d_3}} - \frac{\xi T_{0t}(\xi, \psi, t)}{v^2(\varphi^*, \psi)}, \\
\Gamma_1(\xi, \psi, t) &= -N_1(\varphi^*, \psi, t) \cdot e^{-\frac{\xi}{d_4}} - \frac{\xi\Gamma_{0t}(\xi, \psi, t)}{v^2(\varphi^*, \psi)}, \\
\Pi_2(\xi, \psi, t) &= \frac{2d_1^2v'_\xi(\varphi^*, t)}{v^3(\varphi^*, t)}\xi\Pi_{0t} - \frac{d_1^3}{v^4(\varphi^*, t)}\xi\Pi_{0tt} + d_1^2\xi\Pi_{0\psi\psi} + \frac{d_1}{v^2(\varphi^*, t)}\xi C_{1t}e^{-\frac{\xi}{d_1}} - \\
&\quad - \frac{d_1\xi}{v^2(\varphi^*, t)}\zeta(\xi, \psi, t),
\end{aligned}$$

$$P_2(\xi, \psi, t) = \frac{2d_2^2 v'_\xi(\varphi^*, t)}{v^3(\varphi^*, t)} \xi P_{0t} - \frac{d_2^3}{v^4(\varphi^*, t)} \xi P_{0tt} + d_2^2 \xi P_{0\psi\psi} + \frac{d_2}{v^2(\varphi^*, t)} \xi U_{1t} e^{\frac{-\xi}{d_2}} - \frac{d_2 \xi}{v^2(\varphi^*, t)} \zeta(\xi, \psi, t),$$

$$T_2(\xi, \psi, t) = \frac{2d_3^2 v'_\xi(\varphi^*, t)}{v^3(\varphi^*, t)} \xi T_{0t} - \frac{d_3^3}{v^4(\varphi^*, t)} \xi T_{0tt} + d_3^2 \xi T_{0\psi\psi} + \frac{d_3}{v^2(\varphi^*, t)} \xi H_{1t} e^{\frac{-\xi}{d_3}} - \frac{d_3 \xi}{v^2(\varphi^*, t)} \zeta(\xi, \psi, t),$$

$$\Gamma_2(\xi, \psi, t) = \frac{2d_4^2 v'_\xi(\varphi^*, t)}{v^3(\varphi^*, t)} \xi \Gamma_{0t} - \frac{d_4^3}{v^4(\varphi^*, t)} \xi \Gamma_{0tt} + d_4^2 \xi \Gamma_{0\psi\psi} + \frac{d_4}{v^2(\varphi^*, t)} \xi N_{1t} e^{\frac{-\xi}{d_4}} + \frac{d_4 \xi}{v^2(\varphi^*, t)} \zeta(\xi, \psi, t),$$

де $\zeta(\xi, \psi, t) = C_0(\varphi^*, \psi, t)U_0(\varphi^*, \psi, t)T_0(\xi, \psi, t) + C_0(\varphi^*, \psi, t)H_0(\varphi^*, \psi, t)P_0(\xi, \psi, t) + U_0(\varphi^*, \psi, t)H_0(\varphi^*, \psi, t)\Pi_0(\xi, \psi, t)$.

Для оцінки залишкових членів маємо задачу

$$\varepsilon d_i v^2(\varphi, \psi) \left(R_{2\varphi\varphi}^i(\varphi, \psi, t) + R_{2\psi\psi}^i(\varphi, \psi, t) \right) - v^2(\varphi, \psi) R_{2\varphi}^i(\varphi, \psi, t) - \varepsilon \cdot k^* \cdot \prod_{m=1}^3 R_2^m(\varphi, \psi, t) = R_{2t}^i(\varphi, \psi, t) - b_i(\varphi, \psi, t, \varepsilon) \cdot \varepsilon^2,$$

$$R_2^i(\varphi_*, \psi, t, \varepsilon) = R_2^i(\varphi^*, \psi, t, \varepsilon) = R_2^i(\varphi, \psi, 0, \varepsilon) = 0 \quad (i=\overline{1,3}),$$

$$\varepsilon d_4 v^2(\varphi, \psi) \left(R_{2\varphi\varphi}^4(\varphi, \psi, t) + R_{2\psi\psi}^4(\varphi, \psi, t) \right) - v^2(\varphi, \psi) R_{2\varphi}^4(\varphi, \psi, t) + \varepsilon \cdot k^* \cdot \prod_{m=1}^3 R_2^m(\varphi, \psi, t) = R_{2t}^4(\varphi, \psi, t) - b_4(\varphi, \psi, t, \varepsilon) \cdot \varepsilon^2,$$

$$R_2^4(\varphi_*, \psi, t, \varepsilon) = R_2^4(\varphi^*, \psi, t, \varepsilon) = R_2^4(\varphi, \psi, 0, \varepsilon) = 0.$$

Тут $b_i(\varphi, \psi, t, \varepsilon)$ – відомі функції, які є сумою добутків членів ряду (2.12)–(2.15), їх частинних похідних, а також коефіцієнти при ε розкладу функції $v^2(\varphi^* - \varepsilon\xi, \psi)$ в ряд Тейлора в околі $\varphi = \varphi^*$.

Аналогічно до [27, 53], вимагаючи достатньої гладкості коефіцієнтів системи рівнянь (2.1)–(2.4) та початкової і граничних умов (існування неперервних частинних похідних до четвертого порядку включно), а також

узгодженості останніх вздовж ребер $L^* \times 0$, $L_* \times 0$ області $G = G_z \times [0, T]$, де $[0, T]$ – фіксований проміжок часу, на основі принципу максимуму приходимо до справедливості такого твердження: $R_2^i(\varphi, \psi, t, \varepsilon) = O(\varepsilon^2)$ ($i = 1, 4$, $(\varphi, \psi, t) \in G$).

Для знаходження розподілу концентрацій розчинних речовин в області G_z необхідно здійснити перехід до змінних $x_{\alpha, \beta} = x(\varphi_\alpha, \psi_\beta)$, $y_{\alpha, \beta} = y(\varphi_\alpha, \psi_\beta)$, в результаті чого отримаємо значення концентрацій у вузлах сітки. Після цього необхідно провести інтерполяцію отриманих масивів.

2.2. Асимптотичний метод розв'язання модельних сингулярно збурених задач типу «конвекція-дифузія-тепломасообмін» у пористих середовищах

2.2.1. Побудова асимптотичних наближень розв'язків сингулярно збурених крайових задач типу «конвекція-дифузія-тепломасообмін» в двозв'язних криволінійних областях

Розглядається процес конвективно-дифузійного масоперенесення трьох розчинних речовин при фільтрації в області $G = G_z \times (0, \infty)$ (рис. 2.1,а). В процесі масоперенесення дві речовини (\tilde{C}^1 , \tilde{C}^2) вступають у хімічну реакцію типу $a_1 \tilde{C}^1 + a_2 \tilde{C}^2 = a_3 \cdot \tilde{C}^3$ [138, 139], в результаті чого утворюється третя розчинна речовина \tilde{C}^3 та виділяється певна кількість теплової енергії.

Відповідна модельна задача типу „конвекція-дифузія-тепломасообмін” матиме вигляд:

$$\frac{\partial}{\partial x} (D_i(\tilde{T}) \tilde{C}_x^i(x, y, t)) + \frac{\partial}{\partial y} (D_i(\tilde{T}) \tilde{C}_y^i(x, y, t)) - v_x(x, y) \tilde{C}_x^i(x, y, t) - v_y(x, y) \tilde{C}_y^i(x, y, t) - k(\tilde{T}) \cdot \tilde{a}_i \cdot (\tilde{C}^1(x, y, t))^{a_1} (\tilde{C}^2(x, y, t))^{a_2} = \tilde{C}_t^i(x, y, t), \quad (2.20)$$

$$D_4 \left(\tilde{T}_{xx}(x, y, t) + \tilde{T}_{yy}(x, y, t) \right) - v_x(x, y) \tilde{T}_x(x, y, t) - v_y(x, y) \tilde{T}_y(x, y, t) + k^* \cdot f^{**}(\tilde{C}^1(x, y, t), \tilde{C}^2(x, y, t)) = \tilde{T}_t(x, y, t), \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \tilde{C}^i|_{L_*} &= \tilde{C}_*^i(M, t), \quad \tilde{C}|_{L^*} = \tilde{C}^{i*}(M, t), \quad \tilde{C}^i(x, y, 0) = \tilde{C}_0^{i0}(x, y), \\ \tilde{T}|_{L_*} &= \tilde{T}_*(M, t), \quad \tilde{T}|_{L^*} = \tilde{T}^*(M, t), \quad \tilde{T}(x, y, 0) = \tilde{T}_0^0(x, y), \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$(v_x, v_y) = \text{grad } \varphi(x, y), \quad \Delta \varphi = 0, \quad \varphi|_{L_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad (2.23)$$

де $\tilde{C}^i(x, y, t)$ ($i = \overline{1,3}$) – відповідно концентрації трьох сортів розчинних речовин фільтраційної течії в точці (x, y) в момент часу t , $\tilde{T}(x, y, t)$ – температура середовища, $D_i(\tilde{T}) = d_i(\tilde{T}) \cdot \varepsilon$ – коефіцієнти дифузії ($d_i(\tilde{T})$ – задані дійсні функції), $D_4 = d_4 \cdot \varepsilon$ – коефіцієнт температуропровідності, $\tilde{a}_j = a_j \cdot \varepsilon$ ($j = \overline{1,2}$), $\tilde{a}_3 = -a_3 \cdot \varepsilon$, $k(\tilde{T})$ – функція швидкості хімічної реакції, $k^* = \tilde{k} \cdot \varepsilon$, \tilde{k} – константа швидкості теплоутворення внаслідок хімічної реакції, $\tilde{C}_*^i(M, t)$, $\tilde{C}^{i*}(M, t)$, $\tilde{C}_0^{i0}(x, y)$, $\tilde{T}_*(M, t)$, $\tilde{T}^*(M, t)$, $\tilde{T}_0^0(x, y)$ – задані достатньо гладкі, сильно узгодженні (настільки, щоб можна було будувати нижче вказані асимптотичні розвинення розв'язку із заданою точністю) між собою на ребрах області G функції.

Як і в п. 2.1 переходимо до відповідної задачі для області комплексного потенціалу G_w :

$$\begin{aligned} D_i(T)v^2(\varphi, \psi) &\left(C_{\varphi\varphi}^i(\varphi, \psi, t) + C_{\psi\psi}^i(\varphi, \psi, t) \right) + v^2(\varphi, \psi) (D_{i\varphi}(T)C_{\varphi}^i(\varphi, \psi, t) + \\ &+ D_{i\psi}(T)C_{\psi}^i(\varphi, \psi, t)) - v_{\varphi}^2(\varphi, \psi)C_{\varphi}^i(\varphi, \psi, t) - \\ &- k(T) \cdot \tilde{a}_i \cdot (C^1(\varphi, \psi, t))^{a_1} (C^2(\varphi, \psi, t))^{a_2} = C_i^i(\varphi, \psi, t), \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} D_4v^2(\varphi, \psi) &\left(T_{\varphi\varphi}(\varphi, \psi, t) + T_{\psi\psi}(\varphi, \psi, t) \right) - v_{\varphi}^2(\varphi, \psi)T_{\varphi}(\varphi, \psi, t) + \\ &+ k^* \cdot (C^1(\varphi, \psi, t))^{a_1} (C^2(\varphi, \psi, t))^{a_2} = T_i(\varphi, \psi, t), \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} C^i|_{\varphi=\varphi_*} &= C_*^i(\psi, t), \quad C^i|_{\varphi=\varphi^*} = C^{i*}(\psi, t), \quad C^i|_{t=0} = C_0^{i0}(\varphi, \psi), \\ T|_{\varphi=\varphi_*} &= T_*(\psi, t), \quad T|_{\varphi=\varphi^*} = T^*(\psi, t), \quad T|_{t=0} = T_0^0(\varphi, \psi), \end{aligned} \quad (2.26)$$

де $C^i(\varphi, \psi, t) = \tilde{C}^i(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), t)$, $T(\varphi, \psi, t) = \tilde{T}(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), t)$ та інші функції ($C_*^i, C^{i*}, C_0^{i0}, T_*, T^*, T_0^0$) інтерпретуються аналогічно.

Розв'язок (C^1, C^2, C^3, T) , задачі (2.24)–(2.26) у випадку $a_i = 1$ ($i = \overline{1,3}$) з

точністю $O(\varepsilon^2)$ шукаємо у вигляді таких асимптотичних рядів:

$$C^i(\varphi, \psi, t) = C_0^i(\varphi, \psi, t) + \varepsilon^1 C_1^i(\varphi, \psi, t) + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j \Pi_j^i(\xi, \psi, t) + R_2^i, \quad (2.27)$$

$$T(\varphi, \psi, t) = T_0(\varphi, \psi, t) + \varepsilon^1 T_1(\varphi, \psi, t) + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j E_j(\xi, \psi, t) + R_2^4, \quad (2.28)$$

де $R_2^l(\varphi, \psi, t, \varepsilon)$, $l = \overline{1, 4}$, – залишкові члени; $C_j^i(\varphi, \psi, t)$, $T_j(\varphi, \psi, t)$ ($j = \overline{0, 1}$) – члени відповідних регулярних частин асимптотики, зокрема: C_0^i , T_0 – розв'язки відповідних вироджених задач (конвективного переносу); C_1^i , T_1 – відповідні поправки, що враховують вплив дифузії всюди в даній області (за виключенням деякої її приграничної зони); $\Pi_j^i(\xi, \psi, t)$, $E_j(\xi, \psi, t)$ ($j = \overline{0, 2}$) – функції типу примежового шару в околі $\varphi = \varphi^*$; $\xi = (\varphi^* - \varphi) \cdot \varepsilon^{-1}$ – відповідне регуляризуюче перетворення. При цьому вимагатимемо, щоб функції $d_i(T)$ та $k(T)$ дозволяла розклад в ряд за степенями ε у вигляді:

$$d_i(T) = I_0^i(T_0) + \varepsilon I_1^i(T_0, T_1) + J_0^i(T_0, T_1, E_0) + \varepsilon J_1^i(T_0, T_1, E_0, E_1) + \\ + \varepsilon^2 J_2^i(T_0, T_1, E_0, E_1, E_2) + S^i(T_0, T_1, E_0, E_1, E_2, R_2^4, \varepsilon), \quad (2.29)$$

$$k(\tilde{T}) = G_0(T_0) + \varepsilon G_1(T_0, T_1) + M_0(T_0, T_1, E_0) + \varepsilon M_1(T_0, T_1, E_0, E_1) + \\ + \varepsilon^2 M_2(T_0, T_1, E_0, E_1, E_2) + F(T_0, T_1, E_0, E_1, E_2, R_2^4, \varepsilon), \quad (2.30)$$

де $I_0^i(\bullet)$, $I_1^i(\bullet)$, $J_j^i(\bullet)$, $S^i(\bullet)$, $G_0(\bullet)$, $G_1(\bullet)$, $M_j(\bullet)$, $F(\bullet)$ ($j = \overline{0, 2}$) – неперервні функції своїх аргументів.

Функції C_j^i , T_j ($i = \overline{1, 3}$, $j = \overline{0, 1}$) знаходимо із таких задач:

$$\begin{cases} v^2(\varphi, \psi) C_{j\varphi}^i(\varphi, \psi, t) + C_{jt}^i(\varphi, \psi, t) = g_j^i(\varphi, \psi, t), \\ C_j^i(\varphi, \psi, 0) = h_j^i(\varphi, \psi), \quad C_j^i(\varphi_*, \psi, t) = b_j^i(\psi, t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi, \psi) T_{j\varphi}(\varphi, \psi, t) + T_{jt}(\varphi, \psi, t) = g_j^4(\varphi, \psi, t), \\ T_j(\varphi, \psi, 0) = h_j^4(\varphi, \psi), \quad T_j(\varphi_*, \psi, t) = b_j^4(\psi, t), \end{cases}$$

де $g_0^i(\varphi, \psi, t) = 0$, $h_1^i(\varphi, \psi) = 0$, $b_1^i(\psi, t) = 0$, $i = \overline{1, 4}$, $h_0^i(\varphi, \psi) = C_0^{i0}(\varphi, \psi)$, $h_0^4(\varphi, \psi) = T_0^0(\varphi, \psi)$, $b_0^i(\psi, t) = C_*^i(\psi, t)$, $b_0^4(\psi, t) = T_*(\psi, t)$, $g_1^i(\varphi, \psi, t) = I_0^i(T_0) \times$

$$\begin{aligned} & \times v^2(\varphi, \psi) \left(C_{0\varphi\varphi}^i(\varphi, \psi, t) + C_{0\psi\psi}^i(\varphi, \psi, t) \right) - \alpha_i G_0(T_0) C_0^1(\varphi, \psi, t) C_0^2(\varphi, \psi, t) + v^2(\varphi, \psi) \times \\ & \times (I_{0\varphi}^i(T_0) C_{0\varphi}^i(\varphi, \psi, t) + I_{0\psi}^i(T_0) C_{0\psi}^i(\varphi, \psi, t)), \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = -1, \quad g_1^4(\varphi, \psi, t) = \\ & = d_4 v^2(\varphi, \psi) \left(T_{0\varphi\varphi}(\xi, \psi, t) + T_{0\psi\psi}(\xi, \psi, t) \right) + k^* f^{**}(C_0^1(\varphi, \psi, t), C_0^2(\varphi, \psi, t)). \end{aligned}$$

Розв'язками даних задач є функції:

$$\begin{aligned} C_0^i(\varphi, \psi, t) &= \begin{cases} C_*^i(\psi, t - f(\varphi, \psi)), & t \geq f(\varphi, \psi), \\ C_0^{i0}(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi, t), & t < f(\varphi, \psi), \quad i = \overline{1, 3}; \end{cases} \\ T_0(\varphi, \psi, t) &= \begin{cases} T_*(\psi, t - f(\varphi, \psi)), & t \geq f(\varphi, \psi), \\ T_0^0(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi, t), & t < f(\varphi, \psi), \end{cases} \\ C_1^i(\varphi, \psi, t) &= \begin{cases} \int_{\varphi^*}^{\varphi} v^{-2}(\tilde{\varphi}, \psi) g_1^i(\tilde{\varphi}, \psi, f(\tilde{\varphi}, \psi) + t - f(\varphi, \psi)) d\tilde{\varphi}, & t \geq f(\varphi, \psi), \\ \int_0^t g_1^i(f^{-1}(\tilde{t} + f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi, \tilde{t}) d\tilde{t}, & t < f(\varphi, \psi), \end{cases} \\ T_1(\varphi, \psi, t) &= \begin{cases} \int_{\varphi^*}^{\varphi} v^{-2}(\tilde{\varphi}, \psi) g_1^4(\tilde{\varphi}, \psi, f(\tilde{\varphi}, \psi) + t - f(\varphi, \psi)) d\tilde{\varphi}, & t \geq f(\varphi, \psi), \\ \int_0^t g_1^4(f^{-1}(\tilde{t} + f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi, \tilde{t}) d\tilde{t}, & t < f(\varphi, \psi). \end{cases} \end{aligned}$$

Функції $\Pi = \sum_{j=0}^2 \Pi_j \varepsilon^j$ ($i = \overline{1, 3}$), $E = \sum_{j=0}^2 E_j \varepsilon^j$, на відміну від розглянутих

аналогічних функцій в п. 2.1, знаходимо в результаті почергового розв'язку наступних задач:

$$\begin{cases} d_4 \cdot v^2(\varphi^*, \psi) \left(E_{j\xi\xi}(\xi, \psi, t) \right) + v^2(\varphi^*, \psi) E_{j\xi}(\xi, \psi, t) = \sigma_j^4(\xi, \psi, t), \\ E_j(0, \psi, t) = q_j^4(\psi, t), \\ E_j(\xi, \psi, t) \rightarrow 0 \text{ при } \xi \rightarrow \infty, \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_0^i(T_0, T_1, E_0) \cdot v^2(\varphi^*, \psi) \Pi_{j\xi\xi}^i(\xi, \psi, t) + v^2(\varphi^*, \psi) \Pi_{j\xi}^i(\xi, \psi, t) = \sigma_j^i(\xi, \psi, t), \\ \Pi_j^i(0, \psi, t) = q_j^i(\psi, t), \\ \Pi_j^i(\xi, \psi, t) \rightarrow 0 \text{ при } \xi \rightarrow \infty, \quad i = \overline{1, 3}, \quad j = \overline{0, 2}, \end{cases}$$

де $q_0^i(\psi, t) = C^{i*}(\psi, t) - C_0^i(\varphi^*, \psi, t)$, $q_0^4(\psi, t) = T^*(\psi, t) - T_0(\varphi^*, \psi, t)$,

$$\begin{aligned}
q_1^i(\psi, t) &= -C_1^i(\varphi^*, \psi, t), \quad q_1^4(\psi, t) = -T_1(\varphi^*, \psi, t), \quad q_2^m(\psi, t) = 0, \quad \sigma_0^4(\xi, \psi, t) = 0, \\
\sigma_0^i(\xi, \psi, t) &= v^2(\varphi^*, \psi) J_{0\xi}^i(T_0, T_1, E_0) \Pi_{0\xi}^i(\xi, \psi, t), \quad \sigma_1^i(\xi, \psi, t) = \Pi_{0t}^i(\xi, \psi, t) - (I_1^i(T_0, T_1) + \\
&+ J_1^i(T_0, T_1, E_0, E_1)) v^2(\varphi^*, \psi) \Pi_{0\xi\xi}^i(\xi, \psi, t) - v^2(\varphi^*, \psi) (J_{0\xi}^i(T_0, T_1, E_0) \Pi_{1\xi}^i(\xi, \psi, t) + \Pi_{0\xi}^i(\xi, \psi, t) \times \\
&\times J_{1\xi}^i(T_0, T_1, E_0, E_1)) + 2v(\varphi^*, \psi) v'(\varphi^*, \psi) \xi J_{0\xi}^i(T_0, T_1, E_0) \Pi_{0\xi}^i(\xi, \psi, t), \quad \sigma_2^i(\xi, \psi, t) = \\
&= \Pi_{1t}^i(\xi, \psi, t) + 2v^{-1}(\varphi^*, \psi) v_\xi(\varphi^*, \psi) \xi \Pi_{0t}^i(\xi, \psi, t) - I_0^i(T_0) v^2(\varphi^*, \psi) \Pi_{0\psi\psi}^i(\xi, \psi, t) - \\
&- (I_1^i(T_0, T_1) + J_1^i(T_0, T_1, E_0, E_1)) v^2(\varphi^*, \psi) \Pi_{1\xi\xi}^i(\xi, \psi, t) - \Pi_{0\xi\xi}^i(\xi, \psi, t) J_2^i(T_0, T_1, E_0, E_1, E_2) \times \\
&\times v^2(\varphi^*, \psi) - v^2(\varphi^*, \psi) (J_{1\xi}^i(T_0, T_1, E_0, E_1) \Pi_{1\xi}^i(\xi, \psi, t) + \Pi_{2\xi}^i(\xi, \psi, t) J_{0\xi}^i(T_0, T_1, E_0) + \\
&+ J_{2\xi}^i(T_0, T_1, E_0, E_1, E_2) \Pi_{0\xi}^i(\xi, \psi, t) + J_{0\psi}^i(T_0, T_1, E_0) \Pi_{0\psi}^i(\xi, \psi, t)) + 2v(\varphi^*, \psi) v'(\varphi^*, \psi) \times \\
&\times \xi (J_{0\xi}^i(T_0, T_1, E_0) \Pi_{1\xi}^i(\xi, \psi, t) + J_{1\xi}^i(T_0, T_1, E_0, E_1) \Pi_{0\xi}^i(\xi, \psi, t)) - ((v'(\varphi^*, \psi))^2 + v''(\varphi^*, \psi)) \Pi_{0\xi}^i(\xi, \psi, t) \times \\
&\times J_{0\xi}^i(T_0, T_1, E_0) + \alpha_i M_0(T_0, T_1, E_0) \tau(\xi, \psi, t), \quad \sigma_1^4(\xi, \psi, t) = E_{0t}(\xi, \psi, t), \quad \sigma_2^4(\xi, \psi, t) = E_{1t}(\xi, \psi, t) + \\
&+ 2v^{-1}(\varphi^*, \psi) v(\varphi^*, \psi)_\xi \xi E_{0t}(\xi, \psi, t) - d_4 v^2(\varphi^*, \psi) E_{0\psi\psi}(\xi, \psi, t) - k^* \tau(\xi, \psi, t), \\
\tau(\xi, \psi, t) &= C_0^1(\varphi, \psi, t) \Pi_0^2(\xi, \psi, t) + C_0^2(\varphi, \psi, t) \Pi_0^1(\xi, \psi, t) + \Pi_0^1(\xi, \psi, t) \Pi_0^2(\xi, \psi, t).
\end{aligned}$$

Залишкові члени оцінюємо з наступних задач:

$$\begin{cases}
\varepsilon d_i(T_0, T_1, E_0, E_1, E_2, R_2^4, \varepsilon) v^2(\varphi, \psi) \left(R_{2\varphi\varphi}^i(\varphi, \psi, t) + R_{2\psi\psi}^i(\varphi, \psi, t) \right) + \\
+ v^2(\varphi, \psi) (d_i(T_0, T_1, E_0, E_1, E_2, R_2^4, \varepsilon))'_\varphi R_{2\varphi}^i(\varphi, \psi, t) + \\
+ (d_i(T_0, T_1, E_0, E_1, E_2, R_2^4, \varepsilon))'_\psi R_{2\psi}^i(\varphi, \psi, t) - v^2(\varphi, \psi) R_{2\varphi}^i(\varphi, \psi, t) - \\
- \varepsilon \cdot \alpha_i k (R_2^4(\varphi, \psi, t, \varepsilon)) R_2^1(\varphi, \psi, t) R_2^2(\varphi, \psi, t) = R_{2t}^i(\varphi, \psi, t) - b_i(\varphi, \psi, t, \varepsilon) \cdot \varepsilon^2, \\
R_2^i(\varphi_*, \psi, t, \varepsilon) = R_2^i(\varphi^*, \psi, t, \varepsilon) = R_2^i(\varphi, \psi, 0, \varepsilon) = 0 \quad (i = \overline{1, 3}), \\
\varepsilon d_4 v^2(\varphi, \psi) \left(R_{2\varphi\varphi}^4(\varphi, \psi, t) + R_{2\psi\psi}^4(\varphi, \psi, t) \right) - v^2(\varphi, \psi) R_{2\varphi}^4(\varphi, \psi, t) + \\
+ \varepsilon \cdot k \cdot f^{**}(R_2^1(\varphi, \psi, t), R_2^2(\varphi, \psi, t)) = R_{2t}^4(\varphi, \psi, t) - b_4(\varphi, \psi, t, \varepsilon) \cdot \varepsilon^2, \\
R_2^4(\varphi_*, \psi, t, \varepsilon) = R_2^4(\varphi^*, \psi, t, \varepsilon) = R_2^4(\varphi, \psi, 0, \varepsilon) = 0,
\end{cases}$$

де $b_i(\varphi, \psi, t, \varepsilon)$ – відомі функції, які є сумою добутоків членів ряду (2.27)–(2.28), їх частинних похідних, а також коефіцієнти при ε розкладу функції $v^2(\varphi^* - \varepsilon\xi, \psi)$ в ряд Тейлора в околі $\varphi = \varphi^*$. Вимагаючи достатньої гладкості коефіцієнтів системи рівнянь (2.20)–(2.21), та початкової і граничних умов

(існування неперервних частинних похідних до четвертого порядку включно), а також узгодженості останніх вздовж ребер $L^* \times 0, L_* \times 0$ області $G = G_z \times [0, T]$, де $[0, T]$ – фіксований проміжок часу, на основі принципу максимуму для рівнянь в частинних похідних приходимо до справедливості такого твердження:
 $R_2^i(\varphi, \psi, t, \varepsilon) = O(\varepsilon^2) (i = \overline{1, 4}, (\varphi, \psi, t) \in G)$.

2.2.2. Моделювання просторового сингулярно збуреного процесу конвективно-дифузійного тепломасоперенесення в пористому середовищі з урахуванням хімічної реакції

Розглядається просторова нелінійна сингулярно збурена задача конвективно-дифузійного тепломасоперенесення трьох розчинних речовин в області $G = G_{\varpi} \times (0, \infty) \quad G_{\varpi} = G_{\tilde{z}} \times (0, H)$, де $G_{\tilde{z}}$ ($\tilde{z} = x + iy$) – однозв'язна чотирикутна криволінійна область (пористий пласт), обмежена чотирма гладкими ортогональними між собою в точках перетину кривими $AB = \{\tilde{z} = x + iy: f_1(x, y) = 0\}$, $BC = \{\tilde{z}: f_2(x, y) = 0\}$, $CD = \{\tilde{z}: f_3(x, y) = 0\}$, $DA = \{\tilde{z}: f_4(x, y) = 0\}$ (рис 2.2,а) [140]:

$$\operatorname{div}(D_i(\tilde{T}) \cdot \operatorname{grad} \tilde{C}_i) - \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \tilde{C}_i - \tilde{\alpha}_i k(\tilde{T}) \tilde{C}_1 \tilde{C}_2 = \sigma(\tilde{C}_i)'_t, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (2.31)$$

$$\operatorname{div}(D_4 \cdot \operatorname{grad} \tilde{T}) - \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \tilde{T} + k^* f^{**}(\tilde{C}_1, \tilde{C}_2) = \tilde{T}'_t, \quad (2.32)$$

$$\tilde{C}_i^i(x, y, z, 0) = \tilde{C}_i^{i0}(x, y, z), \quad \tilde{T}(x, y, z, 0) = \tilde{T}_0^0(x, y, z), \quad (2.33)$$

$$\tilde{C}_i \Big|_{ABB^*A^*} = \tilde{C}_i^*(M, t), \quad \tilde{C}_i \Big|_{CDD^*C^*} = \tilde{C}_i^*(M, t), \quad \tilde{C}_i \Big|_{ADD^*A^*} = \tilde{C}_i^{**}(M, t),$$

$$\tilde{C}_i \Big|_{BCC^*B^*} = \tilde{C}_i^{**}(M, t), \quad \tilde{C}_i \Big|_{ABCD} = \tilde{C}_i^{**}(M, t), \quad \tilde{C}_i \Big|_{A^*B^*C^*D^*} = \tilde{C}_i^{**}(M, t), \quad (2.34)$$

$$\tilde{T} \Big|_{ABB^*A^*} = \tilde{T}_*(M, t), \quad \tilde{T} \Big|_{CDD^*C^*} = \tilde{T}^*(M, t), \quad \tilde{T} \Big|_{ADD^*A^*} = \tilde{T}_{**}(M, t),$$

$$\tilde{T} \Big|_{BCC^*B^*} = \tilde{T}^{**}(M, t), \quad \tilde{T} \Big|_{ABCD} = \tilde{T}^{**}(M, t), \quad \tilde{T} \Big|_{A^*B^*C^*D^*} = \tilde{T}^{**}(M, t), \quad (2.35)$$

$$\vec{v} = -\chi \operatorname{grad} h, \quad \operatorname{div} H \vec{v} = 0,$$

$$\varphi \Big|_{ABB^*A^*} = \varphi_*, \quad \varphi \Big|_{CDD^*C^*} = \varphi^*, \quad \frac{d\varphi}{dn} \Big|_{ADD^*A^* \cup A^*D^*C^*B^* \cup B^*C^*CB \cup ADCB} = 0, \quad (2.36)$$

де $\tilde{C}_i = \tilde{C}_i(x, y, z, t)$ – концентрація i -го сорту речовини у точці (x, y, z) в момент часу t , $\tilde{T} = \tilde{T}(x, y, z, t)$ – температура потоку, H – висота проникного пласту, $\tilde{\alpha}_i = \varepsilon \alpha_i$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -1$, χ – коефіцієнт фільтрації; φ , v_x , v_y – відповідно потенціал та компоненти швидкості фільтрації в пористому середовищі G_w , $\sqrt{v_x^2(x, y) + v_y^2(x, y)} > v_* \gg \varepsilon$, ($v_z = 0$), $h = h(x, y)$ – напір у точці $\tilde{z} = x + iy$, M – біжуча точка відповідної поверхні, n – зовнішня нормаль до відповідної поверхні, $\tilde{C}_*(M, t)$, $\tilde{C}_i^*(M, t)$ та інші, які фігурують в умовах (2.34)–(2.35) достатньо гладкі функції, узгоджені між собою на ребрах (гранях) області G .

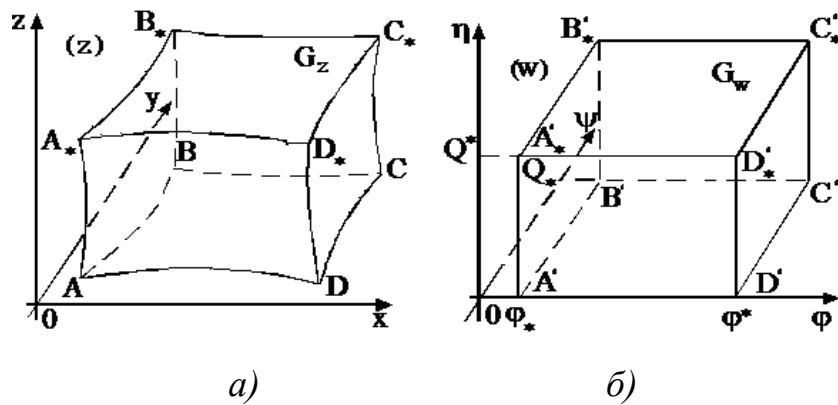


Рис. 2.2. Просторова фізична область G_z (а) та відповідна їй область комплексного потенціалу G_w (б)

Тоді, здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi)$, $y = y(\varphi, \psi)$, $z = z$, $t = t$ у рівняннях (2.31)–(2.32) та умовах (2.33)–(2.35), аналогічно п. 2.1, приходимо до відповідної «дифузійної задачі» для області G_w (рис. 2.2,б)

$$\varepsilon d_i(T) \left(q^2(\varphi, \psi) \left(\frac{\partial^2 C_i}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 C_i}{\partial \psi^2} \right) + \frac{\partial^2 C_i}{\partial z^2} \right) + \varepsilon (q^2(\varphi, \psi)) \left(\frac{\partial D^i(T)}{\partial \varphi} \frac{\partial C_i}{\partial \varphi} + \frac{\partial D^i(T)}{\partial \psi} \frac{\partial C_i}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial D^i(T)}{\partial z} \frac{\partial C_i}{\partial z} - \frac{q^2(\varphi, \psi)}{H} \frac{\partial C_i}{\partial \varphi} - \varepsilon k(T) \alpha_i C_1 C_2 = \sigma \frac{\partial C_i}{\partial t}, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (2.37)$$

$$\varepsilon d_4 \left(q^2(\varphi, \psi) \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \psi^2} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) - \frac{q^2(\varphi, \psi)}{H} \frac{\partial T}{\partial \varphi} + k^* f^{**}(C_1, C_2) = \sigma \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (2.38)$$

$$C_i(\varphi, \psi, z, 0) = C_{i0}^0(\varphi, \psi, z), \quad T(\varphi, \psi, z, 0) = T_0^0(\varphi, \psi, z), \quad (2.39)$$

$$C_i(\varphi_*, \psi, z, t) = C_{i*}(\psi, z, t), \quad C_i(\varphi^*, \psi, z, t) = C_i^*(\psi, z, t),$$

$$C_i(\varphi, 0, z, t) = C_{i**}(\varphi, z, t), \quad C_i(\varphi, Q, z, t) = C_i^{**}(\varphi, z, t),$$

$$C_i(\varphi, \psi, 0, t) = C_{i**}^*(\varphi, \psi, t), \quad C_i(\varphi, \psi, H, t) = C_{i*}^{**}(\varphi, \psi, t),$$

$$T(\varphi_*, \psi, z, t) = T_*(\psi, z, t), \quad T(\varphi^*, \psi, z, t) = T^*(\psi, z, t),$$

$$T(\varphi, 0, z, t) = T_{**}(\varphi, z, t), \quad T(\varphi, Q, z, t) = T^{**}(\varphi, z, t),$$

$$T(\varphi, \psi, 0, t) = T_{**}^*(\varphi, \psi, t), \quad T(\varphi, \psi, H, t) = T_*^{**}(\varphi, \psi, t), \quad (2.40)$$

де $\vec{q} = H \cdot \vec{\nu}$ – фільтраційна витрата, $C_i(\varphi, \psi, z, t) = \tilde{C}_i(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), z, t)$,

$$T(\varphi, \psi, z, t) = \tilde{T}(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), z, t).$$

Розв'язок (C^1, C^2, C^3, T) ($i = \overline{1,3}$) поставленої задачі (2.37)–(2.40) з точністю $O(\varepsilon^2)$ шукаємо у вигляді таких асимптотичних рядів:

$$\begin{aligned} C_i(\varphi, \psi, z, t) = & C_{i,0}(\varphi, \psi, z, t) + \varepsilon C_{i,1}(\varphi, \psi, z, t) + \sum_{p=0}^2 \varepsilon^p \Pi_p^i(\xi, \psi, z, t) + \\ & + \sum_{l=0}^4 \varepsilon^{\frac{l}{2}} \underline{\Pi}_l^i(\varphi, \eta, z, t) + \sum_{l=0}^4 \varepsilon^{\frac{l}{2}} \overline{\Pi}_l^i(\varphi, \mu, z, t) + \sum_{l=0}^4 \varepsilon^{\frac{l}{2}} \underline{\underline{\Pi}}_l^i(\varphi, \psi, \beta, t) + \\ & + \sum_{l=0}^4 \varepsilon^{\frac{l}{2}} \overline{\overline{\Pi}}_l^i(\varphi, \psi, \alpha, t) + R_1^i(\varphi, \psi, z, t, \varepsilon), \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} T(\varphi, \psi, z, t) = & T_0(\varphi, \psi, z, t) + \varepsilon T_1(\varphi, \psi, z, t) + 2 \sum_{p=0}^2 \varepsilon^p P_p(\xi, \psi, z, t) + \\ & + \sum_{l=0}^4 \varepsilon^{\frac{l}{2}} \underline{P}_l^i(\varphi, \eta, z, t) + \sum_{l=0}^4 \varepsilon^{\frac{l}{2}} \overline{P}_l^i(\varphi, \mu, z, t) + \sum_{l=0}^4 \varepsilon^{\frac{l}{2}} \underline{\underline{P}}_l^i(\varphi, \psi, \beta, t) + \\ & + \sum_{l=0}^4 \varepsilon^{\frac{l}{2}} \overline{\overline{P}}_l^i(\varphi, \psi, \alpha, t) + R_1^4(\varphi, \psi, z, t, \varepsilon), \end{aligned} \quad (2.42)$$

де R_1^i – залишкові члени $C_{i,j}(\varphi, \psi, z, t)$ та $T_j(\varphi, \psi, z, t)$; ($j = \overline{0,1}$) – члени регулярної частини асимптотики, $\Pi_p^i(\xi, \psi, z, t)$ і $P_p(\xi, \psi, z, t)$; ($p = \overline{0,2}$) – функції типу примежового шару в околі $\varphi = \varphi^*$ (поправки на виході

фільтраційного потоку із області G_{σ}); $\underline{P}_l^i(\varphi, \eta, z, t)$, $\underline{P}_l(\varphi, \eta, z, t)$, $\overline{\overline{P}}_l^i(\varphi, \mu, z, t)$, $\overline{P}_l^i(\varphi, \mu, z, t)$, $\underline{\underline{P}}_l^i(\varphi, \psi, \beta, t)$, $\underline{P}_l(\varphi, \psi, \beta, t)$, $\overline{\overline{P}}_l^i(\varphi, \psi, \alpha, t)$, $\overline{P}_l^i(\varphi, \psi, \alpha, t)$ ($l = \overline{0, 4}$) – функції типу примежового шару відповідно в околах $\psi = 0$, $\psi = Q$, $z = 0$, $z = H$, що враховують вплив бічних джерел забруднень; $\xi = (\varphi^* - \varphi) \cdot \varepsilon^{-1}$, $\eta = \psi \cdot \varepsilon^{-1/2}$, $\mu = (Q - \psi) \cdot \varepsilon^{-1/2}$, $\beta = z \cdot \varepsilon^{-1/2}$, $\alpha = (H - z) \cdot \varepsilon^{-1/2}$ – відповідні регуляризуючі перетворення (розтяги). При цьому, як і в п.2.2.1, функції $d_i(T)$ та $k(T)$ розкладемо в ряд за степенями ε у вигляді

$$d_i(T) = I_0^i(\tau_0) + \sum_{l=1}^4 \varepsilon^{\frac{l}{2}} I_l^i(\tau_0, \dots, \tau_l) + R_l^i(\tau_0, \dots, \tau_2, R_1^4, \varepsilon), \quad (2.43)$$

$$k(T) = J_0^i(\tau_0) + \sum_{l=1}^4 \varepsilon^{\frac{l}{2}} J_l^i(\tau_0, \dots, \tau_l) + R_J^i(\tau_0, \dots, \tau_2, R_1^4, \varepsilon), \quad (2.44)$$

де $\tau_j = T_j + P_j + \underline{P}_j + \overline{P}_j + \underline{\underline{P}}_j + \overline{\overline{P}}_j$ ($i = 0, 1$), $\tau_{\frac{j}{2}} = \underline{P}_{\frac{j}{2}} + \overline{P}_{\frac{j}{2}} + \underline{\underline{P}}_{\frac{j}{2}} + \overline{\overline{P}}_{\frac{j}{2}}$ ($j = 1, 3$),

$\tau_2 = P_2 + \underline{P}_2 + \overline{P}_2 + \underline{\underline{P}}_2 + \overline{\overline{P}}_2$; $I_0^i(\bullet), \dots, I_4^i(\bullet), J_0^i(\bullet), \dots, J_4^i(\bullet), R_l^i(\bullet), R_J^i(\bullet)$ – неперервні функції своїх аргументів.

Аналогічно, після підстановки (2.41)–(2.44) в (2.37)–(2.40) та застосування стандартної «процедури прирівнювання», для знаходження регулярних частин асимптотики приходимо до таких задач:

$$\begin{cases} \frac{q^2(\varphi, \psi)}{H} \frac{\partial}{\partial \varphi} C_{i,j}(\varphi, \psi, z, t) + \sigma \frac{\partial}{\partial t} C_{i,j}(\varphi, \psi, z, t) = g_j^i(\varphi, \psi, z, t), \\ C_{i,j}(\varphi, \psi, z, 0) = h_j^i(\varphi, \psi, z), C_{i,j}(\varphi^*, \psi, z, t) = b_j^i(\psi, z, t), \end{cases} \quad (2.45)$$

$$g_0^i(\varphi, \psi, t) = 0, \quad h_0^i(\varphi, \psi, z) = C_{i0}^0(\varphi, \psi, z), \quad b_0^i(\psi, z, t) = c_*^i(\psi, z, t), \quad h_1^i(\varphi, \psi, z) = 0,$$

$$b_1^i(\psi, z, t) = 0, \quad g_1^i(\varphi, \psi, z, t) = I_0^i(q^2(\varphi, \psi)) \left(\frac{\partial^2 C_{i,j}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 C_{i,j}}{\partial \psi^2} \right) + \frac{\partial^2 C_{i,j}}{\partial z^2} + q^2(\varphi, \psi) \left(\frac{\partial I_0^i}{\partial \varphi} \frac{\partial C_{i,0}}{\partial \varphi} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial I_0^i}{\partial \psi} \frac{\partial C_{i,0}}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial I_0^i}{\partial z} \frac{\partial C_{i,0}}{\partial z} - \alpha_i J_0^i C_{1,0} C_{2,0}, \quad i = \overline{1, 3};$$

$$\begin{cases} \frac{q^2(\varphi, \psi)}{H} \frac{\partial}{\partial \varphi} T_j(\varphi, \psi, z, t) + \sigma \frac{\partial}{\partial t} T_j(\varphi, \psi, z, t) = g_j^4(\varphi, \psi, z, t), \\ T_j(\varphi, \psi, z, 0) = h_j^4(\varphi, \psi, z), T_j(\varphi_*, \psi, z, t) = b_j^4(\psi, z, t), \end{cases} \quad (2.46)$$

$$g_0^4(\varphi, \psi, t) = 0, \quad h_0^4(\varphi, \psi, z) = T_0^0(\varphi, \psi, z), \quad b_0^4(\psi, z, t) = T_*(\psi, z, t), \quad h_1^4(\varphi, \psi, z) = 0, \\ b_1^4(\psi, z, t) = 0, \quad g_1^4(\varphi, \psi, z, t) = d_4(q^2(\varphi, \psi)(T_{0\varphi\varphi} + T_{0\psi\psi}) + T_{0zz}^i) + k^* f^{**}(C_{1,0}, C_{2,0}).$$

У результаті їх розв'язання отримано

$$C_{i,0}(\varphi, \psi, z, t) = \begin{cases} C_{i*}(\psi, z, t - f(\varphi, \psi)), t \geq f(\varphi, \psi), \\ C_{i0}^0(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi, z, t), t < f(\varphi, \psi); \end{cases}$$

$$C_{i,1}(\varphi, \psi, z, t) = \begin{cases} \int_{\varphi_*}^{\varphi} \sigma H q^{-2}(\tilde{\varphi}, \psi) \cdot g_1^i(\tilde{\varphi}, \psi, z, f(\tilde{\varphi}, \psi) + t - f(\varphi, \psi)) d\tilde{\varphi}, t \geq f(\varphi, \psi), \\ \int_0^t g_1^i(f^{-1}(\tilde{t} + f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi, z, \tilde{t}) d\tilde{t}, t < f(\varphi, \psi); \end{cases}$$

$$T_0(\varphi, \psi, z, t) = \begin{cases} T_*(\psi, z, t - f(\varphi, \psi)), t \geq f(\varphi, \psi), \\ T_0^0(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi, z, t), t < f(\varphi, \psi); \end{cases}$$

$$T_1(\varphi, \psi, z, t) = \begin{cases} \int_{\varphi_*}^{\varphi} \sigma H q^{-2}(\tilde{\varphi}, \psi) \cdot g_1^4(\tilde{\varphi}, \psi, z, f(\tilde{\varphi}, \psi) + t - f(\varphi, \psi)) d\tilde{\varphi}, t \geq f(\varphi, \psi), \\ \int_0^t g_1^4(f^{-1}(\tilde{t} + f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi, z, \tilde{t}) d\tilde{t}, t < f(\varphi, \psi), \end{cases}$$

де $f(\varphi, \tilde{\psi}) = \sigma H \int_{\varphi_*}^{\varphi} q^{-2}(s, \tilde{\psi}) ds$ – час проходження виділеної частинки вздовж відповідної лінії течії (як перетину деяких двох поверхонь $\psi(x, y, z) = \tilde{\psi}$, $0 \leq \tilde{\psi} \leq Q$, $z(x, y, z) = \tilde{z}$, $0 \leq \tilde{z} \leq H$), від екіпотенціальної поверхні $s = \varphi_*$ до екіпотенціальної поверхні $s = \varphi$; f^{-1} – функція, обернена до функції f стосовно змінної φ (зазначимо, що така функція існує, оскільки підінтегральна функція q^{-2} – неперервно диференційована, обмежена, додатньо визначена).

Функції $\Pi^i = \sum_{p=0}^2 \Pi_p^i \varepsilon^p$ та $P = \sum_{p=0}^2 P_p \varepsilon^p$ призначені для усунення нев'язок,

внесених побудованими регулярними частинами $C_i = \sum_{j=0}^1 C_{i,j} \varepsilon^j$ та $T = \sum_{j=0}^1 T_j \varepsilon^j$ в

околі ділянки $\varphi = \varphi^*$ (виходу фільтраційної течії). Тобто повинні виконуватись

умови $(C_i + \Pi^i)|_{\varphi=\varphi^*} = C_i^* + O(\varepsilon^2)$, $(T + P)|_{\varphi=\varphi^*} = T^* + O(\varepsilon^2)$. Для знаходження цих функцій, маємо такі задачі:

$$q^2(\varphi^*, \psi) \Pi_{p\xi\xi}^i(\xi, \psi, z, t) + \frac{q^2(\varphi^*, \psi)}{H} \Pi_{p\xi}^i(\xi, \psi, z, t) = d_p^i(\xi, \psi, z, t),$$

$$\Pi_p^i \rightarrow 0, \text{ при } \xi \rightarrow \infty, \quad \Pi_p^i(0, \psi, z, t) = w_p^i(\psi, z, t), \quad p = \overline{0, 2},$$

$$q^2(\varphi^*, \psi) P_{p\xi\xi}(\xi, \psi, z, t) + \frac{q^2(\varphi^*, \psi)}{H} P_{p\xi}(\xi, \psi, z, t) = d_p^4(\xi, \psi, z, t),$$

$$P_p \rightarrow 0, \text{ при } \xi \rightarrow \infty, \quad P_p(0, \psi, z, t) = w_p^4(\psi, z, t), \quad p = \overline{0, 2},$$

де $d_0^i(\xi, \psi, z, t) = 0$, $i = \overline{1, 4}$, $d_1^i(\xi, \psi, z, t) = \Pi_{0t}^i(\xi, \psi, z, t)$, $i = \overline{1, 3}$, $d_1^4(\xi, \psi, z, t) = P_{0t}(\xi, \psi, z, t)$, $d_2^i(\xi, \psi, z, t) = f_1^i(\psi, z, t)e^{-\xi/H} + f_2^i(\psi, z, t)\xi e^{-\xi/H}$, $f_1^i(\psi, z, t) = -c_i^{i*}(\varphi^*, \psi, z, t) - q^2(\varphi^*, \psi) \frac{\partial^2 \Pi_0^i}{\partial \psi^2} - \frac{\partial^2 \Pi_0^i}{\partial z^2}$, $f_1^4(\psi, z, t) = -T_0^*(\varphi^*, \psi, z, t) - q^2(\varphi^*, \psi) \frac{\partial^2 P_0}{\partial \psi^2} - \frac{\partial^2 P_0}{\partial z^2}$, $f_2^i(\psi, z, t) = 2q^{-1}(\varphi^*, \psi)q'(\varphi^*, \psi) \frac{\partial \Pi_0^i}{\partial t} - Hq^{-2}(\varphi^*, \psi) \frac{\partial^2 \Pi_0^i}{\partial t^2}$, $f_2^4(\psi, z, t) = 2q^{-1}(\varphi^*, \psi)q'(\varphi^*, \psi) \frac{\partial P_0}{\partial t} - Hq^{-2}(\varphi^*, \psi) \frac{\partial^2 P_0}{\partial t^2}$, $w_0^i(\psi, z, t) = C_i^*(\psi, z, t) - C_{i,0}(\varphi^*, \psi, z, t)$, $w_1^i(\psi, z, t) = -C_{i,1}(\varphi^*, \psi, z, t)$, $i = \overline{1, 3}$, $w_2^i(\psi, z, t) = 0$, $i = \overline{1, 4}$, $w_0^4(\psi, z, t) = T^*(\psi, z, t) - T_0(\varphi^*, \psi, z, t)$, $w_1^4(\psi, z, t) = -T_1(\varphi^*, \psi, z, t)$.

