

Міністерство освіти і науки України  
Національний університет "Львівська політехніка"

**ПРИСЯЖНЮК Олена Вікторівна**



УДК 519.6:532.5

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ КОНВЕКТИВНО-ДИFUЗІЙНОГО ТЕПЛОМАСОПЕРЕНОСЕННЯ В ПОРИСТИХ ТА МІКРОПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ МЕТОДАМИ ТЕОРІЇ ЗБУРЕНЬ**

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

**Автореферат**  
дисертації на здобуття наукового ступеня  
кандидата технічних наук

Львів – 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Рівненському державному гуманітарному університеті Міністерства освіти і науки України, м. Рівне.

**Науковий керівник:** доктор технічних наук, професор  
**Бомба Андрій Ярославович,**  
Рівненський державний гуманітарний університет,  
м. Рівне, завідувач кафедри інформатики та прикладної  
математики

**Офіційні опоненти:** доктор технічних наук, професор  
**Гера Богдан Васильович,**  
Дніпропетровський національний університет  
залізничного транспорту ім. В. Лазаряна,  
завідувач кафедри транспортних технологій

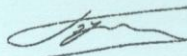
доктор технічних наук, доцент  
**Мартинюк Петро Миколайович,**  
Національний університет водного господарства і  
природокористування, м. Рівне, в.о. завідувача кафедри  
прикладної математики

Захист відбудеться 1 липня 2016 р. о 12 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.052.05 у Національному університеті «Львівська політехніка» (79013, м. Львів, вул. С. Бандери, 12, ауд. 226 головного корпусу).

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Національного університету «Львівська політехніка» (79013, м. Львів, вул. Професорська, 1).

Автореферат розіслано "30" травня 2016р.

Учений секретар  
спеціалізованої вченої ради,  
доктор технічних наук, професор



Р.А.Бунь

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** Математичне моделювання процесів конвективно-дифузійного масоперенесення з урахуванням масообміну знаходить важливі застосування при вирішенні проблем очищення рідин шляхом фільтрування, а також прогнозування забруднення атмосфери, поверхневих та підземних вод шкідливими домішками тощо. На теперішній час перспективним є використання фільтрів з мікропористим завнтаженням для очищення забруднених технологічних потоків, що дає можливість зменшити розміри відповідних пристроїв, створити відносно недорогі, швидкі і ефективні методи очистки зон забруднення.

На сьогодні вже відомі математичні моделі дифузійно-адсорбційного масоперенесення в неоднорідних схильних до деформації і двопористих (у тому числі мікропористих) середовищах. Проте актуальним залишається дослідження такого роду процесів у випадку наявності домінуючих складових механізму перенесення, що приводить до появи малих параметрів у відповідних математичних моделях. Зокрема, при дослідженні багатокомпонентного тепломасоперенесення в мікропористих середовищах, необхідно враховувати низку факторів, таких як співвідношення між величинами параметрів, що характеризують ті чи інші складові процесу, залежність фільтрувальних властивостей таких матеріалів від температури (наприклад, в одних випадках мікропористий матеріал не пропускає тепло, а за інших умов – у зворотньому напрямку не пропускає вологу) тощо. Їх урахування призводить до ускладнення математичних моделей процесів сингулярностями, породженими малими параметрами. Тому постає актуальна задача розробки нових або удосконалення існуючих методів розв'язання відповідних крайових задач. Принцип локалізації, що використовується у методах теорії збурень, дозволяє одночасно отримати і достатню точність, і значне спрощення процесу розв'язування. Асимптотичний метод розв'язування типових модельних крайових задач для сингулярно збурених параболічних та еліптичних рівнянь на теперішній час ефективно використовується для дослідження процесів конвективної дифузії при фільтрації в одно- та багатозв'язних, плоских і просторових криволінійних областях, за умови превалювання певних складових процесу над іншими. Виникає природне запитання стосовно можливості його розвитку для розв'язання нелінійних систем сингулярно збурених рівнянь з локально-іншгородними особливостями, що забезпечить можливість прогнозування аналогічних процесів багатокомпонентного масоперенесення у мікропористих середовищах.

Таким чином, *актуальним є науково-технічне завдання моделювання процесів багатокомпонентного тепломасоперенесення у мікропористих середовищах (фільтрах) за умови домінування одних складових цих процесів над іншими та розвитку асимптотичних методів розв'язання відповідних сингулярно збурених крайових задач.*

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дисертаційна робота виконувалась як частина планів науково-дослідних робіт Рівненського державного гуманітарного університету (РДГУ), зокрема “Системне математичне

моделювання нелінійних збурень процесів типу “фільтрація-конвекція-дифузія” з післядією при неповних даних” (номер державної реєстрації 0109U001065), “Просторові аналоги крайових задач на квазіконформні відображення і проблеми моделювання нелінійних процесів у пористих середовищах” (номер державної реєстрації 0112U001014). У рамках виконання цих науково-дослідних робіт автором розроблено нові математичні моделі сингулярно збурених процесів багатокомпонентного тепломасоперенесення в пористих та мікропористих середовищах. Пробудовано асимптотичні розклади відповідних крайових задач та на цій основі розроблено алгоритми для розрахунку концентрацій розчинних речовин, що фільтруються в однорідних та шаруватих середовищах.

**Мета і задачі дослідження.** Метою роботи є математичне моделювання технологічних процесів конвективно-дифузійного тепломасоперенесення розчинних речовин в пористих та мікропористих середовищах (фільтрах) у випадку переважання одних їх складових над іншими та розвиток методів теорії збурень розв’язання відповідних нелінійних сингулярно збурених задач.

Для досягнення поставленої мети визначені такі задачі дослідження:

- вдосконалити математичні моделі сингулярно збурених процесів конвективно-дифузійного тепломасоперенесення за умов масообміну в пористих середовищах;
- розробити підхід до моделювання процесів очищення технологічних потоків з використанням мікропористих сорбентів у випадках превалювання одних складових процесу над іншими та розвинути методи асимптотичного наближення розв’язків відповідних сингулярно збурених задач в однорідних та шаруватих областях;
- розробити алгоритми розв’язування відповідних крайових задач для плоских та просторових криволінійних областей, на основі чого провести числові розрахунки та здійснити аналіз отриманих результатів;
- узагальнити розроблені математичні моделі і методи на випадок моделювання процесу тепломасоперенесення багатокомпонентних забруднень в мікропористих середовищах.

*Об’єктом дослідження* є процеси очищення технологічних потоків шляхом фільтрування з використанням пористих та мікропористих матеріалів.

*Предметом дослідження* є нелінійні математичні моделі процесів типу «конвекція-дифузія-тепломасообмін» у пористих та мікропористих середовищах складної конфігурації у випадках превалювання одних складових процесу над іншими та асимптотичні методи розв’язання відповідних сингулярно збурених задач.

**Методи дослідження.** У роботі використано методикку узагальнення відомих класичних моделей шляхом переходу до відповідних “збурених” задач. Це дозволило використати класичні форми законів, що описують процеси руху рідини в пористих середовищах, а при побудові асимптотичних наближень їх розв’язків, доповнювати відомі розв’язки відповідних вироджених задач поправками з використанням методу примежових функцій. Також у процесі розв’язання поставлених задач використано числові та аналітичні методи розв’язання крайових задач.

**Наукова новизна одержаних результатів:**

1. Вперше сформовано математичну модель сингулярно збуреного процесу конвективно-дифузійно-адсорбційного масоперенесення розчинної речовини в однорідному та кусково-однорідному біпористому середовищі, що на відміну від існуючих, враховує механізм конвективного перенесення, а також уточнює розрахунок розподілу концентрації в фільтрі з мікропористим завантаженням.

2. Вперше одержано розв'язки класу сингулярно збурених задач типу конвекція-дифузія-масообмін у криволінійних областях з локально-іншорідними особливостями, що забезпечує можливість прогнозування такого роду процесів у мікропористих середовищах, у тому числі за умов ідентифікації параметрів.