Функції типу примежового шару $\underline{\Pi}^i(\varphi, \eta, z, t) = \sum_{l=0}^4 \underline{\Pi}_{l/2}^i \varepsilon^{l/2}$, $\underline{P}^i(\varphi, \eta, z, t) = \sum_{l=0}^4 \underline{P}_{l/2}^i \varepsilon^{l/2}$ і $\overline{\Pi}^i(\varphi, \mu, z, t) = \sum_{l=0}^4 \overline{\Pi}_{l/2}^i \varepsilon^{l/2}$, $\overline{P}^i(\varphi, \mu, z, t) = \sum_{l=0}^4 \overline{P}_{l/2}^i \varepsilon^{l/2}$ призначені для усунення нев'язок в околах $\psi = 0$ та $\psi = Q$ відповідно, а також функції $\underline{\underline{\Pi}}^i(\varphi, \psi, \beta, t) = \sum_{l=0}^4 \underline{\underline{\Pi}}_{l/2}^i \varepsilon^{l/2}$, $\underline{\underline{P}}^i(\varphi, \psi, \beta, t) = \sum_{l=0}^4 \underline{\underline{P}}_{l/2}^i \varepsilon^{l/2}$ і $\overline{\overline{\Pi}}^i(\varphi, \psi, \alpha, t) = \sum_{l=0}^4 \overline{\overline{\Pi}}_{l/2}^i \varepsilon^{l/2}$, $\overline{\overline{P}}^i(\varphi, \psi, \alpha, t) = \sum_{l=0}^4 \overline{\overline{P}}_{l/2}^i \varepsilon^{l/2}$ (призначені для усунення нев'язок в околах $z = 0$ та $z = H$) знаходимо в результаті проведення стандартної процедури “прирівнювання” аналогічно до [18, 28].

2.3. Математичне моделювання процесу масоперенесення в тонкій трубці з врахуванням масообміну із зовнішнім середовищем через бічну поверхню

Як приклад ефективності застосування запропонованого підходу розв'язування крайових задач, також досліджено сингулярно збурений процес конвективно-дифузійного теплоперенесення у тонкій трубці з врахуванням теплообміну із зовнішнім середовищем та побудоване асимптотичне розв'язання розв'язку відповідної модельної задачі з умовами третього роду на бічній границі. Такі задачі, зокрема, виникають при моделюванні роботи ґрунтового теплообмінника.

Ґрунтові теплообмінники використовуються як джерело теплової енергії для геотермальних теплових насосів. Для збору тепла рідина (як правило, водний розчин етиленгліколю) тече по трубці, розташованій в ґрунті або водоймі, і надходить до теплового насосу. Відбір тепла з ґрунту у випадку горизонтального ґрунтового теплообмінника здійснюється за допомогою прокладеної в ґрунті системи пластикових труб на глибині 1,5–3 метра, а у випадку вертикального – за допомогою довгої U-подібної трубки або декількох таких трубок, що закладені у вертикальну свердловину [85, 91]. Оскільки конвективне перенесення тепла в ґрунтовому теплообміннику превалює над дифузійним, що приводить до появи малого параметра при відповідних членах рівняння конвективно-дифузійного теплоперенесення, ефективним є застосування асимптотичного методу.

Для побудови моделі та задання початкових та граничних умов ґрунтовий теплообмінник "розігнемо" в пряму. При цьому приймемо наступні припущення: структура ґрунту однорідна в радіальному та вертикальному напрямках; термічним опором стінки ґрунтового теплообмінника нехтуємо; втрати тиску на згинах трубки не враховуються.

В трубці довжиною l та радіусом r_0 ($r_0 \ll l$) розглядаємо конвективно-дифузійний процес поширення тепла, який описується наступною модельною задачею [25]:

$$\varepsilon \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right) - v(x) \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (2.47)$$

$$T(x, r, t) \Big|_{t=0} = T_0^0(x, r), \quad T(0, r, t) = T_*(r, t), \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial T(x, r, t)}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0, \quad \frac{\partial T(x, r, t)}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad \frac{\partial T(x, r, t)}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = -\alpha(T(x, r_0, t) - T_*(x, t)), \quad (2.49)$$

де $T(x, r, t)$ – температура в точці з координатою (x, r) відповідної області в момент часу t , $v(x)$ – швидкість конвективного перенесення, $\varepsilon = a$ – коефіцієнт теплопроводності теплоносія ($a = \lambda / (\rho c)$, λ – коефіцієнт теплопроводності, ρ – густина, c – теплоємність), ($0 < \varepsilon \ll v^* < v(x)$), $\alpha = \alpha^* \varepsilon^{-1/2}$ – коефіцієнт тепловіддачі, $T_*(x, t)$ – температура зовнішнього середовища. Вважаємо, що всі функції, які фігурують в умовах (2.48)–(2.49) є достатньо гладкими та узгодженими між собою вздовж ребер та кутових точок області $D = \{(x, r, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq r \leq r_0, 0 \leq t \leq t^* < \infty\}$.

Розв'язок одержано у вигляді асимптотичного ряду:

$$\begin{aligned} T(x, r, t) = & T_0(x, r, t) + \varepsilon T_1(x, r, t) + \dots + \varepsilon^n T_n(x, r, t) + \Pi_0(\xi, r, t) + \varepsilon \Pi_1(\xi, r, t) + \\ & + \dots + \varepsilon^{n+1} \Pi_{n+1}(\xi, r, t) + P_0(x, \mu, t) + \dots + \varepsilon^{i/2} P_{i/2}(x, \mu, t) + \dots + \varepsilon^{n+1} P_{n+1}(x, \mu, t) + \\ & + \Gamma_0(x, \eta, t) + \dots + \varepsilon^{i/2} \Gamma_{i/2}(x, \eta, t) + \dots + \varepsilon^{n+1} \Gamma_{n+1}(x, \eta, t) + R_n(x, r, t, \varepsilon), \end{aligned} \quad (2.50)$$

де $T_i(x, r, t)$ ($i = \overline{0, n}$) – члени відповідних регулярних частин асимптотики, $\Pi_i(\xi, r, t)$ ($i = \overline{0, n+1}$) – функції типу примежового шару в околі $x = l$ (поправки на виході фільтраційної течії із даного пласта G_z), $P_{i/2}(x, \mu, t)$, $\Gamma_{i/2}(x, \eta, t)$ ($i = \overline{0, 2n+1}$) – функції типу примежового шару відповідно в околах $r = 0$ та $r = r_0$, $\xi = (l - x) \cdot \varepsilon^{-1}$, $\mu = r \cdot \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$, $\eta = (r_0 - r) \cdot \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$ – відповідні регуляризуючі перетворення, R_n – залишковий член.

Підставляючи (2.50) в (2.47)–(2.49) та прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях ε отримуємо задачі для знаходження регулярних частин асимптотики:

$$\begin{cases} v(x)T_{i_x}(x,r,t) + T_{i_t}(x,r,t) = g_i(x,r,t), \\ T_i(x,r,0) = w_i^1(x,r), T_i(0,r,t) = w_i^2(r,t), \end{cases} \quad (2.51)$$

$$g_0(x,r,t) = 0, w_0^1(x,r) = T_0^0(x,r), w_0^2(r,t) = T_*(r,t), g_i(x,r,t) = T_{i-1,xx}(x,r,t) + \\ + T_{i-1,rr}(x,r,t) + \frac{1}{r}T_{i-1,r}(x,r,t), w_i^1(x,r) = 0, w_i^2(r,t) = 0 \quad (i = \overline{1,n}).$$

Розв'язки цих задач, аналогічно до [28], отримуємо у вигляді:

$$T_0(x,r,t) = \begin{cases} T_0^0(f^{-1}(f(x)-t), r), & t < f(x), \\ T_*(r, t - f(x)), & t \geq f(x), \end{cases}$$

$$T_i(x,r,t) = \begin{cases} \int_0^t g_i(f^{-1}(f(x)-t+\tilde{t}), r, \tilde{t}) d\tilde{t}, & t < f(x), \\ \int_0^x \frac{g_i(\tilde{x}, r, f(\tilde{x})+t-f(x))}{v(\tilde{x})} d\tilde{x}, & t \geq f(x). \end{cases}$$

З метою задовольнити другу із крайових умов будується зовнішня примежова функція $\Pi(\xi, r, t) = \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \Pi_i(\xi, r, t)$ в околі $x=l$ таким чином, щоб функція $u(x, r, t)$ з точністю до $O(\varepsilon^{n+1})$ задовольняла як дане рівняння, так і всі крайові умови. Для цього вводиться заміна (розтяг) $\xi = \varepsilon^{-1}(l-x)$, $x = l - \varepsilon\xi$.

Врахувавши співвідношення: $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}(-\frac{1}{\varepsilon})$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$ та розклад функції $v(l - \xi\varepsilon)$ в ряд Тейлора в околі $x=l$, перепишемо оператор $L\Pi = \varepsilon\Delta\Pi - v(l - \varepsilon\xi)\Pi_x - \Pi_t$ у вигляді:

$$L\Pi = \varepsilon^{-1}\Pi_{\xi\xi} - \Pi_t + \varepsilon \left[\Pi_{rr} + \frac{1}{r}\Pi_r \right] + v(l - \varepsilon\xi)\varepsilon^{-1}\Pi_\xi.$$

Прирівнявши в рівності $L(\Pi_0 + \varepsilon\Pi_1 + \dots + \varepsilon^{n+1}\Pi_{n+1})=0$ коефіцієнти при однакових степенях ε , одержимо такі рівняння із відповідними умовами для визначення Π_i :

$$\begin{cases} \Pi_{i\xi\xi}(\xi, r, t) + v(l)\Pi_{i\xi}(\xi, r, t) = d_i(\xi, r, t), \\ \Pi_{i\xi}(0, r, t) = v_i(r, t), \Pi_i(\xi, r, t)|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \end{cases} \quad (2.52)$$

$$d_0(\xi, r, t) = 0, \quad d_i(\xi, r, t) = \Pi_{(i-1)t}(\xi, r, t) + \sum_{k=1}^i \frac{(-1)^{i-1}}{i!} \xi^i v^{(i)}(l) \Pi_{(k-i)\xi}(\xi, r, t) \quad (i = \overline{1, n+1}),$$

$$v_i(r, t) = -T_{i\xi}(l, r, t) \quad (i = \overline{0, n}), \quad v_{n+1}(r, t) = 0.$$

Розв'язавши їх, отримаємо:

$$\begin{aligned} \Pi_0(\xi, r, t) &= \frac{T_{0\xi}(l, r, t)}{v(l)} e^{-v(l)\xi}, \\ \Pi_1(\xi, r, t) &= \left(\frac{v'(l)T_{0\xi}(l, y, t)}{v^3(l)} - \frac{T_{0\xi t}(l, y, t)}{v^2(l)} + \frac{T_{0\xi}(l, r, t)}{v(l)} \right) e^{-v(l)\xi} + \\ &+ \left(\frac{v'(l)T_{0\xi}(l, r, t)}{2v(l)} \xi^2 + \frac{v'(l)T_{0\xi}(l, r, t)}{v^2(l)} \xi - \frac{T_{0\xi t}(l, r, t)}{v^2(l)} \xi \right) e^{-v(l)\xi}. \end{aligned}$$

З метою задовольнити другу і третю з умов (2.49) будуються зовнішні примежові функції $P = \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} P_{i/2}(x, \mu, t)$ та $\Gamma = \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \Gamma_{i/2}(x, \eta, t)$ відповідно.

Для цього вводять заміни $\mu = r \cdot \varepsilon^{-1/2}$ та $\eta = (r_0 - r) \cdot \varepsilon^{-1/2}$. Задачі для знаходження цих функцій отримуються аналогічно до того, як це було зроблено для примежової функції Π :

$$\begin{cases} P_{i/2t}(x, \mu, t) = P_{i/2\mu\mu}(x, \mu, t) - v(x)P_{i/2x}(x, \mu, t) + \gamma_{i/2}^1(x, \mu, t), \\ P_{i/2}(x, \mu, 0) = 0, P_{i/2}(0, \mu, t) = 0, P_{i/2,\mu}(x, 0, t) = \mathcal{G}_{i/2}^1(x, t), P_{i/2}(x, \mu, t) \Big|_{\mu \rightarrow \infty} = 0, \end{cases} \quad (2.53)$$

$$\text{де } \gamma_0^1(x, \mu, t) = 0, \quad \gamma_{\frac{1}{2}}^1(x, \mu, t) = 0, \quad \gamma_{\frac{i}{2}}^1(x, \mu, t) = -P_{\left(\frac{i-1}{2}\right)xx}(x, \mu, t) - \frac{1}{\mu} P_{\left(\frac{i-1}{2}\right)\mu}(x, \mu, t),$$

$$i = \overline{2, 2n+1}, \quad \mathcal{G}_{\frac{i}{2}}^1(x, t) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } i \text{ непарне,} \\ -T_{\frac{i}{2}}(x, 0, t), \text{ якщо } i \text{ парне; } \mathcal{G}_{n+1}^1(x, t) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{i/2t}(x, \eta, t) = \Gamma_{i/2\eta\eta}(x, \eta, t) - v(x)\Gamma_{i/2x}(x, \eta, t) + \gamma_{i/2}^2(x, \eta, t), \\ \Gamma_{i/2}(x, \eta, 0) = 0, \Gamma_{i/2}(0, \eta, t) = 0, \Gamma_{i/2,\eta}(x, 0, t) = \mathcal{G}_{i/2}^2(x, t), \Gamma_{i/2,\eta}(x, \eta, t) \Big|_{\eta \rightarrow \infty} = 0, \end{cases} \quad (2.54)$$

$$\text{де } \gamma_0^2(x, \eta, t) = 0, \quad \gamma_{\frac{1}{2}}^2(x, \eta, t) = \frac{1}{r_0} \Gamma_{0\eta}(x, \eta, t), \quad \gamma_{\frac{i}{2}}^2(x, \eta, t) = \sum_{k=1}^i \frac{(-1)^k \mu^k}{r_0^{k+1}} \Gamma_{\left(\frac{i-k}{2}\right)\eta}(x, \eta, t) -$$

$$-\Gamma_{\left(\frac{i-1}{2}\right)xx}(x, \eta, t), \quad i = \overline{2, 2n+1}, \quad \mathcal{G}_0^2(x, t) = \alpha^*(u_0(x, r_0, t) + \Gamma_0(x, 0, t) - T_*^*(x, t)) - T_{0\eta}(x, r_0, t),$$

$$\mathcal{G}_{\frac{i}{2}}^2(x,t) = \begin{cases} \alpha^*(\Gamma_{\frac{i}{2}}(x,0,t)), \text{ якщо } i \text{ непарне,} \\ \alpha^*(T_{\frac{i}{2}}(x,r_0,t) + \Gamma_{\frac{i}{2}}(x,0,t)) - T_{\frac{i}{2}}(x,r_0,t), i \text{ парне;} \end{cases} \quad \mathcal{G}_{n+1}^2(x,t) = \alpha\Gamma_{n+1}(x,0,t).$$

Наведемо схему знаходження поправки $\Gamma_0(x,\eta,t)$. Введемо в області $\{(x,\eta,t): 0 \leq x \leq l, 0 \leq \eta \leq r_0/\sqrt{\varepsilon}, 0 \leq t \leq t^*\}$ рівномірну сітку $\{(x_j, \eta_m, t_k): x_j = j \cdot \Delta x; \eta_m = m \cdot \Delta \eta; t_k = k \cdot \Delta t\}$, де $\Delta x = l/N, \Delta \eta = r_0/(M\sqrt{\varepsilon}), \Delta t = t^*/K, j = \overline{1, N}, m = \overline{1, M}, k = \overline{1, K}$. Після чого застосуємо до задачі (2.54) апроксимацію за різницевою схемою:

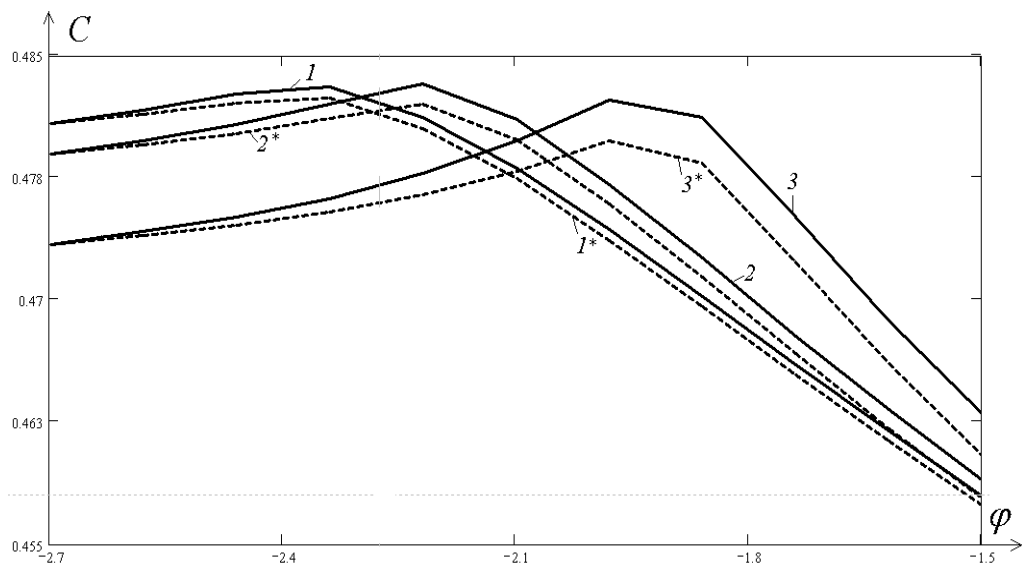
$$\begin{cases} \Gamma_{j,1}^k - (1 + \alpha\Delta\eta)\Gamma_{j,0}^k = -\delta(x_j, t_k), \Gamma_{j,M}^k - \Gamma_{j,M-1}^k = 0, \Gamma_{j,m}^0 = 0, \Gamma_{0,m}^k = 0, \\ \frac{\Gamma_{j,m}^k - \Gamma_{j,m}^{k-1}}{\Delta t} = \frac{\Gamma_{j,m+1}^k - 2\Gamma_{j,m}^k + \Gamma_{j,m-1}^k}{(\Delta\eta)^2} - v(x_j) \frac{\Gamma_{j,m}^k - \Gamma_{j-1,m}^k}{\Delta x}, \end{cases}$$

де $\Gamma_{j,m}^k = \Gamma_0(x_j, \eta_m, t_k)$, $\delta(x_j, t_k) = \Delta\eta \alpha^*(T_0(x_j, r_0, t_k) - T^*(x_j, t_k)) - T_{0\eta}(x_j, r_0, t_k)$, $j = \overline{1, N}, m = \overline{1, M}, k = \overline{1, K}$.

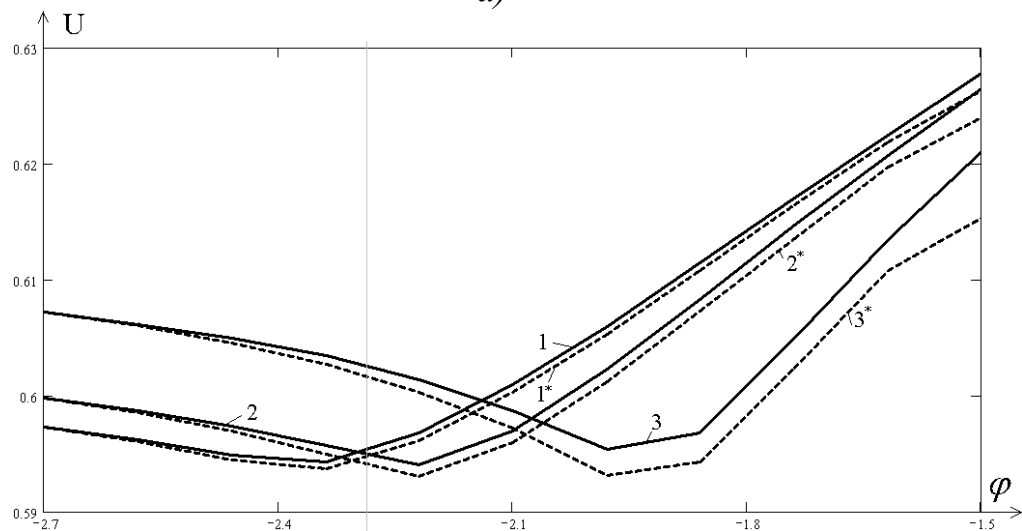
2.4. Результати числових експериментів

Наведемо результати розрахунку процесу типу “конвекція-дифузія” на ідеальному фільтраційному фоні, породженому двома особливими точками $z_1=0$ та $z_2=4$ (відповідно витік та втік однакових інтенсивностей $Q_0=2\pi$), комплексний потенціал якого – $w=(Q_0/2\pi) \cdot \ln((z-z_1)/(z-z_2))$, при $\varphi_*=-2.7$, $\varphi^*=-1.5$, $AD=\{z:\psi(x,y)=0\}$, $BC=\{z:\psi(x,y)=2\pi\}$. На рис. 2.1,а зображено рівномірну сітку області комплексного потенціалу G_w , а на рис. 2.1,а – відповідну динамічну сітку в G_z : $\varphi(x,y)=\overline{\varphi}_i = \varphi_* + ((\varphi^* - \varphi_*) \cdot i)/10$, $\psi(x,y)=\overline{\psi}_j = (Q_* \cdot j)/20$, $i=\overline{0,10}$, $j=\overline{0,20}$, величину швидкості фільтрації $v = \left((dz/dw)(\overline{dz/dw}) \right)^{-1/2}$ у вузлах (φ_i, ψ_j) , та лінії фронту конвективного переносу $f(\varphi, \psi) = t_k$, $k=\overline{1,4}$ при $t_1=0.035$, $t_2=1.098$, $t_3=0.213$, $t_4=0.432$, (криві 1-4 відповідно) [27].

Розподіли концентрацій $C(\varphi, \psi, t)$, $U(\varphi, \psi, t)$, $H(\varphi, \psi, t)$, $N(\varphi, \psi, t)$ розчинних речовин при $\varepsilon=10^{-3}$, $k^*=10$, $d_1=1$, $d_2=2$, $d_3=1$, $d_4=1$, $C_0^0(\varphi, \psi)=0.4+(1/4)\cdot\sin^2(\psi)\cdot(3+(\varphi+2.7)^2)^{-1}$, $U_0^0(\varphi, \psi)=0.7-(1/3)\cdot\cos^2(\psi+\pi/2)\times(3+(\varphi+2.7)^2)^{-1}$, $H_0^0(\varphi, \psi)=0.5+\sin(\psi+\pi/6)\cdot(3+(\varphi+2.7)^2)^{-1}$, $N_0^0(\varphi, \psi)=0.2+\sin(\psi+\pi/6)\cdot 10^{-1}\cdot(3+(\varphi+2.7)^2)^{-1}$, $C_*(\psi, t)=0.4+(1/4)\cdot\sin^2(\psi)\cdot e^{-t}\cdot 3^{-1}$, $U_*(\psi, t)=0.7-(1/3)\cdot\cos^2(\psi+\pi/2)\cdot e^{-t}\cdot 3^{-1}$, $H_*(\psi, t)=0.5+\sin(\psi+\pi/6)\cdot e^{-t}\cdot 3^{-1}$, $N_*(\psi, t)=0.2+\sin(\psi+\pi/6)\cdot e^{-t}\cdot 30^{-1}$, $C^*(\psi, t)=0.4+(1/4)\sin^2(\psi)\cdot e^{-2t}(3+(-1.5+2.7)^2)^{-1}$, $U^*(\psi, t)=0.7-(1/3)\cos^2(\psi+\pi/2)\cdot e^{-2t}(3+(-1.5+2.7)^2)^{-1}$, $H^*(\psi, t)=0.5+\sin(\psi+\pi/6)\times e^{-2t}(3+(-1.5+2.7)^2)^{-1}$, $N^*(\psi, t)=0.2+\sin(\psi+\pi/6)\cdot 10^{-1}\cdot e^{-2t}(3+(-1.5+2.7)^2)^{-1}$ зображено на рис. 2.3.



a)



б)

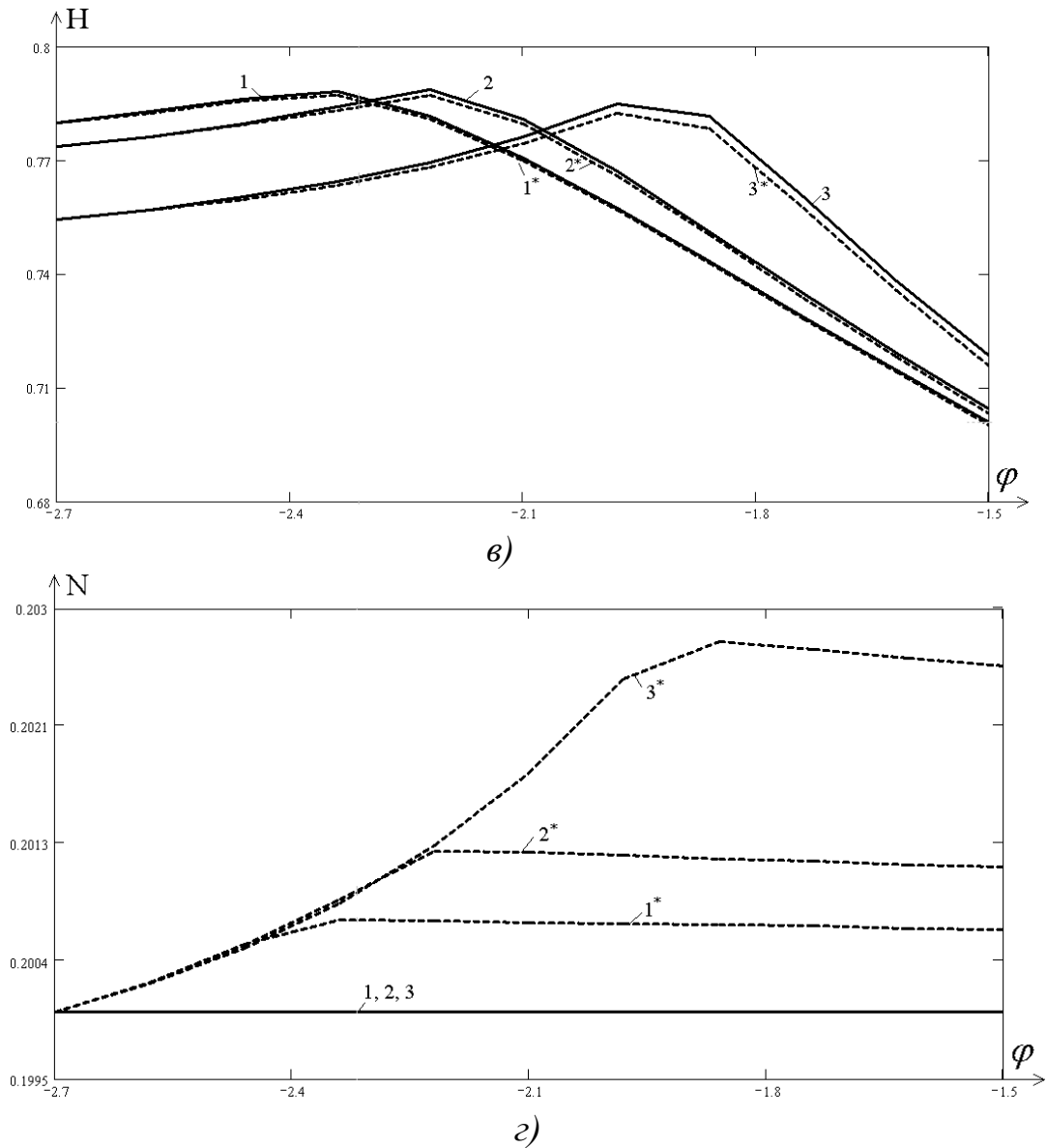


Рис.2.3. Вплив дифузійних поправок на розподіл концентрації забруднюючих речовин

Так на рис. 2.3 зображено регулярні частини C_0 , $C_0 + \varepsilon C_1$ (а), U_0 , $U_0 + \varepsilon U_1$, (б) H_0 , $H_0 + \varepsilon H_1$ (в) та N_0 , $N_0 + \varepsilon N_1$ (г) (криві 1–3 та 1*–3* відповідно в моменти часу $t_1=0.0305$, $t_2=0.0537$, $t_3=0.1265$ вздовж лінії течії $\psi=1.57079$) розв'язку поставленої задачі.

На рис.2.4 проілюстровано залежність розподілу концентрації розчинної речовини C (а) та U (б) від коефіцієнта дифузії вздовж лінії течії $\psi = 0,9424$ в момент часу $t = 0.1265$ при $\varepsilon_1 = 0,01$, $\varepsilon_2 = 0,05$, $\varepsilon_3 = 0,075$, $\varepsilon_4 = 0,1$ (криві 1-4 відповідно).

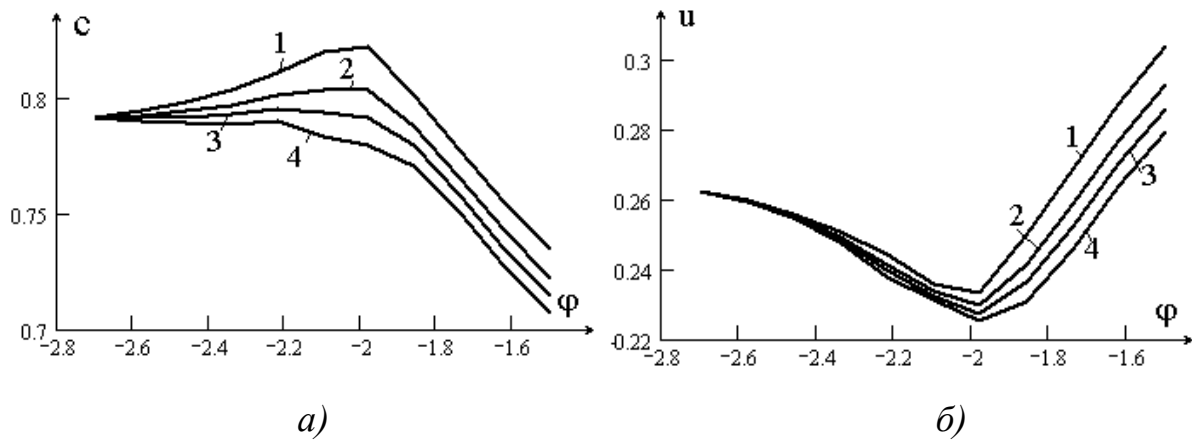


Рис.2.4. Залежність розподілу концентрації розчинної речовини від коефіцієнта дифузії

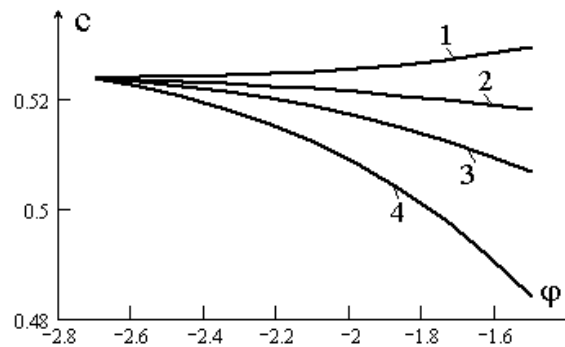


Рис.2.5. Вплив масообміну на розподіл концентрації C

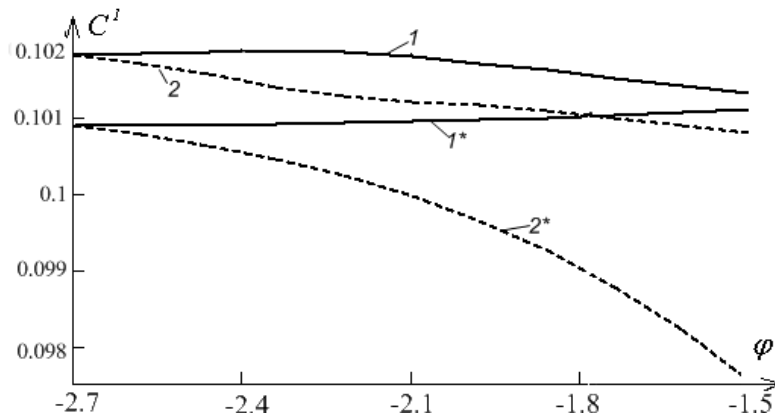
Вплив масообміну на розподіл концентрації C (вздовж лінії течії $\psi = 2.513$ в момент часу $t = 0.37$) проілюстровано на рис. 2.5 при $\varepsilon = 0.01$, $k_1^* = 0, 5, 10, 20$ (криві 1-4 відповідно).

Наведемо результати розрахунку розглянутого в пункті 2.2.1 процесу на тому ж ідеальному фільтраційному фоні.

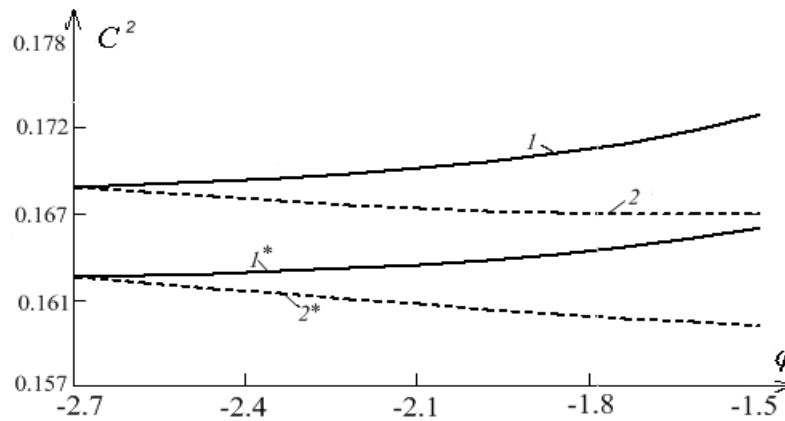
На рис. 2.6 зображено розподіли концентрацій $C^1(\varphi, \psi, t)$, $C^2(\varphi, \psi, t)$, $C^3(\varphi, \psi, t)$ розчинних речовин при: $C_{1,0}^0(\varphi, \psi) = 0.1 + (1/50)\exp(-\psi/2)(3 + (\varphi + 2.7)^2)^{-1}$, $C_{2,0}^0(\varphi, \psi) = 0.15 - (1/10)\cos(\psi)(3 + (\varphi + 2.7)^2)^{-1}$, $C_{3,0}^0(\varphi, \psi) = 0.01 + (1/50)\sin^2(\psi) \times (3 + (\varphi + 2.7)^2)^{-1}$, $T_0^0(\varphi, \psi) = 10$, $C_{1*}(\psi, t) = 0.1 + (1/50)\exp(-\psi/2)\exp(-t)/3$, $C_{2*}(\psi, t) = 0.15 - (1/10)(\exp(-t)/3)\cos(\psi)$, $T^*(\varphi, \psi) = 10$, $C_{3*}(\psi, t) = (1/50)\sin^2(\psi) \times \exp(-t)/3 + 0.01$, $T_*(\varphi, \psi) = 10$, $C_1^*(\psi, t) = 0.1 + (1/50)\exp(-\psi/2)\exp(-2t) \times$

$$\times (3 + (-1.5 + 2.7)^2)^{-1}, \quad C_2^*(\psi, t) = 0.15 - (1/10) \cdot \cos(\psi) \cdot \exp(-2t) \cdot (3 + (-1.5 + 2.7)^2)^{-1},$$

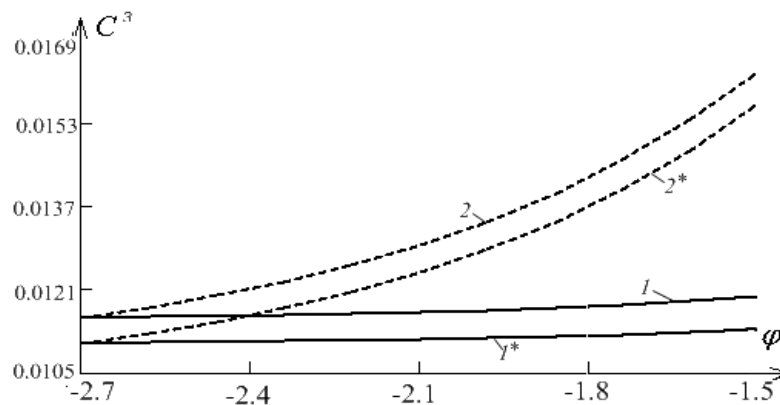
$$C_3^*(\psi, t) = 0.01 + (1/50) \sin^2(\psi) \cdot \exp(-2t) \cdot (3 + (-1.5 + 2.7)^2)^{-1}.$$



a)



б)



в)

Рис. 2.6. Вплив дифузії та масообміну на розподіл концентрації розчинних речовин

Так на рис. 2.6,а зображено регулярні частини $C_{1,0}$ та $C_{1,0} + \varepsilon C_{1,1}$ при $k(T) = 10^2 e^{\frac{T-10}{10}}$ (криві 1-2 та 1*-2* в моменти часу $t=0.03$ та $t=0.74$

відповідно) розв'язку поставленої задачі при $\varepsilon = 0.01$, $d_1(T) = 10(1/T)(1 + \exp(T - 10))$, $k^* = 2$ вздовж лінії $\psi = 2.51$. Аналогічно інтерпретуються результати для речовин C_2, C_3 на рис. 2.6,б та рис. 2.6,в.

На рис. 2.7 зображено регулярні частини $C_{1,0}$ (крива 1), $C_{2,0} + \varepsilon C_{2,1}$ при $k(T) = (1/T)(100 + \exp(T - 10))$, $k(T) = 10(1/T)(1 + \exp(T - 10))$, $k(T) = (1/T) \times (1 + \exp(T - 10))$ (криві 2-4 відповідно) розв'язку поставленої задачі при $\varepsilon = 0.01$, $t = 0.37$, $k^* = 2$, $\psi = 2.51$.

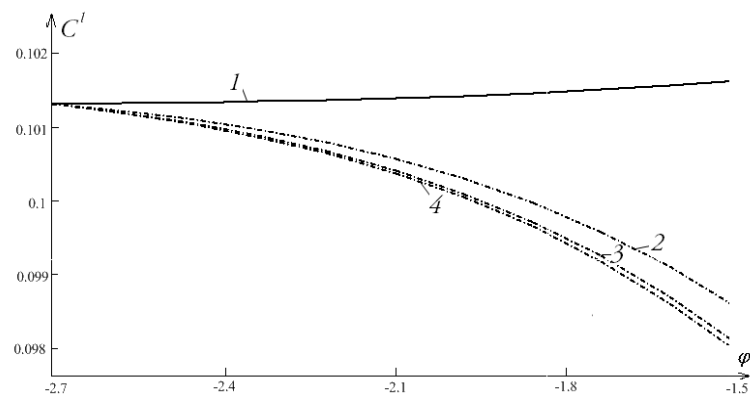


Рис. 2.7. Вплив швидкості хімічної реакції $\varepsilon k(T)$ на розподіл концентрації розчинної речовини

Збіжність асимптотичного розвинення розв'язку до точного проілюстровано на тестових прикладах.

Так для крайової задачі: $\varepsilon \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{\partial C}{\partial t}$, $C(x, t)|_{t=0} = w(x)$,

$C(x, t)|_{x=0} = C(x, t)|_{x=l} = 0$, точний розв'язок якої має вигляд [38]:

$$C(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 \varepsilon t}{l^2}} \sin \frac{n \pi x}{l}, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l w(\tilde{x}) \sin \frac{n \pi \tilde{x}}{l} d\tilde{x},$$

асимптотичне наближення розв'язку з точністю $O(\varepsilon^n)$ знайдено у вигляді ряду:

$$C_\varepsilon(x, t) = C_0(x, t) + \varepsilon C_1(x, t) + \dots + \varepsilon^n C_n(x, t) + \underline{P}_0(\xi, t) + \varepsilon^{1/2} \underline{P}_{1/2}(\xi, t) + \dots + \bar{P}_0(\zeta, t) + \varepsilon^{1/2} \bar{P}_{1/2}(\zeta, t) + \dots + r(x, t, \varepsilon), \quad \xi = x/\sqrt{\varepsilon}, \quad \zeta = (l-x)/\sqrt{\varepsilon}.$$

Регулярні складові розв'язку $C_0(x, t)$ та $C_1(x, t)$ знаходиться шляхом розв'язання задач:

$$\begin{cases} \frac{\partial C_0(x,t)}{\partial t} = 0, \\ C_0(x,0) = w(x), \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial C_i(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 C_i(x,t)}{\partial x^2}, \\ C_0(x,0) = 0, i = \overline{1, n} \end{cases}$$

у вигляді $C_0(x,t) = w(x)$, $C_1(x,t) = w''(x)t$, ...

На рис 2.8,а зображено графіки точного розв'язку (суцільна крива) та асимптотичного (пунктирна крива) при $w(x) = 0.2\sin(\pi x)$, $l=1$, $\varepsilon = 10^{-4}$ при значеннях безрозмірного часу $t=2$, $t=3$, $t=4$ (1–3 відповідно).

Для задачі: $\varepsilon \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + g(x,t) = \frac{\partial C}{\partial t}$, $C(x,t)|_{t=0} = 0$, точний розв'язок якої

має вигляд $C(x,t) = \int_0^{t+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon(t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\varepsilon(t-\tau)}} g(\xi, \tau) d\xi d\tau$, асимптотичне

наближення розв'язку з точністю $O(\varepsilon^n)$ представлено у вигляді ряду:

$$C_\varepsilon(x,t) = C_0(x,t) + \varepsilon C_1(x,t) + \dots + \varepsilon^n C_n(x,t) + r(x,t).$$

Після підстановки і розв'язання відповідних задач для складових, отримано:

$$u_0(x,t) = \int_0^t g(x, \tilde{t}) d\tilde{t}, \quad u_i(x,t) = \int_0^t u_{(i-1),xx}(x, \tilde{t}) d\tilde{t}, \quad i = \overline{1, n}.$$

На рис 2.8,б зображено графіки точного розв'язку (суцільна крива) та асимптотичного (пунктирна) при $\varepsilon = 10^{-4}$, $g(x,t) = \frac{t}{t+1} \sin(x)$, при $\begin{cases} 0 < t < 10, \\ 0 < x < \pi, \end{cases}$

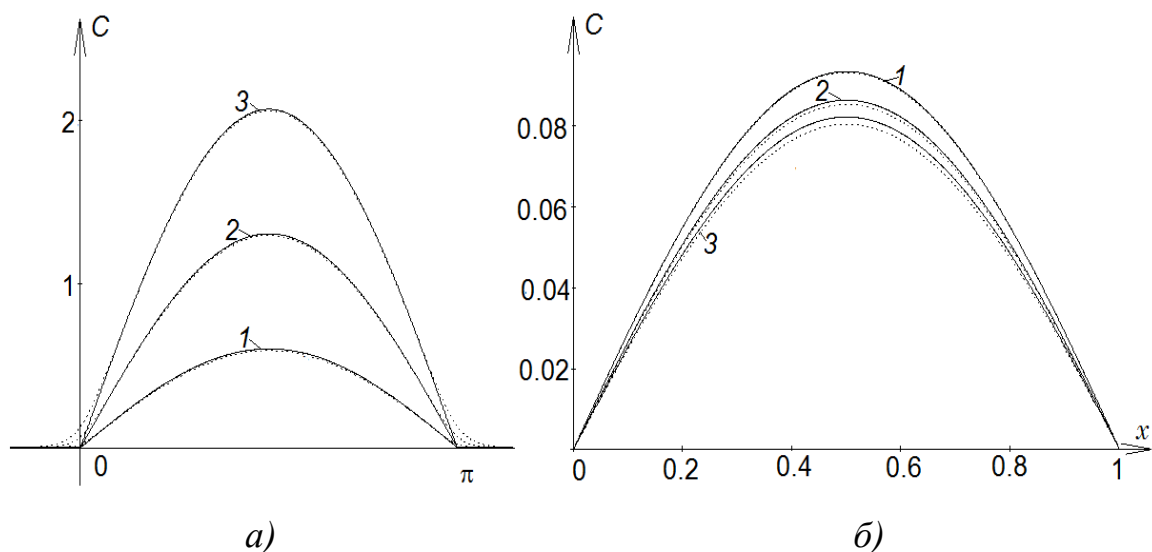


Рис. 2.8. Порівняння точного та наближеного розв'язків

Результати комп'ютерного моделювання процесу, описаного в пункті 2.3, представлені на рис. 2.9 – рис. 2.14. Вважаємо, що трубка ґрунтового теплообмінника радіусом $r_0 = 0,02 \text{ м}$ заповнена водним розчином етиленгліколя, властивості якого наступні: коефіцієнт теплопровідності $\lambda = 0.43 \text{ Вт/м}\cdot\text{с}$, густина $\rho = 1060 \text{ кг/м}^3$, теплоємність $c = 3.31 \text{ кДж/кг}$. Отже, $\varepsilon = a = 1.2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$. Швидкість перенесення теплоносія в трубці теплообмінника $v(x) = 1 \text{ м/с}$. Прийнято, що початковий розподіл температури в трубці $T_0^0(x, r) = 0^\circ\text{C}$, а на вході поступає теплоносій з температурою $T_*(r, t) = 0^\circ\text{C}$.

У випадку моделювання роботи горизонтального теплообмінника, розташованого нижче глибини промерзання ґрунту, розрахунки проводились за температури ґрунту $T_*^* = 6^\circ\text{C}$. Зростання температури $T(x, r_0, t)$ горизонтального теплообмінника довжиною $l = 100 \text{ м}$ за рахунок відбору ґрунтового тепла в моменти часу 10 с , 20 с , 40 с , 50 с , 70 с та 100 с (криві 1–6 відповідно) при $\alpha = 10 \text{ Вт/м}^2$ (сухий піщаний ґрунт) зображено на рис. 2.9.

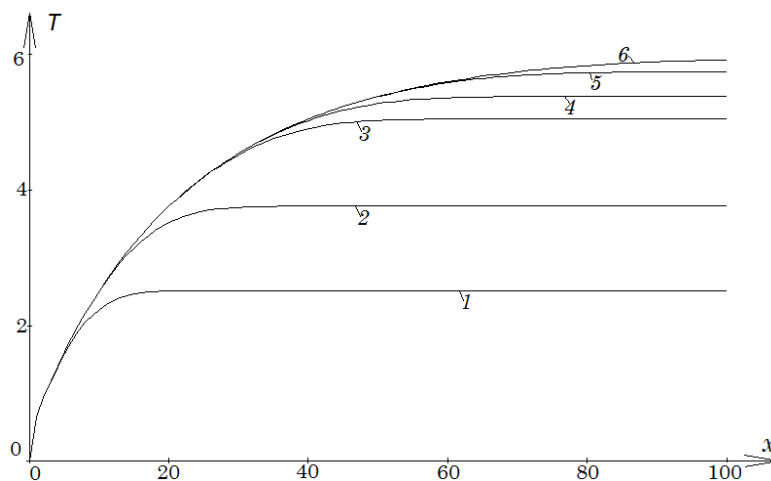


Рис. 2.9. Розподіл температури на поверхні трубки горизонтального теплообмінника

На рис 2.10. проілюстровано розподіл температури вздовж радіальної координати трубки теплообмінника на виході в моменти часу $t = 2 \text{ с}$ (рис.

2.10,а) та $t = 40$ с (рис. 2.10,б) для різних типів ґрунтів, яким відповідають різні коефіцієнти тепловіддачі: $\alpha_1 = 10-15$ $Вт/м^2$ – сухий піщаний ґрунт, $\alpha_2 = 20-25$ $Вт/м^2$ – сухий глинястий ґрунт, $\alpha_3 = 30-35$ $Вт/м^2$ – ґрунт з ґрунтовими водами.

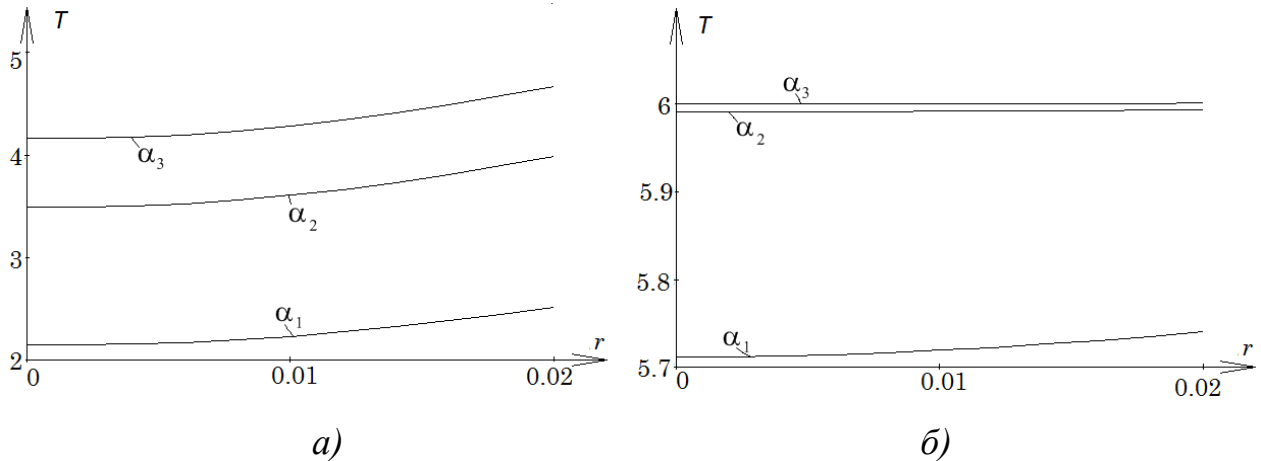


Рис. 2.10. Залежність розподілу температури від коефіцієнту тепловіддачі

На рис 2.10 проілюстровано розподіл температури вздовж радіальної координати трубки теплообмінника на виході в моменти часу $t = 2$ с (рис. 2.10,а) та $t = 40$ с (рис. 2.10,б) для різних типів ґрунтів, яким відповідають різні коефіцієнти тепловіддачі: $\alpha_1 = 10-15$ $Вт/м^2$ – сухий піщаний ґрунт, $\alpha_2 = 20-25$ $Вт/м^2$ – сухий глинястий ґрунт, $\alpha_3 = 30-35$ $Вт/м^2$ – ґрунт з ґрунтовими водами.

Розподіл температури на поверхні трубки теплообмінника довжиною $l = 100$ м (рис. 2.11,а) та $l = 200$ м (рис. 2.11,б) для різних типів ґрунтів зображено на рис 2.11. Як видно з графіків, збільшення приросту теплової енергії є суттєвим на ділянці трубки до 100–120 м в залежності від типу ґрунту (чим вища теплопровідність ґрунту, тим меншої довжини теплообмінник потрібно використовувати). В ґрунті з ґрунтовими водами теплоносій в трубці встигає прогрітись при довжині теплообмінника 50–60 м.

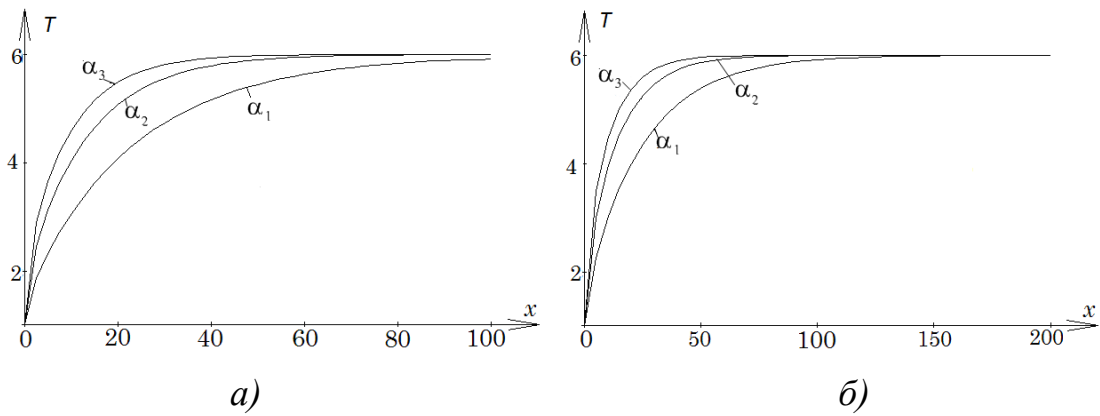


Рис. 2.11. Розподіл температури в трубках різної довжини

У випадку моделювання роботи вертикального теплообмінника необхідно задати співвідношення для визначення температури ґрунту за глибиною в конкретний момент часу, як це зроблено наприклад в [85, 91]. Прийmemo, що функція залежності температури ґрунту від глибини описується законом $T_*^*(x) = \beta_0 + \beta_1 x(l-x) + \beta_3 x^3(l-x)^3 + \dots + \beta_{2i+1} (x(l-x))^{(2i+1)} + \dots$, де β_i визначаються шляхом апроксимації експериментальних даних вимірювання температури ґрунту.

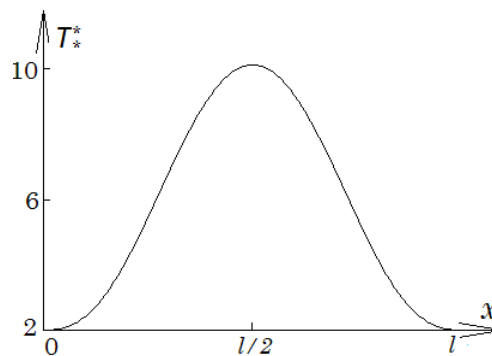


Рис. 2.12. Функція визначення температури ґрунту за глибиною

Розрахунки проводились при таких значеннях $\beta_0 = 2$, $\beta_1 = 2 \cdot 10^{-3}$, $\beta_3 = 2 \cdot 10^{-5}$, $\beta_5 = \dots = \beta_{2i+1} = \dots = 0$ (рис. 2.12), в припущенні відсутності теплообміну між частинами трубки, що розташовані поряд.

На рис. 2.13 показано розподіл температури $T(x, r_0, t)$ вертикального теплообмінника довжиною $l = 100$ м в моменти часу 10 с, 20 с, 40 с, 50 с, 70 с та 100 с (криві 1–6 відповідно) при $\alpha = 10$ ($\text{Вт}/\text{м}^2$).

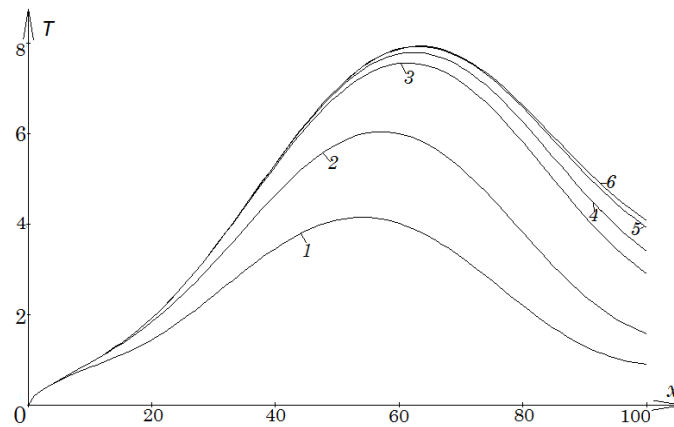


Рис. 2.13. Зростання температури на поверхні трубки вертикального теплообмінника

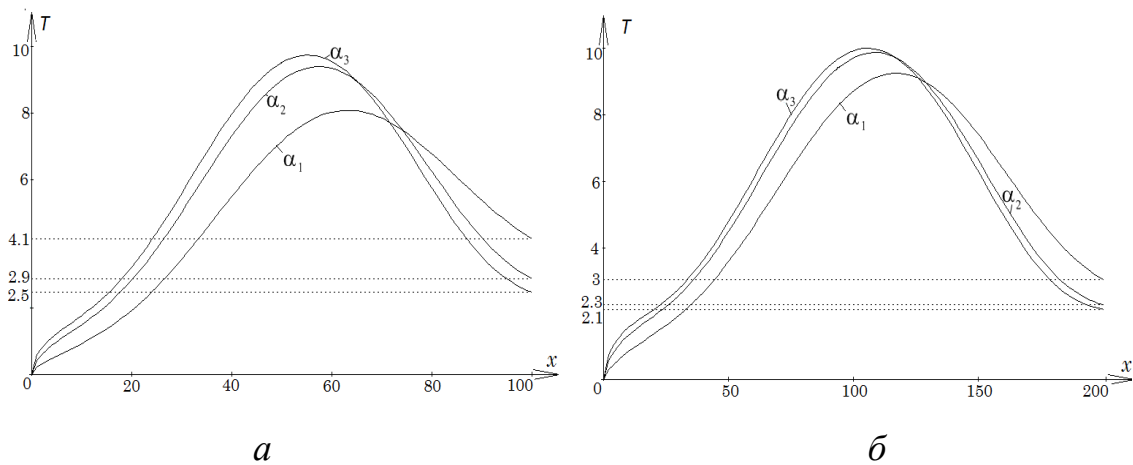


Рис. 2.14. Розподіл температури в трубках вертикального теплообмінника різної глибини

Якщо у випадку горизонтального теплообмінника високе значення тепловіддачі ґрунту дає більшу температуру теплоносія на виході, то у випадку ґрунтового теплообмінника вертикального типу кращі показники ефективності відбору ґрунтового тепла у теплообмінника меншої глибини (рис. 2.14.а), закладеного в ґрунт з меншою провідністю, оскільки при підйомі нагрітого на глибині теплоносія через холодні верхні шари ґрунту частина тепла віддається теплообмінником назад у зовнішнє середовище. Оскільки глибина проникнення сезонних коливань температури складає близько 10–15 м, ефективним вирішенням цієї проблеми може бути теплоізоляція трубки теплообмінника у верхніх шарах ґрунту.

2.5. Висновки до другого розділу

Узагальнено математичні моделі сингулярно збурених процесів конвективної дифузії в пористих середовищах на випадок дослідження відповідних багатокомпонентних неізотермічних процесів з урахуванням хімічної реакції між розчинними речовинами. Побудовано асимптотичне наближення розв'язків відповідних крайових задач, обґрунтованість яких забезпечується високим рівнем співпадання результатів числових експериментів та аналітичними розв'язками відповідних спеціальних типів модельних тестових задач. На основі отриманих числових результатів підтверджено прогнозовану інтенсифікацію дифузійних та масообмінних складових процесу зі збільшенням температури середовища. Це дає можливість контролювати вибір речовин, що візьмуть участь у реакції, а також оптимальної температури середовища з метою зменшення концентрації забруднюючої речовини на виході фільтраційної течії даної області.

Як приклад ефективності застосування запропонованого підходу розв'язування крайових задач, також досліджено сингулярно збурений процес конвективно-дифузійного теплоперенесення у тонкій трубці з врахуванням теплообміну із зовнішнім середовищем та побудоване асимптотичне розв'язання розв'язку відповідної модельної задачі з умовами третього роду на бічній границі. Такі задачі, зокрема, виникають при моделюванні роботи ґрунтового теплообмінника. Проведені числові експерименти дозволяють робити висновки про вплив параметрів теплообмінника, сезонної зміни температури ґрунту та його фізичних характеристик на ефективність відбору ґрунтового тепла. За результатами чисельних розрахунків, отримано, як і очікувалось, що ґрунти із вмістом води дозволяють отримати більший приріст теплової енергії порівняно із сухими піщаними та глинястими. Із збільшенням довжини трубки горизонтального теплообмінника відбувається приріст теплової енергії, але при перевищенні деякого критичного значення суттєво приросту не спостерігається, однак збільшуватимуться витрати електричної енергії на перекачування рідини по трубці.

РОЗДІЛ 3

МОДЕЛЮВАННЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ПРОЦЕСІВ КОНВЕКТИВНО-ДИFUЗІЙНО-АДСОРБЦІЙНОГО МАСОПЕРЕНОСЕННЯ В МІКРОПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Моделювання процесів масоперенесення в мікропористих середовищах є перспективним напрямком досліджень стосовно використання фільтрів з мікропористим завантаженням для очищення забруднених технологічних потоків. Такі матеріали забезпечують швидку фільтрацію через явно виражені порожнини. Підвищена пропускна здатність біпористих матеріалів дає можливість скоротити витрату енергії і зменшити розміри пристроїв для очищення води, а їх використання дозволить створювати відносно недорогі, швидкі і ефективні методики очистки зон забруднення. Здатність контролю і спрямованого дизайну мікропористих матеріалів дає можливість збільшення ефективності їх використання. Одним з прикладів таких матеріалів є мікропористі вуглеводні матеріали, які ефективно поглинають органічні речовини з водних розчинів, а також піддаються регенерації, при чому сорбент не втрачає своїх властивостей, а продуктами регенерації є низькомолекулярні нетоксичні сполуки (CO_2 , H_2O , N_2).

Ще одним типовими середовищами частинок мікропористої структури є цеоліти. Вони являють собою алюмосилікати, у складі яких містяться лужноземельні метали, і відрізняються строго регулярною структурою пор, що за звичайних температурних умовах заповнені молекулами води. Якщо з цеоліту видалити воду, то його пори можуть бути знову заповнені водою або іншою речовиною, що й зумовлює їх широке використання в процесах осушування, очищення і розділення речовин. Поглинання речовини цеолітом відбувається в адсорбційних порожнинах. Проте, не всі речовини можуть проникати в ці порожнини, відповідно і поглинатися в них. Цеоліти є молекулярними ситами і часто використовуються для розділення речовин на основі не лише вибірковості адсорбції, а й різниці в розмірах і формі молекул [115].

3.1. Асимптотичний метод розв'язання модельних сингулярно збурених задач процесу однокомпонентного масоперенесення в біпористих середовищах

Розглянемо прикладну задачу прогнозування поширення забруднюючої речовини в біпористому середовищі, тобто середовищі, частинки скелету якого самі володіють розвиненою пористою структурою і за рахунок цього адсорбують забруднення з потоку. Процес однокомпонентного конвективно-адсорбційно-дифузійного масоперенесення в однорідному середовищі частинок мікропористої структури (рис. 3.1) описується системою диференціальних рівнянь вигляду (не зменшуючи загальності, розглянуто одновимірний випадок):

$$\sigma_1 \frac{\partial C}{\partial t} = D_* \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - v(x) \frac{\partial C}{\partial x} - D_*^* \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right) \Big|_{r=R}, \quad (3.1)$$

$$\sigma_2 \frac{\partial U}{\partial t} = D^* \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right), \quad (3.2)$$

$$C(x,t) \Big|_{t=0} = 0, \quad U(x,r,t) \Big|_{t=0} = 0, \quad (3.3)$$

$$C(x,t) \Big|_{x=0} = C_*(t), \quad U(x,r,t) \Big|_{r=R} = k \cdot C(x,t), \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial C(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0, \quad \frac{\partial U(x,r,t)}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad (3.5)$$

де $C(x,t)$ – концентрація в міжчастинковому просторі, $U(x,r,t)$ – концентрація в мікропористих частинках, l – довжина мікропористого середовища (фільтра), R – радіус частинки, $k > 0$ – константа адсорбційної рівноваги.

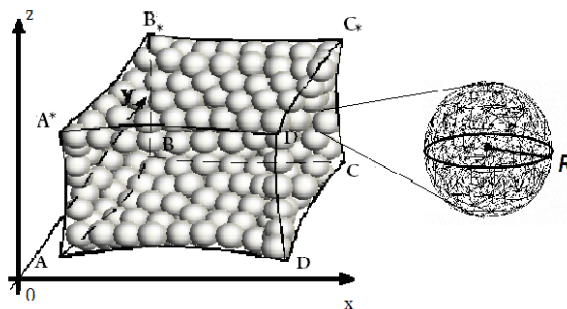


Рис. 3.1. Мікропористе середовище

Коефіцієнти D^* та D_* відповідно характеризують швидкість протікання процесів дифузійного масоперенесення в міжчастинковому просторі та в порах частинок, а коефіцієнт D_*^* характеризує вплив внутрішньочастинкового дифузійного переносу на міжчастинковий. Вважаємо, що всі функції, які фігурують в умовах (3.3)–(3.5) є достатньо гладкими та узгодженими між собою вздовж ребер та кутових точок даної області.

Введемо безрозмірні величини наступним чином $\tilde{x} = x/l$, $\tilde{r} = r/R$, $\tilde{t} = t \cdot v_{xp} / l \cdot \sigma_1$, отримаємо:

$$\frac{\partial C}{\partial \tilde{t}} = \frac{D_*}{v_{xp} \cdot l} \frac{\partial^2 C}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{v(\tilde{x})}{v_{xp}} \frac{\partial C}{\partial \tilde{x}} - \frac{D_*^* \cdot l}{v_{xp} \cdot R} \left(\frac{\partial U}{\partial \tilde{r}} \right) \Big|_{\tilde{r}=1},$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tilde{t}} = \frac{l \cdot D^*}{\sigma_2 \cdot v_{xp} \cdot R^2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{2}{\tilde{r}} \frac{\partial U}{\partial \tilde{r}} \right),$$

$$\frac{D_*}{v_{xp} \cdot l} = \left[\frac{m^2 / \varrho \partial \partial}{(m / \varrho \partial \partial) \cdot m} \right] = \left[\frac{m^2 / \varrho \partial \partial}{m^2 / \varrho \partial \partial} \right], \quad \frac{D_*^* \cdot l}{v_{xp} \cdot R} = \left[\frac{(m / \varrho \partial \partial) \cdot m}{(m / \varrho \partial \partial) \cdot m} \right],$$

$$\frac{l \cdot D^*}{\sigma_2 \cdot v_{xp} \cdot R^2} = \left[\frac{m \cdot (m^2 / \varrho \partial \partial)}{(m / \varrho \partial \partial) \cdot m^2} \right] = \left[\frac{m^3 / \varrho \partial \partial}{m^3 / \varrho \partial \partial} \right].$$

Розглядається випадок превалювання конвективної складової масоперенесення над дифузійною та масообмінною, тобто коли $\varepsilon = \frac{D_*}{v_{xp} \cdot l} = \frac{1}{Pe}$ є

малим параметром (Pe – число Пекле) ($v_{xp} \geq v(x) > v_* \gg \varepsilon > 0$). Два інших

параметри $\frac{D_*^* \cdot l}{v_{xp} \cdot R}$ та $\frac{l \cdot D^*}{v_{xp} \cdot R^2}$, взагалі кажучи, можуть бути довільними. Оскільки

$$D_*^* = \frac{3(1-\sigma_1)}{\sigma_1} \frac{D^*}{R} \quad [115], \quad \text{то, позначивши} \quad \mu = \frac{l \cdot D^*}{v_{xp} \cdot R^2}, \quad \text{отримаємо}$$

$$\frac{D_*^* \cdot l}{v_{xp} \cdot R} = \frac{3(1-\sigma_1)}{\sigma_1} \mu, \quad \text{де } \sigma_1 \text{ – пористість середовища (наприклад, для цеолітів}$$

становить близько 50-65%), σ_2 – пористість мікропористих частинок. Таким

чином, у випадку, коли $l \cdot D^* \ll v_{xp} \cdot R^2$, отримуємо систему з двома малими параметрами ε та μ . Далі оцінюємо відношення ε/μ . Взагалі кажучи, можливі різні випадки співвідношення цих параметрів: $\mu = \beta \cdot \varepsilon^\alpha$, де α – довільне дійсне число, β – додатне скінченне (не співмірне з даними параметрами) число. Зауважимо, що питання ідентифікації параметрів задач дифузії в біпористому середовищі, досліджено зокрема в [69, 152, 193]. Зокрема встановлено значення коефіцієнтів дифузії D^* та D_* наприклад, для бензену та гексану для деяких типів цеолітів, що є величинами порядку 10^{-5} та 10^{-15} m^2/god відповідно. За таких значень параметри ε та μ є величинами одного порядку.

Отже, перейшовши до безрозмірних величин, отримаємо

$$\frac{\partial C}{\partial \tilde{t}} = \varepsilon d_* \frac{\partial^2 C}{\partial \tilde{x}^2} - v(\tilde{x}) \frac{\partial C}{\partial \tilde{x}} - \varepsilon d_* \left(\frac{\partial U}{\partial \tilde{r}} \right) \Big|_{\tilde{r}=1}, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tilde{t}} = \varepsilon d_* \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{2}{\tilde{r}} \frac{\partial U}{\partial \tilde{r}} \right). \quad (3.7)$$

Асимптотичне наближення розв'язку задачі шукаємо у вигляді асимптотичних рядів [14] (повернемось до позначень змінних x, r, t , маючи на увазі, що це є обезрозмірені змінні):

$$C(x, t) = C_0(x, t) + \varepsilon C_1(x, t) + \dots + \varepsilon^n C_n(x, t) + \Pi_0(\xi, t) + \varepsilon \Pi_1(\xi, t) + \dots + \varepsilon^{n+1} \Pi_{n+1}(\xi, t) + R_n^1(x, t, \varepsilon), \quad (3.8)$$

$$U(x, r, t) = U_0(x, r, t) + \dots + \varepsilon^n U_n(x, r, t) + F_0(x, \rho, t) + \varepsilon^{1/2} F_{1/2}(x, \rho, t) + \dots + \varepsilon^{i/2} F_{i/2}(x, \rho, t) + \dots + \varepsilon^{n+1} F_{n+1}(x, \rho, t) + R_n^2(x, r, t, \varepsilon), \quad (3.9)$$

де $C_i(x, t)$, $U_i(x, r, t)$ ($i = \overline{0, n}$) – члени відповідних регулярних частин асимптотики, $\Pi_i(\xi, t)$ ($i = \overline{0, n+1}$), $F_{i/2}(x, \rho, t)$ ($i = \overline{0, 2n+1}$) – функції типу примежового шару в околах $x=1$ та $r=1$, $\xi = (l-x) \cdot \varepsilon^{-1}$ і $\rho = (1-r) \cdot \varepsilon^{-1/2}$ – відповідні регуляризуючі перетворення, R_n^1 , R_n^2 – залишкові члени.

Підставляючи (3.8), (3.9) в (3.6)–(3.7) та прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях ε отримуємо для кожного $i = \overline{0, n}$ такі задачі:

$$\begin{cases} \sigma_2 \frac{\partial}{\partial t} U_i(x, \rho, t) = g_i(x, \rho, t), \\ U_i(x, \rho, 0) = h_i(x, \rho), \end{cases} \quad (3.10)$$

де $g_0(x, \rho, t) = 0, h_0(x, \rho) = 0, g_i(x, \rho, t) = d^* \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} U_{i-1}(x, \rho, t) - (2/r) \frac{\partial}{\partial r} U_{i-1}(x, \rho, t) \right),$

$h_i(x, \rho) = 0 (i = \overline{1, n});$

$$\begin{cases} v(x) \frac{\partial}{\partial x} C_i(x, t) + \sigma_1 \frac{\partial}{\partial t} C_i(x, t) = u_i(x, t), \\ C_i(x, 0) = w_i^1(x), C_i(0, t) = w_i^2(t), \end{cases} \quad (3.11)$$

$u_0(x, t) = 0, w_i^1(x) = 0, w_i^2(t) = 0, w_0^1(x) = c_0^0(x), w_0^2(t) = c_*(t),$

$u_i(x, t) = d_* \frac{\partial^2}{\partial x^2} C_{i-1}(x, t) - d_*^* \left(\frac{\partial}{\partial r} U_{i-1}(x, 1, t) + \frac{\partial}{\partial r} F_{i-1}(x, 1, t) + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial r} F_{i-\frac{1}{2}}(x, 1, t) \right).$

Поправки $\Pi = \sum_{i=0}^{i+1} \varepsilon^i \Pi_i(\xi, t)$ та $F = \sum_{i=0}^{2n+2} \varepsilon^{\frac{i}{2}} F_i(x, \rho, t)$ будуються з метою

задовольнити відповідно другу з крайових умов (3.4) та умови (3.5).

Врахувавши співвідношення $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\frac{1}{\varepsilon} \right), \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}, \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left(-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right),$

$\frac{\partial^2}{\partial r^2} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2},$ а також розклад функцій $v(1 - \varepsilon \xi)$ та $\frac{2}{1 - \sqrt{\varepsilon} \rho}$ в ряди Тейлора в

околах $x=1$ та $r=1$ відповідно, отримаємо задачі для знаходження примежових функцій, аналогічно до [27]:

$$\begin{cases} d_* \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \Pi_i(\xi, t) + v(1) \frac{\partial}{\partial \xi} \Pi_i(\xi, t) = \mu_i(\xi, t), \\ \Pi_i(0, t) = \nu_i(t), \Pi_i(\xi, t) \Big|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \end{cases}$$

$\mu_0(\xi, t) = 0, \mu_i(t, \xi) = \sigma_1 \frac{\partial}{\partial t} \Pi_{i-1}(\xi, t) + v'(1) \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \Pi_{i-1}(\xi, t) - \frac{1}{2} v''(1) \xi^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \Pi_{i-2}(\xi, t) +$

$+ \dots + (-1)^i v^{(i)}(1) \xi^i \frac{\partial}{\partial \xi} \Pi_0(\xi, t)$ при $i = \overline{1, n+1}$, $v_i(t) = -C_i(1, t)$ при $i = \overline{0, n}$, $v_{n+1}(t) = 0$;

$$\begin{cases} \sigma_2 \frac{\partial}{\partial t} F_i(x, \rho, t) = d^* \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} F_i(x, \rho, t) + \gamma_i(x, \rho, t), \\ F_i(x, \rho, 0) = 0, F_i(x, 0, t) = \lambda_i(x, t), \left. \frac{\partial}{\partial \rho} F(x, \rho, t) \right|_{\rho \rightarrow \infty} = 0, \end{cases}$$

$\gamma_0(x, \rho, t) = 0$, $\gamma_i(x, \rho, t) = -d^* \sum_{m=1}^{2i} 2\rho^{m-1} \frac{\partial}{\partial \rho} F_{i-\frac{m}{2}}(x, \rho, t)$ при $i = \overline{1, n+1}$,

$\lambda_i(x, t) = k(C_i(x, t) + \Pi_i(x, t))$ при $i = \overline{0, n}$, $\lambda_{n+1}(x, t) = k(\Pi_{n+1}(x, t))$;

$$\begin{cases} \sigma_2 \frac{\partial}{\partial t} F_{i+\frac{1}{2}}(x, \rho, t) = d^* \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} F_{i+\frac{1}{2}}(x, \rho, t) - \sum_{m=1}^{2i+1} 2\rho^{m+1} \frac{\partial}{\partial \rho} F_{i-\frac{m}{2}}(x, \rho, t), \\ F_{i+\frac{1}{2}}(x, \rho, 0) = 0, F_{i+\frac{1}{2}}(x, 0, t) = 0, \left. \frac{\partial}{\partial \rho} F_{i+\frac{1}{2}}(x, \rho, t) \right|_{\rho \rightarrow \infty} = 0. \end{cases}$$

Розв'язки поставлених вище задач з точністю $O(\varepsilon^2)$ отримано у вигляді:

$$U_i(x, r, t) = 0, \quad i = \overline{0, 1}; \quad C_0(x, t) = \begin{cases} C_*(\sigma_1(\frac{t}{\sigma_1} - f(x)), t \geq \sigma_1 f(x), \\ 0, t < \sigma_1 f(x), \end{cases}$$

$$C_1(x, t) = \begin{cases} \int_0^z \frac{u_1(\sigma_1(\frac{t}{\sigma_1} - f(x) + f(\tilde{x})), \tilde{x})}{v(\tilde{x})} d\tilde{x}, t \geq \sigma_1 f(x), \\ \frac{1}{\sigma_1} \int_0^t u_1(\tilde{t}, f^{-1}(\frac{\tilde{t}}{\sigma_1} - \frac{t}{\sigma_1} + f(x))) d\tilde{t}, t < \sigma_1 f(x); \end{cases}$$

$f(x) = \int_0^x \frac{d\tilde{x}}{v(\tilde{x})}$, $f^{-1}(x)$ – функція, обернена до функції $f(x)$;

$$\Pi_0(\xi, t) = d_* \frac{\partial}{\partial \xi} C_0(1, t) v^{-1}(1) e^{-\frac{v(1)\xi}{d_*}},$$

$$\Pi_1(\xi, t) = v^{-1}(1) e^{-\frac{v(1)\xi}{d_*}} (v'(1) \frac{\partial C_0(1, t)}{\partial \xi} (\frac{\xi^2}{2d_*} + \frac{\xi}{v(1)} + \frac{d_*}{v^2(1)}) - \sigma_1 v^{-1}(1) \frac{\partial^2 C_0(1, t)}{\partial \xi \partial t} (\xi + \frac{d_*}{v(1)})),$$

$$\Pi_2(\xi, t) = \xi^4 e^{-\frac{v(1)\xi}{d_*}} s_1 + \xi^3 e^{-\frac{v(1)\xi}{d_*}} s_2 + \xi^2 e^{-\frac{v(1)\xi}{d_*}} s_3 + \xi e^{-\frac{v(1)\xi}{d_*}} s_4 + s_5,$$

$$\text{де } s_1 = \frac{(v'(1))^2}{v(1)d_*^3} \frac{\partial C_0}{\partial \xi}, \quad s_2 = \left(\frac{v'(1)}{2v(1)d_*} - \frac{\sigma_1}{3v(1)d_*} - 1 \right) \frac{v'(1)}{v(1)d_*} \frac{\partial C_0}{\partial \xi} - \frac{\sigma_1 v'(1)}{6v^2(1)d_*^2} \frac{\partial^2 C_0}{\partial \xi \partial t},$$

$$s_3 = \left(\frac{3v'(1)}{v(1)d_*} - 1 \right) \frac{v'(1)}{2v(1)^2} \frac{\partial C_0}{\partial \xi} - \frac{2\sigma_1 v'(1)}{v^3(1)d_*} \frac{\partial^2 C_0}{\partial \xi \partial t} + \frac{\sigma_1^2}{2v^3(1)d_*} \frac{\partial^3 C_0}{\partial \xi \partial t^2}, \quad s_4 = -\frac{5\sigma_1 v'(1)}{v^4(1)} \frac{\partial^2 C_0}{\partial \xi \partial t} +$$

$$+\left(\frac{1}{v(1)} - 1 \right) \frac{\sigma_1^2}{v^3(1)} \frac{\partial^3 C_0}{\partial \xi \partial t^2}, \quad s_5 = -\left(\frac{3}{v(1)} + d_* \right) \frac{v'(1)d_*}{v(1)^4} \frac{\partial C_0}{\partial \xi} e^{-\frac{v(1)\xi}{d_*}} - \frac{5\sigma_1 v'(1)d_*}{v^5(1)} \frac{\partial C_0}{\partial \xi \partial t} e^{-\frac{v(1)\xi}{d_*}} +$$

$$+\left(\frac{1}{v(1)} - 1 \right) \frac{\sigma_1^2 d_*}{v^4(1)} \frac{\partial^3 C_0}{\partial \xi \partial t^2} e^{-\frac{v(1)\xi}{d_*}}.$$

Поправки $F_{i/2}(x, \rho, t)$ знайдено числовими методами, використовуючи неявні різницеві схеми [148, 149].

Для оцінки залишкових членів маємо задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 \frac{\partial}{\partial t} R_n^1(x, t, \varepsilon) = \varepsilon d_* \frac{\partial^2}{\partial x^2} R_n^1(x, t, \varepsilon) - v(x) \frac{\partial}{\partial x} R_n^1(x, t, \varepsilon) + \varepsilon^{n+1} b_1(x, t, \varepsilon), \\ \sigma_2 \frac{\partial}{\partial t} R_n^2(x, r, t, \varepsilon) = \varepsilon d_*^* \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} R_n^2(x, r, t, \varepsilon) + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} R_n^2(x, r, t, \varepsilon) \right) + \varepsilon^{n+1} b_2(x, r, t, \varepsilon), \\ R_n^1(x, 0, \varepsilon) = 0, R_n^1(0, t, \varepsilon) = 0, \left. \frac{\partial R_n^1}{\partial x} \right|_{x=l} = 0, \\ \left. \frac{\partial R_n^2}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, R_n^2(x, 1, t, \varepsilon) = k R_n^1(x, t, \varepsilon), R_n^2(x, r, 0, \varepsilon) = 0, \end{array} \right.$$

де $b_1(x, t, \varepsilon)$ та $b_2(x, r, t, \varepsilon)$ – відомі функції, які є сумою добутоків уже відомих членів рядів (3.8), (3.9), а також коефіцієнтів при ε розкладу функції $v(1 - \varepsilon\xi)$ в ряд Тейлора в околі $x=1$. Вимагаючи достатньої гладкості та узгодженості початкових і граничних умов, на основі принципу типу максимуму для рівнянь в частинних похідних приходимо до справедливості такого твердження:
 $R_n^1(x, t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1}), R_n^2(x, r, t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1})$.

Перевірку моделі на адекватність у випадку відсутності конвективного перенесення проведено, зокрема, в [115, 202-205].

3.2. Ідентифікація параметрів нелінійних сингулярно збурених процесів конвективної дифузії в мікропористих середовищах

Для описаного в п. 3.1 процесу, розглянемо обернену задачу ідентифікації дифузійних параметрів процесу, що описується рівняннями (3.1)–(3.2) з невідомими $d_* = a(t)$ та $d^* = a^*(x,t)$ за початкових та крайових умов (3.3)–(3.5), а також умов перевизначення [75, 76]:

$$a(t) \frac{\partial C(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = C_*^*(t), \quad a^*(x,t) \frac{\partial U(x,r,t)}{\partial r} \Big|_{r=R} = U_*^*(x,t). \quad (3.10)$$

Функції $a(t)$ та $a^*(x,t)$, які є достатньо гладкими та обмеженими функціями, відповідно характеризують швидкість протікання процесів дифузійного масоперенесення в міжчастинковому просторі та в порах частинок і знаходяться з умов (3.2). Асимптотичне наближення розв'язку задачі (3.1) – (3.5), (3.10) шукаємо у вигляді асимптотичних рядів (3.8), (3.9) і

$$a(t) = a_0(t) + \varepsilon a_1(t) + \dots + \varepsilon^n a_n(t) + R_n^3(t, \varepsilon), \quad (3.11)$$

$$a^*(x,t) = a_0^*(x,t) + \varepsilon a_1^*(x,t) + \dots + \varepsilon^n a_n^*(x,t) + R_n^4(x,t, \varepsilon), \quad (3.12)$$

де $a_i(t)$, $a_i^*(x,t)$ ($i = \overline{0, n}$) – члени відповідних регулярних частин асимптотики, $R_n^s(\bullet)$, $s = \overline{2, 4}$ – залишкові члени [15, 16, 29-31].

Підставляючи (3.8), (3.9), (3.10), (3.11) в (3.1)–(3.5), та прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях ε отримуємо такі задачі для знаходження регулярних частин асимптотики для кожного $i = \overline{0, n}$:

$$\begin{cases} \sigma_2 \frac{\partial}{\partial t} U_i(x,r,t) = g_i(x,r,t), \\ U_i(x,r,0) = h_i(x,r), \end{cases} \quad \begin{cases} v(x) \frac{\partial}{\partial x} C_i(x,t) + \sigma_1 \frac{\partial}{\partial t} C_i(x,t) = u_i(x,t), \\ C_i(x,0) = w_i^1(x), \quad C_i(0,t) = w_i^2(t), \end{cases} \quad (3.13)$$

$$g_i(x,r,t) = \sum_{m=0}^{i-1} a_m^*(x,t) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} U_{(i-1-m)}(x,r,t) + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} U_{(i-1-m)}(x,r,t) \right), \quad h_i(x,r) = 0 \quad \text{при}$$

$$i > 0, \quad g_0(x,r,t) = 0, \quad h_0(x,r) = U_0^0(x,r), \quad u_i(x,t) = \sum_{m=0}^{i-1} a_m(t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} C_{(i-1-m)}(x,t) -$$

$$-d_*^* \left(\frac{\partial}{\partial r} U_{i-1}(x, R, t) + \frac{\partial}{\partial r} F_{i-1}(x, R, t) + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial r} F_{i-\frac{1}{2}}(x, R, t) \right), \quad w_i^1(x) = 0, \quad w_i^2(t) = 0 \quad \text{при}$$

$$i > 0, \quad u_0(x, t) = 0, \quad w_0^1(x) = c_0^0(x), \quad w_0^2(t) = c_*(t).$$

Для знаходження коефіцієнтів дифузії мікро- та макросередовищ маємо рівності:

$$a_i^*(x, t) \left(\frac{\partial}{\partial r} U_0(x, R, t) + \frac{\partial}{\partial r} F_0(x, R, t) \right) = \kappa_i^1(x, t),$$

$$a_i(t) \left(\frac{\partial}{\partial x} C_0(0, t) + \frac{\partial}{\partial x} \Pi_0(0, t) \right) = \kappa_i^2(t),$$

$$\kappa_0^1(x, t) = q_*^*(x, t), \quad \kappa_0^2(t) = c_*^*(t), \quad \kappa_i^1(x, t) = - \sum_{m=0}^{i-1} a_m^*(x, t) \left(\frac{\partial}{\partial r} U_{i-m}(x, R, t) + \frac{\partial}{\partial r} F_{i-m}(x, R, t) \right),$$

$$\kappa_i^2(t) = - \sum_{m=0}^{i-1} a_m(t) \left(\frac{\partial}{\partial x} C_{i-m}(0, t) + \frac{\partial}{\partial x} \Pi_{i-m}(0, t) \right) \quad \text{при } i = \overline{1, n}.$$

Поправки $\Pi_p(\xi, t)$ ($p = \overline{0, n+1}$) та $F_{j/2}(x, \rho, t)$ ($j = \overline{0, 2n+2}$) знаходяться в результаті розв'язання таких задач:

$$\begin{cases} a_0(t) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \Pi_p(\xi, t) + v(1) \frac{\partial}{\partial \xi} \Pi_p(\xi, t) = \mu_p(\xi, t), \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \Pi_p(0, t) = v_p(t), \quad \Pi_p(\xi, t) \Big|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \end{cases}$$

$$\text{де } \mu_0(t, \xi) = 0, \quad v_0(t) = - \frac{\partial}{\partial \xi} C_0(l, t), \quad \text{при } p = \overline{1, n}, \quad v_p(t) = - \frac{\partial}{\partial \xi} C_p(1, t), \quad \mu_p(\xi, t) =$$

$$= \sigma_1 \frac{\partial}{\partial t} \Pi_{p-1}(\xi, t) - \sum_{m=1}^p a_m(t) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \Pi_{p-m}(\xi, t) + \sum_{m=1}^p \frac{(-1)^{m+1} v^{(m)}(1)}{m!} \xi^m \frac{\partial}{\partial \xi} \Pi_{p-m}(\xi, t),$$

$$\mu_{n+1}(\xi, t) = \sigma_1 \frac{\partial}{\partial t} \Pi_n(\xi, t) - \sum_{m=1}^{n+1} a_m(t) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \Pi_{n+1-m}(\xi, t) - d_*^* \frac{\partial}{\partial r} F_n(x, 0, t) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{n+1} \frac{(-1)^{m+1} v^{(m)}(1)}{m!} \xi^m \frac{\partial}{\partial \xi} \Pi_{n+1-m}(\xi, t), \quad v_{n+1}(t) = 0;$$

$$\begin{cases} a_0^*(x, t) \frac{\partial}{\partial \rho^2} F_{j/2}(x, \rho, t) - \sigma_2 \frac{\partial}{\partial t} F_{j/2}(x, \rho, t) = \gamma_{j/2}(x, \rho, t), \\ F_{j/2}(x, \rho, 0) = 0, \quad F_{j/2}(x, 0, t) = \lambda_{j/2}(x, t), \quad \frac{\partial}{\partial \rho} F_{j/2}(x, \rho, t) \Big|_{\rho \rightarrow \infty} = 0, \end{cases}$$

$$\gamma_{\frac{j}{2}}(x, \rho, t) = \begin{cases} \frac{2}{\rho} \sum_{m=0}^{j/2-1} a_m^* \frac{\partial}{\partial \rho} F_{\frac{j-2m-1}{2}}(x, \rho, t) - \sum_{m=0}^{j/2-1} a_m^* \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} F_{\frac{j}{2}-m}(x, \rho, t), & \text{при } j \text{ парне,} \\ \frac{2}{\rho} \sum_{m=0}^{j/2-1} a_m^* \frac{\partial}{\partial \rho} F_{\frac{j-2m-1}{2}}(x, \rho, t) - \sum_{m=0}^{j/2-1/2} a_m^* \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} F_{\frac{j}{2}-m}(x, \rho, t), & \text{при } j \text{ непарне,} \end{cases}$$

$$\gamma_0(x, \rho, t) = 0, \quad \lambda_0(x, t) = k(C_0(x, t) + \Pi_0(x, t)), \quad \gamma_{n+1}(x, \rho, t) = -\frac{2}{\rho} F_{n+\frac{1}{2}}(x, \rho, t),$$

$$\lambda_{n+1}(x, t) = k\Pi_{n+1}(x, t).$$

Аналогічно до п. 3.1, отримуємо розв'язки поставлених вище задач у вигляді:

$$U_0(x, r, t) = U_0^0(x, r),$$

$$C_0(x, t) = \begin{cases} C_*(\sigma_1(\frac{t}{\sigma_1} - f(x)), t \geq \sigma_1 f(x), \\ C_0^0(f^{-1}(f(x) - \frac{t}{\sigma_1})), t < \sigma_1 f(x), \end{cases}$$

$$a_0(t) = \frac{c_*^*(t)}{(C_0(0, t))'_x}, \quad a_0^*(x, t) = \frac{U_0^*(x, t)}{(U_0(x, R, t))'_r},$$

$$\Pi_0(\xi, t) = a_0(t) \frac{\partial}{\partial \xi} C_0(1, t) v^{-1}(1) e^{-\frac{v(1)}{a_0(t)} \xi},$$

$$q_1(x, r, t) = \frac{1}{\sigma_2} \int_0^t a^*(x, \tilde{t}) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} U_0(x, r, \tilde{t}) + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} U_0(x, r, \tilde{t}) \right) d\tilde{t},$$

$$C_1(x, t) = \begin{cases} \int_0^z \frac{u_1(\tilde{x}, \sigma_1(\frac{t}{\sigma_1} - f(x) + f(\tilde{x})))}{v(\tilde{x})} d\tilde{x}, t \geq \sigma_1 f(x), \\ \frac{1}{\sigma_1} \int_0^t u_1(f^{-1}(\frac{\tilde{t}}{\sigma_1} - \frac{t}{\sigma_1} + f(x)), \tilde{t}) d\tilde{t}, t < \sigma_1 f(x), \end{cases}$$

$$a_1(t) = -\frac{a_0(t)(C_1(0, t))'_x}{(C_0(0, t))'_x}, \quad a_1^*(x, t) = -\frac{a_0^*(x, t)(U_1(x, R, t))'_r}{(U_0(x, R, t))'_r},$$

$$\Pi_1(\xi, t) = \alpha_1(t) e^{-\frac{v(l)}{a_0(t)} \xi} + \alpha_2(t) \xi e^{-\frac{v(l)}{a_0(t)} \xi} + \alpha_3(t) \xi^2 e^{-\frac{v(l)}{a_0(t)} \xi},$$

$$\text{де } \alpha_1(t) = -\frac{\partial}{\partial \xi} C_1(l, t) - \frac{1}{v(l)} \left(\frac{\sigma_1 a'_{0t}(t) a_0(t)}{v^2(l)} - \frac{\sigma_1 a'_{0t}(t)}{a_0(t)} + \frac{a_0^2(t) v'(l)}{v^2(l)} - a_1(t) \right) \frac{\partial}{\partial \xi} C_0(l, t) -$$

$$-\frac{\sigma_1 a_0^2(t)}{v^3(l)} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial t} C_0(l,t), \alpha_2(t) = \left(\frac{a_0(t)v'(l)}{v^2(l)} - \frac{\sigma_1 a_0'(t)}{v^2(l)} + \frac{\sigma_1 a_0'(t)}{a_0^2(t)} + \frac{a_1(t)}{a_0(t)} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} C_0(l,t) -$$

$$-\frac{\sigma_1 a_0(t)}{v^2(l)} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial t} C_0(l,t), \alpha_3(t) = \frac{v'(l)}{2v(l)} \frac{\partial}{\partial \xi} C_0(l,t).$$

Легко бачити, що $\Pi_2(\xi, t) = \sum_{\beta=0}^{\alpha+1} \alpha_{\alpha\beta}(t) \xi^\beta e^{-\frac{v(l)}{a_0(t)} \xi}$, $\alpha = \overline{1, n+1}$, де всі $\alpha_{\alpha\beta}$

визначаються через $\alpha_{\alpha h}$ ($h < \beta$) та граничні умови.

Поправки $F_{\frac{j}{2}}(x, \rho, t)$ ($j = \overline{0, 4}$) та задачі для оцінки залишкових членів отримуються аналогічно до п. 3.1.

У випадку, коли невідомими є функція адсорбційної рівноваги $d_*^* = d(t)$ та коефіцієнт впливу дифузії в пористих частинках на дифузію в міжчастинковому просторі $k = k(t)$ при наявності умов перевизначення:

$$d(t) \int_0^l U(x, R, t) dx = D_*^*(t), \quad k(t) \int_0^l C(x, t) dx = K_*^*(t), \quad (3.14)$$

розв'язок задачі з точністю $O(\varepsilon^{n+1})$ шукаємо у вигляді асимптотичних рядів (3.8), (3.9) та

$$d(t) = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i d_i(t) + R_n^3(t, \varepsilon), \quad (3.15)$$

$$k(t) = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i k_i(t) + R_n^4(t, \varepsilon). \quad (3.16)$$

Після виконання процедури підстановки та порівнювання, отримаємо задачі (3.13), де $g_0(x, r, t) = 0$, $h_0(x, r) = U_0^0(x, r)$, $u_0(x, t) = 0$, $w_0^1(x) = C_0^0(x)$,

$$w_0^2(t) = C_*^*(t), \quad g_i(x, r, t) = d_*^* \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} U_{i-1}(x, r, t) + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} U_{i-1}(x, r, t) \right), \quad h_i(x, r) = 0,$$

$$u_i(x, t) = d_*^* \frac{\partial^2}{\partial x^2} C_{i-1}(x, t) - \sum_{m=0}^{i-1} d_m(t) \left(\frac{\partial}{\partial r} U_{i-1-m}(x, R, t) + \frac{\partial}{\partial r} F_{i-1-m}(x, R, t) + \right.$$

$$\left. + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial r} F_{i-\frac{1}{2}-m}(x, R, t) \right), \quad w_i^1(x) = 0, \quad w_i^2(t) = 0 \quad \text{при } i = \overline{1, n}.$$

Коефіцієнт внутрішньочастинкового дифузійного перенесення на міжчастинковий та функцію адсорбційної рівноваги знаходимо в процесі розв'язання наступних задач, що отримуються шляхом підстановки рядів (3.8), (3.9), (3.15), (3.16) в (3.14) прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях ε :

$$d_i(t) \int_0^1 (U_0(x, R, t) + F_0(x, 0, t) + \varepsilon^2 F_{\frac{1}{2}}(x, 0, t)) dx = \chi_i(t),$$

$$k_i(t) \int_0^l (C_0(x, t) + \Pi_0(\xi, t)) dx = \kappa_i(t);$$

$$\chi_0(t) = D_*^*(t), \quad \kappa_0(t) = K_*^*(t), \quad \chi_i(t) = - \sum_{m=0}^{i-1} d_m(t) \int_0^1 (U_{i-m}(x, R, t) + F_{i-m}(x, 0, t) + \varepsilon^2 F_{i-m+\frac{1}{2}}(x, 0, t)) dx, \quad \kappa_i(t) = - \sum_{m=0}^{i-1} k_m(t) \int_0^l (C_{i-m}(x, t) + \Pi_{i-m}(\xi, t)) dx, \quad \text{при } i = \overline{1, n}.$$

Примежові функції $\Pi = \sum_{p=0}^{n+1} \varepsilon^p \Pi_p(\xi, t)$ та $F = \sum_{j=0}^{2n+2} \varepsilon^{\frac{j}{2}} F_{\frac{j}{2}}(x, \rho, t)$ будуються

аналогічно до п.3.1:

$$\begin{cases} d_* \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \Pi_p(\xi, t) + v(1) \frac{\partial}{\partial \xi} \Pi_p(\xi, t) = \mu_p(\xi, t), \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \Pi_p(0, t) = v_p(t), \quad \Pi_p(\xi, t) \Big|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \end{cases}$$

$$\mu_0(t, \xi) = 0, \quad v_0(t) = - \frac{\partial}{\partial \xi} C_0(l, t), \quad \mu_p(\xi, t) = \sigma_1 \frac{\partial}{\partial t} \Pi_{p-1}(\xi, t) - v'(1) \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \Pi_{i-1}(\xi, t) - \frac{1}{2} v''(1) \xi^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \Pi_{i-2}(\xi, t) + \dots + (-1)^i v^{(i)}(1) \xi^i \frac{\partial}{\partial \xi} \Pi_0(\xi, t) \quad (p = \overline{1, n+1}), \quad v_p(t) = - \frac{\partial}{\partial \xi} C_p(1, t) \quad (p = \overline{1, n}), \quad v_{n+1}(t) = 0;$$

$$\begin{cases} d^*(x, t) \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} F_{j/2}(x, \rho, t) - \sigma_2 \frac{\partial}{\partial t} F_{j/2}(x, \rho, t) = \gamma_{j/2}(x, \rho, t), \\ F_{j/2}(x, \rho, 0) = 0, \quad F_{j/2}(x, 0, t) = \lambda_{j/2}(x, t), \quad \frac{\partial}{\partial \rho} F_{j/2}(x, \rho, t) \Big|_{\rho \rightarrow \infty} = 0, \end{cases}$$

де $\gamma_0(x, \rho, t) = 0$, $\lambda_0(x, t) = k_0(t)(C_0(x, t) + \Pi_0(\xi, t)) - U_0(x, R, t)$,

$$\gamma_{j/2}(x, \rho, t) = -2d^* \sum_{m=1}^j \rho^{m-1} \frac{\partial}{\partial \rho} F_{(j-m)/2}(x, \rho, t) \text{ при } j = \overline{0, 2n+2},$$

$$\lambda_{\frac{j}{2}}(x, t) = \sum_{m=0}^{j/2} k_m(t) (C_{\frac{j}{2}-m}(x, t) + \Pi_{\frac{j}{2}-m}(\xi, t)) - U_{\frac{j}{2}}(x, R, t),$$

$$\lambda_{n+1}(x, t) = k_0(t) \Pi_{n+1}(\xi, t) + \sum_{m=1}^n k_m(t) (C_{n+1-m}(x, t) + \Pi_{n+1-m}(\xi, t)).$$

Регулярні частини асимптотики в даному випадку будуть такі ж. Для примежових функцій та членів ряду (3.15)–(3.16) отримано такі вирази:

$$\Pi_0(\xi, t) = d_* v^{-1}(1) \frac{\partial}{\partial \xi} C_0(1, t) e^{-\frac{v(1)}{d_*} \xi}, \quad k_0(t) = \frac{K_*(t)}{\int_0^1 (C_0(x, t) + \Pi_0(\xi, t)) dx},$$

$$d_0(t) = \frac{D_*(t)}{\int_0^1 (U_0(x, R, t) + F_0(x, 0, t) + \varepsilon^2 F_{\frac{1}{2}}(x, 0, t)) dx},$$

$$\begin{aligned} \Pi_1(t, \xi) = v^{-1}(1) e^{-\frac{v(1)}{d_*} \xi} & \left(v'(1) \frac{\partial}{\partial \xi} C_0(1, t) \left(\frac{\xi^2}{2d_*} + \frac{\xi}{v(1)} + \frac{d_*}{v^2(1)} \right) - \right. \\ & \left. - \sigma_1 v^{-1}(1) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial t} C_0(1, t) \left(\xi + \frac{d_*}{v(1)} \right) \right), \end{aligned}$$

$$k_1(t) = - \frac{k_0(t) \int_0^1 (C_1(x, t) + \Pi_1(\xi, t)) dx}{\int_0^1 (C_0(x, t) + \Pi_0(\xi, t)) dx},$$

$$d_1(t) = - \frac{d_0(t) \int_0^1 (U_1(x, R, t) + F_1(x, 0, t) + \varepsilon^2 F_{\frac{3}{2}}(x, 0, t)) dx}{\int_0^1 (U_0(x, R, t) + F_0(x, 0, t) + \varepsilon^2 F_{\frac{1}{2}}(x, 0, t)) dx}.$$

Зауважимо, що запропонована методологія асимптотичного розвинення розв'язку задачі (3.6)–(3.7) та ідентифікації її параметрів також може бути поширена на випадки інших співвідношень між параметрами ε та μ .