3. Вперше побудовано математичну модель сингулярно збуреного процесу багатокомпонентного конвективно-дифузійно-адсорбційного масоперенесення розчинної речовини в однорідному мікропористому середовищі (фільтрі), за умов врахування масообміну та взаємовпливу компонент; одержано асимптотичне розв'язання розв'язків відповідних крайових задач, що націлено на оптимальне налаштування параметрів процесів очищення технічних рідин від багатокомпонентного забруднення та є основою для розробки системи автоматизованого керування відповідними процесами.

4. Удосконалено математичну модель процесу конвективно-дифузійного тепломасоперенесення розчинних речовин з врахуванням масообміну за умови домінування одних його складових над іншими, що дало змогу уточнити динаміку зміни концентрації окремих компонент багатокомпонентної суміші.

5. Отримав подальший розвиток метод асимптотичних розв'язків сингулярно збурених крайових задач стосовно дослідження процесів конвективно-дифузійного перенесення в тонкій трубці за умов тепломасообміну на бічній границі, що, окрім забезпечення можливості врахування відведення забруднення через стінки-пастки, також дозволяє прогнозувати відбір ґрунтового тепла з допомогою ґрунтового теплообмінника.

**Практичне значення одержаних результатів.** Проведені в роботі дослідження дають можливість аналізувати та прогнозувати процеси масоперенесення розчинних речовин у біпористих середовищах з урахуванням взаємовпливу різних складових процесу, зокрема масообміну та температурного режиму. Розроблені алгоритми та програмні процедури дозволяють враховувати структуру та характеристики середовища, особливості переносу на мікро- і макрорівні, режимно-технологічні параметри (константи рівноваги та масообміну, швидкості хімічних реакцій тощо), що є необхідним для оптимального налаштування процесів очистки технологічних потоків з використанням мікропористих адсорбентів для отримання необхідної якості вихідних продуктів.

Результати роботи використано науково-дослідним виробничим бізнес-центром Національного університету водного господарства та природокористування (НДВБЦ НУВГП) у робочих проектах на об'єктах "Реконструкція котельні студмістечка НУВГП у м. Рівне вул. Чорновола, 49в (перша, друга черга)" (г/д 30-12-06/36-08-12) та для розробки науково-технічної документації "Обстеження та рекомендації щодо покращення тепловологісного режиму будівлі

фільтрів насосної станції «Новий двір» в м. Рівне» (г/д 30-15-03). Розроблені в дисертаційній роботі рекомендації прийняті ТОВ «РЕМБ» (м. Рівне) до впровадження в проектно-розрахункових роботах при розробці та налаштуванні роботи системи пом'якшення води на котельні Більськовільської ЗОШ I-III ст. (Рівненська обл., Володимирецький р-н., с. Більська Воля, вул. Шкільна, 14).

Окремі викладені в дисертаційній роботі матеріали використано у навчальному процесі РДГУ при підготовці спецкурсів: “Проблеми оптимізації і керування процесами і системами”, “Сучасні проблеми прикладної математики” та “Проблеми ідентифікації”. Розроблені моделі та алгоритми використовувалися для розв'язання відповідних задач у науково-дослідній лабораторії “Математичне моделювання нелінійних збурень процесів та систем” кафедри інформатики та прикладної математики РДГУ. Більшість результатів, отриманих у роботі, подано у вигляді формул, алгоритмів, ілюстрацій та графіків, які можуть бути включені у посібники та довідники і використані в інженерній практиці.

**Особистий внесок здобувача** полягає у безпосередньому проведенні теоретико-розрахункових досліджень, оформленні проміжних результатів роботи у вигляді публікацій і доповідей. Всі результати, що складають основний зміст дисертаційної роботи, отримані автором самостійно.