3.3. Математичне моделювання просторових сингулярно збурених процесів конвективно-дифузійного масоперенесення в багат шарових біпористих середовищах

Суттєво покращити показники очищення технологічних потоків дозволяє застосування багат шарових середовищ, кожен шар яких складається з різних за розміром та фізико-хімічними характеристиками частинок мікропористої структури з використанням принципу фільтрації в напрямку спадної крупності завантаження. Складність теоретичного опису властивостей неоднорідних середовищ з математичної точки зору пов'язана з тим, що фізичні процеси в таких середовищах описуються сингулярно збуреними крайовими задачами, коефіцієнти яких швидко змінюються на межах розділу різних компонентів матеріалу. Крім того, необхідно враховувати граничні умови на всіх поверхнях контакту, які в свою чергу також можуть змінюватися в процесі зовнішнього впливу.

Розглянемо модельну задачу процесу масоперенесення забруднюючих речовин у багат шаровому кусково-однорідному водонасиченому двопористому середовищі – криволінійному паралелепіпеді $G_z = ABCDA_*B_*C_*D_*$, що розділяється еквіпотенціальними поверхнями $E_jF_jF_*E_{*j}$ ($j = \overline{1, m-1}$) на m підобластей $G_z^1 = ABF_1E_1A_*B_*F_*E_{*1}$ (рис. 2.2.a), $G_z^j = E_{(j-1)}F_{(j-1)}F_jE_jE_{*(j-1)}F_{*(j-1)}F_*E_{*j}$, $G_z^m = E_{m-1}F_{m-1}CDE_{*(m-1)}F_{*(m-1)}C_*D_*$, $j = \overline{2, m-2}$. Середовище характеризується різними коефіцієнтами фільтрації $\kappa = \{\kappa_j, (x, y, z) \in G_z^j, j = \overline{1, m}\}$, пористості $\sigma = \{\sigma_j, (x, y, z) \in G_z^j, j = \overline{1, m}\}$ і дифузії $D = \{D_j = d_j \cdot \varepsilon, (x, y, z) \in G_z^j, j = \overline{1, m}\}$ міжчастикового простору, а кожна з підобластей складається з мікрочастинок різного розміру (R_j – радіус мікрочастинок в j -му шарі) та структури, що характеризується відповідно коефіцієнтами пористості $\sigma^* = \{\sigma_j^*, (x, y, z) \in G_z^j, j = \overline{1, m}\}$, дифузії $D^* = \{D_j^* = d_j^* \cdot \varepsilon, (x, y, z) \in G_z^j, j = \overline{1, m}\}$ в мікрочастинках та коефіцієнтами впливу внутрішньочастинового переносу на

міжчастинковий $S = \{S_j = s_j \cdot \varepsilon, (x, y, z) \in G_z^j, j = \overline{1, m}\}$ і адсорбційної рівноваги $k = \{k_j, (x, y, z) \in G_z^j, j = \overline{1, m}\}$, де $\kappa_j, \sigma_j, d_j, \sigma_j^*, d_j^*, s_j, k_j$ – деякі дійсні додатні числа ($j = \overline{1, m}$), ε – малий параметр. Відповідна модельна задача в області $G_z \times (0, R) \times (0, \infty)$ описується системою рівнянь

$$\operatorname{div} \left(D_j \cdot \operatorname{grad} \tilde{C}_j \right) - \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \tilde{C}_j - S_j \frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial r} \Big|_{r=R_j} = \sigma_j \frac{\partial \tilde{C}_j}{\partial t}, \quad (3.17)$$

$$D_j^* \left(\frac{\partial^2 \tilde{U}_j}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial r} \right) = \sigma_j^* \frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial t} \quad (3.18)$$

з початковими та граничними умовами

$$\begin{aligned} \tilde{C}_j(x, y, z, t) \Big|_{t=0} &= \tilde{C}_j^0(x, y, z), \quad \tilde{C}_1 \Big|_{ABB_*A_*} = \tilde{C}_*(M, t), \quad \tilde{C}_m \Big|_{CDD_*C_*} = \tilde{C}^*(M, t), \\ \tilde{C}_j \Big|_{BCC_*B_*} &= \tilde{C}_{j^{**}}(M, t), \quad \tilde{C}_j \Big|_{ADD_*A_*} = \tilde{C}_j^{**}(M, t), \quad \tilde{C}_j \Big|_{ABCD} = \tilde{C}_{j^{***}}(M, t), \\ \tilde{C}_j \Big|_{A_*B_*C_*D_*} &= \tilde{C}_j^{***}(M, t), \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_j(x, y, z, r, t) \Big|_{t=0} &= \tilde{q}_j^0(x, y, z, r), \quad \tilde{U}_j(x, y, z, r, t) \Big|_{r=R} = k_j \tilde{C}_j(x, y, z, t), \\ \frac{\partial \tilde{U}_j(x, y, z, r, t)}{\partial r} \Big|_{r=0} &= 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

і умовами узгодженості на екіпотенціальних поверхнях $E_j F_j F_{*j} E_{*j}$ ($j = \overline{1, m-1}$):

$$\begin{aligned} \tilde{C}_j \Big|_{E_j F_j F_{*j} E_{*j-}} &= \tilde{C}_{j+1} \Big|_{E_j F_j F_{*j} E_{*j+}}, \\ \left(D_j \frac{\partial \tilde{C}_j}{\partial \vec{n}} - v_n^j \tilde{C}_j \right) \Big|_{E_j F_j F_{*j} E_{*j-}} &= \left(D_{j+1} \frac{\partial \tilde{C}_{j+1}}{\partial \vec{n}} - v_n^j \tilde{C}_{j+1} \right) \Big|_{E_j F_j F_{*j} E_{*j+}}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

При цьому відповідна фільтраційна задача описується рівняннями (3.22) з крайовими умовами (3.23) та умовами узгодженості (3.24):

$$\vec{v} = \kappa \cdot \operatorname{grad} \varphi, \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (3.22)$$

$$\varphi \Big|_{ABB_*A_*} = \varphi_*, \quad \varphi \Big|_{CDD_*C_*} = \varphi^*, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \Big|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_*} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \Big|_{ABCD \cup A_*B_*C_*D_*} = 0, \quad (3.23)$$

$$\varphi \Big|_{E_j F_j F_{*j} E_{*j-}} = \varphi \Big|_{E_j F_j F_{*j} E_{*j+}} = \varphi_{*j}^*, \quad \kappa_j \cdot \varphi'_n \Big|_{E_j F_j F_{*j} E_{*j-}} = \kappa_{j+1} \cdot \varphi'_n \Big|_{E_j F_j F_{*j} E_{*j+}}. \quad (3.24)$$

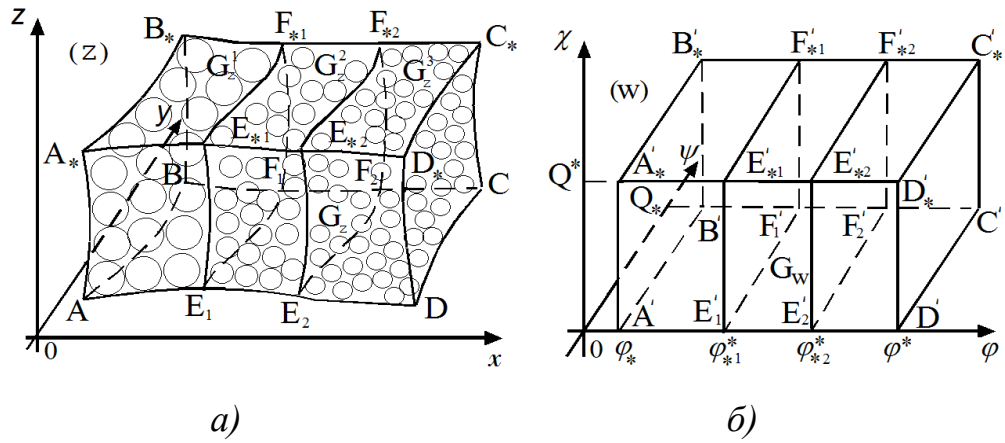


Рис.2.2. Просторова фізична область G_z (а) та відповідна їй область комплексного потенціалу G_w (б) при $j = 3$

Тут $\tilde{C}_j(x, y, z, t)$ – концентрація забруднень в міжчастинковому просторі, а $\tilde{U}_j(x, y, z, r, t)$ – концентрація у внутрішньочастинковому просторі в j -му шарі, φ і $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ – відповідно потенціал (квазіпотенціал) і вектор швидкості фільтрації ($0 < \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^* < \infty$, $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2(x, y, z) + v_y^2(x, y, z) + v_z^2(x, y, z)} > v_* \gg 0$), φ_* і φ^* – довільні дійсні додатні числа, \vec{n} – зовнішня нормаль до відповідної поверхні, M – довільна точка відповідної поверхні, v_n^j – нормальні складові швидкості на відповідних поверхнях розділу $E_j F_j F_{*j} E_{*j}$ ($j = \overline{1, m-1}$), φ_{*j}^* – невідомі значення потенціалу на відповідних поверхнях розділу $E_j F_j F_{*j} E_{*j}$, $0 < \varphi_* < \varphi_{*1}^* < \varphi_{*2}^* < \dots < \varphi_{*m-1}^* < \varphi^* < \infty$. Всі функції, які фігурують в умовах (3.19) – (3.21) є достатньо гладкими та узгодженими між собою вздовж ребер та кутових точок даної області, а також на поверхнях $E_j F_j F_{*j} E_{*j}$ ($j = \overline{1, m-1}$) розділу підобластей.

Шляхом введення пари функцій $\psi = \psi(x, y, z)$, $\chi = \chi(x, y, z)$ (просторово комплексно спряжених із функцією $\varphi(x, y, z)$) таких, що $\kappa \cdot \text{grad } \varphi = \text{grad } \psi \times \text{grad } \chi$ [18] і заміною останніх чотирьох з граничних умов (3.19) на умови: $\psi|_{ADD_*A_*} = 0$, $\psi|_{BCC_*B_*} = Q_*$, $\chi|_{ABCD} = 0$, $\chi|_{A_*B_*C_*D_*} = Q^*$, задача

(3.22)–(3.23) замінюється більш загальною прямою задачею на знаходження просторового аналогу конформного відображення області G_z на відповідну область комплексного потенціалу $G_w = \{w = (\varphi, \psi, \chi) : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q_*, 0 < \chi < Q^*\}$ (рис. 2.2,б), де φ_{*j}^* ($j = \overline{1, m-1}$), Q_* , Q^* – невідомі параметри, $Q = Q_* \cdot Q^*$ – повна фільтраційна витрата. Припустимо, що ця задача є розв’язаною [18], зокрема, знайдено поле швидкостей \vec{v} і параметри φ_{*j}^* ($j = \overline{1, m-1}$), Q_* , Q^* , Q . Здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi, \chi)$, $y = y(\varphi, \psi, \chi)$, $z = z(\varphi, \psi, \chi)$ у рівняннях (3.17), (3.18) та умовах (3.19)–(3.20) отримаємо відповідну “дифузійну задачу” для області $G_w \times (0, R) \times (0, \infty)$:

$$\varepsilon d_j \left(\frac{v^2}{\kappa_j} C_{j\varphi\varphi}'' + b_{11} C_{j\psi\psi}'' + b_{12} C_{j\chi\chi}'' + b_{21} C_{j\psi}' + b_{22} C_{j\chi}' \right) - \frac{v^2}{\kappa_j} C_{j\varphi}' - \varepsilon s_j U'_{jr} \Big|_{r=R_j} = \sigma_1 C'_{jt}, \quad (3.25)$$

$$\varepsilon d_j^* \left(U''_{jrr} + \frac{2}{r} U'_{jr} \right) = \sigma_j^* U'_{jt}, \quad (3.26)$$

$$C_j(\varphi, \psi, \chi, t) \Big|_{t=0} = C_j^0(\varphi, \psi, \chi), \quad C_1(\varphi_*, \psi, \chi, t) = C_*(\psi, \chi, t), \quad C_m \Big|_{\varphi=\varphi^*} = C^*(\psi, \chi, t),$$

$$C_j \Big|_{\psi=0} = C_{j^{**}}(\varphi, \chi, t), \quad C_j \Big|_{\psi=Q_*} = C_j^{**}(\varphi, \chi, t),$$

$$C_j \Big|_{\chi=0} = C_{j^{***}}(\varphi, \psi, t), \quad C_j \Big|_{\chi=Q^*} = C_j^{***}(\varphi, \psi, t), \quad (3.27)$$

$$U_j(\varphi, \psi, \chi, r, t) \Big|_{t=0} = q_j^0(\varphi, \psi, \chi, r) \quad U_j(\varphi, \psi, \chi, r, t) \Big|_{r=R} = k_j C_j(\varphi, \psi, \chi, t),$$

$$\frac{\partial U_j(\varphi, \psi, \chi, r, t)}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad (3.28)$$

$$C(\varphi_{*j-}^*, \psi, \chi, t) = C(\varphi_{*j+}^*, \psi, \chi, t) \quad (j = \overline{1, m-1}),$$

$$\begin{aligned} D_j \cdot C'_\varphi(\varphi_{*j-}^*, \psi, \chi, t) + \kappa_j \cdot C(\varphi_{*j-}^*, \psi, \chi, t) = \\ = D_{j+1} \cdot C'_\varphi(\varphi_{*j+}^*, \psi, \chi, t) + \kappa_{j+1} \cdot C(\varphi_{*j+}^*, \psi, \chi, t), \end{aligned} \quad (3.29)$$

де $C_j = C_j(\varphi, \psi, \chi, t) = \tilde{C}_j(x(\varphi, \psi, \chi), y(\varphi, \psi, \chi), z(\varphi, \psi, \chi), t)$, інші функції інтерпретуються аналогічно; $b_{1,1} = b_{1,1}(\varphi, \psi, \chi) = \psi_x'^2 + \psi_y'^2 + \psi_z'^2$, $b_{1,2} = b_{1,2}(\varphi, \psi, \chi) = \chi_x'^2 + \chi_y'^2 + \chi_z'^2$, $b_{2,1} = b_{2,1}(\varphi, \psi, \chi) = \psi_{xx}'' + \psi_{yy}'' + \psi_{zz}''$, $b_{2,2} = b_{2,2}(\varphi, \psi, \chi) = \chi_{xx}'' + \chi_{yy}'' + \chi_{zz}''$.

Наближення розв'язку задачі (3.25)–(3.29) з точністю $O(\varepsilon^{n+1})$ шукаємо у вигляді асимптотичних рядів:

$$C_j = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \cdot C_{j,i} + I_{1,j} \cdot \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \tilde{P}_{j,i} + I_{2,j} \cdot \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \tilde{P}_{j,i} + I_{3,j} \cdot \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \Pi_i + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot P_{j,i/2} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \Gamma_{j,i/2} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot H_{j,i/2} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot E_{j,i/2} + R_{j,n+1}^C, \quad (3.30)$$

$$U_j = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i U_{j,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} F_{j,i} + R_{j,n+1}^U, \quad j = \overline{1, m}. \quad (3.31)$$

Тут $C_{j,i} = C_{j,i}(\varphi, \psi, \chi, t)$, $U_{j,i} = U_{j,i}(\varphi, \psi, \chi, r, t)$ ($j = \overline{1, m}$, $i = \overline{0, n}$) – члени регулярних частин асимптотик, $\tilde{P}_{j,i} = \tilde{P}_{j,i}(\tilde{\phi}_j, \psi, \chi, t)$ ($j = \overline{1, m-1}$, $i = \overline{0, n+1}$), $\tilde{P}_{j,i} = \tilde{P}_{j,i}(\tilde{\phi}_{j-1}, \psi, \chi, t)$ ($j = \overline{2, m}$, $i = \overline{0, n+1}$) – функції типу примежового шару в околах $\varphi = \varphi_{*j}^*$ ($j = \overline{1, m-1}$) (поправки в околах поверхонь $E_j' F_j' F_{*j}' E_{*j}'$ ($j = \overline{1, m-1}$) розділу підобластей G_w^j ($j = \overline{1, m-1}$)) [44-46], $\Pi_i = \Pi_i(\xi, \psi, \chi, t)$ ($i = \overline{0, n+1}$) – функції типу примежового шару в околі $\varphi = \varphi^*$ (поправки на виході фільтраційної течії), $P_{j,i/2} = P_{j,i/2}(\varphi, \mu, \chi, t)$, $\Gamma_{j,i/2} = \Gamma_{j,i/2}(\varphi, \eta, \chi, t)$, $H_{j,i/2} = H_{j,i/2}(\varphi, \psi, \lambda, t)$, $E_{j,i/2} = E_{j,i/2}(\varphi, \psi, \lambda, t)$ ($j = \overline{1, m}$, $i = \overline{0, 2n+1}$) – функції типу примежового шару відповідно в околах $\psi = 0$, $\psi = Q_*$, $\chi = 0$, $\chi = Q^*$, що враховують вплив “бічних джерел забруднень”, $\tilde{\phi}_j = (\varphi_{*j}^* - \varphi) / \varepsilon$, $\tilde{\phi}_j = (\varphi - \varphi_{*j}^*) / \varepsilon$ ($j = \overline{1, m-1}$), $\xi = (\varphi^* - \varphi) / \varepsilon$, $\mu = \psi / \sqrt{\varepsilon}$, $\eta = (Q_* - \psi) / \sqrt{\varepsilon}$, $\lambda = \chi / \sqrt{\varepsilon}$, $\gamma = (Q^* - \chi) / \sqrt{\varepsilon}$ – відповідні їм регуляризуючі перетворення (розтяги), $F_{j,i} = F_{j,i}(\varphi, \psi, \chi, \rho_j, t)$ ($j = \overline{1, m}$, $i = \overline{0, 2n+1}$) – функції типу примежового шару в околі $r = R_j$ ($\rho_j = (R_j - r) / \sqrt{\varepsilon}$), $R_{j,n+1}^C = R_{j,n+1}^C(\varphi, \psi, \chi, t, \varepsilon)$,

$R_{j,n+1}^U = R_{j,n+1}^U(\varphi, \psi, \chi, \rho_j, t, \varepsilon)$ ($j = \overline{1, m}$) – залишкові члени (їх оцінка встановлюється із використанням принципу максимуму), $I_{1,1} = 0$, $I_{1,j} = 1$ ($j = \overline{2, m}$), $I_{2,m} = 0$, $I_{2,j} = 1$ ($j = \overline{1, m-1}$), $I_{3,m} = 1$, $I_{3,j} = 0$ ($j = \overline{1, m-1}$).

Підставляючи (3.30), (3.31) в (3.25)–(3.29), та прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях ε отримуємо для кожного такі задачі для знаходження регулярних частин асимптотики:

$$\begin{cases} \tilde{v}^2 \frac{\partial C_{1,i}}{\partial \varphi} + \sigma_1 \frac{\partial C_{1,i}}{\partial t} = g_{1,i}^1(\varphi, \psi, \chi, t), i = \overline{0, n}, \\ C_{1,i}(\varphi, \psi, \chi, 0) = u_{1,i}^1(\varphi, \psi, \chi), C_{1,i}(\varphi_*, \psi, \chi, t) = u_{1,i}^2(\psi, \chi, t), \end{cases} \quad (3.32)$$

$$\begin{cases} \tilde{v}^2 \frac{\partial C_{j,i}}{\partial \varphi} + \sigma_j \frac{\partial C_{j,i}}{\partial t} = g_{j,i}^1(\varphi, \psi, \chi, t) (j = \overline{2, m}, i = \overline{0, n}), \\ C_{j,i}(\varphi, \psi, \chi, 0) = u_{j,i}^1(\varphi, \psi, \chi), C_{j,i}(\varphi_{*(j-1)}^*, \psi, \chi, t) = C_{j-1,i}(\varphi_{*(j-1)}^*, \psi, \chi, t), \end{cases} \quad (3.33)$$

$$g_{j,0}^1(\varphi, \psi, \chi, t) = 0, u_{j,0}^1(\varphi, \psi, \chi) = C_j^0(\varphi, \psi, \chi) (j = \overline{1, m}), u_{1,0}^2(\psi, \chi, t) = C_*(\psi, \chi, t),$$

$$g_{j,i}^1 = d_j \left(\frac{\tilde{v}^2}{\kappa_j^2} \frac{\partial^2 C_{j,i-1}}{\partial \varphi^2} + b_{1,1} \frac{\partial^2 C_{j,i-1}}{\partial \psi^2} + b_{1,2} \frac{\partial^2 C_{j,i-1}}{\partial \chi^2} + b_{2,1} \frac{\partial C_{j,i-1}}{\partial \psi} + b_{2,2} \frac{\partial C_{j,i-1}}{\partial \chi} \right) - s_j \left(\frac{\partial U_{j,i-1}}{\partial r} + \frac{\partial F_{j,i-1}}{\partial r} + \varepsilon^{1/2} \frac{\partial F_{j,i-1/2}}{\partial r} \right) \Big|_{r=R_j} \quad (j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}), u_{j,i}^1(\varphi, \psi, \chi) = 0 \quad (i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}),$$

$$u_{1,i}^2(\psi, \chi, t) = 0 (i = \overline{1, n});$$

$$\begin{cases} \sigma_2 \frac{\partial}{\partial t} U_{j,i}(\varphi, \psi, \chi, r, t) = g_{j,i}^2(\varphi, \psi, \chi, r, t), \\ U_{j,i}(\varphi, \psi, \chi, r, 0) = u_{j,i}^3(\varphi, \psi, \chi, r), \end{cases} \quad (3.34)$$

$$g_{j,0}^2(\varphi, \psi, \chi, r, t) = 0, u_{j,0}^3(\varphi, \psi, \chi, r) = U_j^0(\varphi, \psi, \chi, r), g_{j,i}^2(\varphi, \psi, \chi, r, t) = d_j^* \left(\frac{\partial^2 U_{j,i-1}}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial U_{j,i-1}}{\partial r} \right), u_{j,i}^3(\varphi, \psi, \chi, r) = 0, (i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}).$$

Розв'язки цих задач отримано у вигляді:

$$C_{j,0}(\varphi, \psi, \chi, t) = \begin{cases} C_{j-1,0}(\varphi_{*(j-1)}^*, \psi, \chi, t - f_j(\varphi, \psi, \chi)), & t \geq f_j(\varphi, \psi, \chi), \\ C_0^0(f_j^{-1}(f_j(\varphi, \psi, \chi) - t, \psi, \chi), \psi, \chi), & t < f_j(\varphi, \psi, \chi), \end{cases}$$

$$U_{j,0}(\varphi, \psi, \chi, r, t) = U_j^0(\varphi, \psi, \chi, r),$$

$$C_{j,i}(\varphi, \psi, \chi, t) = \begin{cases} \kappa_j \int_{\varphi_{*(j-1)}^*}^{\varphi} \frac{g_{j,i}^1(\widehat{\varphi}, \psi, \chi, f_j(\widehat{\varphi}, \psi, \chi) + t - f_j(\varphi, \psi, \chi))}{\tilde{v}_j^2(\widehat{\varphi}, \psi, \chi)} d\widehat{\varphi} + \\ + C_{j-1,i}(\varphi_{*(j-1)}^*, \psi, \chi, t), t \geq f_j(\varphi, \psi, \chi), \\ \frac{1}{\sigma_j} \cdot \int_0^t g_{j,i}^1(f_j^{-1}(\widehat{t} + f_j(\varphi, \psi, \chi) - t, \psi, \chi), \psi, \chi, \widehat{t}) d\widehat{t}, t < f_j(\varphi, \psi, \chi), \end{cases}$$

$$U_{j,i}(\varphi, \psi, \chi, r, t) = \frac{1}{\sigma_j^*} d_j^* \int_0^t \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} U_{j,i-1}(\varphi, \psi, \chi, r, \widehat{t}) + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} U_{j,i-1}(\varphi, \psi, \chi, r, \widehat{t}) \right) d\widehat{t},$$

де $f_j(\varphi, \psi, \chi) = \kappa_j \sigma_j \int_{\varphi_{*(j-1)}^*}^{\varphi} \frac{d\widehat{\varphi}}{\tilde{v}^2(\widehat{\varphi}, \psi, \chi)}$ – час проходження відповідними частин-

ками від точки $(x(\varphi_{*(j-1)}^*, \psi, \chi), y(\varphi_{*(j-1)}^*, \psi, \chi), z(\varphi_{*(j-1)}^*, \psi, \chi)) \in E_{j-1} F_{j-1} F_{*(j-1)}^* E_{*(j-1)}$

до точки $(x(\varphi, \psi, \chi), y(\varphi, \psi, \chi), z(\varphi, \psi, \chi)) \in G_z^j$ вздовж відповідної лінії течії

$(j = \overline{2, m})$, $f_j^{-1} (j = \overline{2, m})$ – функції, обернені відповідно до $f_j (j = \overline{2, m})$

відносно змінної φ (такі функції існують, оскільки $\tilde{v}^2(\varphi, \psi, \chi)$ – неперервно-

диференційовна, обмежена, додатньо-визначена функція, а $\kappa_j, \sigma_j (j = \overline{2, m})$ –

додатньо-визначені сталі).

Для знаходження примезових поправок $\Pi_{j,i} (i = \overline{0, n+1}, j = \overline{1, m})$ в околі ділянки $\varphi = \varphi^*$ одержано такі задачі:

$$\begin{cases} d_m \frac{\partial^2 \Pi_i^{\Pi_i}}{\partial \xi^2} + \kappa_m \frac{\partial}{\partial \xi} = g_i^3(\xi, \psi, \chi, t), \\ \Pi_i(\xi, \psi, \chi, t) \rightarrow 0, \Pi_i(0, \psi, \chi, t) = u_i^4(\psi, \chi, t), \end{cases} \quad (3.35)$$

де $g_0^4(\xi, \psi, \chi, t) = 0$, $u_0^4(\psi, \chi, t) = C^*(\psi, \chi, t) - C_{m,0}(\varphi^*, \psi, \chi, t)$, $g_1^4(\xi, \psi, \chi, t) =$

$$= \frac{\kappa_m^2}{\tilde{v}^2(\varphi^*, \psi, \chi)} \left(\sigma_m \frac{\partial \Pi_0}{\partial t} - d_m \frac{V_1}{\kappa_m^2} \frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial \xi^2} - \frac{V_1}{\kappa_m} \frac{\partial \Pi_0}{\partial \xi} \right), \quad u_i^4(\psi, \chi, t) = -C_{m,i}(\varphi^*, \psi, \chi, t),$$

$$g_i^4(\xi, \psi, \chi, t) = \frac{\kappa_m^2}{\tilde{v}^2(\varphi^*, \psi, \chi)} \left(\sigma_m \frac{\partial}{\partial t} \Pi_{i-1} - \sum_{s=1}^i \left(d_m \frac{V_s}{\kappa_m^2} \frac{\partial^2 \Pi_{i-s}}{\partial \xi^2} + \frac{V_s}{\kappa_m} \frac{\partial \Pi_{i-s}}{\partial \xi} \right) - \right. \\ \left. - d_m \sum_{s=0}^{i-2} \left(B_{1,1,s} \frac{\partial^2 \Pi_{i-2-s}}{\partial \psi^2} + B_{2,1,s} \frac{\partial \Pi_{i-2-s}}{\partial \psi} + B_{1,2,s} \frac{\partial^2 \Pi_{i-2-s}}{\partial \chi^2} + B_{2,2,k} \frac{\partial \Pi_{i-2-s}}{\partial \chi} \right) \right) \quad (i = \overline{2, n+1}),$$

$u_{n+1}^4(\psi, \chi, t) = 0$, V_s , $B_{1,1,s}$, $B_{1,2,s}$, $B_{2,1,s}$, $B_{2,2,s}$ – коефіцієнти при s -тих степенях ε у розкладі відповідних функцій $\tilde{v}^2(\varphi^* - \varepsilon\xi, \psi, \chi)$, $b_{1,1}(\varphi^* - \varepsilon\xi, \psi, \chi)$, $b_{1,2}(\varphi^* - \varepsilon\xi, \psi, \chi)$, $b_{2,1}(\varphi^* - \varepsilon\xi, \psi, \chi)$, $b_{2,2}(\varphi^* - \varepsilon\xi, \psi, \chi)$ у ряд Тейлора в околі $\varphi = \varphi^*$.

У результаті їх послідовного розв'язання отримаємо:

$$\Pi_0(\xi, \psi, \chi, t) = \frac{d_m}{\kappa_m} \cdot \left(C^*(\psi, \chi, t) - C_0(\varphi^*, \psi, \chi, t) \right) \cdot e^{-\frac{\kappa_m \xi}{d_m}},$$

$$\Pi_i(\xi, \psi, \chi, t) = \frac{1}{d_m} \cdot \int_0^\xi \left(e^{-\frac{\kappa_m \tilde{\xi}}{d_m}} \cdot \int_0^{\tilde{\xi}} g_i^4(\tilde{\xi}, \psi, \chi, t) \cdot e^{\frac{\kappa_m \tilde{\xi}}{d_m}} d\tilde{\xi} \right) d\xi - C_i(\varphi^*, \psi, \chi, t) \quad (i = \overline{1, n}),$$

$$\Pi_{n+1}(\xi, \psi, \chi, t) = \frac{1}{d_m} \cdot \int_0^\xi \left(e^{-\frac{\kappa_m \tilde{\xi}}{d_m}} \cdot \int_0^{\tilde{\xi}} g_{n+1}^4(\tilde{\xi}, \psi, \chi, t) \cdot e^{\frac{\kappa_m \tilde{\xi}}{d_m}} d\tilde{\xi} \right) d\xi.$$

Для знаходження примежових поправок $\tilde{P}_{j,i} = \tilde{P}_{j,i}(\tilde{\phi}_j, \psi, \chi, t)$ ($j = \overline{1, m-1}$, $i = \overline{0, n+1}$) та $\tilde{\tilde{P}}_{j,i} = \tilde{\tilde{P}}_{j,i}(\tilde{\tilde{\phi}}_{j-1}, \psi, \chi, t)$ ($j = \overline{2, m}$, $i = \overline{0, n+1}$) в околі ділянки на поверхні розділу шарів $E_j F_j F_{*j} E_{*j}$ ($j = \overline{1, m-1}$) отримаємо такі задачі:

$$\left\{ \begin{array}{l} d_j \frac{\partial^2 \tilde{P}_{j,i}}{\partial \tilde{\phi}_j^2} + \kappa_j \frac{\partial \tilde{P}_{j,i}}{\partial \tilde{\phi}_j} = g_{j,i}^5, \quad d_{j+1} \frac{\partial \tilde{P}_{j+1,i}}{\partial \tilde{\phi}_j^2} - \kappa_{j+1} \frac{\partial \tilde{P}_{j+1,i}}{\partial \tilde{\phi}_j} = g_{j,i}^6, \\ \tilde{P}_{j,i}(\tilde{\phi}_j, \psi, \chi, t) \xrightarrow{\tilde{\phi}_j \rightarrow \infty} 0, \quad \tilde{\tilde{P}}_{j+1,i}(\tilde{\tilde{\phi}}_{j-1}, \psi, \chi, t) \xrightarrow{\tilde{\tilde{\phi}}_{j-1} \rightarrow \infty} 0, \quad \tilde{P}_{s,i}(0, \psi, \chi, t) = \tilde{\tilde{P}}_{j+1,i}(0, \psi, \chi, t), \\ d_j \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{\phi}_j} C_{j,i}(0, \psi, \chi, t) + \frac{\partial}{\partial \tilde{\phi}_j} \tilde{P}_{j,i}(0, \psi, \chi, t) \right) + \kappa_j \left(C_{j,i}(0, \psi, \chi, t) + \tilde{P}_{j,i}(0, \psi, \chi, t) \right) = \\ = -d_{j+1} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{\phi}_j} C_{j+1,i}(0, \psi, \chi, t) + \frac{\partial}{\partial \tilde{\phi}_j} \tilde{\tilde{P}}_{j+1,i}(0, \psi, \chi, t) \right) + \\ + \kappa_{j+1} \left(C_{j+1,i}(0, \psi, \chi, t) + \tilde{\tilde{P}}_{j+1,i}(0, \psi, \chi, t) \right), \quad (j = \overline{1, m-1}, i = \overline{1, n}), \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_j \frac{\partial^2 \tilde{P}_{j,n+1}}{\partial \tilde{\phi}_j^2} + \kappa_j \frac{\partial \tilde{P}_{j,n+1}}{\partial \tilde{\phi}_j} = g_{j,n+1}^5, d_{j+1} \frac{\partial^2 \tilde{P}_{j+1,n+1}}{\partial \tilde{\phi}_j^2} - \kappa_{j+1} \frac{\partial \tilde{P}_{j+1,n+1}}{\partial \tilde{\phi}_j} = g_{j,n+1}^6, \\ \tilde{P}_{j,n+1}(\tilde{\phi}_j, \psi, \chi, t) \xrightarrow{\tilde{\phi}_j \rightarrow \infty} 0, \tilde{P}_{j+1,n+1}(\tilde{\phi}_j, \psi, \chi, t) \xrightarrow{\tilde{\phi}_j \rightarrow -\infty} 0, \tilde{P}_{s,n+1}(0, \psi, \chi, t) = \tilde{P}_{j+1,n+1}(0, \psi, \chi, t), \\ d_j \frac{\partial}{\partial \tilde{\phi}_j} \tilde{P}_{j,n+1}(0, \psi, \chi, t) + \kappa_j \tilde{P}_{j,n+1}(0, \psi, \chi, t) = \\ = -d_{j+1} \frac{\partial}{\partial \tilde{\phi}_j} \tilde{P}_{j+1,i}(0, \psi, \chi, t) + \kappa_{j+1} \cdot \tilde{P}_{j+1,i}(0, \psi, \chi, t), (j = \overline{1, m-1}), \end{array} \right.$$

де $g_{j,0}^5 = 0, \quad g_{j,0}^6 = 0, \quad g_{j,1}^5 = \frac{\kappa_j^2}{\tilde{v}^2(\varphi_{*j}^*, \psi, \chi)} \left(\sigma_j \frac{\partial \tilde{P}_{j,0}}{\partial t} - d_j \frac{\tilde{V}_{j,1}}{\kappa_j^2} \frac{\partial^2 \tilde{P}_{j,0}}{\partial \tilde{\phi}_j^2} - \frac{\tilde{V}_{j,1}}{\kappa_j} \frac{\partial \tilde{P}_{j,0}}{\partial \tilde{\phi}_j} \right),$

$$g_{j,1}^5 = \frac{\kappa_{j+1}^2}{\tilde{v}^2(\varphi_{*j}^*, \psi, \chi)} \left(\sigma_{j+1} \frac{\partial \tilde{P}_{j+1,0}}{\partial t} - d_{j+1} \frac{\tilde{V}_{j,1}}{\kappa_{j+1}^2} \frac{\partial^2 \tilde{P}_{j,0}}{\partial \tilde{\phi}_j^2} - \frac{\tilde{V}_{j,1}}{\kappa_{j+1}} \frac{\partial \tilde{P}_{j,0}}{\partial \tilde{\phi}_j} \right), \quad g_{j,i}^5 = \frac{\kappa_j^2}{\tilde{v}^2(\varphi_{*j}^*, \psi, \chi)} \times$$

$$\times \left(\sigma_j \frac{\partial \tilde{P}_{j,i-1}}{\partial t} - \sum_{s=1}^i \left(d_j \frac{\tilde{V}_{j,s}}{\kappa_j^2} \frac{\partial^2 \tilde{P}_{j,i-s}}{\partial \tilde{\phi}_j \tilde{\phi}_j} - \frac{\tilde{V}_{j,s}}{\kappa_j} \frac{\partial \tilde{P}_{j,i-s}}{\partial \tilde{\phi}_j} \right) - d_j \sum_{s=0}^{i-2} \left(\tilde{B}_{1,1,j,s} \frac{\partial^2 \tilde{P}_{j,i-2-s}}{\partial \psi^2} + \tilde{B}_{2,1,j,s} \frac{\partial \tilde{P}_{j,i-2-s}}{\partial \psi} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \tilde{B}_{1,2,j,s} \frac{\partial^2 \tilde{P}_{j,i-2-s}}{\partial \chi^2} + \tilde{B}_{2,2,j,s} \frac{\partial \tilde{P}_{j,i-2-s}}{\partial \chi} \right) \right), \quad g_{j,i}^6 = \frac{\kappa_{j+1}^2}{\tilde{v}^2(\varphi_{*j}^*, \psi, \chi)} \left(\sigma_{j+1} \frac{\partial \tilde{P}_{j+1,i-1}}{\partial t} - \sum_{s=1}^i \left(d_j \frac{\tilde{V}_{j,s}}{\kappa_{j+1}^2} \frac{\partial \tilde{P}_{j+1,i-s}}{\partial \tilde{\phi}_j^2} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\tilde{V}_{j,s}}{\kappa_{j+1}} \frac{\partial \tilde{P}_{j+1,i-s}}{\partial \tilde{\phi}_j} \right) - d_j \sum_{s=0}^{i-2} \left(\tilde{B}_{1,1,j,s} \frac{\partial \tilde{P}_{j+1,i-2-s}}{\partial \psi^2} + \tilde{B}_{2,1,j,s} \frac{\partial \tilde{P}_{j+1,i-2-s}}{\partial \psi} + \tilde{B}_{1,2,j,s} \frac{\partial \tilde{P}_{j+1,i-2-s}}{\partial \chi^2} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \tilde{B}_{2,2,j,s} \frac{\partial \tilde{P}_{j+1,i-2-s}}{\partial \chi} \right) \right) \quad (j = \overline{2, m-1}, i = \overline{1, n+1}), \quad \tilde{V}_{j,s}, \tilde{V}_{j,s}, \tilde{B}_{1,1,j,s}, \tilde{B}_{1,1,j,s}, \tilde{B}_{1,2,j,s}, \tilde{B}_{1,2,j,s},$$

$\tilde{B}_{2,1,j,s}, \tilde{B}_{2,1,j,s}, \tilde{B}_{2,2,j,s}, \tilde{B}_{2,2,j,s}$ ($j = \overline{1, m-1}$) – коефіцієнти при s -тих степенях ε у

розкладах функцій $\tilde{v}^2(\varphi_{*j}^* - \varepsilon \cdot \tilde{\phi}_j, \psi, \chi)$, $\tilde{v}^2(\varphi_{*j}^* + \varepsilon \cdot \tilde{\phi}_j, \psi, \chi)$, $b_{1,1}(\varphi_{*j}^* - \varepsilon \cdot \tilde{\phi}_j, \psi, \chi)$,

$b_{1,1}(\varphi_{*j}^* + \varepsilon \cdot \tilde{\phi}_j, \psi, \chi)$, $b_{1,2}(\varphi_{*j}^* - \varepsilon \cdot \tilde{\phi}_j, \psi, \chi)$, $b_{1,2}(\varphi_{*j}^* + \varepsilon \cdot \tilde{\phi}_j, \psi, \chi)$, $b_{2,1}(\varphi_{*j}^* - \varepsilon \cdot \tilde{\phi}_j, \psi, \chi)$,

$b_{2,1}(\varphi_{*j}^* + \varepsilon \cdot \tilde{\phi}_j, \psi, \chi)$, $b_{2,2}(\varphi_{*j}^* - \varepsilon \cdot \tilde{\phi}_j, \psi, \chi)$, $b_{2,2}(\varphi_{*j}^* + \varepsilon \cdot \tilde{\phi}_j, \psi, \chi)$ у ряд Тейлора

відповідно в околі $\varphi = \varphi_{*j}^*$ ($j = \overline{1, m-1}$).

Розв'язки відповідних задач мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_{j,0}(\tilde{\phi}_j, \psi, \chi, t) &= \frac{1}{2(\kappa_{j+1} - \kappa_j)} \left(d_{j+1} \frac{\partial}{\partial \tilde{\phi}_j} C_{j+1,0}(0, \psi, \chi, t) + d_j \frac{\partial}{\partial \tilde{\phi}_j} C_{j,0}(0, \psi, \chi, t) + \right. \\
&\quad \left. + \kappa_j C_{j,0}(0, \psi, \chi, t) - \kappa_{j+1} C_{j+1,0}(0, \psi, \chi, t) \right) \cdot e^{-\frac{\kappa_j}{d_j} \tilde{\phi}_j} \quad (j = \overline{1, m-1}), \\
\tilde{P}_{j,0}(\tilde{\phi}_{j-1}, \psi, \chi, t) &= \frac{1}{2(\kappa_j - \kappa_{j-1})} \left(d_j \frac{\partial}{\partial \tilde{\phi}_{j-1}} C_{j,0}(0, \psi, \chi, t) - d_{j-1} \frac{\partial}{\partial \tilde{\phi}_{j-1}} C_{j-1,0}(0, \psi, \chi, t) + \right. \\
&\quad \left. + \kappa_{j-1} C_{j-1,0}(0, \psi, \chi, t) - \kappa_j C_{j,0}(0, \psi, \chi, t) \right) \cdot e^{\frac{\kappa_j}{d_j} \tilde{\phi}_{j-1}} \quad (j = \overline{2, m}), \\
\tilde{P}_{j,i}(\tilde{\phi}_j, \psi, \chi, t) &= \frac{1}{d_j} \int_0^{\tilde{\phi}_j} \left(e^{-\frac{\kappa_j}{d_j} \hat{\varphi}} \int_0^{\hat{\varphi}} g_{j,i}^5(\hat{\varphi}, \psi, \chi, t) e^{\frac{\kappa_j}{d_j} \hat{\varphi}} d\hat{\varphi} \right) d\hat{\varphi} + \frac{1}{\kappa_{j+1} - \kappa_j} \times \\
&\quad \times \left(d_j \frac{\partial}{\partial \tilde{\phi}_j} C_{j,i}(0, \psi, \chi, t) + d_{j+1} \frac{\partial}{\partial \tilde{\phi}_j} C_{j+1,i}(0, \psi, \chi, t) + \right. \\
&\quad \left. + \kappa_j C_{j,i}(0, \psi, \chi, t) - \kappa_{j+1} C_{j+1,i}(0, \psi, \chi, t) \right) \quad (j = \overline{1, m-1}, i = \overline{1, n}), \\
\tilde{P}_{j,i}(\tilde{\phi}_{j-1}, \psi, \chi, t) &= \frac{1}{d_j} \int_0^{\tilde{\phi}_{j-1}} \left(e^{-\frac{\kappa_j}{d_j} \hat{\varphi}} \int_0^{\hat{\varphi}} g_{j,i}^6(\hat{\varphi}, \psi, \chi, t) e^{\frac{\kappa_j}{d_j} \hat{\varphi}} d\hat{\varphi} \right) d\hat{\varphi} + \frac{1}{\kappa_j - \kappa_{j-1}} \times \\
&\quad \times \left(d_{j-1} \frac{\partial}{\partial \tilde{\phi}_{j-1}} C_{j-1,i}(0, \psi, \chi, t) + d_j \frac{\partial}{\partial \tilde{\phi}_{j-1}} C_{j,i}(0, \psi, \chi, t) + \kappa_{j-1} C_{j-1,i}(0, \psi, \chi, t) - \right. \\
&\quad \left. - \kappa_j C_{j,i}(0, \psi, \chi, t) \right) \quad (j = \overline{2, m}, i = \overline{1, n}), \\
\tilde{P}_{j,n+1}(\tilde{\phi}_j, \psi, \chi, t) &= \frac{1}{d_j} \int_0^{\tilde{\phi}_j} \left(e^{-\frac{\kappa_j}{d_j} \hat{\varphi}} \int_0^{\hat{\varphi}} g_{j,n+1}^5(\hat{\varphi}, \psi, \chi, t) e^{\frac{\kappa_j}{d_j} \hat{\varphi}} d\hat{\varphi} \right) d\hat{\varphi} \quad (j = \overline{1, m-1}), \\
\tilde{P}_{j,n+1}(\tilde{\phi}_{j-1}, \psi, \eta, t) &= \frac{1}{d_j} \int_0^{\tilde{\phi}_{j-1}} \left(e^{-\frac{\kappa_j}{d_j} \hat{\varphi}} \int_0^{\hat{\varphi}} g_{j,n+1}^6(\hat{\varphi}, \psi, \chi, t) e^{\frac{\kappa_j}{d_j} \hat{\varphi}} d\hat{\varphi} \right) d\hat{\varphi} \quad (j = \overline{2, m}).
\end{aligned}$$

Для врахування впливу бічних джерел забруднення будуюмо поправки

$$P_{j,i/2}(\varphi, \mu, \chi, t), \quad \Gamma_{(j,i/2)}(\varphi, \eta, \chi, t), \quad H_{(j,i/2)}(\varphi, \psi, \lambda, t), \quad E_{(j,i/2)}(\varphi, \psi, \gamma, t)$$

($j = \overline{1, m}$ $i = \overline{0, 2n+1}$):

$$\begin{cases} b_{1,1}(\varphi, 0, \eta) d_j \frac{\partial^2 P_{j,i}}{\partial \mu^2} - \tilde{v}^2(\varphi, 0, \chi) \frac{\partial P_{j,i}}{\partial \varphi} = g_{j,i}^7(\varphi, \mu, \chi, t), \\ P_{j,i}(\varphi, \mu, \chi, t) \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} 0, P_{j,i}(\varphi, 0, \chi, t) = u_{j,i}^7(\varphi, \chi, t), \end{cases} \quad (3.28)$$

$$\begin{cases} b_{1,1}(\varphi, Q^*, \chi) d_j \frac{\partial^2 \Gamma_{j,i}}{\partial \eta^2} - \tilde{v}^2(\varphi, Q^*, \chi) \frac{\partial \Gamma_{j,i}}{\partial \varphi} = g_{j,i}^8(\varphi, \eta, \chi, t), \\ \Gamma_{j,i}(\varphi, \eta, \chi, t) \xrightarrow{\eta \rightarrow \infty} 0, \Gamma_{j,i}(\varphi, 0, \chi, t) = u_{j,i}^8(\varphi, \chi, t), \end{cases} \quad (3.29)$$

$$\begin{cases} b_{1,2}(\varphi, \psi, 0) d_j \frac{\partial^2 H_{j,i}}{\partial \lambda^2} - \tilde{v}^2(\varphi, \psi, 0) \frac{\partial H_{j,i}}{\partial \varphi} = g_{j,i}^9(\varphi, \psi, \lambda, t), \\ H_{j,i}(\varphi, \psi, \lambda, t) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0, H_{j,i}(\varphi, \psi, 0, t) = u_{j,i}^9(\varphi, \psi, t), \end{cases} \quad (3.30)$$

$$\begin{cases} b_{1,2}(\varphi, \psi, Q^*) d_j \frac{\partial^2 E_{j,i}}{\partial \gamma^2} - \tilde{v}^2(\varphi, \psi, Q^*) \frac{\partial E_{j,i}}{\partial \varphi} = g_{j,i}^{10}(\varphi, \psi, \gamma, t), \\ E_{j,i}(\varphi, \psi, \gamma, t) \xrightarrow{\gamma \rightarrow \infty} 0, E_{j,i}(\varphi, \psi, 0, t) = u_{j,i}^{10}(\varphi, \psi, t), \end{cases} \quad (3.31)$$

де $g_{j,0}^7(\varphi, \mu, \chi, t) = 0$, $g_{j, \frac{1}{2}}^7(\varphi, \mu, \chi, t) = \tilde{V}_{\frac{1}{2}} \frac{\partial P_{j,0}}{\partial \varphi} - \tilde{B}_{11, \frac{1}{2}} d_j \frac{\partial^2 P_{j,0}}{\partial \mu^2} - \tilde{B}_{21, \frac{1}{2}} d_j \frac{\partial P_{j,0}}{\partial \mu}$,

$$g_{j, \frac{i}{2}}^7(\varphi, \mu, \chi, t) = \sum_{s=1}^i \tilde{V}_{\frac{i}{2}} \frac{\partial P_{j, (i-s)/2}}{\partial \varphi} - d_j \left(\sum_{s=1}^i \left(\tilde{B}_{11, \frac{i}{2}} \frac{\partial^2 P_{j, (i-s)/2}}{\partial \mu^2} + \tilde{B}_{21, \frac{i}{2}} \frac{\partial P_{j, (i-s)/2}}{\partial \mu} \right) - \sum_{s=0}^{i-2} \tilde{V}_{\frac{i}{2}} \frac{\partial^2 P_{j, (i-s)/2-1}}{\partial \varphi^2} - \sum_{s=0}^{i-2} \tilde{B}_{1,2, \frac{i}{2}} \frac{\partial^2 P_{j, (i-s)/2-1}}{\partial \chi^2} - \sum_{s=0}^{i-2} \tilde{B}_{2,2, \frac{i}{2}} \frac{\partial P_{j, (i-s)/2-1}}{\partial \chi} \right) \quad (i = \overline{2, 2n+1}), \tilde{V}_s,$$

$\tilde{B}_{1,1,s}$, $\tilde{B}_{1,2,s}$, $\tilde{B}_{2,1,s}$ і $\tilde{B}_{2,2,s}$ коефіцієнти при s -их степенях $\sqrt{\varepsilon}$ в розкладі функцій

$v^2(\varphi, \sqrt{\varepsilon} \mu, \chi)$, $b_{1,1}(\varphi, \sqrt{\varepsilon} \mu, \chi)$, $b_{1,2}(\varphi, \sqrt{\varepsilon} \mu, \chi)$, $b_{2,1}(\varphi, \sqrt{\varepsilon} \mu, \chi)$ і $b_{2,2}(\varphi, \sqrt{\varepsilon} \mu, \chi)$ в

ряд Тейлора в околі $\psi = 0$, $u_{j,0}^7(\varphi, \chi, t) = C_{j^{**}}(\varphi, \chi, t) - C_{j,0}(\varphi, 0, \chi, t) -$

$$- \Pi_{(j,0)}(\varphi, 0, \chi, t), \quad u_{j, \frac{i}{2}}^7(\varphi, \chi, t) = \begin{cases} -C_{j, \frac{i}{2}}(\varphi, 0, \chi, t) - \Pi_{j, \frac{i}{2}}(\varphi, 0, \chi, t), \text{ якщо } i \text{ парне,} \\ 0, \text{ якщо } i \text{ непарне, } i = \overline{1, 2n+1}, \end{cases}$$

$$g_{j,0}^8(\varphi, \eta, \chi, t) = 0, \quad g_{j, \frac{1}{2}}^8(\varphi, \eta, \chi, t) = \tilde{V}_{\frac{1}{2}}^* \frac{\partial \Gamma_{j,0}}{\partial \varphi} - \tilde{B}_{11, \frac{1}{2}}^* d_j \frac{\partial^2 \Gamma_{j,0}}{\partial \eta^2} - \tilde{B}_{21, \frac{1}{2}}^* d_j \frac{\partial \Gamma_{j,0}}{\partial \eta},$$

$$g_{j,\frac{i}{2}}^8(\varphi, \eta, \chi, t) = \sum_{s=1}^i \tilde{V}_{\frac{i}{2}}^* \frac{\partial \Gamma_{j,(i-s)/2}}{\partial \varphi} - d_j \left(\sum_{s=1}^i \left(\tilde{B}_{1,1,\frac{i}{2}}^* \frac{\partial^2 \Gamma_{j,(i-s)/2}}{\partial \eta^2} + \tilde{B}_{2,1,\frac{i}{2}}^* \frac{\partial \Gamma_{j,(i-s)/2}}{\partial \eta} \right) - \right. \\ \left. - \sum_{s=0}^{i-2} \tilde{V}_{\frac{i}{2}}^* \frac{\partial^2 \Gamma_{j,(i-s)/2-1}}{\partial \varphi^2} - \sum_{s=0}^{i-2} \tilde{B}_{1,2,\frac{i}{2}}^* \frac{\partial^2 \Gamma_{j,(i-s)/2-1}}{\partial \chi^2} - \sum_{s=0}^{i-2} \tilde{B}_{2,2,\frac{i}{2}}^* \frac{\partial \Gamma_{j,(i-s)/2-1}}{\partial \chi} \right), \quad i = \overline{2, 2n+1}, \quad \tilde{V}_s^*,$$

$\tilde{B}_{11,s}^*$, $\tilde{B}_{12,s}^*$, $\tilde{B}_{21,s}^*$ і $\tilde{B}_{22,s}^*$ коефіцієнти при s -их степенях $\sqrt{\varepsilon}$ в розкладі функцій $v^2(\varphi, Q_* - \sqrt{\varepsilon}\eta, \chi)$, $b_{1,1}(\varphi, Q_* - \sqrt{\varepsilon}\eta, \chi)$, $b_{1,2}(\varphi, Q_* - \sqrt{\varepsilon}\eta, \chi)$, $b_{2,1}(\varphi, Q_* - \sqrt{\varepsilon}\eta, \chi)$ і $b_{2,2}(\varphi, Q_* - \sqrt{\varepsilon}\eta, \chi)$ в ряд Тейлора в околі $\psi = Q_*$,

$$u_{j,0}^8(\varphi, \chi, t) = C_j^{**}(\varphi, \chi, t) - C_{j,0}(\varphi, Q^*, \chi, t) - \Pi_{j,0}(\varphi, Q^*, \chi, t),$$

$$u_{j,\frac{i}{2}}^8(\varphi, \chi, t) = \begin{cases} -C_{j,\frac{i}{2}}(\varphi, Q^*, \chi, t) - \Pi_{j,\frac{i}{2}}(\varphi, Q^*, \chi, t), \text{ якщо } i \text{ парне,} \\ 0, \text{ якщо } i \text{ непарне, } i = \overline{1, 2n+1}, \end{cases}$$

$$g_{j,0}^9(\varphi, \psi, \lambda, t) = 0, \quad g_{j,\frac{1}{2}}^9(\varphi, \psi, \lambda, t) = \bar{V}_{\frac{1}{2}} \frac{\partial H_{j,0}}{\partial \varphi} - d_j \left(\bar{B}_{1,2,\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 H_{j,0}}{\partial \lambda^2} - \bar{B}_{2,2,\frac{1}{2}} \frac{\partial H_{j,0}}{\partial \lambda} \right),$$

$$g_{j,\frac{i}{2}}^9(\varphi, \psi, \lambda, t) = \sum_{s=1}^i \bar{V}_{\frac{i}{2}} \frac{\partial H_{j,(i-s)/2}}{\partial \varphi} - d_j \left(\sum_{s=1}^i \left(\bar{B}_{1,2,\frac{i}{2}} \frac{\partial^2 H_{j,(i-s)/2}}{\partial \lambda^2} + \bar{B}_{2,2,\frac{i}{2}} \frac{\partial H_{j,(i-s)/2}}{\partial \lambda} \right) - \right. \\ \left. - \sum_{s=0}^{i-2} \bar{V}_{\frac{i}{2}} \frac{\partial^2 H_{j,(i-s)/2-1}}{\partial \varphi^2} - \sum_{s=0}^{i-2} \bar{B}_{1,1,\frac{i}{2}} \frac{\partial^2 H_{j,(i-s)/2-1}}{\partial \psi^2} - \sum_{s=0}^{i-2} \bar{B}_{2,1,\frac{i}{2}} \frac{\partial H_{j,(i-s)/2-1}}{\partial \psi} \right), \quad i = \overline{2, 2n+1}, \quad \bar{V}_s,$$

$\bar{B}_{1,1,s}$, $\bar{B}_{1,2,s}$, $\bar{B}_{2,1,s}$ і $\bar{B}_{2,2,s}$ коефіцієнти при s -их степенях $\sqrt{\varepsilon}$ в розкладі функцій $v^2(\varphi, \psi, \sqrt{\varepsilon}\lambda)$, $b_{1,1}(\varphi, \psi, \sqrt{\varepsilon}\lambda)$, $b_{1,2}(\varphi, \psi, \sqrt{\varepsilon}\lambda)$, $b_{2,1}(\varphi, \psi, \sqrt{\varepsilon}\lambda)$ і $b_{2,2}(\varphi, \psi, \sqrt{\varepsilon}\lambda)$ в ряд

Тейлора в околі $\chi = 0$, $u_{j,0}^9(\varphi, \psi, t) = C_{j,0}^9(\varphi, \psi, t) - C_{j,0}(\varphi, \psi, 0, t) -$

$$- \Pi_{(j,0)}(\varphi, \psi, 0, t), \quad u_{j,\frac{i}{2}}^9(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} -C_{j,\frac{i}{2}}(\varphi, \psi, 0, t) - \Pi_{j,\frac{i}{2}}(\varphi, \psi, 0, t), \text{ якщо } i \text{ парне,} \\ 0, \text{ якщо } i \text{ непарне, } i = \overline{1, 2n+1}, \end{cases}$$

$$g_{j,0}^{10}(\varphi, \psi, \gamma, t) = 0, \quad g_{j,\frac{1}{2}}^{10}(\varphi, \psi, \gamma, t) = \bar{V}_{\frac{1}{2}}^* \frac{\partial E_{j,0}}{\partial \varphi} - d_j \left(\bar{B}_{1,2,\frac{1}{2}}^* \frac{\partial^2 E_{j,0}}{\partial \gamma^2} - \bar{B}_{2,2,\frac{1}{2}}^* \frac{\partial E_{j,0}}{\partial \gamma} \right),$$

$$g_{j,\frac{i}{2}}^{10}(\varphi, \psi, \gamma, t) = \sum_{s=1}^i \bar{V}_{\frac{i}{2}}^* \frac{\partial E_{j,(i-s)/2}}{\partial \varphi} - d_j \left(\sum_{s=1}^i \left(\bar{B}_{1,2,\frac{i}{2}}^* \frac{\partial^2 E_{j,(i-s)/2}}{\partial \gamma^2} + \bar{B}_{2,2,\frac{i}{2}}^* \frac{\partial E_{j,(i-s)/2}}{\partial \gamma} \right) - \right.$$

$$\left. - \sum_{s=0}^{i-2} \bar{V}_{i, \frac{i}{2}}^* \frac{\partial^2 E_{j, (i-s)/2-1}}{\partial \varphi^2} - \sum_{s=0}^{i-2} \bar{B}_{1,1, \frac{i}{2}}^* \frac{\partial^2 E_{j, (i-s)/2-1}}{\partial \psi^2} - \sum_{s=0}^{i-2} \bar{B}_{2,1, \frac{i}{2}}^* \frac{\partial E_{j, (i-s)/2-1}}{\partial \psi} \right), \quad i = \overline{2, 2n+1}, \bar{V}_s^*,$$

$\bar{B}_{1,1,s}^*$, $\bar{B}_{1,2,s}^*$, $\bar{B}_{2,1,s}^*$ і $\bar{B}_{2,2,s}^*$ коефіцієнти при s -их степенях $\sqrt{\varepsilon}$ в розкладі функцій $v^2(\varphi, \psi, Q^* - \sqrt{\varepsilon}\gamma)$, $b_{1,1}(\varphi, \psi, Q^* - \sqrt{\varepsilon}\gamma)$, $b_{1,2}(\varphi, \psi, Q^* - \sqrt{\varepsilon}\gamma)$, $b_{2,1}(\varphi, \psi, Q^* - \sqrt{\varepsilon}\gamma)$ і $b_{2,2}(\varphi, \psi, Q^* - \sqrt{\varepsilon}\gamma)$ в ряд Тейлора в околі $\chi = Q^*$, $w_{j,0}^7(\varphi, \psi, t) = C_j^{***}(\varphi, \psi, t - C_{j,0}(\varphi, \psi, Q^{**}, t) - \Pi_{j,0}(\varphi, \psi, Q^{**}, t)$,

$$u_{j, \frac{i}{2}}^{10}(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} -C_{j, \frac{i}{2}}(\varphi, \psi, Q^*, t) - \Pi_{j, \frac{i}{2}}(\varphi, \psi, Q^*, t), & \text{якщо } i \text{ парне,} \\ 0, & \text{якщо } i \text{ непарне, } i = \overline{1, 2n+1}. \end{cases}$$

Для функцій $F_{j, i/2}(\varphi, \psi, \chi, \rho, t)$ отримуємо задачу:

$$\begin{cases} \sigma_2 \frac{\partial}{\partial t} F_{j, \frac{i}{2}}(\varphi, \psi, \chi, \rho, t) = d_j^* \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} F_{j, \frac{i}{2}}(\varphi, \psi, \chi, \rho, t) + g_{j, \frac{i}{2}}^{11}(\varphi, \psi, \chi, \rho, t), \\ F_{j, \frac{i}{2}}(\varphi, \psi, \chi, \rho, 0) = 0, F_{j, \frac{i}{2}}(\varphi, \psi, \chi, 0, t) = u_{j, \frac{i}{2}}^{11}(\varphi, \psi, \chi, t), \left. \frac{\partial}{\partial \rho} F_{j, \frac{i}{2}}(\varphi, \psi, \chi, \rho, t) \right|_{\rho \rightarrow \infty} = 0, \end{cases}$$

$$\text{де } g_{j,0}^{11}(\varphi, \psi, \chi, \rho, t) = 0, \quad g_{j, \frac{i}{2}}^{11}(\varphi, \psi, \chi, \rho, t) = \sum_{s=1}^i \frac{2\rho^{s-1}}{R^s} d_j^* \frac{\partial}{\partial \rho} F_{j, \frac{i-1}{2}}(\varphi, \psi, \chi, \rho, t),$$

$$u_{j, \frac{i}{2}}^{11}(\varphi, \psi, \chi, t) = \begin{cases} k_j (C_{j, \frac{i}{2}} + I_{1,j} \tilde{P}_{j, \frac{i}{2}} + I_{2,j} \tilde{P}_{j, \frac{i}{2}} + I_{3,j} \Pi_{j, \frac{i}{2}} + \\ + P_{j, \frac{i}{2}} + \Gamma_{j, \frac{i}{2}} + H_{j, \frac{i}{2}} + E_{j, \frac{i}{2}}), & \text{якщо } i \text{ парне;} \\ k_j (P_{j, \frac{i}{2}} + \Gamma_{j, \frac{i}{2}} + H_{j, \frac{i}{2}} + E_{j, \frac{i}{2}}), & \text{якщо } i \text{ непарне;} \end{cases}$$

$$u_{j, n+1}^{11}(\varphi, \psi, \chi, t) = k_j (I_{1,j} \tilde{P}_{j, \frac{i}{2}} + I_{2,j} \tilde{P}_{j, \frac{i}{2}} + I_{3,j} \Pi_{j, \frac{i}{2}} + P_{j, \frac{i}{2}} + \Gamma_{j, \frac{i}{2}} + H_{j, \frac{i}{2}} + E_{j, \frac{i}{2}}).$$

Застосована методика “розщеплення” вихідної задачі та конструкція побудови розв’язку шляхом доповнення розв’язку відповідної виродженої задачі різними поправками, зокрема поправками в околах поверхонь розділу шарів, дозволяє вперше отримати розв’язок задачі (3.17)–(3.20) із наперед заданою точністю.

3.4. Результати комп'ютерного моделювання сингулярно збуреного процесу конвективно-дифузійного масоперенесення в мікропористому середовищі

В якості технічного об'єкта для комп'ютерного моделювання процесу, описаного в п. 3.1, вибрано каркасно-засипний фільтр довжиною $l=1\text{ м}$, із засипкою частинок мікропористої структури розміром $R=10^{-5}\text{ м}$. Комп'ютерне моделювання проходило при наступних параметрах: $\varepsilon=10^{-10}$, $d_* = 1\text{ м}^2/\text{год}$, $d^* = 1\text{ м}^2/\text{год}$, $d_*^* = 0.3\text{ м}^2/\text{год}$, $\sigma_1=0.7$, $\sigma_2=0.8$, $v(x)=1\text{ м}/\text{год}$, $k=0.8$, $C_*(t) = \begin{cases} 0.005 \cos((15t + \pi) + 0.005), t \leq \pi/15, \\ 0.01, t > \pi/15. \end{cases}$

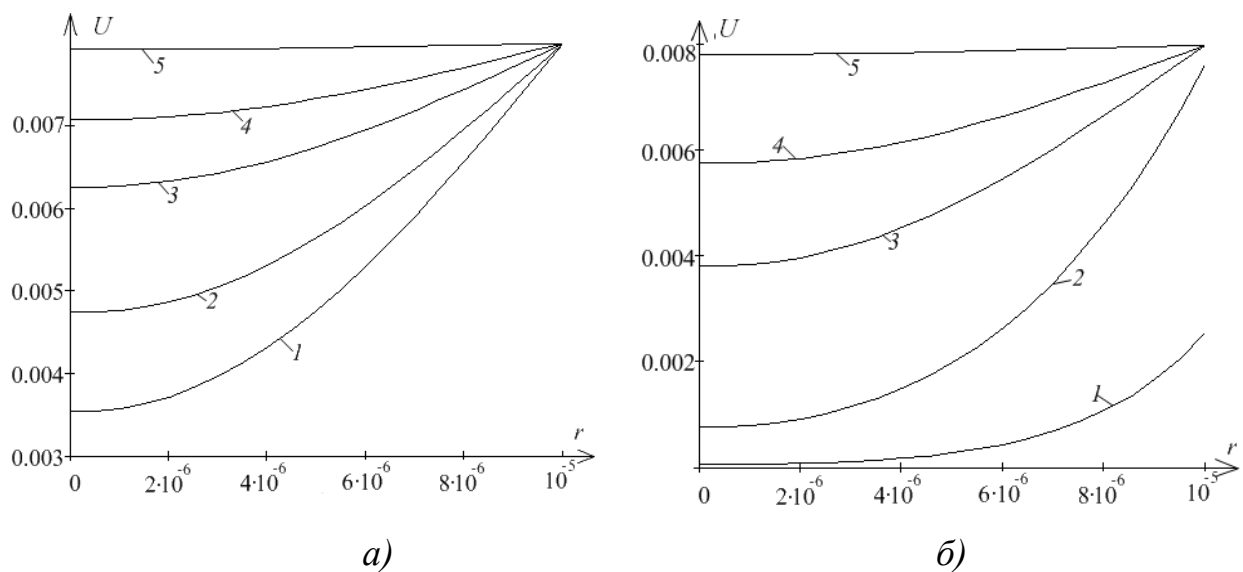


Рис.3.3. Розподіл концентрації в мікрочастинках

На рис. 3.3,а зображено розподіл концентрації забруднюючої речовини в мікропористій частинці в моменти часу $t=0.5\text{ год}$, $t=0.6\text{ год}$, $t=0.8\text{ год}$, $t=1\text{ год}$, $t=1.8\text{ год}$ (криві 1-5 відповідно) з центром в точці з координатою $x=0.2$. Ці ж результати відображено на рис.3.3,б при $x=0.6$.

Розподіл концентрації забруднюючої речовини в міжчастинковому просторі відображено на рис. 3.4. Так, крива 1 відповідає конвективній

складовій розв'язку, тобто без врахування адсорбції мікропористими частинками, а криві 2, 3, 4 – розв'язку $C(x,t)$ в моменти часу $t=0.9 год$, $t=1 год$, $t=1.5 год$. Як показав експеримент, очищення відбувається до певного моменту часу (забруднення мікропористих частинок). При заданих умовах це $t=0.9 год$, після чого починає знижуватись інтенсивність очищення, хоча часинки ще не є повністю забруднені. Максимальне відхилення розрахованого значення концентрації на виході фільтра при заданих умовах з врахуванням адсорбції складає 14 %.

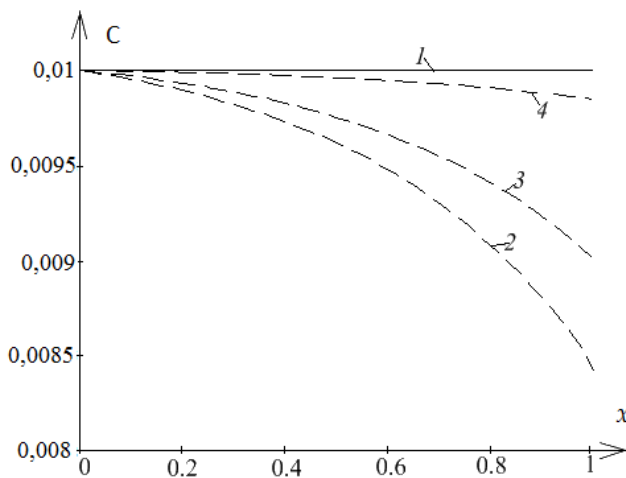


Рис.3.4. Розподіл концентрації забруднюючої речовини в міжчастинковому просторі

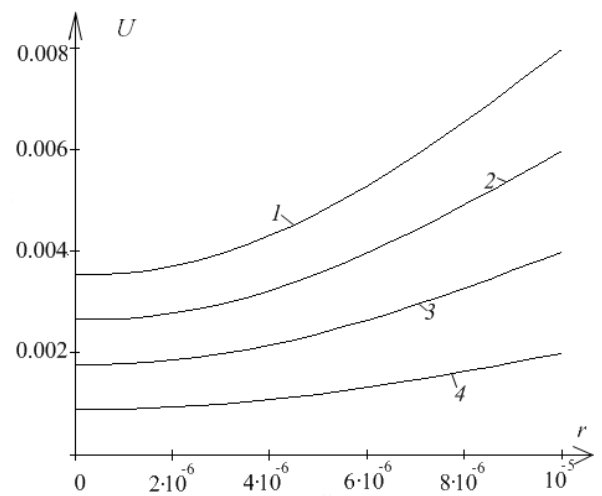


Рис. 3.5. Вплив коефіцієнта адсорбційної рівноваги на розподіл концентрації забруднюючої речовини в частинці при різних значеннях коефіцієнта масообміну

На рис. 3.5 зображено розподіл концентрації забруднюючої речовини в мікропористій частинці з координатою $x=0.2$ в момент часу $t=0.5$ при $k_1=0.8$, $k_2=0.6$, $k_3=0.4$, $k_4=0.2$ (криві 1-4 відповідно).

Ідентифіковані в п. 3.2 значення коефіцієнтів дифузії в макро- та мікросередовищах зображено на рис.3.6. Так, на рис. 3.6,а наведено графік $a_0(t)$, а на рис. 3.6,б – графік $a_0^*(x,t)$ в мікропорах з координатами $x=0$, $x=0.57$, $x=0.86$, $x=1$ (криві 1-4 відповідно).

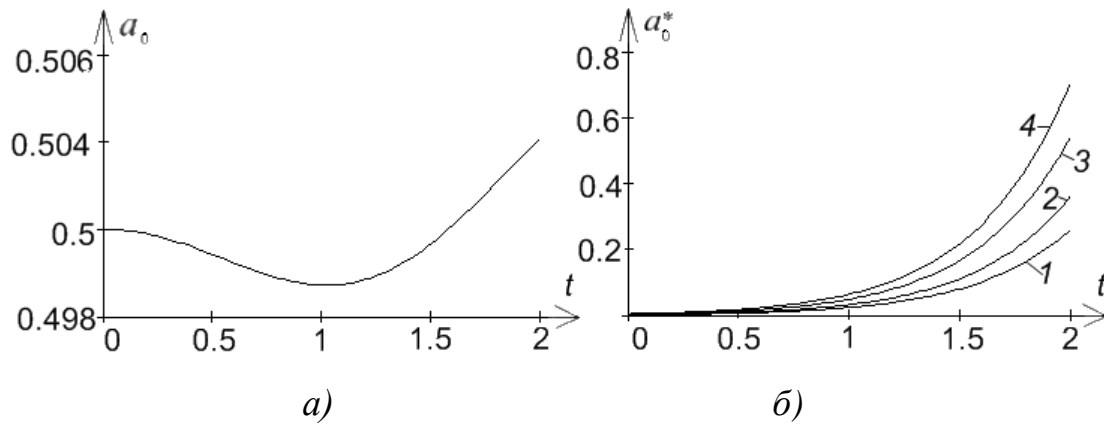


Рис.3.6. Ідентифіковані коефіцієнти дифузії макро- (а) та мікросередовища (б)

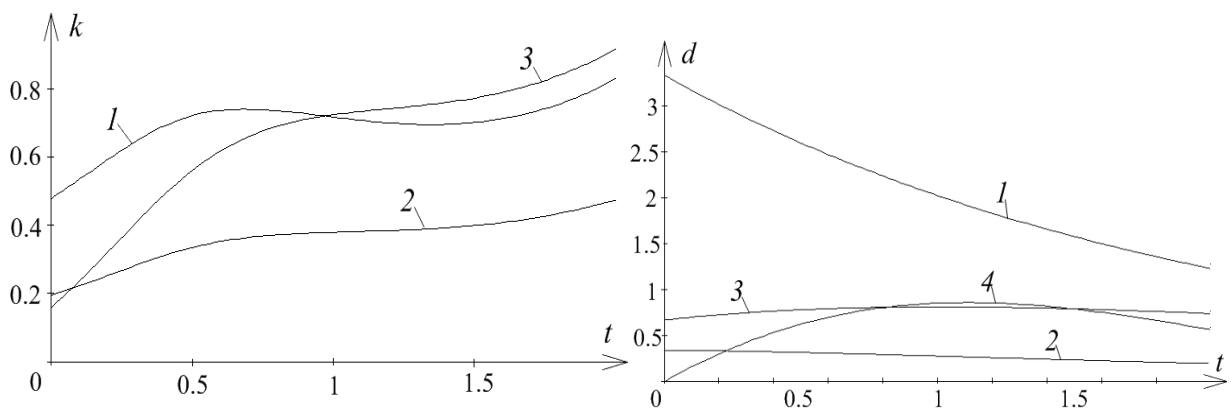


Рис. 3.7. Значення функції адсорбційної рівноваги

Рис.3.8.Значення коефіцієнта впливу внутрішньочастинкового переносу на міжчастинковий

На рис. 3.7 зображено графік шуканої функції адсорбційної рівноваги при $K_*^*(t)$. Зокрема крива 1 відповідає функції $k(t) = k_0(t) + \varepsilon k_1(t)$ при $K_{*1}^*(t) = 0.3e^{\frac{t}{2}}$, крива 2 – при $K_{*2}^*(t) = 0.4 + 0.3\sin(0.7t - \frac{3\pi}{8})$, крива 3 – при $K_{*3}^*(t) = 0.4t + 0.1$.

Результат ідентифікації коефіцієнта впливу внутрішньочастинкового дифузійного переносу на міжчастинковий при різних значеннях $D_*^*(t)$ зображено на рис.3.8. Зокрема крива 1 відповідає функції $d(t) = d_0(t) + \varepsilon d_1(t)$ при $D_{*1}^*(t) = 1$, крива 2 – $D_{*2}^*(t) = 0.1 + 0.05\ln(t+1)$, крива 3 – $D_{*3}^*(t) = \frac{t+1}{5}$, крива 4 – $D_{*4}^*(t) = 0.5\sin(t)$.

Для проведення комп'ютерного моделювання процесу масоперенесення забруднюючих речовин у двошаровому кусково-однорідному двопористому середовищі (п. 3.3), що характеризується різними коефіцієнтами фільтрації, пористості і дифузії та ін. використано ідеальний фільтраційний фон для області G_z , обмеженої поверхнями $f_1(x, y, z) = (x + 20.9582786)^2 + y^2 + z^2 - 8822.56088033$, $f_2(x, y, z) = (x - 420.9582786)^2 + y^2 + z^2 - 8822.56088033$, $f_3(x, y, z) = (x - 200)^2 + z^2 + (y - 615.536707)^2 - 418885.4382$, $f_4(x, y, z) = (x - 200)^2 + (y + 615.53670744)^2 + z^2 - 418885.4382$, $f_5(x, y, z) = f_6(x, y, z) = 160000y^2 + (x(x - 400) + y^2 + z^2)^2 - 932548.33996z^2$, вибрано положення поверхні розділу EFF_*E_* : $f_*(x, y, z) = (x + 2604.7602859)^2 + y^2 + z^2 - 7826680.261098$ [18]. При цьому перша підобласть складається з мікрочастинок радіусом $R_1 = 10^{-4} м$, а друга – з частинок радіусом $R_2 = 5 \cdot 10^{-5} м$ і розглянуто два випадки різного задання відповідних коефіцієнтів:

$$1) \kappa_1 = 0.45 м/добу, \quad \kappa_2 = 0.3 м/добу, \quad \sigma_1 = 0.7, \quad \sigma_2 = 0.5, \\ D_1 = 0.008 м^2/добу, \quad D_2 = 0.005 м^2/добу, \quad \sigma_1^* = 0.37, \quad \sigma_2^* = 0.48, \quad k_1 = 0.8, \quad k_2 = 0.95, \\ D_1^* = 8 \cdot 10^{-7} м^2/добу, \quad D_2^* = 6 \cdot 10^{-7} м^2/добу, \quad S_1 = 0.005 м/добу, \quad S_2 = 0.004 м/добу;$$

$$2) \kappa_1 = 0.45 м/добу, \quad \kappa_1 = 0.375 м/добу, \quad \sigma_1 = 0.7, \quad \sigma_2 = 0.6, \\ D_1 = 0.008 м^2/добу, \quad D_2 = 0.007 м^2/добу, \quad \sigma_1^* = 0.5, \quad \sigma_2^* = 0.8, \quad k_1 = 0.8, \quad k_2 = 0.95, \\ D_1^* = 6 \cdot 10^{-7} м^2/добу, \quad D_2^* = 4 \cdot 10^{-7} м^2/добу, \quad S_1 = 0.01 м/добу, \quad S_2 = 0.008 м/добу.$$

Відповідно побудовано розрахункові динамічні сітки G_z^1 при $\varphi_* = -7.14$, $\varphi^* = 10.2$, G_z^2 при $\varphi_* = -7.9$, $\varphi^* = 9.03$, які отримані в залежності від вибору задання відповідних коефіцієнтів при $N = n_1 + n_2 = 20$, $n_1 = n_2 = 10$. Значення φ_* та φ^* вибиралися так, щоб середня швидкість фільтрації вздовж двошарового біпористого середовища v_{cep} була приблизно рівною $1 м/добу$. Також для областей G_z^j ($j = \overline{1, 2}$) знайдено фільтраційні витрати, які відповідно становлять:

$Q = 1.91 \text{ м}^3/\text{добу}$ та $Q = 2.38 \text{ м}^3/\text{добу}$, потенціали на поверхнях розділу $\varphi_*^* = 3.06$ і $\varphi_*^* = 1.13$ та обчислено величини швидкостей фільтрації $|v|$ [19].

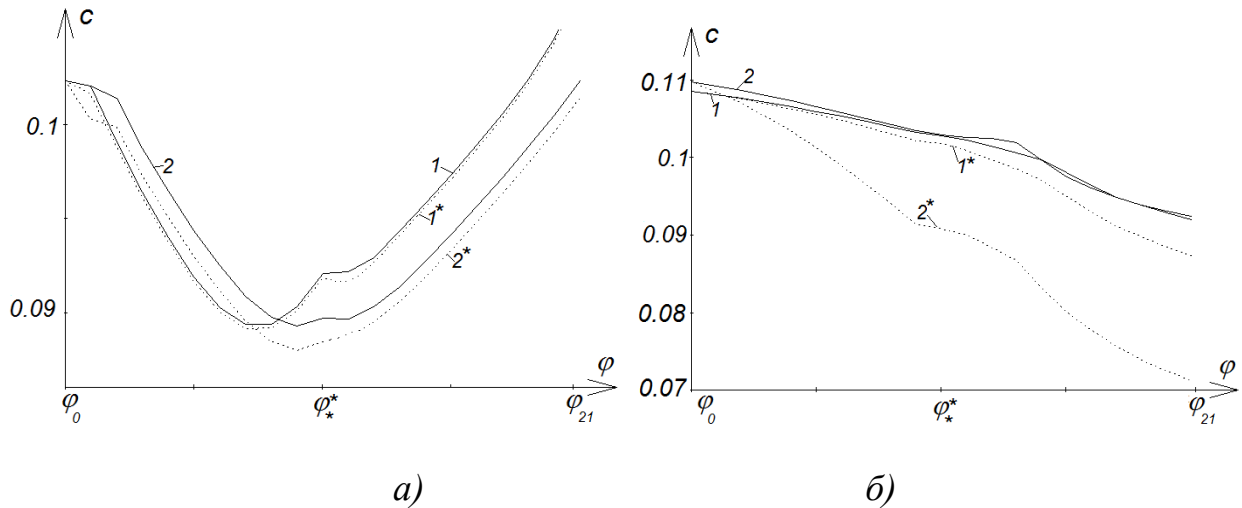


Рис. 3.9. Розподіл концентрації забруднюючої речовини вздовж лінії течії $(\varphi, \psi_4, \chi_4)$ для областей G_z^1, G_z^2 в моменти часу $t = 1$ доба (а) та $t = 15$ діб (б)

На рис. 3.9 проілюстровано вплив дифузії та адсорбції на розподіл концентрації забруднюючої речовини в міжчастинковому просторі. Криві 1 та 2

відповідають конвективній складовій $C_0(\varphi, \psi_4, \chi_4, t) = \begin{cases} C_{1,0}(\varphi, \psi_4, \chi_4, t), & \varphi < \varphi_*^*, \\ C_{2,0}(\varphi, \psi_4, \chi_4, t), & \varphi \geq \varphi_*^* \end{cases}$

для областей G_z^1 та G_z^2 , а криві 1^* та 2^* – розв'язку

$C(\varphi, \psi_4, \chi_4, t) = \begin{cases} C_1(\varphi, \psi_4, \chi_4, t), & \varphi < \varphi_*^*, \\ C_2(\varphi, \psi_4, \chi_4, t), & \varphi \geq \varphi_*^* \end{cases}$ для областей G_z^1 та G_z^2 відповідно в

моменти часу $t = 1$ доба (а) та $t = 15$ діб (б) за таких умов:

$$C_1^0(\varphi, \psi, \chi) = C_2^0(\varphi, \psi, \chi) = 0.1 + 0.01 \left(\frac{\varphi_0^2 - \varphi^2}{100} + 1 \right) \operatorname{tg} \left(\frac{\psi^2 + \chi^2}{50} \right),$$

$$C_*(\psi, \chi, t) = 0.1 + 0.01 \operatorname{tg} (0.02(\psi^2 + 5t + \chi^2)),$$

$$U_j^0(\varphi, \psi, \chi, r) = k_j \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{100(r - R_j)}{R_j} \right) + 1 \right) C_j^0(\varphi, \psi, \chi).$$

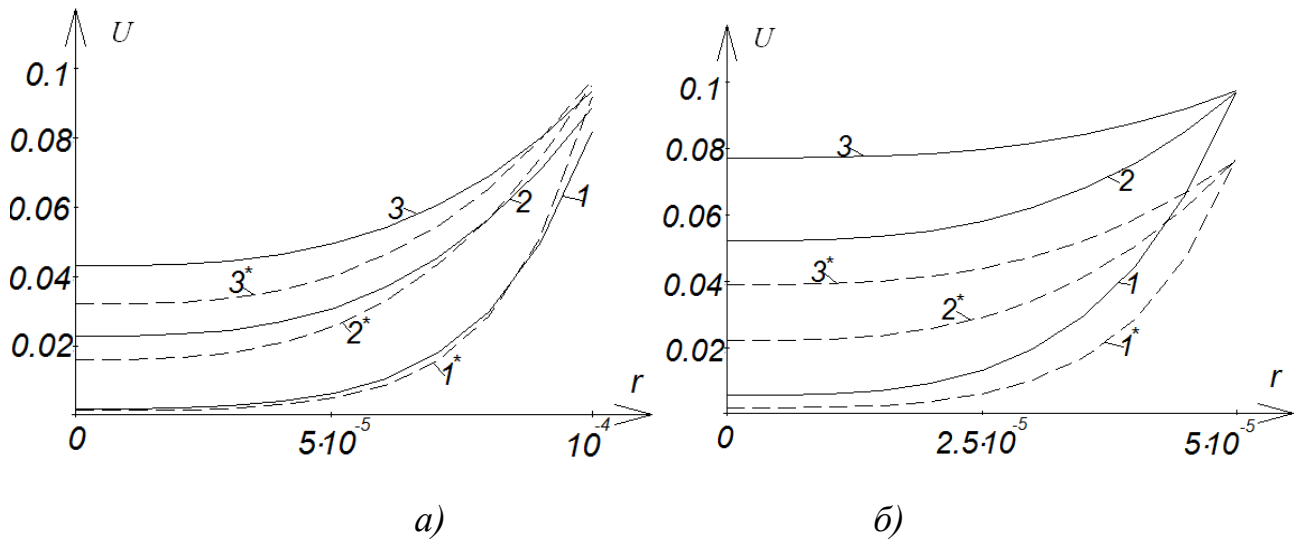


Рис.3.10. Розподіл концентрації забруднюючої речовини в мікрочастинках

На рис. 3.10 зображено накопичення забруднюючої речовини в мікропористих частинках в першому шарі $U_1(\varphi_5, \psi_1, \chi_4, r, t)$ (а) та в другому шарі $U_2(\varphi_{15}, \psi_1, \chi_4, r, t)$ (б), де $\varphi_5 = -3.39$, $\varphi_{15} = 4.52$, $\psi_1 = 2.9$, $\psi_4 = 3.14$, $\chi_4 = 0$. Криві 1-3 відповідають значенням концентрації забруднюючої речовини у виділених частинках в моменти часу $t = 1$ доба, $t = 15$ діб, $t = 20$ діб в першому випадку задання коефіцієнтів (область G_2^1), а криві 1*-3* – в другому (область G_2^2).

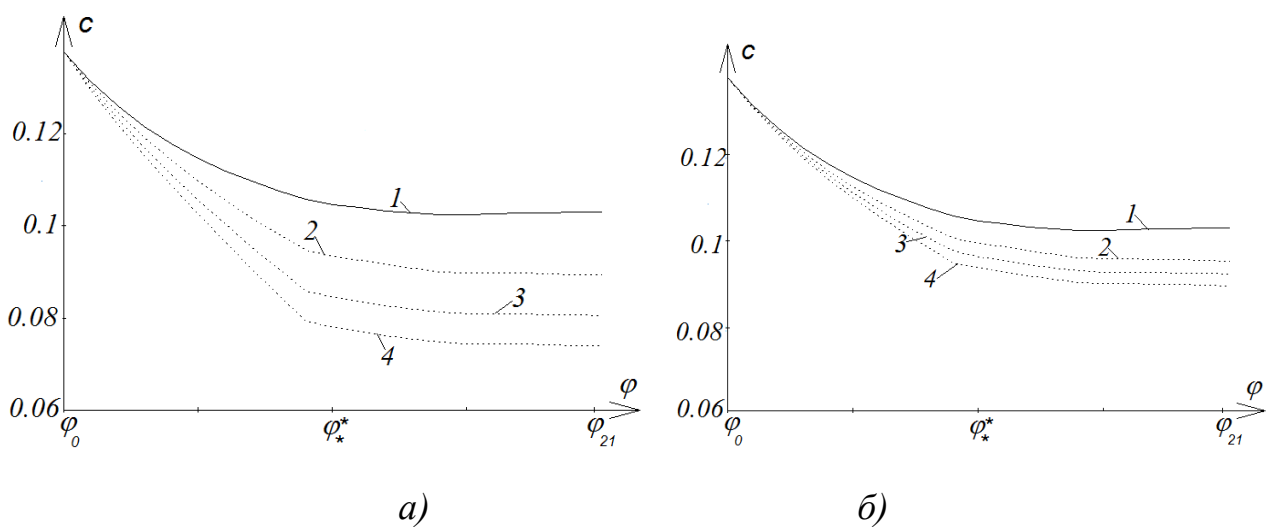


Рис. 3.11. Залежність розподілу концентрації забруднюючої речовини в міжчастинковому просторі від фізичних властивостей частинок

Вплив фізико-хімічних характеристик мікропористих частинок на розподіл концентрації забруднюючої речовини в області G_z^1 проілюстровано на рис. 3.11. Зокрема досліджено вплив коефіцієнта впливу внутрішньо-частинкового переносу на міжчастинковий в першій підобласті S_1 (рис.3.11,а) та коефіцієнта адсорбційної рівноваги в першій підобласті $k_1 = 0.8$ (рис.3.11,б) на розподіл концентрації забруднюючої речовини у міжчастинковому просторі за таких вхідних даних: $\kappa_1 = 0.45 \text{ м/добу}$, $\kappa_2 = 0.3 \text{ м/добу}$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.7$, $D_1 = D_2 = 0.008 \text{ м}^2/\text{добу}$, $D_1^* = 10^{-8} \text{ м}^2/\text{добу}$, $D_2^* = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{добу}$, $k_2 = 0.9$, $S_2 = 0.005 \text{ м/добу}$, $\sigma_1^* = \sigma_2^* = 0.3$, $R_1 = R_2 = 10^{-5} \text{ м}$.

Суцільна крива рис.3.11,а рис.3.11,б відповідає конвективній складовій процесу (відсутній вплив дифузії та адсорбції мікропористими частинками), крива 1 рис.3.11,а відповідає значенню $S_1 = 0.005$ крива 2 – $S_1 = 0.009$, крива 3 – $S_1 = 0.012$, а на рис.3.11,б крива 2 відповідає значенню $k_1 = 0.4$, крива 2 – $k_1 = 0.65$, крива 3 – $k_1 = 0.87$ вздовж лінії течії $(\varphi, \psi_4, \chi_4)$ в момент часу $t = 15 \text{ діб}$.

3.5. Висновки до третього розділу

Побудовано алгоритм асимптотичного розвинення розв'язків одного класу модельних нелінійних сингулярно збурених крайових задач однокомпонентного конвективно-адсорбційно-дифузійного масоперенесення в мікропористих середовищах.

Сформовано математичну модель процесу однокомпонентного конвективно-адсорбційно-дифузійного масоперенесення в мікропористому багат шаровому середовищі за умов превалювання конвективної складової процесу над іншими складовими. Побудовано алгоритм асимптотичного розвинення розв'язків відповідної модельної просторової нелінійної сингулярно збуреної крайової задачі у багат шаровому кусково-однорідному

водонасиченому біпористому середовищі – криволінійному паралелепіпеді, що розділяється на підобласті екіпотенціальними поверхнями. Наведено результати комп'ютерних розрахунків, що дозволяють оцінити вплив фізико-хімічних характеристик процесу на розподіл забруднень в області.

Слід зазначити, що незважаючи на малість швидкості протікання процесів дифузійного масоперенесення в порах частинок з часом вони суттєво впливають на розподіл концентрації в самій частинці та в усьому фільтрі, а отже, можливим є використання розглянутого мікропористого середовища з метою очищення певної речовини від забруднень. Використання асимптотичного методу для розв'язання такого роду задач дало змогу розщепити складний процес на складові і дослідити кожну з них окремо.

РОЗДІЛ 4

ЧИСЛОВО-АСИМПТОТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

ПРОЦЕСІВ БАГАТОКОМПОНЕНТНОГО

ТЕПЛОМАСОПЕРЕНЕСЕННЯ В БІПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Характерною особливістю виробничих стічних вод є значна багатоконпонентність забруднень. Проведений у роботах [68, 73, 127, 129, 146, 196] аналіз результатів досліджень свідчить про наявність складної структури взаємозалежностей різних факторів, що визначають процеси одно- та багатоконпонентного конвективно-дифузійно масоперенесення в пористих та мікропористих середовищах.

Моделювання процесів тепломасоперенесення в мікропористих середовищах є перспективним напрямком досліджень стосовно прогнозування ефективності роботи очисних пристроїв, що поєднують адсорбційні, хімічні та теплові процеси.

4.1. Моделювання сингулярно збурених процесів конвективно-дифузійного масоперенесення двох сортів розчинних речовин у мікропористих середовищах

Нехай в біпористому середовищі відбувається процес конвективно-дифузійного багатоконпонентного масоперенесення із адсорбцією розчинних речовин мікропористими частинками. Відповідну модельну задачу в області $G = G_z \times (0, R) \times (0, \infty)$, де $G_z = ABCDA_*B_*C_*D_*$ – однорідний криволінійний паралелепіпед (рис. 3.1), обмежений гладкими, ортогональними між собою в кутових точках та по ребрах, екіпотенціальними поверхнями $ABB_*A_* = \{z: f_1(x, y, z) = 0\}$, $CDD_*C_* = \{z: f_2(x, y, z) = 0\}$ та поверхнями течії $ADD_*A_* = \{z: f_3(x, y, z) = 0\}$, $BCC_*B_* = \{z: f_4(x, y, z) = 0\}$, $ABCD = \{z: f_5(x, y, z) = 0\}$,

$A_*B_*C_*D_* = \{z: f_6(x, y, z) = 0\}$ опишемо системою диференціальних рівнянь з початковими та граничними умовами [22, 117]:

$$\varepsilon D_{j_1} \Delta \tilde{C}_1 + \varepsilon D_{j_2} \Delta \tilde{C}_2 - \vec{v} \cdot \text{grad } \tilde{C}_j - \varepsilon \left(S_{j_1} \frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial r} + S_{j_2} \frac{\partial \tilde{U}_2}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} = \sigma_1 \frac{\partial \tilde{C}_j}{\partial t}, \quad (4.1)$$

$$\varepsilon D_{j_1}^* \left(\frac{\partial^2 \tilde{U}_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial r} \right) + \varepsilon D_{j_1}^* \left(\frac{\partial^2 \tilde{U}_2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \tilde{U}_2}{\partial r} \right) = \sigma_2 \frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial t}, \quad (4.2)$$

$$\tilde{C}_j(x, y, z, t) \Big|_{t=0} = \tilde{C}_j^0(x, y, z), \quad \tilde{U}_j(x, y, z, r, t) \Big|_{t=0} = \tilde{U}_j^0(x, y, z, r), \quad j = \overline{1, 2}, \quad (4.3)$$

$$\tilde{C}_j \Big|_{ABB_*A_*} = \tilde{C}_{j^*}(M, t), \quad \tilde{C}_j \Big|_{CDD_*C_*} = \tilde{C}_{j^*}^*(M, t), \quad \tilde{C}_j \Big|_{BCC_*B_*} = \tilde{C}_{j^{**}}(M, t),$$

$$\tilde{C}_j \Big|_{ADD_*A_*} = \tilde{C}_{j^{**}}^*(M, t), \quad \tilde{C}_j \Big|_{ABCD} = \tilde{C}_{j^{***}}(M, t), \quad \tilde{C}_j \Big|_{A_*B_*C_*D_*} = \tilde{C}_{j^{****}}(M, t),$$

$$\tilde{U}_j(x, y, r, t) \Big|_{r=R} = k_{j_1} \tilde{C}_1(x, y, t) + k_{j_2} \tilde{C}_1(x, y, t), \quad \frac{\partial \tilde{U}_j(x, y, r, t)}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad (4.4)$$

$$\vec{v} = \text{grad } \varphi, \quad \text{div } \vec{v} = 0,$$

$$\varphi \Big|_{ABB_*A_*} = \varphi_*, \quad \varphi \Big|_{DCC_*D_*} = \varphi^*, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{ADD_*A_* \cup A_*D_*C_*B_* \cup BCC_*B_* \cup ADCB} = 0, \quad (4.5)$$

де $\tilde{C}_j(x, y, t)$ – концентрація j -го сорту забруднюючої речовини в міжчастинковому просторі, $\tilde{U}_j(x, y, r, t)$ – концентрація j -го сорту забруднюючої речовини в мікрочастинках, D_{j_s} та $D_{j_s}^*$ – коефіцієнти дифузії в міжчастинковому просторі та в мікрочастинках відповідно, S_{j_s} – коефіцієнти впливу внутрішньочастинкового перенесення на міжчастинковий ($j = \overline{1, 2}, s = \overline{1, 2}$), k_{j_s} – коефіцієнти адсорбційної рівноваги, R – радіус мікрочастинки, $\vec{v}(v_x(x, y, z), v_y(x, y, z), v_z(x, y, z))$ – вектор, а $\varphi = \varphi(x, y, z)$ – потенціал швидкості фільтрації ($\sqrt{v_x^2(x, y, z) + v_y^2(x, y, z) + v_z^2(x, y, z)} \gg \varepsilon > 0$, $0 < \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^* < \infty$) в точці $z = (x, y, z)$, M , n – біжуча точка та нормаль до відповідної поверхні ε – малий параметр, σ_1, σ_2 – коефіцієнти пористості відповідно макро- та

мікросередовища, $\tilde{C}_j^0(x, y, z)$, $\tilde{U}_j^0(x, y, z, r)$, $\tilde{C}_{j*}(M, t)$ та інші функції, що фігурують в (4.4) достатньо гладкі функції, узгоджені між собою в кутових точках та по ребрах області G .

Нехай задача (4.5) шляхом конформного відображення [18] $G_z \mapsto G_w$ (або $G_w \mapsto G_z$) є розв'язаною, зокрема, знайдено поле швидкості $\vec{v}(v_x(x, y, z), v_y(x, y, z), v_z(x, y, z))$, де $G_w = \{w = (\varphi, \psi, \chi) : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, Q_* < \psi < Q^*, Q_{**} < \chi < Q^{**}\}$ – відповідна G_z область комплексного потенціалу, $\psi = \psi(x, y, z)$, $\chi = \chi(x, y, z)$ – функції течії (комплексно спряжені до $\varphi = \varphi(x, y, z)$). Параметр $Q = Q_0 \cdot Q^0$ – потік через довільний поперечний переріз течії G_z ($Q_0 = Q^* - Q_*$, $Q^0 = Q^{**} - Q_{**}$ – потоки через відповідні горизонтальний та вертикальний прошарки) знаходиться в процесі розв'язування цієї задачі. Тоді, здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi, \chi)$, $y = y(\varphi, \psi, \chi)$, $z = z(\varphi, \psi, \chi)$, $t = t$ у рівнянні (4.1), (4.2) та умовах (4.3), (4.4), приходимо до відповідної задачі для області G_w :

$$\varepsilon \sum_{s=1}^2 D_{js} \left(v^2 \frac{\partial^2 C_s}{\partial \varphi^2} + b_{11} \frac{\partial^2 C_s}{\partial \psi^2} + b_{12} \frac{\partial^2 C_s}{\partial \chi^2} + b_{21} \frac{\partial C_s}{\partial \psi} + b_{22} \frac{\partial C_s}{\partial \chi} \right) - v^2 \frac{\partial C_j}{\partial \varphi} - \varepsilon \left(S_{j1} \frac{\partial U_1}{\partial r} + S_{j2} \frac{\partial U_2}{\partial r} \right) \Bigg|_{r=R} = \sigma_1 \frac{\partial C_j}{\partial t}, \quad (4.6)$$

$$\sigma_2 \frac{\partial U_j}{\partial t} = \varepsilon D_{j1}^* \left(\frac{\partial U_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U_1}{\partial r} \right) + \varepsilon D_{j2}^* \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U_2}{\partial r} \right), \quad (4.7)$$

$$C_j(\varphi, \psi, \chi, t) \Big|_{t=0} = C_j^0(\varphi, \psi, \chi), \quad U_j(\varphi, \psi, \chi, r, t) \Big|_{t=0} = U_j^0(\varphi, \psi, \chi, r), \quad (4.8)$$

$$C_j \Big|_{\varphi=\varphi_*} = C_{j*}, \quad C_j \Big|_{\varphi=\varphi^*} = C_j^*, \quad C_j \Big|_{\psi=Q_*} = C_{j**}, \quad C_j \Big|_{\psi=Q^*} = C_j^{**}, \quad C_j \Big|_{\chi=Q_{**}} = C_{j***},$$

$$C_j \Big|_{\chi=Q^{**}} = C_j^{***}, \quad U_j(\varphi, \psi, \chi, r, t) \Big|_{r=R} = k_{j1} C_1(\varphi, \psi, \chi, t) + k_{j2} C_2(\varphi, \psi, \chi, t),$$

$$\frac{\partial q_j(\varphi, \psi, \chi, r, t)}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned}
C_j &= C_j(\varphi, \psi, \chi, t) = \tilde{C}_j(x(\varphi, \psi, \chi), y(\varphi, \psi, \chi), z(\varphi, \psi, \chi), t), \\
U_j &= U_j(\varphi, \psi, \chi, r, t) = \tilde{U}_j(x(\varphi, \psi, \chi), y(\varphi, \psi, \chi), z(\varphi, \psi, \chi), r, t), \\
C_{j^*}(\psi, \chi, t) &= \tilde{C}_{j^*}(x(\varphi^*, \psi, \chi), y(\varphi^*, \psi, \chi), z(\varphi^*, \psi, \chi), t), \\
C_j^*(\psi, \chi, t) &= \tilde{C}_j^*(x(\varphi^*, \psi, \chi), y(\varphi^*, \psi, \chi), z(\varphi^*, \psi, \chi), t), \\
C_{j^{**}}(\varphi, \chi, t) &= \tilde{C}_{j^{**}}(x(\varphi, \varrho^*, \chi), y(\varphi, \varrho^*, \chi), z(\varphi, \varrho^*, \chi), t), \\
C_j^{**}(\varphi, \eta, t) &= \tilde{C}_j^{**}(x(\varphi, \varrho^*, \chi), y(\varphi, \varrho^*, \chi), z(\varphi, \varrho^*, \chi), t), \\
C_{j^{***}}(\varphi, \psi, t) &= \tilde{C}_{j^{***}}(x(\varphi, \psi, \varrho^{**}), y(\varphi, \psi, \varrho^{**}), z(\varphi, \psi, \varrho^{**}), t), \\
C_j^{***}(\varphi, \psi, t) &= \tilde{C}_j^{***}(x(\varphi, \psi, \varrho^{**}), y(\varphi, \psi, \varrho^{**}), z(\varphi, \psi, \varrho^{**}), t), \\
C_j^0(\varphi, \psi, \chi) &= \tilde{C}_j^0(x(\varphi, \psi, \chi), y(\varphi, \psi, \chi), z(\varphi, \psi, \chi)), \\
U_j^0(\varphi, \psi, \chi, r) &= \tilde{U}_j^0(x(\varphi, \psi, \chi), y(\varphi, \psi, \chi), z(\varphi, \psi, \chi), r), \\
v &= v(\varphi, \psi, \chi) = v(x(\varphi, \psi, \chi), y(\varphi, \psi, \chi), z(\varphi, \psi, \chi)), \\
b_{11} &= b_{11}(\varphi, \psi, \chi) = \psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2, \quad b_{12} = b_{12}(\varphi, \psi, \chi) = \chi_x^2 + \chi_y^2 + \chi_z^2, \\
b_{21} &= b_{21}(\varphi, \psi, \chi) = \psi_{xx} + \psi_{yy} + \psi_{zz}, \quad b_{22} = b_{22}(\varphi, \psi, \chi) = \chi_{xx} + \chi_{yy} + \chi_{zz}.
\end{aligned}$$

Розв'язок останньої одержано у вигляді асимптотичних рядів:

$$\begin{aligned}
C_j(\varphi, \psi, \chi, t) &= \sum_{i=0}^n \varepsilon^i C_{(j,i)}(\varphi, \psi, \chi, t) + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \Pi_{(j,i)}(\xi, \psi, \chi, t) + \quad (4.10) \\
&+ \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{\frac{i}{2}} P_{(j, \frac{i}{2})}(\varphi, \mu, \chi, t) + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{\frac{i}{2}} \Gamma_{(j, \frac{i}{2})}(\varphi, \eta, \chi, t) + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{\frac{i}{2}} H_{(j, \frac{i}{2})}(\varphi, \psi, \lambda, t) + \\
&+ \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{\frac{i}{2}} E_{(j, \frac{i}{2})}(\varphi, \psi, \phi, t) + R_{j,n}^1(\varphi, \psi, \chi, t, \varepsilon), \\
U_j(\varphi, \psi, \chi, r, t) &= \sum_{i=0}^n \varepsilon^i U_{(j,i)}(\varphi, \psi, \chi, r, t) + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{\frac{i}{2}} F_{(j, \frac{i}{2})}(\varphi, \psi, \chi, \rho, t) + \quad (4.11) \\
&+ R_{j,n}^2(\varphi, \psi, \chi, r, t, \varepsilon),
\end{aligned}$$

де $C_{j,i}(\varphi, \psi, \chi, t)$, $U_{j,i}(\varphi, \psi, \chi, r, t)$ ($i = \overline{0, n}$) – члени відповідних регулярних частин асимптотики, $\Pi_i(\xi, \psi, \chi, t)$ ($i = \overline{0, n+1}$) – функції типу примежового

шару в околі $\varphi = \varphi^*$ (поправки на виході фільтраційної течії із даного пласта G_w), $P_{j,i/2}(\varphi, \mu, \chi, t)$, $\Gamma_{j,i/2}(\varphi, \eta, \chi, t)$, $H_{j,i/2}(\varphi, \psi, \lambda, t)$, $E_{j,i/2}(\varphi, \psi, \phi, t)$, $F_{j,i/2}(t, \rho, \varphi, \psi)$ ($i = \overline{0, 2n+1}$) – функції типу примежового шару відповідно в околах $\psi = Q_*$, $\psi = Q^*$, $\chi = Q_{**}$, $\chi = Q^{**}$ та в околі $r = R$, $\xi = (\varphi^* - \varphi) \cdot \varepsilon^{-1}$, $\mu = (Q_* - \psi) \cdot \varepsilon^{-1/2}$, $\eta = (Q^* - \psi) \cdot \varepsilon^{-1/2}$, $\lambda = (Q_{**} - \psi) \cdot \varepsilon^{-1/2}$, $\phi = (Q^{**} - \psi) \cdot \varepsilon^{-1/2}$, $\rho = (R - r) \cdot \varepsilon^{-1/2}$ – відповідні регуляризуючі перетворення, $R_{j,n}^1$, $R_{j,n}^2$ – залишкові члени.

Підставляючи (4.10), (4.11) в (4.6)–(4.9), та прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях ε отримуємо для кожного такі задачі для знаходження регулярних частин асимптотики:

$$\begin{cases} v^2(\varphi, \psi, \chi) \frac{\partial}{\partial \varphi} C_{j,i}(\varphi, \psi, \chi, t) + \sigma_1 \frac{\partial}{\partial t} C_{j,i}(\varphi, \psi, \chi, t) = g_{j,i}^1(\varphi, \psi, \chi, t), \\ C_{j,i}(\varphi, \psi, \chi, 0) = w_{j,i}^1(\varphi, \psi, \chi), \quad C_{j,i}(\varphi, 0, \chi, t) = w_{j,i}^2(\psi, \chi, t), \end{cases} \quad (4.12)$$

$$\begin{cases} \sigma_2 \frac{\partial}{\partial t} U_{j,i}(\varphi, \psi, \chi, r, t) = g_{j,i}^2(\varphi, \psi, \chi, r, t), \\ U_{j,i}(\varphi, \psi, \chi, r, 0) = w_{j,i}^3(\varphi, \psi, \chi, r), \end{cases} \quad (4.13)$$

де $g_{j,0}^1(\varphi, \psi, \chi, t) = 0$, $w_{j,0}^1(\varphi, \psi, \chi) = C_j^0(\varphi, \psi, \chi)$, $w_{j,0}^2(\psi, \chi, t) = C_{j^*}(\psi, \chi, t)$,

$$g_{j,i}^1(\varphi, \psi, \chi, t) = \sum_{s=1}^2 D_{js} \left(v^2 \frac{\partial^2 C_{s,i-1}}{\partial \varphi^2} + b_{11} \frac{\partial^2 C_{s,i-1}}{\partial \psi^2} + b_{12} \frac{\partial^2 C_{s,i-1}}{\partial \chi^2} + b_{21} \frac{\partial C_{s,i-1}}{\partial \psi} + b_{22} \frac{\partial C_{s,i-1}}{\partial \chi} \right) -$$

$$- S_{js} \left(\frac{\partial U_{s,i-1}}{\partial r} + \frac{\partial F_{s,i-1}}{\partial r} + \varepsilon^{1/2} \frac{\partial F_{s,i-1/2}}{\partial r} \right) \Big|_{r=R}, \quad w_{j,i}^1(\varphi, \psi, \chi) = 0, \quad w_{j,i}^2(\psi, \chi, t) = 0,$$

$$g_{j,0}^2(\varphi, \psi, \chi, r, t) = 0, \quad w_{j,0}^3(\varphi, \psi, \chi, r) = U_j^0(\varphi, \psi, \chi, r), \quad g_{j,i}^2(\varphi, \psi, \chi, r, t) = D_{j1}^* \left(\frac{\partial^2 U_{1,i-1}}{\partial r^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{r} \frac{\partial U_{1,i-1}}{\partial r} \right) + D_{j2}^* \left(\frac{\partial U_{s,i-1}}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial U_{2,i-1}}{\partial r} \right), \quad w_{j,i}^3(\varphi, \psi, r) = 0, \quad (i = \overline{1, n}, j = \overline{1, 2}).$$

Аналогічно до п. 3.3, розв'язки цих задач отримано у вигляді:

$$C_{j,0}(\varphi, \psi, \chi, t) = \begin{cases} C_j^0(f^{-1}(f(\varphi, \psi, \chi) - t), \psi, \chi), & t < f(\varphi, \psi, \chi), \\ C_{j^*}(t - f(\varphi, \psi, \chi), \psi, \chi), & t \geq f(\varphi, \psi, \chi), \end{cases}$$

$$U_{j,0}(\varphi, \psi, \chi, r, t) = U_j^0(\varphi, \psi, \chi, r),$$

$$U_{j,1}(\varphi, \psi, \chi, r, t) = \frac{1}{\sigma_2} \sum_{s=1}^2 D_{js}^* \int_0^t \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} U_{s,0}(\varphi, \psi, \chi, r, \tilde{t}) + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} U_{s,0}(\varphi, \psi, \chi, r, \tilde{t}) \right) d\tilde{t},$$

$$C_{j,i}(t, \varphi, \chi, \psi) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_1} \int_0^t g_{j,i}^1(f^{-1}(f(\varphi, \psi, \chi) - t + \tilde{t}, \psi, \chi), \psi, \chi, \tilde{t}) d\tilde{t}, & t < f(\varphi, \psi, \chi), \\ \int_{\varphi^*}^{\varphi} \frac{g_{j,i}^1(\tilde{\varphi}, \psi, \chi, f(\tilde{\varphi}, \psi, \chi) + t - f(\varphi, \psi, \chi))}{v^2(\tilde{\varphi}, \psi, \chi)} d\tilde{\varphi}, & t \geq f(\varphi, \psi, \chi). \end{cases}$$

Для знаходження примежових поправок $\Pi_{j,i}$ ($i = \overline{0, n+1}, j = \overline{1, 2}$) в околі ділянки $\varphi = \varphi^*$ одержимо такі задачі:

$$\begin{cases} D_{j1} \frac{\partial^2 \Pi_{1,i}}{\partial \xi^2} + D_{j2} \frac{\partial^2 \Pi_{2,i}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \Pi_{j,i}}{\partial \xi} = g_{j,i}^3(\xi, \psi, \chi, t), & j = \overline{1, 2}, \\ \Pi_{j,0}(\xi, \psi, \chi, t) \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0, \quad \Pi_{j,i}(0, \psi, \chi, t) = w_{j,i}^3(\psi, \chi, t), \end{cases} \quad (4.14)$$

де $g_{j,0}^3(\xi, \psi, \chi, t) = 0$, $w_{j,0}^3(\psi, \chi, t) = C_j^*(\psi, \chi, t) - C_{j,0}(\varphi^*, \psi, \chi, t)$, $g_{j,1}^3(\xi, \psi, \chi, t) =$

$$= \frac{1}{v^2(\varphi^*, \psi, \chi)} \left(\sigma_1 \frac{\partial \Pi_{j,0}}{\partial t} + 2\xi v(\varphi^*, \psi, \chi) v'(\varphi^*, \psi, \chi) \left(D_{j1} \frac{\partial^2 \Pi_{1,0}}{\partial \xi^2} + D_{j2} \frac{\partial^2 \Pi_{2,0}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \Pi_{j,0}}{\partial \xi} \right) \right),$$

$$g_{j,i}^3(\xi, \psi, \chi, t) = \frac{1}{v^2(\varphi^*, \psi, \chi)} \left(\sigma_1 \frac{\partial \Pi_{j,i-1}}{\partial t} + \sum_{s=1}^i V_s \left(D_{j1} \frac{\partial^2 \Pi_{1,i-s}}{\partial \xi^2} + D_{j2} \frac{\partial^2 \Pi_{2,i-s}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \Pi_{j,i-s}}{\partial \xi} \right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{s=0}^{i-2} B_{11,s} \left(D_{j1} \frac{\partial^2 \Pi_{1,i-2-s}}{\partial \psi^2} + D_{j2} \frac{\partial^2 \Pi_{2,i-2-s}}{\partial \psi^2} \right) + \sum_{s=0}^{i-2} B_{12,s} \left(D_{j1} \frac{\partial^2 \Pi_{1,i-2-s}}{\partial \chi^2} + D_{j2} \frac{\partial^2 \Pi_{2,i-2-s}}{\partial \chi^2} \right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{s=0}^{i-2} B_{21,s} \left(D_{j1} \frac{\partial \Pi_{1,i-2-s}}{\partial \psi} + D_{j2} \frac{\partial \Pi_{2,i-2-s}}{\partial \psi} \right) + \sum_{s=0}^{i-2} B_{22,s} \left(D_{j1} \frac{\partial \Pi_{1,i-2-s}}{\partial \chi} + D_{j2} \frac{\partial \Pi_{2,i-2-s}}{\partial \chi} \right) \right)$$

$$(i = \overline{2, n+1}), \quad w_{j,i}^3(\psi, \chi, t) = C_j^*(\psi, \chi, t) - C_{j,i}(\varphi^*, \psi, \chi, t) \quad (i = \overline{1, n}), \quad w_{j,n+1}^3(\psi, \chi, t) = 0,$$

$V_s, B_{11,s}, B_{12,s}, B_{21,s}, B_{22,s}$ – коефіцієнти при s -тих степенях ε у розкладі відповідних функцій $\tilde{v}^2(\varphi^* - \varepsilon\xi, \psi, \chi)$, $b_{11}(\varphi^* - \varepsilon\xi, \psi, \chi)$, $b_{12}(\varphi^* - \varepsilon\xi, \psi, \chi)$, $b_{21}(\varphi^* - \varepsilon\xi, \psi, \chi)$, $b_{22}(\varphi^* - \varepsilon\xi, \psi, \chi)$ у ряд Тейлора в околі $\varphi = \varphi^*$.

У результаті їх послідовного розв'язання отримаємо:

$$\begin{aligned} \Pi_{j,0}(\xi, \psi, \eta, t) &= D_{j,0} \left(C_j^*(\psi, \eta, t) - C_{j,0}(\varphi^*, \psi, \eta, t) \right) e^{-\frac{1}{D_{j,0}} \xi}, \\ \Pi_{j,i}(\xi, \psi, \eta, t) &= \frac{1}{D_{j,0}} \int_0^\xi \left(e^{-\frac{1}{D_{j,0}} \hat{\varphi}} \int_0^{\hat{\varphi}} g_{j,i}^3(\hat{\varphi}, \psi, \eta, t) e^{\frac{1}{D_{j,0}} \hat{\varphi}} d\hat{\varphi} \right) d\hat{\varphi} - C_{j,i}(\varphi^*, \psi, \eta, t) \quad (i = \overline{1, n}), \\ \Pi_{j,n+1}(\xi, \psi, \eta, t) &= \frac{1}{D_{j,0}} \int_0^\xi \left(e^{-\frac{1}{D_{j,0}} \hat{\varphi}} \int_0^{\hat{\varphi}} g_{n+1}^3(\hat{\varphi}, \psi, \eta, t) e^{\frac{1}{D_{j,0}} \hat{\varphi}} d\hat{\varphi} \right) d\hat{\varphi}. \end{aligned}$$

Для врахування впливу бічних джерел забруднення будемо поправки

$$P_{j,i/2}(\varphi, \mu, \chi, t), \Gamma_{j,i/2}(\varphi, \eta, \chi, t), H_{j,i/2}(\varphi, \psi, \lambda, t), E_{j,i/2}(\varphi, \psi, \phi, t) \quad (i = \overline{0, 2n+1}):$$

$$\begin{cases} b_{11}(\varphi, Q^*, \eta) \left(D_{j1} \frac{\partial^2 P_{1,i}}{\partial \mu^2} + D_{j2} \frac{\partial^2 P_{2,i}}{\partial \mu^2} \right) - \tilde{v}^2(\varphi, Q^*, \chi) \frac{\partial P_{j,i}}{\partial \varphi} = g_{j,i}^4(\varphi, \mu, \chi, t), \\ P_{j,i}(\varphi, \mu, \chi, t) \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} 0, P_{j,i}(\varphi, 0, \chi, t) = w_{j,i}^4(\varphi, \chi, t), j = \overline{1, 2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_{11}(\varphi, Q^*, \eta) \left(D_{j1} \frac{\partial^2 \Gamma_{1,i}}{\partial \eta^2} + D_{j2} \frac{\partial^2 \Gamma_{2,i}}{\partial \eta^2} \right) - \tilde{v}^2(\varphi, Q^*, \chi) \frac{\partial \Gamma_{j,i}}{\partial \varphi} = g_{j,i}^5(\varphi, \eta, \chi, t), \\ \Gamma_{j,i}(\varphi, \eta, \chi, t) \xrightarrow{\eta \rightarrow \infty} 0, \Gamma_{j,i}(\varphi, 0, \chi, t) = w_{j,i}^5(\varphi, \chi, t), j = \overline{1, 2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_{12}(\varphi, \psi, Q^{**}) \left(D_{j1} \frac{\partial^2 H_{1,i}}{\partial \lambda^2} + D_{j2} \frac{\partial^2 H_{2,i}}{\partial \lambda^2} \right) - \tilde{v}^2(\varphi, \psi, Q^{**}) \frac{\partial H_{j,i}}{\partial \varphi} = g_{j,i}^6(\varphi, \psi, \lambda, t), \\ H_{j,i}(\varphi, \psi, \lambda, t) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0, H_{j,i}(\varphi, \psi, 0, t) = w_{j,i}^6(\varphi, \psi, t), j = \overline{1, 2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_{12}(\varphi, \psi, Q^{**}) \left(D_{j1} \frac{\partial^2 E_{1,i}}{\partial \phi^2} + D_{j2} \frac{\partial^2 E_{2,i}}{\partial \phi^2} \right) - \tilde{v}^2(\varphi, \psi, Q^{**}) \frac{\partial E_{j,i}}{\partial \varphi} = g_{j,i}^7(\varphi, \psi, \phi, t), \\ E_{j,i}(\varphi, \psi, \phi, t) \xrightarrow{\phi \rightarrow \infty} 0, E_{j,i}(\varphi, \psi, 0, t) = w_{j,i}^7(\varphi, \psi, t), j = \overline{1, 2}, \end{cases}$$

$$\text{де } g_{j,0}^4(\varphi, \mu, \chi, t) = 0, g_{j, \frac{1}{2}}^4(\varphi, \mu, \chi, t) = \tilde{V}_{\frac{1}{2}} \frac{\partial P_{j,0}}{\partial \varphi} - \tilde{B}_{11, \frac{1}{2}} \frac{\partial^2 \tilde{P}_0}{\partial \mu^2} - \tilde{B}_{21, \frac{1}{2}} \frac{\partial \tilde{P}_0}{\partial \mu},$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_i &= (D_{11} P_{1,i} + D_{12} P_{2,i}), g_{j, \frac{1}{2}}^4(\varphi, \mu, \chi, t) = \sum_{s=1}^i \tilde{V}_{\frac{1}{2}} \frac{\partial P_{j,(i-s)/2}}{\partial \varphi} - \sum_{s=1}^i \left(\tilde{B}_{11, \frac{1}{2}} \frac{\partial^2 \tilde{P}_{(i-s)/2}}{\partial \mu^2} + \right. \\ &\left. + \tilde{B}_{21, \frac{1}{2}} \frac{\partial \tilde{P}_{(i-s)/2}}{\partial \mu} \right) - \sum_{s=0}^{i-2} \tilde{V}_{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 \tilde{P}_{(i-s)/2}}{\partial \varphi^2} - \sum_{s=0}^{i-2} \tilde{B}_{12, \frac{1}{2}} \frac{\partial^2 \tilde{P}_{(i-s)/2}}{\partial \chi^2} - \sum_{s=0}^{i-2} \tilde{B}_{22, \frac{1}{2}} \frac{\partial \tilde{P}_{(i-s)/2}}{\partial \chi}, \quad i = \overline{2, 2n+1}, \end{aligned}$$

$$w_{j,0}^4(\varphi, \chi, t) = C_{j^{**}}(\varphi, \chi, t) - C_{j,0}(\varphi, Q^*, \chi, t) - \Pi_{j,0}(\varphi, Q^*, \chi, t),$$

$$w_{j, \frac{i}{2}}^4(\varphi, \chi, t) = \begin{cases} -C_{j,i/2}(\varphi, Q^*, \chi, t) - \Pi_{j,i/2}(\varphi, Q^*, \chi, t), & \text{якщо } i \text{ парне,} \\ 0, & \text{якщо } i \text{ непарне, } i = \overline{1, 2n+1}, \end{cases}$$

$$g_{j,0}^5(\varphi, \eta, \chi, t) = 0, \quad g_{j, \frac{1}{2}}^5(\varphi, \eta, \chi, t) = \tilde{V}_{\frac{1}{2}}^* \frac{\partial \Gamma_{j,0}}{\partial \varphi} - \tilde{B}_{11, \frac{1}{2}}^* \frac{\partial^2 \tilde{\Gamma}_0}{\partial \eta^2} - \tilde{B}_{21, \frac{1}{2}}^* \frac{\partial \tilde{\Gamma}_0}{\partial \eta},$$

$$\tilde{\Gamma}_i = (D_{11}\Gamma_{1,i} + D_{12}\Gamma_{2,i}), \quad g_{j, \frac{i}{2}}^5(\varphi, \eta, \chi, t) = \sum_{s=1}^i \tilde{V}_{\frac{i}{2}}^* \frac{\partial \Gamma_{j,(i-s)/2}}{\partial \varphi} - \sum_{s=1}^i \left(\tilde{B}_{11, \frac{i}{2}}^* \frac{\partial^2 \tilde{\Gamma}_{(i-s)/2}}{\partial \eta^2} + \tilde{B}_{21, \frac{i}{2}}^* \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{(i-s)/2}}{\partial \eta} \right) - \sum_{s=0}^{i-2} \tilde{V}_{\frac{i}{2}}^* \frac{\partial^2 \tilde{\Gamma}_{(i-2-s)/2}}{\partial \varphi^2} - \sum_{s=0}^{i-2} \tilde{B}_{12, \frac{i}{2}}^* \frac{\partial^2 \tilde{\Gamma}_{(i-2-s)/2}}{\partial \chi^2} - \sum_{s=0}^{i-2} \tilde{B}_{22, \frac{i}{2}}^* \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{(i-2-s)/2}}{\partial \chi},$$

$$i = \overline{2, 2n+1}, \quad w_{j,0}^5(\varphi, \chi, t) = C_j^{**}(\varphi, \chi, t) - C_{j,0}(\varphi, Q^*, \chi, t) - \Pi_{j,0}(\varphi, Q^*, \chi, t),$$

$$w_{j, \frac{i}{2}}^5(\varphi, \chi, t) = \begin{cases} -C_{j,i/2}(\varphi, Q^*, \chi, t) - \Pi_{j,i/2}(\varphi, Q^*, \chi, t), & \text{якщо } i \text{ парне,} \\ 0, & \text{якщо } i \text{ непарне, } i = \overline{1, 2n+1}, \end{cases}$$

$$g_{j,0}^6(\varphi, \psi, \lambda, t) = 0, \quad g_{j, \frac{1}{2}}^6(\varphi, \psi, \lambda, t) = \bar{V}_{\frac{1}{2}} \frac{\partial H_{j,0}}{\partial \varphi} - \bar{B}_{12, \frac{1}{2}} \frac{\partial^2 \tilde{H}_0}{\partial \lambda^2} - \bar{B}_{22, \frac{1}{2}} \frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial \lambda}, \quad \tilde{H}_i = (D_{11}H_{1,i} +$$

$$+ D_{12}H_{2,i}), \quad g_{j, \frac{i}{2}}^6(\varphi, \psi, \lambda, t) = \sum_{s=1}^i \bar{V}_{\frac{i}{2}} \frac{\partial H_{j,(i-s)/2}}{\partial \varphi} - \sum_{s=1}^i \left(\bar{B}_{12, \frac{i}{2}} \frac{\partial^2 \tilde{H}_{(i-s)/2}}{\partial \lambda^2} + \bar{B}_{22, \frac{i}{2}} \frac{\partial \tilde{H}_{(i-s)/2}}{\partial \lambda} \right) -$$

$$- \sum_{s=0}^{i-2} \bar{V}_{\frac{i}{2}} \frac{\partial^2 \tilde{H}_{(i-2-s)/2}}{\partial \varphi^2} - \sum_{s=0}^{i-2} \bar{B}_{11, \frac{i}{2}} \frac{\partial^2 \tilde{H}_{(i-2-s)/2}}{\partial \psi^2} - \sum_{s=0}^{i-2} \bar{B}_{21, \frac{i}{2}} \frac{\partial \tilde{H}_{(i-2-s)/2}}{\partial \psi}, \quad i = \overline{2, 2n+1},$$

$$w_{j,0}^6(\varphi, \psi, t) = C_{j^{***}}(\varphi, \psi, t) - C_{j,0}(\varphi, \psi, Q^{**}, t) - \Pi_{j,0}(\varphi, \psi, Q^{**}, t),$$

$$w_{j, \frac{i}{2}}^6(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} -C_{j,i/2}(\varphi, \psi, Q^{**}, t) - \Pi_{j,i/2}(\varphi, \psi, Q^{**}, t), & \text{якщо } i \text{ парне,} \\ 0, & \text{якщо } i \text{ непарне, } i = \overline{1, 2n+1}, \end{cases}$$

$$g_{j,0}^7(\varphi, \psi, \phi, t) = 0, \quad g_{j, \frac{1}{2}}^7(\varphi, \psi, \phi, t) = \bar{V}_{\frac{1}{2}}^* \frac{\partial E_{j,0}}{\partial \varphi} - \bar{B}_{12, \frac{1}{2}}^* \frac{\partial^2 \tilde{E}_0}{\partial \phi^2} - \bar{B}_{22, \frac{1}{2}}^* \frac{\partial \tilde{E}_0}{\partial \phi}, \quad \tilde{E}_i = (D_{11}E_{1,i} +$$

$$+ D_{12}E_{2,i}), \quad g_{j, \frac{i}{2}}^7(\varphi, \psi, \phi, t) = \sum_{s=1}^i \bar{V}_{\frac{i}{2}}^* \frac{\partial E_{j,(i-s)/2}}{\partial \varphi} - \sum_{s=1}^i \left(\bar{B}_{12, \frac{i}{2}}^* \frac{\partial^2 \tilde{E}_{(i-s)/2}}{\partial \phi^2} + \bar{B}_{22, \frac{i}{2}}^* \frac{\partial \tilde{E}_{(i-s)/2}}{\partial \phi} \right) -$$

$$- \sum_{s=0}^{i-2} \bar{V}_{\frac{i}{2}}^* \frac{\partial^2 \tilde{E}_{(i-2-s)/2}}{\partial \varphi^2} - \sum_{s=0}^{i-2} \bar{B}_{11, \frac{i}{2}}^* \frac{\partial^2 \tilde{E}_{(i-2-s)/2}}{\partial \psi^2} - \sum_{s=0}^{i-2} \bar{B}_{21, \frac{i}{2}}^* \frac{\partial \tilde{E}_{(i-2-s)/2}}{\partial \psi}, \quad i = \overline{2, 2n+1},$$

$$w_{j,0}^7(\varphi, \psi, t) = C_j^{***}(\varphi, \psi, t - C_{j,0}(\varphi, \psi, Q^{**}, t) - \Pi_{j,0}(\varphi, \psi, Q^{**}, t)),$$

$$w_{j, \frac{i}{2}}^7(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} -C_{j,i/2}(\varphi, \psi, Q^{**}, t) - \Pi_{j,i/2}(\varphi, \psi, Q^{**}, t), & \text{якщо } i \text{ парне,} \\ 0, & \text{якщо } i \text{ непарне, } i = \overline{1, 2n+1}, \end{cases}$$

$\tilde{V}_s, \tilde{B}_{11,s}, \tilde{B}_{12,s}, \tilde{B}_{21,s}, \tilde{B}_{22,s}, \tilde{V}_s^*, \tilde{B}_{11,s}^*, \tilde{B}_{12,s}^*, \tilde{B}_{21,s}^*, \tilde{B}_{22,s}^*, \bar{V}_s, \bar{B}_{11,s}, \bar{B}_{12,s}, \bar{B}_{21,s}, \bar{B}_{22,s}, \bar{V}_s^*, \bar{B}_{11,s}^*, \bar{B}_{12,s}^*, \bar{B}_{21,s}^*$ і $\bar{B}_{22,s}^*$ коефіцієнти при s -их степенях $\sqrt{\varepsilon}$ в розкладі функцій $v^2(\varphi, Q_* - \sqrt{\varepsilon}\mu, \chi), b_{11}(\varphi, Q_* - \sqrt{\varepsilon}\mu, \chi), b_{12}(\varphi, Q_* - \sqrt{\varepsilon}\mu, \chi), b_{21}(\varphi, Q_* - \sqrt{\varepsilon}\mu, \chi), b_{22}(\varphi, Q_* - \sqrt{\varepsilon}\mu, \chi), v^2(\varphi, Q^* - \sqrt{\varepsilon}\eta, \chi), b_{11}(\varphi, Q^* - \sqrt{\varepsilon}\eta, \chi), b_{12}(\varphi, Q^* - \sqrt{\varepsilon}\eta, \chi), b_{21}(\varphi, Q^* - \sqrt{\varepsilon}\eta, \chi), b_{22}(\varphi, Q^* - \sqrt{\varepsilon}\eta, \chi), v^2(\varphi, \psi, Q_{**} - \sqrt{\varepsilon}\lambda), b_{11}(\varphi, \psi, Q_{**} - \sqrt{\varepsilon}\lambda), b_{12}(\varphi, \psi, Q_{**} - \sqrt{\varepsilon}\lambda), b_{21}(\varphi, \psi, Q_{**} - \sqrt{\varepsilon}\lambda), b_{22}(\varphi, \psi, Q_{**} - \sqrt{\varepsilon}\lambda), v^2(\varphi, \psi, Q^{**} - \sqrt{\varepsilon}\phi), b_{11}(\varphi, \psi, Q^{**} - \sqrt{\varepsilon}\phi), b_{12}(\varphi, \psi, Q^{**} - \sqrt{\varepsilon}\phi), b_{21}(\varphi, \psi, Q^{**} - \sqrt{\varepsilon}\phi)$ і $b_{22}(\varphi, \psi, Q^{**} - \sqrt{\varepsilon}\phi)$ в ряди Тейлора в околах $\psi = Q_*, \psi = Q^*, \chi = Q_{**}$ і $\chi = Q^{**}$ відповідно.

Примежові функції $F_{(j, \frac{i}{2})}(\varphi, \psi, \chi, \rho, t)$ знаходяться в результаті

розв'язання наступних задач:

$$\begin{cases} \sigma_2 \frac{\partial F_{j,i/2}}{\partial t} = D_{j1}^* \frac{\partial^2 F_{1,i/2}}{\partial \rho^2} + D_{j2}^* \frac{\partial^2 F_{2,i/2}}{\partial \rho^2} + g_{j, \frac{i}{2}}^8, \\ F_{j,i/2}(\varphi, \psi, \chi, \rho, 0) = 0, F_{j,i/2}(\varphi, \psi, \chi, 0, t) = w_{j,i/2}^8(\varphi, \psi, \chi, t), \left. \frac{\partial}{\partial \rho} F_{j,i/2}(\varphi, \psi, \chi, \rho, t) \right|_{\rho \rightarrow \infty} = 0, \end{cases}$$

$$\text{де } g_{j,0}^8 = 0, g_{j, \frac{i}{2}}^8 = \sum_{s=1}^i \frac{2\rho^{s-1}}{R^s} (D_{j1}^* \frac{\partial F_{1,(i-1)/2}}{\partial \rho} - D_{j2}^* \frac{\partial F_{2,(i-1)/2}}{\partial \rho}),$$

$$w_{j, \frac{i}{2}}^8(\varphi, \psi, \chi, t) = \begin{cases} \sum_{s=1}^2 k_{js} (C_{s,i/2} + \Pi_{s,i/2} + P_{s,i/2} + \Gamma_{s,i/2} + H_{s,i/2} + E_{s,i/2}), & \text{якщо } j \text{ парне;} \\ \sum_{s=1}^2 k_{js} (P_{s,i/2} + \Gamma_{s,i/2} + H_{s,i/2} + E_{s,i/2}), & \text{якщо } j \text{ непарне;} \end{cases}$$

$$w_{j,n+1}^8(\varphi, \psi, \chi, t) = \sum_{s=1}^2 k_{js} (\Pi_{s,i/2} + P_{s,i/2} + \Gamma_{s,i/2} + H_{s,i/2} + E_{s,i/2}).$$

Слід зазначити, що при дослідженні багатокомпонентних процесів зазвичай використовують певні усереднені значення коефіцієнтів дифузії замість матриці коефіцієнтів D_{js} та D_{js}^* .

4.2 Сингулярно збурені процеси багатокомпонентного конвективно-дифузійного тепломасоперенесення в мікропористих середовищах

Процес трикомпонентного конвективно-дифузійного масопереносу в середовищі частинок мікропористої структури, за умови, що дві речовини (C_1, C_2) вступають у хімічну реакцію з утворенням третьої речовини та виділенням тепла описується системою диференціальних рівнянь з відповідними початковими та граничними умовами:

$$\sigma \frac{\partial C_j}{\partial t} = D_j(T) \frac{\partial^2 C_j}{\partial x^2} - v(x) \frac{\partial C_j}{\partial x} - \tilde{\alpha}_j K(T) C_1 C_2 - S_j^*(T) \left(\frac{\partial U_j}{\partial r} \right) \Big|_{r=R}, \quad (4.15)$$

$$\sigma^* \frac{\partial U_j}{\partial t} = D_j^*(T) \left(\frac{\partial^2 U_j}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U_j}{\partial r} \right) - \tilde{\alpha}_j K(T) U_1 U_2, \quad j = \overline{1,3}, \quad (4.16)$$

$$\sigma \frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - v(x) \frac{\partial T}{\partial x} + Kf^{**}(C_1, C_2), \quad (4.17)$$

$$C_j(x, t) \Big|_{t=0} = C_j^0(x), \quad U_j(x, r, t) \Big|_{t=0} = U_j^0(x, r), \quad T(x, t) \Big|_{t=0} = T^0(x), \quad (4.18)$$

$$C_j(0, t) = C_{j^*}(t), \quad \frac{\partial C_j(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0, \quad T(0, t) = T_*(t), \quad \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0, \quad (4.19)$$

$$U_j(x, r, t) \Big|_{r=R} = k_j \cdot C_j(x, t), \quad \frac{\partial U_j(x, r, t)}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad (4.20)$$

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq t < \infty.$$

Тут $C_j(x, t)$ – концентрація j -го сорту розчинної речовини у міжчастинковому просторі в точці x в момент часу t , $U_j(x, r, t)$ – концентрація j -го сорту розчинної речовини в точці r мікрочастинки з координатами x в момент часу

t , $T(x,t)$ – температура середовища, $K(T)$ – швидкість хімічної реакції, $\tilde{\alpha}_j = \varepsilon\alpha_j$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -1$, $D_j(T) = \varepsilon d_j(T)$ та $D_j^*(T) = \varepsilon d_j^*(T)$ відповідно характеризують швидкість протікання процесів дифузійного масоперенесення в міжчастинковому просторі та в порах частинок, а функції $S_j^*(T) = \varepsilon S_j(T)$ характеризують вплив внутрішньочастинкового дифузійного перенесення на міжчастинковий, $k_j > 0$ – константи адсорбційної рівноваги для кожного сорту розчинних речовин, $a = \varepsilon\tilde{a}$ – коефіцієнт температуропровідності, K характеризує швидкість підвищення температури середовища внаслідок хімічної реакції. Припускаємо, що мікрочастинки миттєво нагрівається чи охолоджуються, тобто немає зміни температури вздовж радіуса мікропористої частинки. Також вважаємо, що функції швидкості хімічної реакції, впливу внутрішньочастинкового перенесення на міжчастинкове та інші, лінійно залежать від температури, тобто $d_j(T) = d_{j,1}T + d_{j,2}$, $d_j^*(T) = d_{j,1}^*T + d_{j,2}^*$, $S_j(T) = S_{j,1}T + S_{j,2}$, $K(T) = K_1T + K_2$. Всі функції, які фігурують в умовах (4.18)–(4.20) є достатньо гладкими та узгодженими між собою вздовж ребер та кутових точок даної області.

Асимптотичне наближення розв'язку задачі матиме вигляд [24, 117, 141]:

$$C_j(x,t) = C_{j,0}(x,t) + \varepsilon C_{j,1}(x,t) + \dots + \varepsilon^n C_{j,n}(x,t) + \Pi_{j,0}(\xi,t) + \varepsilon \Pi_{j,1}(\xi,t) + \dots + \varepsilon^{n+1} \Pi_{j,n+1}(\xi,t) + R_{j,n}^1(x,t,\varepsilon), \quad (4.21)$$

$$U_j(x,r,t) = U_{j,0}(x,r,t) + \varepsilon U_{j,1}(x,r,t) + \dots + \varepsilon^n U_{j,n}(x,r,t) + F_{j,0}(x,\rho,t) + \dots + \varepsilon^{i/2} F_{j,i/2}(x,\rho,t) + \dots + \varepsilon^{n+1} F_{j,n+1}(x,\rho,t) + R_{j,n}^2(x,r,t,\varepsilon), \quad (4.22)$$

$$T(x,t) = T_0(x,t) + \varepsilon T_1(x,t) + \dots + \varepsilon^n T_n(x,t) + P_0(\xi,t) + \varepsilon P_1(\xi,t) + \dots + \varepsilon^{n+1} P_{n+1}(\xi,t) + R_n^3(x,t,\varepsilon), \quad (4.23)$$

де $C_{j,i}(x,t)$, $U_{j,i}(x,r,t)$, $T_i(x,t)$ ($i = \overline{0,n}$, $j = \overline{1,3}$) – члени відповідних регулярних частин асимптотики, $\Pi_{j,i}(\xi,t)$, $P_i(\xi,t)$ ($i = \overline{0,n+1}$) – функції типу примежового шару в околі $x=1$, $F_{j,i/2}(x,\rho,t)$ ($i = \overline{0,2n+1}$) – функції типу примежового шару

в околі $r = R$, $\xi = (\varphi^* - \varphi) \cdot \varepsilon^{-1}$, $\rho = (R - r) \cdot \varepsilon^{-1/2}$ – відповідні регуляризуючі перетворення, $R_{j,n}^1$, $R_{j,n}^2$, R_n^3 – залишкові члени.

Після підстановки рядів (4.21)–(4.23) в задачу (4.15)–(4.20) та прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях ε , отримано такі задачі для знаходження регулярних частин асимптотики:

$$\begin{cases} v(x) \frac{\partial C_{j,i}(x,t)}{\partial x} + \sigma_1 \frac{\partial C_{j,i}(x,t)}{\partial t} = g_{j,i}^1(x,t), \\ C_{j,i}(x,0) = w_{j,i}^1(x), \quad C_{j,i}(0,t) = w_{j,i}^2(t), \end{cases} \quad (4.24)$$

$$\begin{cases} \sigma_2 \frac{\partial U_{j,i}(x,r,t)}{\partial t} = g_{j,i}^2(x,r,t), \\ U_{j,i}(x,r,0) = w_{j,i}^3(x,r), \end{cases} \quad (4.25)$$

$$\begin{cases} v(x) \frac{\partial T_i(x,t)}{\partial x} + \sigma_1 \frac{\partial T_i(x,t)}{\partial t} = g_i^3(x,t), \\ T_i(x,0) = w_i^3(x), \quad T_i(0,t) = w_i^4(t), \end{cases} \quad (4.26)$$

де $g_{j,0}^1(x,t) = 0$, $w_{j,0}^1(x) = C_j^0(x)$, $w_{j,0}^2(t) = C_{j^*}(t)$, $g_{j,1}^1(x,t) = (d_{j,1}T_0 + d_{j,2}) \frac{\partial^2 C_{j,0}(x,t)}{\partial x^2} - \alpha_j (K_1 T_0 + K_2) C_{1,0}(x,t) C_{2,0}(x,t) - (S_{j,1} T_0 + S_{j,2}) \left(\frac{\partial U_{j,0}(x,r,t)}{\partial r} + \frac{\partial F_{j,0}(x,r,t)}{\partial r} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{\partial F_{j,1/2}(x,r,t)}{\partial r} \right) \Big|_{r=R}$, $g_{j,i}^1(x,t) = \sum_{s=1}^{i-1} T_s d_{j,1} \frac{\partial^2 C_{j,i-1-s}(x,t)}{\partial x^2} + (d_{j,1} T_0 + d_{j,2}) \frac{\partial^2 C_{j,i-1}(x,t)}{\partial x^2} - \alpha_j (K_1 T_0 + K_2) \sum_{s=0}^{i-1} C_{1,s}(x,t) C_{2,i-1-s}(x,t) - \alpha_j \sum_{s=0}^{i-1} \sum_{l=0}^{i-1-s} K_{j,s} T_s C_{1,l}(x,t) \times C_{2,i-1-s-l}(x,t) - \sum_{s=0}^{i-1} S_{j,s} T_s \left(\frac{\partial U_{j,i-1-s}(x,r,t)}{\partial r} + \frac{\partial F_{j,i-1-s}(x,r,t)}{\partial r} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{\partial F_{j,i-1/2-s}(x,r,t)}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} - (S_{j,1} T_0 + S_{j,2}) \left(\frac{\partial U_{j,0}(x,r,t)}{\partial r} + \frac{\partial F_{j,0}(x,r,t)}{\partial r} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{\partial F_{j,1/2}(x,r,t)}{\partial r} \right) \Big|_{r=R}$, $w_{j,i}^1(x) = 0$, $w_{j,i}^2(t) = 0$, $g_{j,0}^2(x,r,t) = 0$, $w_{j,0}^3(x,r) = U_j^0(x,r)$, $g_{j,1}^2(x,r,t) = (d_{j,1}^* T_0 + d_{j,2}^*) \left(\frac{\partial^2 U_{j,0}(x,r,t)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U_{j,0}(x,r,t)}{\partial r} \right) - \alpha_j (K_1 T_0 + K_2) U_{1,0}(x,r,t) U_{2,0}(x,r,t)$, $g_{j,i}^2(x,r,t) = (d_{j,1}^* T_0 + d_{j,2}^*) \times$

$$\begin{aligned} & \times \left(\frac{\partial^2 U_{j,i-1}(x,r,t)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U_{j,i-1}(x,r,t)}{\partial r} \right) + \sum_{s=0}^{i-1} d_{j,1}^* T_s \left(\frac{\partial^2 U_{j,i-1-s}(x,r,t)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U_{j,i-1-s}(x,r,t)}{\partial r} \right) - \\ & - \alpha_j (K_2 + K_1 T_0) U_{1,i-1}(x,r,t) U_{2,i-1}(x,r,t) - \alpha_j \sum_{s=0}^{i-1} \sum_{l=0}^{i-1-s} T_s K_{j,s} U_{2,i-1-s-l}(x,r,t) U_{1,l}(x,r,t), \\ & w_{j,i}^3(x,r) = K C_{1,0}(x,t) C_{2,0}(x,t), \quad g_0^3(x,t) = 0, \quad w_0^3(x) = T^0(x), \quad w_0^4(t) = T_*(t), \\ & g_i^3(x,t) = a \frac{\partial^2 T_{i-1}(x,t)}{\partial x^2} + K f^{**}(C_{1,i}(x,t), C_{2,i}(x,t)), \quad w_i^3(x) = 0, \quad w_i^4(t) = 0 \quad (i = \overline{1, n}, j = \overline{1, 3}). \end{aligned}$$

Розв'язки наведених задач знайдено методом характеристик:

$$\begin{aligned} C_{j,0}(x,t) &= \begin{cases} C_j^0(f^{-1}(\sigma f(x) - t)), & t < \sigma f(x), \\ C_{j*}(t - \sigma f(x)), & t \geq \sigma f(x), \end{cases} \\ U_{j,0}(x,r,t) &= U_j^0(x,r), \quad U_{j,i}(x,r,t) = \frac{1}{\sigma^*} \int_0^t g_{j,i}^2(x,r,\tilde{t}) d\tilde{t}, \quad i = \overline{1, n}, \\ C_{j,i}(x,t) &= \begin{cases} \frac{1}{\sigma} \int_0^t g_{j,i}^1(f^{-1}(\sigma f(x) - t + \tilde{t}), \tilde{t}) d\tilde{t}, & t < \sigma f(x), \\ \int_0^x \frac{g_{j,i}^1(\tilde{x}, \sigma f(\tilde{x}) + t - \sigma f(x))}{v^2(\tilde{x})} d\tilde{x}, & t \geq \sigma f(x), \end{cases} \\ T_i(x,t) &= \begin{cases} \frac{1}{\sigma} \int_0^t g_i^3(f^{-1}(\sigma f(x) - t + \tilde{t}), \tilde{t}) d\tilde{t} + T_0(f^{-1}(\sigma f(x) - t)), & t < \sigma f(x), \\ \int_0^x \frac{g_i^3(\tilde{x}, \sigma f(\tilde{x}) + t - \sigma f(x))}{v^2(\tilde{x})} d\tilde{x} + T_*(t - \sigma f(x)), & t \geq \sigma f(x), \quad i = \overline{0, n}. \end{cases} \end{aligned}$$

Врахувавши співвідношення $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\frac{1}{\varepsilon} \right)$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$ та розклавши функцію $v(1 - \xi\varepsilon)$ в ряд Тейлора в околі $x=1$, одержано рівняння із відповідними умовами для визначення примезових функцій $\Pi_{j,i}$ ($i = \overline{0, n+1}$, $j = \overline{1, 3}$) та P_i ($i = \overline{0, n+1}$):

$$\begin{cases} a \frac{\partial^2 P_i(\xi, t)}{\partial \xi^2} + v(1) \frac{\partial P_i(\xi, t)}{\partial \xi} = g_i^4(\xi, t), \\ \left. \frac{\partial P_i(\xi, t)}{\partial \xi} \right|_{\xi \rightarrow 0} = \mu_i(t), \quad P_i(\xi, t) \Big|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (d_{j,1}P_i(\xi,t) + d_{j,2}) \frac{\partial^2 \Pi_{j,i}(\xi,t)}{\partial \xi} + v(1) \frac{\partial \Pi_{j,i}(\xi,t)}{\partial \xi} = g_{j,i}^5(\xi,t), \\ \left. \frac{\partial \Pi_{j,i}(\xi,t)}{\partial \xi} \right|_{\xi \rightarrow 0} = v_{j,i}(t), \Pi_{j,i}(\xi,t) \Big|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \end{cases}$$

де $g_0^4(\xi,t) = 0$, $g_i^4(\xi,t) = \sigma \frac{\partial P_{i-1}(\xi,t)}{\partial t} - \sum_{s=0}^{i-1} \frac{(-1)^s}{s!} v^{(s)}(1) \xi^s \frac{\partial P_{i-1-s}(\xi,t)}{\partial \xi} +$

$$+ \sum_{s=0}^{i-1} \sum_{l=0}^{i-1-s} K \Pi_{(1,i-1-s-l)}(\xi,t) \Pi_{(2,l)}(\xi,t), \quad \mu_i(t) = -\frac{\partial T_{i-1}(1,t)}{\partial \xi} \quad (i = \overline{1,n}), \quad \mu_{n+1}(t) = 0,$$

$$g_0^5(\xi,t) = 0, \quad g_{j,1}^5(\xi,t) = \sigma \frac{\partial \Pi_{j,0}(\xi,t)}{\partial t} - d_{j,1} P_1(\xi,t) \frac{\partial^2 \Pi_{j,0}(\xi,t)}{\partial \xi^2} + v'(1) \xi \frac{\partial \Pi_{j,0}(\xi,t)}{\partial \xi},$$

$$g_{j,i}^5(\xi,t) = \sigma \frac{\partial \Pi_{j,i-1}(\xi,t)}{\partial t} - \sum_{s=0}^{i-1} d_{j,1} P_{s+1}(\xi,t) \frac{\partial^2 \Pi_{j,i-1-s}(\xi,t)}{\partial \xi^2} - \sum_{s=0}^{i-1} \frac{(-1)^s}{s!} v^{(s)}(1) \xi^s \frac{\partial \Pi_{j,i-1-s}(\xi,t)}{\partial \xi} -$$

$$- \alpha_j \sum_{s=0}^{i-1} \sum_{l=0}^{i-1-s} (K_{j,1} P_0 + K_{j,1}) \Pi_{(1,i-1-s-l)}(\xi,t) \Pi_{(2,l)}(\xi,t) \quad (i = \overline{2,n+1}), \quad v_{j,i}(t) = -\frac{\partial C_{j,i-1}(1,t)}{\partial \xi}$$

$$(i = \overline{0,n}), \quad v_{j,n+1}(t) = 0.$$

Аналогічно [14] отримуємо задачі для поправок $F_{j,i/2}(x,\rho,t)$:

$$\begin{cases} \sigma^* \frac{\partial F_{j,i/2}(x,\rho,t)}{\partial t} = (d_{j,1}^* T_0 + d_{j,2}^*) \frac{\partial^2 F_{j,i/2}(x,\rho,t)}{\partial \rho^2} + \gamma_{j,i/2}(x,\rho,t), \\ F_{j,i/2}(x,\rho,0) = 0, F_{j,i/2}(x,0,t) = \mathcal{G}_{j,i/2}^1(x,t), \left. \frac{\partial F_{j,i/2}(x,\rho,t)}{\partial \rho} \right|_{\rho \rightarrow \infty} = 0, \end{cases}$$

$$\gamma_{j,0}(x,\rho,t) = 0, \quad \gamma_{j,\frac{1}{2}}(x,\rho,t) = \frac{2}{R} (d_{j,1}^* T_0 + d_{j,2}^*) \frac{\partial F_{j,0}(x,\rho,t)}{\partial \rho}, \quad \gamma_{j,1}(x,\rho,t) =$$

$$= \frac{2}{R} (d_{j,1}^* T_0 + d_{j,2}^*) \frac{\partial F_{j,1/2}(x,\rho,t)}{\partial \rho} + d_{j,1}^* T_1 \frac{\partial^2 F_{j,0}(x,\rho,t)}{\partial \rho^2} - \alpha_j (K_1 T_0 + K_2) F_{1,0}(x,\rho,t) \times$$

$$\times F_{2,0}(x,\rho,t), \quad \mathcal{G}_{j,i/2}^1(x,t) = \begin{cases} k(C_{j,\frac{i}{2}}(x,t) + \Pi_{j,\frac{i}{2}}(x,t)), & i \text{ парне}; \\ 0, & i \text{ непарне}. \end{cases}$$

Розв'язок останньої задачі отримано за допомогою числових методів, зокрема методу сіток.

Оцінка залишкових членів проводиться аналогічно [28] на основі принципу максимуму для параболічних рівнянь.

4.3. Математичне моделювання процесів первинної очистки стічних вод з використанням мікропористих частинок

При моделюванні процесів очищення забруднених технологічних потоків часто доводиться враховувати не лише зміну концентрації забруднюючої речовини, а й самих сорбуючих частинок, які конвективно переносяться в фільтраційному потоці. Нехай домішкова речовина конвективно-дифузійно переноситься разом з адсорбуючими мікропористими частинками. Відповідна модельна сингулярно збурена задача конвективно-адсорбційно-дифузійного масоперенесення в двопористому середовищі матиме вигляд [19, 113]:

$$\sigma_1 \frac{\partial C}{\partial t} = \varepsilon D_c \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - v(x) \frac{\partial C}{\partial x} - D(Q) \int_0^R \frac{\partial U(x, \tilde{r}, t)}{\partial t} d\tilde{r}, \quad (4.27)$$

$$\sigma_2 \frac{\partial U}{\partial t} = \varepsilon D_u \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right), \quad (4.28)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial Q}{\partial t} = -\alpha v(x) \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad (4.29)$$

$$C(x, 0) = C_0^0(x), \quad C(0, t) = C_*(t), \quad C(l, t) = C^*(t), \quad (4.30)$$

$$U(x, r, 0) = U_0^0(x, r), \quad U(0, r, t) = U_*(r, t),$$

$$U(x, R, t) = kC(x, t), \quad U'_r(x, r, t)|_{r=0} = 0, \quad (4.31)$$

$$Q(x, 0) = Q_0^0(x), \quad Q(0, t) = Q_*(t), \quad Q_x(x, t)|_{x=L} = 0, \quad (4.32)$$

де $C(x, t)$ – концентрація забруднюючої речовини в міжчастинковому просторі в точці з координатою x в момент часу t , $U(x, r, t)$ – концентрація забруднюючої речовини в мікропористих частинках, $Q(x, t)$ – концентрація мікропористих частинок, D_c та D_u – коефіцієнти дифузії відповідно в міжчастинковому просторі та в порах частинок, $D(Q)$ – коефіцієнт впливу

внутрішньочастинкового переносу на міжчастинковий, який залежить від об'ємної концентрації адсорбуючих частинок, $0 < \alpha \leq 1$, σ_1, σ_2 – коефіцієнти пористості відповідно макро- та мікросередовищ, L – довжина фільтра. Вважаємо, що всі функції, які фігурують в умовах (4.30)–(4.32) є достатньо гладкими та узгодженими між собою в кутових точках відповідної області, а також на поверхнях частинок ($U_0^0(x, R) = kC_0^0(x), U_*(R, t) = kC_*(t)$).

Для знаходження концентрації мікропористих частинок $Q(x, t)$ маємо задачу (4.29), (4.32), розв'язок якої знайдено у вигляді:

$$Q(x, t) = \begin{cases} Q_*\left(t - \frac{\sigma_1}{\alpha} f(x)\right), & t \geq \frac{\sigma_1}{\alpha} f(x), \\ Q_0^0\left(f^{-1}\left(f(x) - \frac{\alpha t}{\sigma_1}\right)\right), & t < \frac{\sigma_1}{\alpha} f(x), \end{cases} \quad (4.33)$$

де $f(x) = \int_0^x \frac{d\tilde{x}}{v(\tilde{x})}$ – час проходження виділеної частинки від точки з координатою $\tilde{x} = 0$ до точки $\tilde{x} = x$; f^{-1} – функція, обернена до функції f (зазначимо, що така функція існує, оскільки підінтегральна функція $v^{-1}(\tilde{x})$ – неперервно диференційована, обмежена, додатньо визначена).

Розв'язок задач (4.27), (4.28) та (4.30), (4.31) знаходимо у вигляді асимптотичних рядів:

$$C(x, t) = C_0(x, t) + \varepsilon C_1(x, t) + \dots + \varepsilon^n C_n(x, t) + \Pi_0(\xi, t) + \varepsilon \Pi_1(\xi, t) + \dots + \varepsilon^{n+1} \Pi_{n+1}(\xi, t) + R_n^1(x, t, \varepsilon), \quad (4.33)$$

$$U(x, r, t) = U_0(x, r, t) + \varepsilon U_1(x, r, t) + \dots + \varepsilon^n U_n(x, r, t) + R_n^2(x, r, t, \varepsilon), \quad (4.34)$$

де $C_i(x, t)$, $U_i(x, r, t)$, ($i = \overline{0, n}$) – члени відповідних регулярних частин асимптотики, $\Pi_p(\xi, t)$ ($p = \overline{0, n+1}$) – функції типу примежового шару в околі $x = L$, $\xi = (L - x) \cdot \varepsilon^{-1}$ – змінна розтягу, $R_n^1(x, t, \varepsilon)$ та $R_n^2(x, r, t, \varepsilon)$ – залишкові члени.

Підставляючи (4.33)–(4.34) в (4.27)–(4.32), та прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях ε , отримуємо такі задачі для знаходження регулярних

частин асимптотики для кожного $i = \overline{0, n}$:

$$\begin{cases} \sigma_2 \frac{\partial}{\partial t} U_i(x, r, t) = D_u \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} U_i(x, r, t) + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} U_i(x, r, t) \right), \\ v(x) \frac{\partial}{\partial x} C_i(x, t) + \sigma_1 \frac{\partial}{\partial t} C_i(x, t) = g_i(x, t), \\ U_i(x, r, 0) = h_i^1(x, r), \quad \frac{\partial}{\partial r} U_i(x, 0, t) = 0, \quad U_i(x, R, t) = h_i^2(x, t), \\ C_i(x, 0) = w_i^1(x), \quad C_i(0, t) = w_i^2(t), \end{cases} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} h_0^1(x, r) &= U_0^0(x, r), \quad h_i^1(x, r) = 0 \text{ при } i > 0, \quad h_i^2(x, t) = kC_i(x, t) \text{ при } i \geq 0; \quad g_0(x, t) = \\ &= -D(Q) \int_0^R \frac{\partial U_0(x, \tilde{r}, t)}{\partial t} d\tilde{r}, \quad w_0^1(x) = C_0^0(x), \quad w_0^2(t) = C_*(t), \quad g_i(x, t) = D_c \frac{\partial^2}{\partial x^2} C_{i-1}(x, t) - \\ D(Q) \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=R}, \quad w_i^1(x) &= 0, \quad w_i^2(t) = 0 \text{ при } i > 0. \end{aligned}$$

Алгоритм чисельного розв'язування поставленої задачі:

1. Введемо рівномірну сітку $\{(x_j, r_m, t_j) : x_j = j \cdot \Delta x, r_m = m \cdot \Delta r, t_j = f(x_j); j = \overline{1, N}, m = \overline{1, M}\}$, та зробимо наступне присвоєння: $I = 0$, де I – лічильник.
2. Задаємо початкові умови $C_i(x, t_0) = w_i^1(x)$, $U_i(x, r, t_0) = h_i^1(x, r)$.
3. Для кожного $j = \overline{1, N}$:

3.1. Знаходимо $U_i(x, r, t_k)$ методом сіток з допомогою явної різницевої схеми при умові на границі $U_i(x, R, t_k) = h_i^2(x, t_{k-1})$; після цього, за допомогою методу характеристик, знаходимо:

$$C_i(x, t_k) = \begin{cases} \int_0^x \frac{g_i(\tilde{x}, (t_k - \sigma_1 f(x) + \sigma_1 f(\tilde{x})))}{v(\tilde{x})} d\tilde{x} + \varphi_i^1(t_k - \sigma_1 f(x)), & t_k \geq \sigma_1 f(x), \\ \frac{1}{\sigma_1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} g_i\left(f^{-1}\left(\frac{\tilde{t}}{\sigma_1} - \frac{t}{\sigma_1} + f(x)\right), \tilde{t}\right) d\tilde{t} + C_i\left(f^{-1}\left(f(x) - \frac{t_k}{\sigma_1}\right), t_{k-1}\right), & t_k < \sigma_1 f(x), \end{cases}$$

де $\varphi_0(t_k) = C_*(t_k)$, $\varphi_i(t_k) = 0$ при $i > 0$.

- 3.2. Враховуємо зміщення адсорбуючих частинок за рахунок конвективного перенесення:

$$U_i(x, r, t_k) = \begin{cases} U_*(r, t_k - \frac{\sigma_1}{\alpha} f(x)), t_k \geq \frac{\sigma_1}{\alpha} f(x), \\ U_i(f^{-1}(f(x) - \frac{\alpha t_k}{\sigma_1}), r, t_k), t_k < \frac{\sigma_1}{\alpha} f(x). \end{cases}$$

4. Якщо $I = 0$ то робимо присвоєння $cr_i^1(x, t) = C_i(x, t)$, $ur_i^1(x, r, t) = U_i(x, r, t)$, $I = I + 1$, $N = 2N$, переходимо до пункту 1. Якщо $I \neq 0$, то $cr_i^2(x, t) = C_i(x, t)$, $ur_i^2(x, r, t) = U_i(x, r, t)$;
5. Якщо $\|cr_i^1(x, t) - cr_i^2(x, t)\| < \varepsilon$ і $\|ur_i^1(x, r, t) - ur_i^2(x, r, t)\| < \varepsilon$, то $cr_i^2(x, t)$ – шукана концентрація забруднень в міжчастинковому просторі, $ur_i^2(x, r, t)$ – концентрація забруднень в мікрочастинках інакше – здійснюємо присвоєння: $cr_i^1(x, t) = cr_i^2(x, t)$, $ur_i^2(x, r, t) = ur_i^1(x, r, t)$, $N = 2N$. Переходимо до пункту 1.

Функції $\Pi(\xi, t) = \sum_{p=0}^{n+1} \varepsilon^p \Pi_p(\xi, t)$ призначені для усунення неузгодженостей,

внесених побудованими регулярними частинами $c(x, t) = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i c_i(x, t)$ в околі ділянки $x = L$ (виходу фільтраційної течії). Таким чином повинна виконуватись умова: $(C(L, t) + \Pi(0, t))|_{x=L} = C^*(t) + O(\varepsilon^n)$. Ці функції знаходимо в результаті розв'язку наступних задач:

$$\begin{cases} D_c \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \Pi_p(\xi, t) + v(L) \frac{\partial}{\partial \xi} \Pi_{p\xi}(\xi, t) = \mu_p(\xi, t), \\ \Pi_p(0, t) = v_p(t), \Pi_p(\xi, t)|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \end{cases}$$

$$\mu_0(\xi, t) = 0, \quad \mu_p(\xi, t) = \sigma_1 \frac{\partial}{\partial t} \Pi_{p-1}(\xi, t) + v'(l) \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \Pi_{p-1}(\xi, t) - \frac{1}{2} v''(l) \xi^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \Pi_{p-2}(\xi, t) + \dots + (-1)^p v^{(p)}(l) \xi^p \frac{\partial}{\partial \xi} \Pi_0(\xi, t) \text{ при } p > 0, \quad v_p(t) = -c_p(L, t) \text{ при } p = \overline{0, n}, \quad v_{n+1}(t) = 0.$$

Розв'язавши їх, отримаємо:

$$\Pi_0(\xi, t) = D_c \frac{\partial}{\partial \xi} C_0(L, t) v^{-1}(L) e^{-\frac{v(L)\xi}{D_c}}, \quad \Pi_1(\xi, t) = v^{-1}(L) e^{-\frac{v(L)\xi}{D_c}} (v'(L) \frac{\partial}{\partial \xi} C_0(L, t) (\frac{\xi^2}{2D_c} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\xi}{v(L)} + \frac{D_c}{v^2(L)} - \sigma_1 v^{-1}(L) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial t} C_0(L, t) \left(\xi + \frac{D_c}{v(L)} \right), \quad \Pi_2(\xi, t) = \xi^4 e^{-\frac{v(L)\xi}{D_c}} s_1 + \xi^3 e^{-\frac{v(L)\xi}{D_c}} s_2 + \\
& + \xi^2 e^{-\frac{v(L)\xi}{D_c}} s_3 + \xi e^{-\frac{v(L)\xi}{D_c}} s_4 + s_5, \quad \text{де } s_1 = \frac{(v'(L))^2}{v(L)D_c^3} \frac{\partial C_0}{\partial \xi}, \quad s_2 = \left(\frac{v'(L)}{2v(L)D_c} - \frac{\sigma_1}{3v(L)D_c} \right) \frac{v'(L)}{v(L)D_c} \frac{\partial C_0}{\partial \xi} \\
& - \frac{\sigma_1 v'(L)}{6v^2(L)D_c^2} \frac{\partial C_0}{\partial \xi \partial t}, \quad s_3 = \left(\frac{3v'(L)}{v(L)D_c} - 1 \right) \frac{v'(L)}{2v(L)^2} \frac{\partial C_0}{\partial \xi} - \frac{2\sigma_1 v'(L)}{v^3(L)D_c} \frac{\partial^2 C_0}{\partial \xi \partial t} - \frac{\sigma_1^2}{2v^3(L)D_c} \frac{\partial^3 C_0}{\partial \xi \partial t^2}, \\
& s_4 = \left(-\frac{3v'(L)}{v(L)D_c} - 1 \right) \frac{v'(L)}{v(L)^3} \frac{\partial C_0}{\partial \xi} - \frac{5\sigma_1 v'(L)}{v^4(L)} \frac{\partial^2 C_0}{\partial \xi \partial t} + \left(\frac{1}{v(L)} - 1 \right) \frac{\sigma_1^2}{v^3(L)} \frac{\partial^3 C_0}{\partial \xi \partial t^2}, \quad s_5 = -\left(\frac{3}{v(L)} + \right. \\
& \left. + D_c \right) \frac{v'(L)D_c}{v(L)^4} \frac{\partial C_0}{\partial \xi} e^{-\frac{v(L)\xi}{D_c}} - \frac{5\sigma_1 v'(L)D_c}{v^5(L)} \frac{\partial^2 C_0}{\partial \xi \partial t} e^{-\frac{v(L)\xi}{D_c}} + \left(\frac{1}{v(L)} - 1 \right) \frac{\sigma_1^2 D_c}{v^4(L)} \frac{\partial^3 C_0}{\partial \xi \partial t^2} e^{-\frac{v(L)\xi}{D_c}}.
\end{aligned}$$

4.4. Результати комп'ютерного моделювання

Для проведення комп'ютерного моделювання процесу двокомпонентного масоперенесення забруднюючих речовин в мікропористому середовищі використаний ідеальний фільтраційний фон для області G_z [18] при таких значеннях коефіцієнтів: $\kappa = 0.45 \text{ м/добу}$, $\sigma_1 = 0.87$, $\sigma_2 = 0.94$, $D_{11} = 10^{-8} \text{ м}^2/\text{добу}$, $D_{12} = 10^{-9} \text{ м}^2/\text{добу}$, $D_{21} = 10^{-9} \text{ м}^2/\text{добу}$, $D_{22} = 10^{-8} \text{ м}^2/\text{добу}$, $D_{11}^* = 6 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{добу}$, $D_{22}^* = 4 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{добу}$, $D_{12}^* = D_{21}^* = 10^{-12} \text{ м}^2/\text{добу}$, $k_1 = 0.8$, $k_2 = 0.95$, а також початкових і граничних умовах: $C_1^0(\varphi, \psi, \chi) = C_2^0(\varphi, \psi, \chi) = 0$, $U_j^0(\varphi, \psi, \chi, r) = 0$,

$$C_{1*}(\psi, \chi, t) = \begin{cases} 0.02 \cos(5t + \pi) + 0.02, & t \leq \frac{\pi}{5}, \\ 0.04, & t > \frac{\pi}{5}, \end{cases} \quad C_{2*}(\psi, \chi, t) = \begin{cases} 0.017 \cos(10t + \pi) + 0.017, & t \leq \frac{\pi}{10}, \\ 0.034, & t > \frac{\pi}{10}. \end{cases}$$

На рис. 4.2 проілюстровано вплив внутрішньочастинкового перенесення на міжчастинкове. Криві 1 на рис. 4.2,а і рис. 4.2,б відповідають конвективним складовим розв'язку $C_{1,0}(\varphi, \psi, \chi, t)$ і $C_{2,0}(\varphi, \psi, \chi, t)$ відповідно вздовж лінії течії $\{\bar{\varphi} = (\varphi, 1, 1), 0 \leq \varphi \leq 1\}$ в момент часу $t = 5$ діб, криві 2-4 – розв'язку

$C_i(\varphi, \psi, \chi, t) = C_{i,0}(\varphi, \psi, \chi, t) + \varepsilon C_{i,1}(\varphi, \psi, \chi, t)$ для першого (а) и другого (б) сортів забруднюючих речовин відповідно в той же момент часу при таких значеннях коефіцієнтів впливу внутрішньочастинкового перенесення на міжчастинкове: $S_{11} = S_{22} = 10^{-3} \text{ м/добу}$, $S_{12} = S_{21} = 0 \text{ м/добу}$ (криві 2), $S_{11} = S_{22} = 10^{-3} \text{ м/добу}$, $S_{12} = S_{21} = 10^{-4} \text{ м/добу}$ (криві 3), $S_{11} = S_{22} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м/добу}$, $S_{12} = S_{21} = 10^{-4} \text{ м/добу}$ (криві 4).

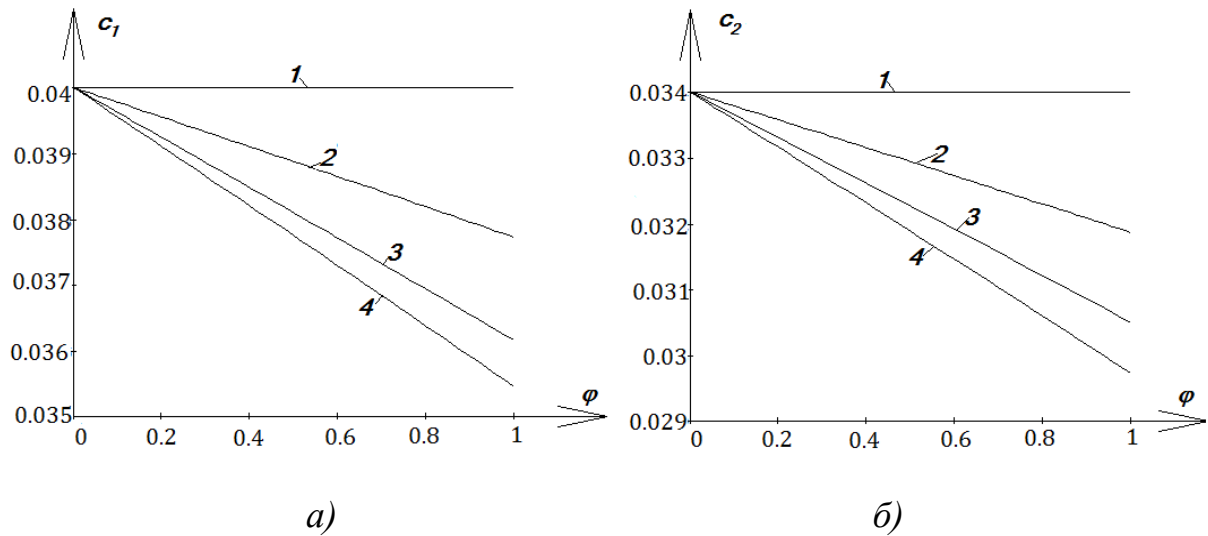


Рис. 4.2. Розподіл концентрації першого (а) та другого (б) сортів забруднюючих речовин вздовж лінії течії $\{\bar{\varphi} = (\varphi, 1, 1), 0 \leq \varphi \leq 1\}$ в момент часу $t = 5 \text{ діб}$

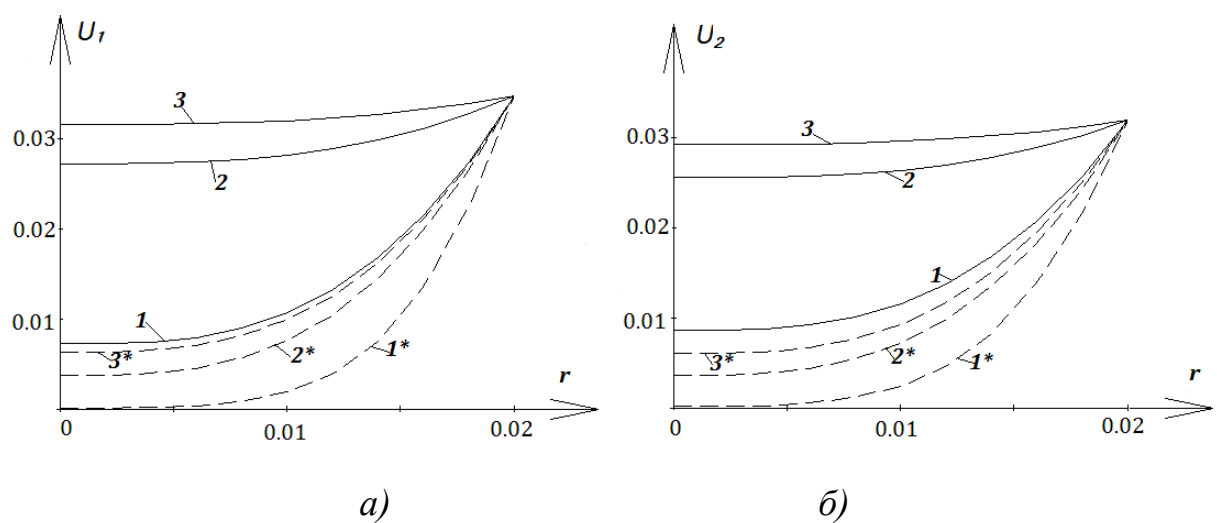


Рис. 4.3. Розподіл концентрацій першого (а) та другого (б) сортів забруднюючих речовин в мікрочастинках

На рис. 4.3 зображено накопичення двох сортів забруднюючої речовини в мікрочастинках $U_1(\varphi_1, \psi_1, \chi_1, r, t)$ (а) і $U_2(\varphi_1, \psi_1, \chi_1, r, t)$ (б), де $\varphi_1 = 0.02$, $\psi_1 = 0.1$, $\chi_1 = 0.1$. Криві 1-3 відповідають значенням концентрацій забруднюючих речовин у виділених частинках в моменти часу $t = 1$ доба, $t = 3$ діб, $t = 5$ діб при $D_{11}^* = D_{22}^* = 10^{-4} \text{ м}^2 / \text{добу}$, а криві 1*-3* при $D_{11}^* = D_{22}^* = 10^{-5} \text{ м}^2 / \text{добу}$.

Результати комп'ютерного моделювання процесу, описаного в п. 4.2, зображені на рис. 4.4 – рис. 4.6. Обчислення проводились для середовища (фільтра) довжиною $L = 1 \text{ м}$, що складається з мікропористих частинок радіусом $R = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, при наступних параметрах процесу: $\varepsilon = 10^{-5}$, $d_{1,1} = 1 \text{ м}^2 / \text{добу}$, $d_{1,2} = 0.85 \text{ м}^2 / \text{добу}$, $d_{2,1} = 0.65 \text{ м}^2 / \text{добу}$, $d_{2,2} = 0.89 \text{ м}^2 / \text{добу}$, $d_{3,1} = 0.7 \text{ м}^2 / \text{добу}$, $d_{3,2} = 0.9 \text{ м}^2 / \text{добу}$, $d_{1,1}^* = 0.005 \text{ м}^2 / \text{добу}$, $d_{1,2}^* = 0.001 \text{ м}^2 / \text{добу}$, $d_{2,1}^* = 0.006 \text{ м}^2 / \text{добу}$, $d_{2,2}^* = 0.001 \text{ м}^2 / \text{добу}$, $d_{3,1}^* = 0.006 \text{ м}^2 / \text{добу}$, $d_{3,2}^* = 0.008 \text{ м}^2 / \text{добу}$, $K_1 = 10 \text{ м}^3 / \text{кг} \cdot \text{добу} \cdot \text{C}$, $K_2 = 5 \text{ м}^3 / \text{кг} \cdot \text{добу}$, $v(x) = 1 \text{ м} / \text{добу}$, $a = 1 \text{ м}^2 / \text{добу}$, $K = 5 \text{ C} \cdot \text{м}^6 / \text{кг}^2 \cdot \text{добу}$, $\sigma = 0.7$, $\sigma^* = 0.8$, $k_1 = 0.6$, $k_2 = 0.4$, $k_3 = 1$, $C_j^0(x) = 0 \text{ кг} / \text{м}^3$, $U_j^0(x, r) = 0 \text{ кг} / \text{м}^3$, $T^0(x) = 10^0 \text{ C}$, $C_{3*}(t) = 0 \text{ кг} / \text{м}^3$,

$$C_{1*}(t) = \begin{cases} 0.003(1 + \cos(5t + \pi)), & t \leq \pi/5, \\ 0.006\psi, & t > \pi/5, \end{cases} \quad C_{2*}(t) = \begin{cases} 0.0425(1 + \cos(10t + \pi)), & t \leq \pi/10, \\ 0.085\psi, & t > \pi/10. \end{cases}$$

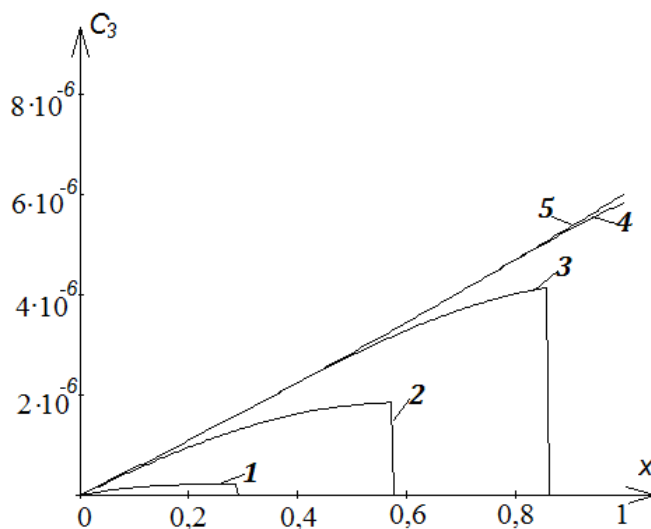


Рис.4.4. Розподіл концентрації речовини, що утворюється в результаті хімічної реакції

На рис. 4.4 зображено розподіл концентрації $C_3(x,t)$ речовини, що утворюється внаслідок реакції між забруднюючими речовинами $C_1(x,t)$ та $C_2(x,t)$ в моменти часу $t=0.4$ доби, $t=0.6$ доби, $t=0.8$ доби, $t=1$ доба (криві 1-4 відповідно).

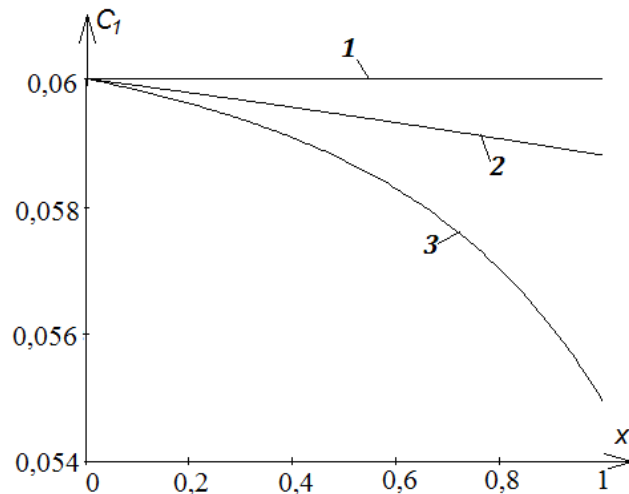


Рис.4.5. Розподіл концентрації забруднюючої речовини в міжчастинковому просторі

На рис. 4.5 показано ефект від хімічної реакції та адсорбції мікрочастинками, а саме наведені графіки розподілу концентрації забруднюючої речовини $C_1(x,t)$ за умови відсутності масообміну (крива 1), за умови протікання хімічної реакції (крива 2) та за умови і протікання реакції і адсорбції мікрочастинками (крива 3).

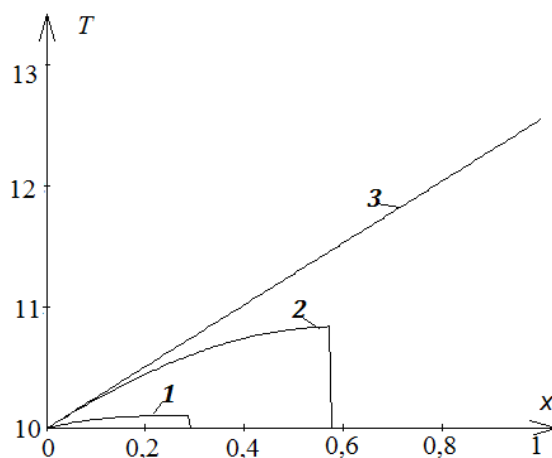


Рис.4.6. Розподіл температури в міжчастинковому просторі

На рис. 4.6 проілюстровано зростання температури в міжчастинковому середовищі внаслідок хімічної реакції в моменти часу $t=0.2$, $t=0.5$, $t=1$ (криві 1 – 3 відповідно).

Для процесу первинної очистки забрудненого потоку з використання мікрочастинок (п. 4.3) в середовищі довжиною $L=1\text{ м}$, яке в початковий момент часу $t=0\text{ год}$ заповнене адсорбуючими частинками радіусом $R=10^{-5}\text{ м}$ з концентрацією $Q_0^0(x)=0.5\text{ кг/м}^3$ при сталій швидкості конвективного перенесення $v(x)=1\text{ м/год}$. Початковий розподіл забруднення в міжчастинковому середовищі та в порах частинок відповідно дорівнюють $C_0^0(x)=0.1$ та $U_0^0(x,r)=\frac{2}{\pi}\arctg(1+100\frac{r-R}{R})kC_0^0(x)\text{ кг/м}^3$. На вході в область маємо $U_*(r,t)=U_0^0(x,r)=\frac{2}{\pi}\arctg(1+100\frac{r-R}{R})kC_*(t)\text{ кг/м}^3$, $C_*(t)=0.1\text{ кг/м}^3$, $Q_*(t)=0.5\text{ кг/м}^3$. Комп'ютерний експеримент проводився при таких значеннях коефіцієнтів системи (1)-(6): $\sigma_1=0.8$, $\sigma_2=0.7$, $D_c=0.9\text{ м}^2/\text{год}$, $\tilde{D}_q=0.01\text{ м}^2/\text{год}$, $k=1$, $\alpha=1$.

На рис. 4.7. наведено графіки розподілу концентрації забруднюючої речовини в міжчастинковому просторі в моменти часу $t_1=0$, $t_2=0.048$, $t_3=0.128$, $t_4=0.256$, $t_5=0.32$, $t_6=0.48$, $t_7=0.8$ (криві 1–7 відповідно).

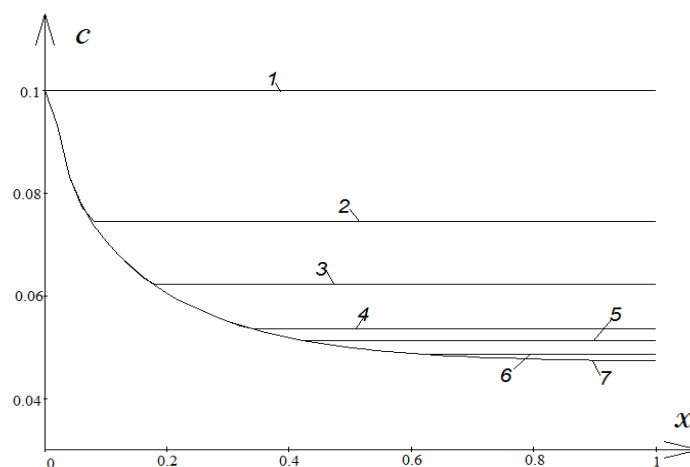


Рис.4.7. Розподіл концентрації забруднюючої речовини $C(x,t)$ у різні моменти часу t .

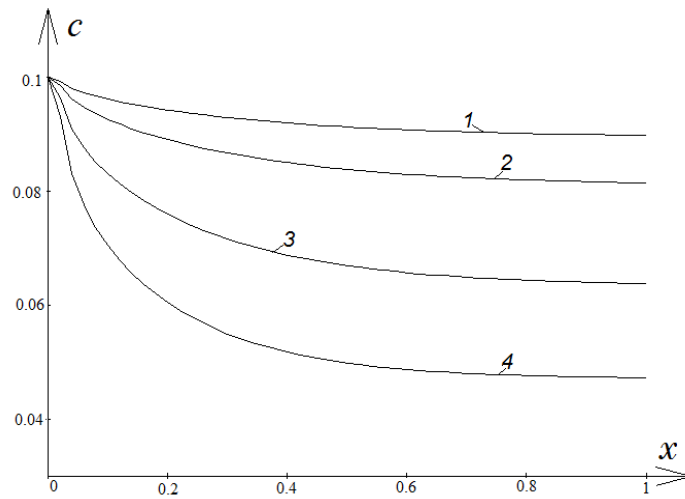


Рис.4.8. Вплив концентрації адсорбуючих мікрочастинок на розподіл забруднюючої речовини $C(x,t)$ при $t = 0.8$ год

Як показав експеримент при $t > 0.8$ год процес стабілізується, тому для подальшого зменшення концентрації забруднюючої речовини в середовищі доцільним є збільшення концентрації адсорбуючих мікрочастинок, що подаються на вході. Залежність розподілу концентрації шкідливих домішок від кількості частинок, що їх поглинають зображено на рис. 4.8. Так, крива 1 відображає розподіл $C(x,t)$ при $D(Q) = 10^4$, крива 2 – при $D(Q) = 2 \cdot 10^4$, крива 3 – при $D(Q) = 5 \cdot 10^4$, крива 4 – при $D(Q) = 10^5$.

4.5. Висновки до четвертого розділу

Сформована математична модель сингулярно збуреного процесу конвективно-дифузійно-адсорбційного масопереносу двох сортів забруднюючої речовини в мікропористому середовищі – модельній області, що має форму криволінійного паралелепіпеда, обмеженого еквіпотенціальними поверхнями і поверхнями течії. Побудовано асимптотичне розв'язання розв'язків відповідної просторової нелінійної сингулярно збуреної крайової задачі. На основі чого проведено комп'ютерний експеримент, зокрема, графічно зображено

просторово-часовий розподіл концентрацій двох сортів забруднюючих речовин в міжчасткових просторі і в мікрочастинках при різних значеннях параметрів процесу і різних співвідношеннях характеристик вхідних компонент.

Запропоноване узагальнення даної моделі на випадок врахування масообміну, породженого екзотермічною хімічною реакцією забруднюючих речовин, та побудовано асимптотичне розв'язання розв'язків відповідних сингулярно збурених задач.

Змодельовано процес первинної очистки стічних вод з використанням пористих мікрочастинок, що рухаються конвективно у фільтраційному потоці та побудовано алгоритм числово-асимптотичного наближення розв'язку відповідної модельної задачі на відшукування моменту часу стабілізації процесу очищення, після якого необхідно збільшувати концентрацію адсорбенту, що поступає у фільтраційний потік.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота є завершеним науковим дослідженням, у якому розв'язано важливе науково-технічне завдання математичного моделювання технологічних процесів конвективно-дифузійного тепломасоперенесення розчинних речовин у пористих та мікропористих середовищах (фільтрах) у випадку переважання одних складових процесу над іншими та розвитку методів теорії збурень розв'язання відповідних нелінійних сингулярно збурених задач.

Найбільш важливі наукові та практичні результати полягають у наступному:

1. Узагальнено математичні моделі сингулярно збурених процесів конвективної дифузії в пористих середовищах на випадок дослідження відповідних багатокомпонентних неізотермічних процесів з урахуванням хімічної реакції між розчинними речовинами. Побудовано асимптотичне наближення розв'язків відповідних крайових задач, обґрунтованість яких забезпечується високим рівнем співпадання результатів числових експериментів та аналітичними розв'язками відповідних спеціальних типів модельних тестових задач. На основі отриманих числових результатів підтверджено прогнозовану інтенсифікацію дифузійних та масообмінних складових процесу зі збільшенням температури середовища.

2. Сформовано та обґрунтовано математичну модель сингулярно збуреного процесу конвективно-дифузійно-адсорбційного масоперенесення розчинної речовини в однорідному та кусково-однорідному середовищі частинок мікропористої структури, що на відміну від існуючих, враховує механізм конвективного перенесення, а також уточнює розрахунок розподілу концентрації в мікропористому середовищі (фільтрі); побудовано асимптотичне розв'язання розв'язків відповідної крайової задачі, у тому числі за умови неповних даних. Підтверджено, що незважаючи на малу швидкість протікання явищ дифузійного масоперенесення в порах частинок, з часом це суттєво впливає на розподіл концентрації у самій частинці та у всьому фільтрі, а отже, можливим є використання розглянутого мікропористого середовища з метою очищення рідин від забруднень. У рамках окреслених середовищ і моделей встановлено, що врахування сорбції мікропористими частинками уточнює розрахунок концентрації на виході фільтра на 10-14 %.

3. Вперше побудовано математичну модель сингулярно збуреного процесу багатокомпонентного конвективно-дифузійно-адсорбційного масоперенесення розчинної речовини в однорідному мікропористому середовищі (фільтрі), за умов врахування масообміну та взаємовпливу компонент. Побудовано асимптотичне розв'язання розв'язку відповідних одновимірних нелінійних сингулярно збурених крайових задач, на основі чого проведено комп'ютерний експеримент та отримано просторово-часовий розподіл концентрацій забруднюючих речовин при різних значеннях параметрів процесу. На основі аналізу отриманих результатів зроблено висновок про значний вплив адсорбції та реакції, не зважаючи на те, що вони є малими в порівнянні з конвекцією.

4. Отримано розв'язок модельної задачі процесу первинної очистки стічних вод з використанням мікропористих сорбентів, яка враховує зміну концентрації не лише забруднення, а й самих сорбуючих частинок. Як показав числовий експеримент, починаючи з деякого моменту часу процес очищення стабілізується, тому для подальшого зменшення концентрації забруднюючої речовини в середовищі доцільним є збільшення концентрації адсорбуючих мікрочастинок, що подаються на вході.

5. Змодельовано процес конвективно-дифузійного тепломасоперенесення у тонкій трубці за умови превалювання конвективних його складових над дифузійними та розвинуто асимптотичне наближення сингулярно збуреної задачі з умовами теплообміну на бічній границі, що виникає, зокрема, при моделюванні відбору ґрунтового тепла за допомогою ґрунтового теплообмінника, на основі отриманих розв'язків встановлені оптимальні розміри теплообмінника для конкретних умов експлуатації (вид ґрунту, річна зміна температури ґрунту за глибиною).

На основі низки комп'ютерних експериментів, зокрема при створенні (на основі запропонованих моделей і розроблених обчислювальних методів) рекомендацій щодо покращення тепловологісного режиму будівлі фільтрів насосної станції «Новий двір» в (м. Рівне), а також при розробці робочих проектів реконструкції та налаштування роботи систем пом'якшення води для котелень (студмістечка НУВГП в м. Рівне та Більськовільської ЗОШ I-III ст. в с. Більська Воля), встановлено оптимальні технологічні параметри відповідних процесів, що дасть змогу відповідно збільшити продуктивність роботи господарських об'єктів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Авер'янов С. Ф. Фильтрация из каналов и ее влияние на режим грунтовых вод / С. Ф. Авер'янов. – М.: Колос, 1982. – 237 с.
2. Алифанов О. М. Обратные задачи теплообмена / О. М. Алифанов. – М.: Машиностроение, 1988. – 280 с.
3. Амосов А. А. Вычислительные методы для инженеров / А. А. Амосов, Ю. А. Дубинский, Н. В. Копченова. – М.: Высшая школа, 1994. – 544 с.
4. Андерсон Д. Вычислительная гидродинамика и теплообмен / Д. Андерсон, Дж. Таннехилл, Р. Плетчер. – 1990. – Т. 1. – 384 с.; – Т. 2. – 392 с.
5. Антонцев С. Н. Пространственные задачи нестационарной двухфазной фильтрации в неоднородных анизотропных пористых средах / С. Н. Антонцев, В. Н. Монахов // Докл. АН СССР. – 1978. – 243. – №3. – С.553–556.
6. Аравин В. И. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде / В. И. Аравин, С. Н. Нумеров. – М.: Гостехиздат, 1953. – 616 с.
7. Арсенин В. Я. Математическая физика / В. Я. Арсенин. – М.: Наука, 1974. – 432 с.
8. Баренблатт Г. И. Движение жидкостей и газов в природных пластах / Г. И. Баренблатт, В. Н. Ентов, В. М. Рыжик. – М.: Недра, 1984. – 303 с.
9. Бахвалов Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М.: Наука, 1987. – 451с.
10. Берман В.С. Об асимптотическом решении одной нестационарной задачи о распространении фронта химической реакции / В. С. Берман // Докл. АН СССР. – 1978. – Т.242. – №2. – С.265–267.
11. Берс Л. Уравнения с частными производными / Л. Берс, Ф. Джон, М. Шехтер. – М.: Мир, 1966. – 351 с.
12. Боголюбов Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. – М.: Физматгиз, 1958. – 408 с.

13. Бомба А. Я. Асимптотический метод решения задач массопереноса растворимых веществ при плановой фильтрации подземных вод: Дис... канд. физ.-мат. наук: 01.02.05. – К., 1984. – 135 с.
14. Бомба А. Я. Асимптотичний метод розв'язання одного класу модельних сингулярно збурених задач процесу масоперенесення в різнопористих середовищах / А. Я. Бомба, І. М. Присяжнюк, О. В. Присяжнюк // Доповіді НАН України. – 2013. – № 3. – С. 28–34.
15. Бомба А. Я. Ідентифікація параметрів сингулярно збурених задач типу «конвекція-дифузія-масообмін» в різнопористих середовищах / А. Я. Бомба, І. М. Присяжнюк, О. В. Присяжнюк // Вісник ХНУ. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». Вип. 22. – 2013. – С. 36–44.
16. Бомба А. Я. Ідентифікація параметрів сингулярно збурених задач типу «конвекція-дифузія-масообмін» в різнопористих середовищах / А. Я. Бомба, І. М. Присяжнюк, О. В. Присяжнюк // Матеріали Всеукраїнської наукової конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів». – Рівне, 2013. – С.34.
17. Бомба А. Я. Математичне моделювання нелінійних сингулярно збурених процесів очищення стічних вод від двокомпонентного забруднення в різнопористому середовищі / А. Я. Бомба, І. М. Присяжнюк, О. В. Присяжнюк // Сучасні комп'ютерні інформаційні технології: Матеріали III Всеукраїнської школи-семінару молодих вчених і студентів АСІТ'2013. – Тернопіль: ТНЕУ, 2013. – С.16–17.
18. Бомба А. Я. Математичне моделювання просторових сингулярно-збурених процесів типу фільтрація-конвекція-дифузія. / А. Я. Бомба, Ю. Є. Климюк. – Рівне: «Асоль», 2014. – 273 с.
19. Бомба А. Я. Математичне моделювання процесів первинної очистки стічних вод із використанням пористих мікрочастинок / А. Я. Бомба, І. М. Присяжнюк, О. В. Присяжнюк // Праці міжнар. наук. конф. "Питання оптимізації обчислень (ПОО-XL)", присв. 90-річчю від дня народж. акад. В.М. Глушкова. – К.: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАНУ (Кацевелі, 2013). – С. 41.

20. Бомба А.Я. Математичне моделювання сингулярно збурених процесів багатокомпонентної конвективної дифузії в нанопористих середовищах / А.Я. Бомба, І. М. Присяжнюк, О.В. Присяжнюк // II науково-технічна конференція "Обчислювальні методи і системи перетворення інформації" присвячена пам'яті професора Б.О. Попова – Львів ФМІ НАНУ, 2014. – С.13–15.
21. Бомба А. Я. Математичне моделювання сингулярно збурених процесів пом'якшення води на натрій катіонітових фільтрах / А. Я. Бомба, О. В. Присяжнюк // Науково-технічна конференція «Мікро- та нанонеоднорідні матеріали: моделі та експеримент» (MNM 2015). – Львів, 2015. – С. 43–44.
22. Бомба А. Я. Моделирование нелинейных сингулярно возмущенных процессов двухкомпонентного конвективно-диффузионного массопереноса в нанопористой среде / А. Я. Бомба, І. М. Присяжнюк, О. В. Присяжнюк // Электронное моделирование. – 2015. – Т. 37. – №4. – С. 37–52.
23. Бомба А. Я. Моделювання сингулярно збурених процесів масоперенесення двокомпонентного забруднення в нанопористому багаточаровому середовищі / А. Я. Бомба, О. В. Присяжнюк // Сучасні комп'ютерні інформаційні технології: Матеріали V Всеукраїнської школи-семінару молодих вчених і студентів АСІТ'2015. – Тернопіль: ТНЕУ, 2015. – С. 15–16.
24. Бомба А. Я. Моделювання сингулярно збурених процесів тепломасоперенесення в нанопористих середовищах / А.Я. Бомба, О.В. Присяжнюк // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики (APAMCS-2015). – Львів : ЛНУ ім І. Франка, 2015. – С. 81–82.
25. Бомба А.Я. Модельні сингулярно збурені задачі процесів відбору ґрунтового тепла / А. Я. Бомба, Б. П. Сидорчук, О. В. Присяжнюк // Вісник ТНТУ. Серія «Математичне моделювання. Математика. Фізика». – Тернопіль : ТНТУ, 2014. – Том 74. – № 2. – С. 223–231.
26. Бомба А. Я. Модельні сингулярно збурені задачі процесів очистки стічних вод із використанням пористих мікрочастинок / А. Я. Бомба, О. В. Присяжнюк

- // Праці міжнародної наукової конференції «Компьютерное моделирование в наукоемких технологиях» (КМНТ-2014). – Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2014. – С.41–44.
- 27.Бомба А. Я. Нелінійні сингулярно-збурені задачі типу "конвекція – дифузія": монографія / А. Я. Бомба, С. В. Барановський, І. М. Присяжнюк. – Рівне : НУВГП, 2008. – 254 с.
- 28.Бомба А. Я. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки: монографія / А. Я. Бомба, В. М. Булавацький, В. В. Скопецький. – К.: Наукова думка, 2007. – 308 с.
- 29.Бомба А.Я. Обернені сингулярно збурені задачі процесу масоперенесення в різнопористих середовищах / А. Я. Бомба, І. М. Присяжнюк, О. В.Присяжнюк, О. А. Фурсачик // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: технічні науки. – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2012. – Вип.7. – С. 3–11.
- 30.Бомба А. Я. Обернені сингулярно збурені задачі процесу масоперенесення в різнопористих середовищах / А. Я. Бомба, І. М. Присяжнюк, О. В. Присяжнюк // Матеріали міжнародної наукової конференції «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь». – Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, 13-14 грудня 2012 року. – С.3–4.
- 31.Бомба А. Я. Обернені сингулярно збурені модельні задачі типу нанофільтрування / А. Я. Бомба, І. М. Присяжнюк, О. В. Присяжнюк // Матеріали конф. Т. 1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. – К.: НТУУ «КПІ», 2015. – С. 44–45 .
- 32.Бомба А. Я. Просторові нелінійні сингулярно збурені крайові задачі типу “конвекція-дифузія” в анізотропних середовищах / А. Я. Бомба, Ю. Є. Климюк, В. В. Скопецький // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2007. – № 2. – С. 105–113.
- 33.Бомба А. Я. Просторові сингулярно збурені задачі типу «конвекція-дифузія-масообмін» при плоскій фільтрації з врахуванням терморезиму / А. Я.

- Бомба, І. М. Присяжнюк, О. В. Присяжнюк // Праці XVI Міжнародного симпозіуму «Методи дискретних особливостей в задачах математичної фізики» (МДОЗМФ-2013). – Харків-Херсон, 2013. – С. 93–96.
34. Бомба А.Я. Просторові сингулярно збудені процеси багатокомпонентного конвективно-дифузійного масоперенесення в нанопористих багатосарових середовищах з врахуванням терморезиму / А. Я. Бомба, О. В. Присяжнюк // Матеріали Міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів». – Рівне, 2015. – С.34.
35. Бомба А. Я. Сингулярно збудені процеси двокомпонентного конвективно-дифузійного масоперенесення в нанопористому середовищі / А. Я. Бомба, І. М. Присяжнюк, О. В. Присяжнюк // VII Міжнародна наукова конференція імені І. І. Ляшка "Обчислювальна та прикладна математика". – К.: КНУ імені Тараса Шевченка, 2014. – С.28–29.
36. Бомба А.Я. Числово-асимптотичний метод розв'язання сингулярно збудених задач типу «конвекція-дифузія» для наносередовищ речовин / А.Я. Бомба, О.В. Присяжнюк, К.О. Гомон // Матеріали доповідей XV Всеукраїнської (X Міжнародної) студентської наукової конференції з прикладної математики та інформатики СНКПМІ-2012. – Львів: Львівський національний університет імені Івана Франка, 2012. – С.123–124.
37. Бондарев Э. Н. Конвективная диффузия в пористых средах с учетом явлений адсорбции / Э. Н. Бондарев, В. Н. Николаевский // Журн. прикл. мат. и техн. физики. – 1962. – №5. – С. 127–134.
38. Будак Б. М. Сборник задач по математической физике / Б. М. Будак, А. А. Самарский, А.Н. Тихонов. – М.: Наука, 1972. – 688 с.
39. Булавацький В. М. Некласичні математичні моделі процесів тепло- та масо переносу / В. М. Булавацький, Ю. Г. Кривонос, В. В. Скопецький. – К.: Наукова думка, 2005. – 282 с.
40. Булавацький В.М. Специальные краевые задачи подземной гидродинамики / В. М. Булавацький. – К. : Наук, думка, 1993. – 132 с.
41. Булавацький В. М. Математическое моделирование динамики распределенного пространственно-временного процесса конвективной диффузии

- бинарной смеси в условиях массообмена / В. М. Булавацкий // Пробл. упр. и информатики. – 2009. – № 6. – С. 60–70.
42. Булычева О. Н. Асимптотические разложения по малым параметрам решений некоторых задач для параболических уравнений / О. Н. Булычева, А. Б. Васильева, В. Г. Сушко // Журнал вычислит, математ. и матем. физики. – 1991. – Т. 31, № – 9. – С. 1328–1337.
43. Булычева О. Н. Асимптотические разложения решения сингулярно возмущенного параболического уравнения с кусочно-гладкими коэффициентами. / О. Н. Булычева // Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 15. – Вычисл. матем. и киберн. – 1989. – № 2. – С. 8–14.
44. Булычева О. Н. Построение приближенного решения для одной сингулярно возмущенной параболической задачи с негладким вырождением / О. Н. Булычева, В. Г. Сушко // Фундаментальная и прикладная математика. – 1995. – Т. 1, № 4. – С. 881–905.
45. Бурак Я. Й. Про вертикальну міграцію радіонуклідів у ґрунті / Я. Й. Бурак, Є. Я. Чапля, О. Ю. Чернуха // Доп. НАН України. – 1995. – № 11. – С. 34–37.
46. Бутузов В. Ф. Асимптотика решений некоторых модельных задач химической кинетики с учетом диффузии / В. Ф. Бутузов // Докл. АН СССР. – 1978. – № 2. – С. 268–271.
47. Бутузов В. Ф. Асимптотические решения в сингулярно возмущенных задачах типа “Реакция-диффузия-перенос” / В. Ф. Бутузов // В кн.: Методы теории сингулярных возмущений в прикладных задачах. – Рига: Intelstrv, 1990. – С. 18–26.
48. Бутузов В. Ф. О формировании и распространении резких переходных слоев в параболических задачах / В. Ф. Бутузов, Н. Н. Нефедов, К. Р. Шнайдер // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. – 2005. – № 1. – С. 9–13.
49. Бэр Я. Физико-математические основы фильтрации воды / Я. Бэр, Д. Заславски, С. Ирмей. – М.: Мир, 1971. – 452 с.
50. Вабищевич П. Н. Численное моделирование / П. Н. Вабищевич. – М.: Изд. МГУ, 1993. – 152 с.

- 51.Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений / В. Вазов. – М. : Мир, 1968. – 464 с.
- 52.Ван-дайк М. Методы возмущений в механике жидкости / М. Ван-дайк. – М.: Мир, 1967. – 310 с.
- 53.Васильева А. Б. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений / А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов. – М. : Высшая школа, 1990. – 208 с.
- 54.Васильева А. Б. Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах / А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, Н. Н. Нефедов // *Фундаментальная и прикладная математика.* – 1998. – № 3. – С. 799–851.
- 55.Веригин Н. Н. Диффузия и массообмен при фильтрации жидкостей в пористых средах / Н. Н. Веригин, Б. С. Шержуков // *Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917–1967).* – М.: Наука, 1967. – С. 237–313.
- 56.Веригин Н. Н. Конвективная диффузия и массообмен при фильтрации растворов в пористой среде / Н. Н. Веригин, В. С. Саркисян // *Гидрогеол. исслед. водозаборн., водопонижительн. и дренаж. систем.* – М.: 1980. – С. 19–24.
- 57.Вишик М. И. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром / М. И. Вишик, Л. А. Люстерник // *Успехи матем. наук.* – 1957. – Т. 12 –С. 3–122.
- 58.Вірченко Н. О. Основні методи розв'язання задач математичної фізики / Н. О. Вірченко – К. : Вища школа, 1987. – 370 с.
- 59.Власюк А. П. Автоматическое построение конформных и квазиконформных отображений двухсвязных и трехсвязных областей / А. П. Власюк, В. Г. Михальчук. – К.: Препринт АН Украины. Ин-т математики, 1991. – 56 с.
- 60.Власюк А. П. Математичне моделювання консолідації ґрунтів в процесі фільтрації сольових розчинів: монографія / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк. – Рівне : Вид-во УДУВГП, 2004. – 210 с.

61. Власюк А. П. Математичне моделювання консолідації ґрунтів при фільтрації сольових розчинів в неізотермічних умовах: монографія / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк. – Рівне : Вид-во НУВГП, 2008. – 416 с.
62. Власюк А. П. Математичне моделювання вертикальної міграції радіонуклідів в каталітичному пористому середовищі у нелінійному випадку / А. П. Власюк, В. В. Жуковський // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: технічні науки. – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2015. – Вип.12. – С. 161–172.
63. Воеводин А. Ф. Метод расщепления по физическим процессам для расчета задач конвекции / А. Ф. Воеводин, О. Н. Гончарова // Матем. Моделирование. – 2001. –13. – №5. – С. 90–96.
64. Гера Б. В. Відновлення полів температури та вологості в пористому тілі при неповних даних // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 1996. – Вип. 39. – № 1. – С. 66–73.
65. Годунов С. К. Разностные схемы, введение в теорию / С. К. Годунов, В.С. Рябенский. – М.: Наука, 1977. – 400 с.
66. Гончаренко В. М. Основи теорії рівнянь з частинними похідними / В. М. Гончаренко. – Київ : Вища школа, 1995. – 350 с.
67. Гончаренко В. М. Нелинейные задачи для уравнений с частными производными / В. М. Гончаренко. – Чернівці : Рута, 2000. – 200 с.
68. Готлиф А. А. Прогноз миграции и рассеяния загрязняющих веществ после их сброса в водоносные пласты / А. А. Готлиф, В. Д. Озерова // Изв. ВНИИ гидро-техн., 2001. – 239. – С. 237–245.
69. Дейнека В. С. Ідентифікація кінетичних параметрів адсорбції в неоднорідних багатоскладових нанопористих середовищах із використанням інтегрального підходу оцінювання впливу мікропереносу / В. С. Дейнека, М. Р. Петрик, Д. М. Михалик // Вісник ТНТУ. – 2011. – Том 16. – № 4. – С.156–167.
70. Дейнека В.С. Математические модели и методы расчета задач с разрывными решениями / В.С.Дейнека, К.В. Сергиенко, В.В. Скопецкий. – Киев : Наук. думка, 1995. – 262 с.

71. Дейнека В.С. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения / В.С. Дейнека, К.В. Сергиенко, В.В. Скопецкий. – К.: Наук. думка, 1998 – 614 с.
72. Дейнека В. С. Модели и методы решения задач в неоднородных средах / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко. – К.: Наукова думка, 2001. – 605 с.
73. Доочистка сточных вод на зернистых фильтрах / Н. Н. Гироль, М.Г. Журба, Г. М. Семчук, Б. Н. Якимчук; под общ. ред. Н. Н. Гироля. – К., 1998. – 92 с.
74. Згуровский М.З. Численное моделирование распространения загрязнений в окружающей среде / М.З. Згуровский, В.В. Скопецкий, В.К. Хрущ, Н.Н. Беляев. – Киев: Наук, думка, 1997. – 367 с.
75. Иванчов М.І. Про одну обернену задачу знаходження коефіцієнтів параболічного рівняння / М.І. Иванчов, І.Я. Лучко // Вісник Львівського університету. Сер. мех.-мат. – 1990. – Вип. 34. – С. 7–10.
76. Иванчов Н.И. Об определении зависящего от времени старшего коэффициента в параболическом уравнении / Н.И. Иванчов // Сиб. мат. журнал. – 1998. – Т. 39. – № 3. – С. 539–550.
77. Ильин А. М. Асимптотика решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при больших значениях времени / А. М. Ильин, М. А. Меленцов // Труды института математики и механики. – 2005. – Т. 11. – № 1. – С. 97–111.
78. Ильин А.М. Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной / А. М. Ильин // Матем. заметки. – 1969. – Т. 6. – Вып. 2. – С. 237–248.
79. Исакова Е. К. Асимптотическое разложение решения параболического уравнения с малым параметром / Е. К. Исакова // Матем. сборник. – 1966. – 69 (111). – С. 300–320.
80. Калугин Ю. И. Моделирование удаления железа из воды фильтрованием с учетом изменения фильтрационных свойств среды / Ю. И. Калугин, С. К. Киселев, А. Я. Олейник // Доп. НАН України. – 1998. – №7. – С. 83–187.
81. Капустина Т. О. Асимптотические решения сингулярно возмущенной задачи Коши для параболического уравнения с разрывными коэффициентами /

- Т. О. Капустина // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т. 36, Л/515. – С.662–666.
- 82.Карслоу Г. Теплопроводность твердых тел / Г. Карслоу, Д. Егер – М.: Наука, 1964. – 487 с.
- 83.Каханер Д. Численные методы и программное обеспечение / Д. Каханер, К. Моулер, С.Нэш. – М.: Мир, 1998. – 575 с.
- 84.Каштан С. С. Про метод сумарних зображень розв'язання нелінійних обернених крайових задач на конформні відображення і моделювання ліній розділу фільтраційних потоків в пористих середовищах / С.С. Каштан // Фізика конденсованих високомолек. систем. – 1998. – № 4. – С. 119–122.
- 85.Кідрук М. І. Моделювання та оптимізація систем теплопостачання будівель з використанням відновних джерел енергії. Частина 1: Моделювання теплового режиму будинку / М.І. Кідрук. – Журнал «Нова тема», №4/2007. – С. 13–16.
- 86.Климюк Ю. Є. Математичне моделювання просторових процесів фільтрації рідин у одного класу двошарових кусково-однорідних насичених пористих середовищах / Ю. Є. Климюк, Д. О. Пригорницький // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. – Вип. 10 (19). – Рівне : РВВ РДГУ, 2013. – С. 49–65.
- 87.Когановский А.М. Адсорбция органических веществ из воды / А.М. Когановский. – Л.: Химия, 1990. – 256 с.
- 88.Коллинз Р. Течения жидкостей через пористые материалы / Р. Коллинз. – М.: Мир, 1964. – 350с.
- 89.Коновалов А. Н. Задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости / А.Н. Коновалов. – Новосибирск : Наука. СО РАН. 1988. – 168 с.
- 90.Копсон Э.Т. Асимптотические разложения / Э. Т. Копсон. – М.: Мир, 1966. – 159 с.
- 91.Костиков А.О. Влияние теплового состояния грунта на эффективность теплонасосной установки с грунтовым теплообменником / А.О. Костиков, Д.Х. Харлампиди // Энергетика: економія, технології, екологія – №1. – 2009. – С.32–40.

92. Кошляков Н. С. Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов – М.: Высшая школа, 1970. – 710 с.
93. Курант Р. Уравнения с частными производными / Р. Курант – М.: Мир, 1964. – 830 с.
94. Курант Р. Методы математической физики / Р. Курант, Д. Гильберт – М.: Физматгиз, 1951. – Т.1. – 476 с.
95. Кухарський В. М. Чисельне дослідження задач конвекції-дифузії у середовищах із включеними тонкими криволінійними шарами / В. М. Кухарський, Я. Г. Савула, М. Ф. Копитко // Волинський математичний вісник. – Вип. 8. – Рівне : РВВ РДГУ, 2001. – С. 86–92.
96. Лаврик В.И. Исследования конвективного массопереноса при двумерной фильтрации подземных вод в условиях наличия массообмена / В.И. Лаврик, Н.А. Никифорович // Препр. АН УССР. Ин-т математики; 82.20. – К.: 1982. – 46 с.
97. Лаврик В. И. Об одном приближенном методе решения задач конвективного массопереноса при плановой фильтрации подземных вод / В. И. Лаврик, А. Я. Бомба // ДАН УССР. – 1980. – №5. – С. 47–51.
98. Лаврентьев М. А. Проблемы гидродинамики и их математические модели / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1977. – 407 с.
99. Ленюк М.П. Інтегральні перетворення Фур'є, Бесселя із спектральним параметром в задачах математичного моделювання масопереносу в неоднорідних середовищах / М. П. Ленюк, М.Р. Петрик. – Київ: Наукова думка, 2000. – 372 с.
100. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений / С. А. Ломов. – М.: Наука, 1981. – 398 с.
101. Лукнер Л. Моделирование миграции подземных вод / Л. Лукнер, В.М. Шестаков. – М.: Недра, 1986. – 209 с.
102. Люстерник Л. А. Некоторые задачи для уравнений с частными производными, содержащих малый параметр / Л. А. Люстерник, О. А. Олейник // Тр. 3 матем. съезда. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – Т. 2. – С. 158–169.

103. Ляшенко М.Я. Чисельні методи / М.Я. Ляшенко, М.С. Головань. – К.: Либідь, 1996. – 288 с.
104. Ляшко И.И. Вопросы автоматизации решения задач фильтрации на ЭВМ / И.И. Ляшко, И.В.Сергиенко, Г.Е. Мистецкий, В.В. Скопецкий. – Киев : Наукова думка, 1977. – 288 с.
105. Ляшко И. И. Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации / И. И. Ляшко, И. М. Великоиваненко. – К.: Наукова думка, 1973. – 264 с.
106. Ляшко И. И. Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах / И. И. Ляшко, Л. И. Демченко, Г. Е. Мистецкий. – К. : Наук. думка, 1991. – 264 с.
107. Лыков А.В. Теория масопереноса / А.В. Лыков, Ю.А. Михайлов.– М.: Госэнергоиздат, 1963. – 535 с.
108. Лыков А. В. Теплообмен: (Справочник). 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Энергия, 1978. – 480 с.
109. Мартинюк П. М. Математичне моделювання консолідації ґрунтів з урахуванням техногенного впливу та комплексу фізико-хімічних процесів: автореф. дис. ... д-ра техн. наук : 01.05.02 / Мартинюк Петро Миколайович; Терноп. нац. техн. ун-т ім. Івана Пулюя. – Тернопіль, 2015. – 42 с.
110. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики / Марчук Г. И. – М.: Наука, 1989. – 608 с.
111. Маслов В. П. Математическое моделирование процессов тепло-массопереноса / В.П. Маслов, В.Г. Данилов, К.А. Волосов. – М.: Наука, 1987. – 352 с.
112. Маслов В. П. Теория возмущений и асимптотические методы / В. П. Маслов. – М.: Изд-во МГУ, 1965. – 549 с.
113. Математичне моделювання процесів первинної очистки стічних вод із використанням пористих мікрочастинок / А. Я. Бомба, І. М. Присяжнюк, О. В. Присяжнюк, В. М. Сівак // Вісник Національного університету водного господарства та природокористування. Серія «Технічні науки». – 2014. – Вип. 1(64). – С. 106–114.

114. Математичне моделювання тепло-вологопереносу в ґрунті та задачі інтерпретації даних дистанційного зондування земної поверхні / Я. С. Підстригач, Б. В. Гера, Є. Я. Чапля та ін. // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 1992. – Вип. 35. – С. 8–20.
115. Михалик Д. М. Математичне моделювання дифузійного масопереносу в каталітичних середовищах частинок мікропористої структури : автореф. дис ... канд. техн. наук : 01.05.02 / Дмитро Михайлович Михалик. – Тернопіль, 2011. – 20 с.
116. Моделювання і прогнозування стану довкілля: підручник, гриф МОН / В. І. Лаврик, В. М. Боголюбов, Л. М. Полетаєва та ін.; за ред. В. І. Лаврика. – К.: Академія, 2010. – 400 с.
117. Моделювання нелінійних сингулярно збурених трикомпонентних процесів типу «дифузія-конвекція-масообмін» в наносередовищі / А. Я. Бомба, М. Р. Петрик, С. Леклерк, О. В. Присяжнюк, Ж. Фресар // *Журнал обчислювальної та прикладної математики. Серія "Прикладна математика"* – 2015. – №3(120). – С. 107–115.
118. Монахов В.Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений / В.Н. Монахов. – Новосибирск: Наука, 1977. – 422с.
119. Найфэ А. Введение в методы возмущений / А. Найфэ. – М.: Мир, 1984. – 535 с.
120. Нестеров А.В. Об асимптотике решения системы уравнений диффузия-сорбция при малых коэффициентах диффузии. / А.В. Нестеров // *Журнал вычислит, математ. и матем. физики.* – 1989. – Т. 29. – С. 1318–1330.
121. Нумеров С. Н. Диффузия растворимых веществ в основаниях гидротехнических сооружений / С. Н. Нумеров, А. Н. Патрашев // *Труды ЛПИ.* – 1947. – №4. – С. 165–169.
122. Обертас И. А. Моделирование процессов умягчения воды на катионитовых фильтрах / И. А. Обертас, А. Я. Олейник // *Доповіді Національної академії наук України.* – 2007. – № 10. – С. 134–138.

123. Олійник О. Я. Деякі результати теоретичних досліджень процесів масообміну в пористих середовищах / О. Я. Олійник, Ю. І. Калугін // Проблеми водопостачання, водовідведення та гідравліки. – 2005. – Вип. 5 – С. 100–112.
124. Олейник А. Я. Математическая модель трансформации и миграции азотных соединений в почве при внесении минеральных азотных удобрений / А. Я. Олейник, В. Л. Поляков // Доповіді НАН України. – 1992. – № 4. – С. 142–145.
125. Пасконов В.М. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена / В.М. Пасконов, В.И. Полежаев, Л.А. Чудо. – М.: Наука, 1984. – 285 с.
126. Пачепский Я. А. Математическое моделирование физико-химических процессов в почвах / Я. А. Пачепский. – М.: Наука, 1990. – 188 с.
127. Петрик М. Р. Моделирование и анализ концентрационных полей нелинейной конкурентивной двухкомпонентной диффузии в среде нанопористых частиц / М. Р. Петрик, Ж. Фрессард, Д. М. Михалик // Проблемы управления и информатики. – 2009. – № 4. – С. 73–83.
128. Петрик М.Р. Математическое моделирование и визуализация системы многоуровневого массопереноса в неоднородных каталитических средах нанопористых частиц / М.Р. Петрик, Ж. Фрессард // Проблемы управления и информатики. – 2008. – № 5. – С. 54–73.
129. Петрик М.Р. Математическое моделирование нелинейной конкурентивной двухкомпонентной диффузии в среде нанопористых частиц / М.Р. Петрик, Ж. Фрессард // Проблемы управления и информатики. – 2009. – № 2. – С. 47–64.
130. Петрик М. Р. Математическое моделирование массопереноса в симметрических неоднородных и нанопористых средах с системой n -интерфейсных взаимодействий / М. Р. Петрик // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – № 1. – С. 114–134.
131. Пивень В. Ф. Теория и приложения математических моделей фильтрационных течений жидкости / В. Ф. Пивень. – Орёл : Издательство ГОУ ВПО “Орловский государственный университет”, Полиграфическая фирма “Картуш”, 2006. – 508 с.

132. Положий Г. М. Численное решения двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента / Г. М. Положий. – К.: Изд-во КГУ, 1982. – 161 с.
133. Полубаринова-Кочина П. Я. Некоторые задачи плоского движения грунтовых вод / П. Я. Полубаринова-Кочина. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1948. – 144 с.
134. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод / П. Я. Полубаринова-Кочина. – М.: Наука, 1977. – 664 с.
135. Прилепко А. И. Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении / А.И. Прилепко, А.И. Костин // Сиб. мат. журнал. –1993. – Т. 34. – № 5. – С. 147–162.
136. Присяжнюк І. М. Математичне моделювання нелінійних сингулярно збурених процесів типу “конвекція-дифузія-масообмін” : дис. ... канд. тех. наук: 01.05.02. / Присяжнюк Ігор Михайлович – Рівне, 2006. – 148 с.
137. Присяжнюк І. М. Математичне моделювання просторових сингулярно збурених процесів конвективно-дифузійного масоперенесення в двопористих багат шарових середовищах / І.М. Присяжнюк, Ю. Є. Климчук, О. В. Присяжнюк // Вісник НТУ «ХП». Збірник наукових праць. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХП». – 2014. – №39 (1082) – С. 159–177.
138. Присяжнюк І.М. Математичне моделювання процесів конвективної дифузії з урахуванням масообміну та терморезиму речовин / І.М. Присяжнюк, О.В. Присяжнюк // Матеріали доповідей IV Всеукраїнської науково-практичної конференції студентів, аспірантів та науковців «Інформаційні технології в професійній діяльності». – Рівне, 2010. – С.84-86.
139. Присяжнюк О.В. Асимптотичний метод розв’язання нелінійних сингулярно збурених задач типу «конвекція-дифузія-масообмін-терморезим» / О. В.Присяжнюк, І. М. Присяжнюк // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. –2011. – Вип. 8(17). – С. 140–152.

140. Присяжнюк О. В. Сингулярно збурені задачі типу «фільтрація–конвекція–дифузія–масообмін» із урахуванням терморезиму / О.В.Присяжнюк // Вісник ТНТУ. Серія «Математичне моделювання. Математика. Фізика». – Тернопіль : ТНТУ, 2014. – Том 73. – № 1. – С. 259–268.
141. Присяжнюк О. В. Сингулярно збурені процеси багатокомпонентного конвективно-дифузійного масоперенесення в нанопористих середовищах з врахуванням терморезиму / О. В. Присяжнюк // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. – 2014. – Вип. 11(20). – С. 87–98.
142. Присяжнюк О.В. Числово-асимптотичний метод розв'язання сингулярно збурених задач типу «конвекція-дифузія» для наносередовищ у чотирикутних криволінійних областях / О.В.Присяжнюк // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. – 2012. – Вип. 9(18). – С. 162–176.
143. Процеси переносу розпадної речовини в гетерогенних середовищах: монографія / Є. Я. Чапля, О. Ю. Чернуха, В. Є. Гончарук, А. Р. Торський. – Львів : Євросвіт, 2010. – 261 с.
144. Рауз Х. Механика жидкости / Х. Рауз. – М.: Стройиздат. – 1967. – 390 с.
145. Радыгин В. М. Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники: Учеб. пособие для пед. Вузов / В. М. Радыгин, О.В. Голубева. – М.: Высш. школа, 1983. – 160 с.
146. Роуч П. Вычислительная гидродинамика / П. Роуч. – М.: Мир, 1980. – 616с.
147. Савула Я. Г. Дослідження варіаційної задачі теплопровідності у багатошарових середовищах з тонкими включеннями / Я.Г. Савула, Л.М. Дяконюк // Вісник ЛНУ ім. Івана Франка. Сер. Прикл. матем. та інформат. – 2000. – Вип. 3. – С.125–131.
148. Самарский А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1983. – 616 с.
149. Самарский А. А. Устойчивость разностных схем / А. А. Самарский, А.В. Гулин. – М.: Наука, 1973. – 415с.
150. Самарский А. А. Разностные методы для эллиптических уравнений / А. А. Самарский, В. Б. Андреев. – М.: Наука, 1976. – 352 с.

151. Самойленко А.М. Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений / А. М. Самойленко, М. И. Гонто. – К.: Наукова думка, 1992.–279 с.
152. Сергиенко И. В. Высокопродуктивные методы идентификации параметров конкурентивной диффузии в неоднородных средах нанопористых частиц / И.В. Сергиенко, М.Р. Петрик, Ж. Фрессар, С. Леклерк // Кибернетика и системный анализ. – 2015. – № 4. – С. 44–61.
153. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. – К.: Наук. думка, 1991. – 432 с.
154. Сергиенко И.В. Системный анализ многокомпонентных распределенных систем / И.В. Сергиенко, В.С. Дейнека. – К.: Наукова думка, 2009. – 638с.
155. Сівак В. М. Математичне моделювання просторових сингулярно збурених процесів масопереносу забруднюючих речовин у двошарових ізотропних насичених пористих середовищах / В. М. Сівак, Ю. О. Шепетько, Ю. Є. Климюк // Вісник Укр. нац. ун-ту водн. госп. та природокорист.: Збірн. наук. праць. Серія «Технічні науки». – Вип. 4 (56). – Рівне: ВИД-ВО НУВГП, 2011. – С. 37–55.
156. Сівак В. М. Побудова просторового фільтраційного поля для одного класу фільтрів із тришаровою засипкою / В. М. Сівак, Ю. Є. Климюк, Д. О. Пригорницький // Вісник Укр. нац. ун-ту водн. госп. та природокорист.: Збірн. наук. праць. Серія «Технічні науки». – Вип. 4 (56). – Рівне: ВИД-ВО НУВГП, 2011. – С. 70–82.
157. Сушко В. Г. О некоторых сингулярно возмущенных дифференциальных уравнениях с вырождением / В. Г. Сушко // Докл. АН СССР. – 1989. – 304, №4. – С. 777–780.
158. Сушко В. Г. Об асимптотике по малому параметру для одного квазилинейного параболического уравнения / В. Г. Сушко // Докл. АН СССР. – 1972. – 205, №4. – С. 794–797.

159. Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малый параметр при производных / А.Н. Тихонов // УМН. – 1952. – Т.7. – Вып. 1 (47). – С. 140–142.
160. Треногин В. А. Об асимптотике решений почти линейных параболических уравнений с параболическим погранслоем / В. А. Треногин // Успехи мат. наук. – 1961. – 16, вып. 1 (9). – С. 163–170.
161. Треногин В. А. Развитие и приложения асимптотического метода Люстерника-Вішика / В.А. Треногин // УМН. – 1970. – Т.25. – Вып. 4. – С.123–156.
162. Федоткин И. М. Асимптотические методы в задачах тепломасопереноса / И. М. Федоткин, А. М. Айзен. – К.: Вища школа, 1975. – 197 с.
163. Фешенко С. Ф. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений / С. Ф. Фешенко, Н. И. Шкиль, Л. Д. Николенко. – К.: Наукова думка, 1966. – 251 с.
164. Фрид Ж. Загрязнение подземных вод. – М.: Недра, 1981. – 304 с.
165. Хейфец Л.И. Многофазные процессы в пористых средах / Л.И. Хейфец, А.В. Неймарк. – М.: Химия, 1982. – 320 с.
166. Чапля Є.Я. Фізико-математичне моделювання гетеродифузійного масопереносу / Є.Я. Чапля, О.Ю. Чернуха. – Львів : СПОЛОМ, 2003. – 128с.
167. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика / И. А. Чарный. – Москва-Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2006. – 436 с.
168. Численное моделирование распространения загрязнений в окружающей среде / М. З. Згуровский, В. В. Скопецкий, В. К. Хрущ, Н. Н. Беляев. – К. : Наук. думка, 1997. – 367 с.
169. Шейдегер А. Э. Физика течения жидкостей через пористые среды / А. Э. Шейдегер. – М.: Гостоптехиздат, 1960. – 249 с.
170. Шержуков Б. С. Диффузия и неравномерный масообмен при фильтрации в районах наземных и подземных хранилищ промстоков/ Б. С. Шержуков // Труды ин-та ВОДГЕО. – 1975. – Вып. 54. – С. 25–39.

171. Шестаков В. М. Модели переноса в неоднородных пластах / В. М. Шестаков // Теория и расчеты фильтрации. – К. : Наук. думка, 1980. – С. 179–187.
172. Ши Д. Численные методы в задачах теплообмена. Пер. с англ / Д. Ши. – М.: Мир, 1988г. – 544 с.
173. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг.– М.: Наука, 1974.– 711 с.
174. Штраубе А.В. Эффективное решение конвективного уравнения переноса современными численными методами / А. В. Штраубе. – Пермь: Перм. ун-т, 2003. – 28 с.
175. Abood H. J. Singularly Perturbed Problems of Partial Differential Equations in the Critical Case / H. J. Abood // American Journal of Scientific Research. – 2011. –Vol. 56. –No. 4. – P. 482–488.
176. Abood H. J. Asymptotic Integration Solution of the System of Two Partial Differential Equations / H. J. Abood // American Journal of Scientific Research. – 2011. – Issue 28. – P. 102–113.
177. Acosta J.L. Porous media: heat and mass transfer, transport and mechanics / J. L. Acosta, A. F. Camacho – New York: Nova Science Publishers, Inc, 2009. – 255 p.
178. Aronson D. G. Linear parabolic equations containing a small parameter / D. G. Aronson // J. Rational Mech. Anal. – 1956. – № 5. – P. 1003–1014.
179. Asymptotic Methods in Fluid Mechanics: Survey and Recent Advances / Edited by H. Steinruck. – Springer Wien New York, 2010. – 420 p.
180. Baehr H. D. Heat and Mass Transfer / H. D. Baehr, K. Stephan. – Springer, 2011. – 761 p.
181. Barrer R. M. Synthesis of a zeolitic mineral with chabazite-like sorptive properties / R.M. Barrer //Journal of the Chemical Society. – 1948. –P. 127–132.
182. Bear J. Dynamics of fluids in porous media / J. Bear. – New York : American Elsevier publ. co., 1967. – 764 p.
183. Bobisud L. E. Parabolic equations with a small parameter and discontinuous data / L. E. Bobisud // J. Math. Anal. and Appl. – 1969. – 26, № 1. – P. 208–220.

184. Bobisud L. E. The second initial-boundary-value problem for a linear parabolic equation with a small parameter / L. E. Bobisud // *Mich. Math. J.* – 1968. – № 4. – P. 495–504.
185. Bouillard N. Diffusion with dissolution and precipitation in a porous medium: Mathematical analysis and numerical approximation of a simplified model / N. Bouillard, R. Eymard, R. Herbin, P. Montarnal // *Mathematical Modelling and Numerical Analysis.* –2007. –Vol. 41. – No. 6. – P. 975–1000.
186. Bomba A. Modeling of the singularly perturbed processes of heat-mass transfer in nanoporous environments / A. Bomba, I. Prysiazniuk, O. Prysiazniuk // III International Conference “Mathematics for Life Sciences”. – Rivne, 2015. – P. 5–6.
187. Bomba A. Modeling of the singularly perturbed processes of single component convection diffusion in the plane varying porous environments / A. Bomba, I. Prysiazniuk, O. Prysiazniuk // VIII International Conference POROUS MATERIALS Theory and Experiment (INTERPOR'12) & Symposium “Mathematical Modelling and Optimization in Mechanics”, Lviv-Briukhovychi. – September 18-22, 2012. – P. 19–20.
188. Butuzov V. F. Singularly Perturbed Problems in Case of Exchange of Stabilities / V. F. Butuzov, N. N. Nefedov, K. R. Schneider. // *Journal of Mathematical Sciences.* – 2004. – 121, № 1. – P. 1973–2079.
189. Chen N.Y. Molecular Transport and Reaction in Zeolites: Design and Application of Shape Selective Catalysis / N.Y. Chen, T.F. Degan, M.C. Smith. Chen N.Y. Molecular Transport and Reaction in Zeolites. – New York : V.C.H. Weinheim, 1994. – 309 p.
190. Chung T. J. Computational fluid dynamics / T. J. Chung. – Cambridge : Cambridge University Press, 2002. – 1012 p.
191. Currie I. G. Fundamental Mechanics of Fluids. 3rd edition. / I. G Currie. – New York : Marcel Dekker, Inc., 2003. – 525 p.
192. Darcy H. Les fontains publiques de la ville de Dijon / H. Darcy. – Paris, 1856. – 647 p.
193. Deineka V.S. Identifying kinetic parameters of mass transfer in components of multicomponent heterogeneous nanoporous media of a competitive diffusion

- system / V.S. Deineka, M.R. Petryk, J. Fraissard // *Cybernetics and System Analysis*. – New York : Springer, 2011. – Vol. 47. – Number 5. – 705–723.
194. Edvard L. Cussler. *Diffusion - mass transfer in fluid systems* / Edvard L. Cussler. – Cambridge : Cambridge Univ. Press, 2008. – 656 p.
195. Eckhaus W. *Asymptotic analysis of singular perturbations* / W. Eckhaus. – Amsterdam : North-Holland, 1979. – 286 p.
196. *Fluid Transport in Nanoporous Materials* / C.W Conner and J.Fraissard, Editors // NATO Science, Serie II: Mathematics, Physics and Chemistry. – 2006. – vol. 29. – 685 p.
197. Haber S. Boundary conditions for Darcy' s flow through porous media / S. Haber, R. Mauri // *J. Multiphase Flow*. – 1983. –№ 5. – P. 561–574.
198. Hinch E. J. *Perturbation Methods* / E. J. Hinch. – Cambridge University Press, 1991. – 158 p.
199. Karger J. *Diffusion in zeolites and other microporous solids* / J. Karger, D. Ruthven. – New York : John Wiley & Sons, 1992. – 605 p.
200. Levy T. Filtration in a porous fissured rock: influence of the fissures connexity / T. Levy // *Eur. J. Mech.* – 1990. – V. 9. – № 4. – P. 309–327.
201. Mohan K. Kadalbajoo. Singularly perturbed problems in partial differential equations: a survey / Mohan K. Kadalbajoo, Kailash C. Patidar // *Applied Mathematics and Computation*. – 2003. – Vol 134. – Issues 2–3. – P. 371–429.
202. Petryk M. Mathematical modeling of mass transfer in symmetric heterogeneous and nanoporous media with a system of n -interface interactions / M. Petryk // *Cybernetics and System Analysis*. – New York : Springer. – 2007. – Vol. 43. – Number 1. – P. 94–111.
203. Petryk M. Mathematical modeling and visualization of gas transport in a zeolite bed using a slice selection procedure / M. Petryk, S. Leclerc, D. Canet, J. Fraissard // *Diffusion Fundamentals*. –2007. –Vol. 4. – 200. – 11.1–11.23.
204. Petryk M. Mathematical modeling and research for diffusion processes in multilayer and nanoporous media, *Fluid Transport in Nanoporous Materials* / M. Petryk, O. Shabliy, M. Leniuk, P. Vasyluk // NATO Science Series, Series II: Mathematics, Physics and Chemistry. – 2006. – Vol. 219. – P. 639–655.

205. Petryk M. Modeling of gas transport in a microporous solid using a slice selection procedure: Application to the diffusion of benzene in ZSM5 / M. Petryk, J. Fraissard, S. Leclerc, D. Canet // *Catalysis Today*, Elsevier. – 2008 – 139(3). – P. 234–240.
206. Piven' V. F. The theory of two-dimensional processes in inhomogeneous layers with power law of their conductivity variation / V. F. Piven' // *J. Appl. Maths. Mechs.* – 1997. – Vol. 61. – №4. – P. 577–586.
207. Quirke N. Adsorption and Transport at the Nanoscale / N. Quirke. – Taylor & Francis, 2006. – 186 p.
208. Rolando M.A. Roque-Malherbe. Adsorption and Diffusion in Nanoporous Materials / Rolando M.A. Roque-Malherbe. – Boca Raton: CRC Press, 2012. – 288 p.
209. Ruthven D.M. Principles of Adsorption and Adsorption Processes / D.M. Ruthven. – John Wiley, New York, 1984. – 194 p.
210. Shishkin G. I. Difference Methods for Singular Perturbation Problems / G. I. Shishkin, L. P. Shishkina. – Chapman and Hall/CRC, 2008. – 408 p.
211. Wang K. Free Boundary Problems and Asymptotic Behavior of Singularly Perturbed Partial Differential Equations / K. Wang // *Springer Theses.* – Springer, 2013. – 112 p.
212. White R. B. Asymptotic Analysis of Differential Equations / R. B. White. – London : Imperial College Press, 2010. – 405 p.

Додатки



"Затверджую"

Проректор з наукової роботи та міжнародних зв'язків НУВГП
д.е.н., проф. Савіна Н.Б.
«28» вересня 2015 р.

про впровадження результатів дисертаційного дослідження аспіранта кафедри інформатики та прикладної математики Рівненського державного гуманітарного університету Присяжнюк Олени Вікторівни на тему: «Методи теорії збурень моделювання процесів типу «конвекція-дифузія-масообмін» в різнопористих середовищах з урахуванням терморежиму» на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи.

Комісія у складі:

науковий керівник НДВБЦ НДЧ НУВГП, к.т.н., доц. М.Д. Кізеєв;

Члени комісії:

начальник науково-дослідної частини НУВГП, к.т.н., доц. Герасімов Є.Г.;

науковий керівник, д.т.н., проф. Бомба А.Я.;

цим Актом засвідчує, що результати дисертаційного дослідження кандидатської дисертації на тему: «Методи теорії збурень моделювання процесів типу «конвекція-дифузія-масообмін» в різнопористих середовищах з урахуванням терморежиму» використані науково-дослідним виробничим бізнес-центром науково-дослідної частини Національного університету водного господарства та природокористування (НДВБЦ НДЧ НУВГП) в робочих проектах на об'єктах "Реконструкція котельні студмістечка НУВГП у м. Рівне вул. Чорновола, 49в (перша, друга черга)" (г/д 30-12-06/36-08-12) та для розробки науково-технічної документації "Обстеження та рекомендації щодо покращання тепловологісного режиму будівлі фільтрів насосної станції «Новий Двір» в м. Рівне" (г/д 30-15-03). Зокрема, їх використано при розрахунку фільтрів водопідготовки для пом'якшення води, що надходить в котельню з системи водопостачання шляхом обміну іонів твердості (Ca та Mg) та іонів Na, яке відбувається на фільтрах з завантаженням у вигляді іонообмінної смоли (г/д 30-12-06/36-08-12). Розроблена математична модель тепло перенесення в тонкій трубці теплообмінника для відбору ґрунтового тепла була використана при розрахунку параметрів холодного контуру теплового насосу, що був рекомендований в якості основного елемента системи опалення (теплогенератора) будівлі фільтрів насосної станції «Новий Двір» в м. Рівне (г/д 30-15-03).

Голова комісії

науковий керівник НДВБЦ НДЧ НУВГП,
к.т.н., доц.

Члени комісії

начальник науково-дослідної
частини НУВГП, к.т.н., доц.

науковий керівник, д.т.н., проф.

«28» вересня 2015 р.

М.Д. Кізеєв

Є.Г. Герасімов

А.Я. Бомба

ЗАТВЕРДЖУЮ

Директор ТОВ «РЕМБ»

Мельничук Борис Михайлович



« 22 » лютого 2015р.

АКТ

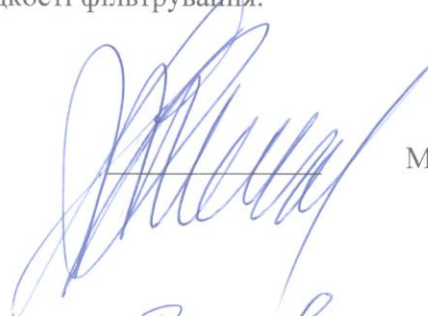
про впровадження результатів дисертаційного дослідження на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи Присяжнюк Олени Вікторівни

Ми, що нижче підписалися, склали цей акт в тому, що розроблені в дисертаційній роботі “Методи теорії збурень моделювання процесів типу «конвекція-дифузія-масообмін» в різнопористих середовищах з урахуванням терморегіму” Присяжнюк Олени Вікторівни рекомендації прийняті ТОВ «РЕМБ» для впровадження в проектно-розрахункових роботах при розробці та налаштуванні роботи системи пом’якшення води на котельні Більськовільської ЗОШ І-ІІІ ст. (Рівненська обл., Володимирецький р-н., с. Більська Воля, вул. Шкільна, 14). Зокрема їх використано при проектуванні та налаштуванні режиму роботи натрій-катіонітових фільтрів котельні, що здійснюють пом’якшення водопровідної води шляхом іонообміну.

Використання отриманих результатів дозволяє підвищити ефективність водопідготовки для котельні шляхом збільшення періоду корисної дії іонообмінної колони в залежності від вибору раціональної швидкості фільтрування.

Голова комісії

Директор ТОВ «РЕМБ»



Мельничук Б.М.

Члени комісії

Головний інженер ТОВ «РЕМБ»



Васьон О.А.

Науковий консультант

к.т.н., доц. кафедри Водопостачання

водовідведення та бурової справи НУВГП



Сівак В.М.

« 22 » лютого 2015р.

ЗАТВЕРДЖУЮ

Ректор Рівненського державного
гуманітарного університету


професор Постоловський Р. М.

« 12 » серпень 2015р.



АКТ

про впровадження (використання) у навчальний процес результатів дисертаційного дослідження на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи Присяжнюк Олени Вікторівни

Комісія у складі: голова комісії – декан факультету математики та інформатики, кандидат фізико-математичних наук, доцент Шахрайчук М. І.; члени комісії – завідувач кафедри інформатики та прикладної математики, доктор технічних наук, професор Бомба А. Я., доцент кафедри інформатики та прикладної математики, кандидат технічних наук Климюк Ю. Є., цим Актом засвідчує, що викладені в дисертаційній роботі Присяжнюк О. В. “Методи теорії збурень моделювання процесів типу «конвекція-дифузія-масообмін» в різнопористих середовищах з урахуванням терморежиму” числово-асимптотичні методи розв’язання нелінійних сингулярно збурених задач тепломасоперенесення в пористих та нанопористих середовищах використовуються в навчальному процесі при читанні курсів “Проблеми оптимізації і керування процесами і системами”, “Сучасні проблеми прикладної математики” та “Проблеми ідентифікації”, а також є основою для написання дипломних робіт по кафедрі інформатики та прикладної математики Рівненського державного гуманітарного університету.

Результати роботи використані також при виконанні науково-дослідних тем “Системне математичне моделювання нелінійних збурень процесів типу “фільтрація-конвекція-дифузія” з післядією при неповних даних” номер державної реєстрації 0109U001065), «Розробка методів та графічного формату прогресуючого стиснення кольорових зображень без втрат» (номер державної реєстрації – 0113U001203), “Просторові аналоги крайових задач на квазіконформні відображення і проблеми моделювання нелінійних процесів у пористих середовищах” (номер державної реєстрації – 0112U001014).

Голова комісії

Декан факультету математики та інформатики  к.ф.-м.н., доц. Шахрайчук М. І.

Члени комісії

Завідувач кафедри інформатики та ПМ  д.т.н., проф. Бомба А.Я.

Доцент кафедри інформатики та ПМ  к.т.н., доц. Климюк Ю.Є.

« 12 » серпень 2015р.