У публікаціях, написаних у співавторстві, здобувачеві належить: в [1, 2, 8, 13-17, 23-25, 29] – розробка підходу до розв'язання сингулярно збурених задач одно- та багатокомпонентного конвективно-дифузійно-адсорбційного масоперенесення в однорідному мікропористому середовищі із використанням асимптотичної методології теорії збурень, побудова алгоритму для знаходження концентраційних розподілів в міжчастинковому просторі та в пористих частинках; у [3, 26, 27] – побудова асимптотичного розв'язку задачі конвективно-дифузійно-адсорбційного масоперенесення в багат шаровому мікропористому середовищі, програмна реалізація відповідних алгоритмів; в [4, 7, 19-21] – розробка алгоритму числової ідентифікації коефіцієнтів дифузії в міжчастинковому просторі та в порах частинок, коефіцієнта впливу внутрішньочастинкового перенесення на міжчастинкове та коефіцієнта адсорбційної рівноваги; у роботі [6] – побудова математичної моделі нестационарного процесу конвективно-дифузійного поширення тепла в трубі ґрунтового теплообмінника, виконання комп'ютерних розрахунків і їх аналіз; в статті [10, 18, 28] – дослідження неізотермічного процесу багатокомпонентного масоперенесення в пористому середовищі; в [9, 22] – розробка алгоритму розв'язання та програмна реалізація, аналіз отриманих результатів.

**Апробація результатів дисертації.** Матеріали дисертаційної роботи обговорювалися на таких наукових конференціях: VIII International Conference «Porous materials. Theory and Experiment» (INTERPOR'12) (Lviv-Briukhovychi, 2012); Міжнародній науковій конференції «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь» (м. Київ, 2012 р.); Всеукраїнській науковій конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів» (м. Рівне, 2013 р.); XVI Міжнародному симпозиумі «Методи дискретних особливостей в задачах математичної фізики» (МДОЗМФ-2013) (Харків-Херсон,

2013 р.); Міжнародній науковій конференції «Питання оптимізації обчислень» (ПОО-XL) (Кацивелі, 2013 р.); III Міжнародній конференції «Компьютерное моделирование в наукоемких технологиях» (м. Харків, 2014 р.); VII Міжнародній науковій конференції імені І. І. Ляшка «Обчислювальна та прикладна математика» (м. Київ, 2014 р.); II науково-технічній конференції «Обчислювальні методи і системи перетворення інформації» присвяченій пам'яті професора Б.О. Попова (м. Львів, 2014 р.); Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів» (м. Рівне, 2015 р.); Шістнадцятій міжнародній науковій конференції ім. акад. Михайла Кравчука (Київ, 2015); III International Conference «Mathematics for Life Sciences» (Rivne, 2015); XXI Всеукраїнській науковій конференції «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» (АРАМС-2015) (Львів, 2015); Науково-технічній конференції «Мікро- та нанонеоднорідні матеріали: моделі та експеримент» (Львів, 2015); IV Всеукраїнській науково-практичній конференції студентів, аспірантів та науковців «Інформаційні технології в професійній діяльності» (м. Рівне, 2010 р.); XV Всеукраїнській (X Міжнародній) студентській науковій конференції з прикладної математики та інформатики СНКПМІ-2012 (м. Львів, 2012 р.); III та V Всеукраїнських школах-семінарах молодих вчених і студентів АСІТ (м. Тернопіль, 2013 р. та 2015 р.); звітних науково-практичних конференціях викладачів, аспірантів та студентів РДГУ (2012–2015 рр.).

У повному обсязі дисертація обговорювалася на розширеному науковому семінарі кафедри інформатики та прикладної математики Рівненського державного гуманітарного університету та кафедри прикладної математики Національного університету водного господарства та природокористування, науковому семінарі кафедри математичної фізики та кафедри моделювання систем та технологій Харківського національного університету імені В. Каразіна, науковому семінарі кафедри прикладної математики Інституту прикладної математики та фундаментальних наук Національного університету «Львівська політехніка», науковому семінарі кафедри комп'ютерних наук Тернопільського національного економічного університету.

**Публікації.** За матеріалами роботи опубліковано 29 наукових праць, у тому числі 12 статей, з яких 9 у фахових наукових виданнях з технічних наук, у тому числі у виданнях, що реферуються в міжнародних наукометричних базах даних: ISI Thomson Reuters [1], Cambridge Scientific Abstracts [2], Ulrich's Periodicals Directory [3], INSPEC [2, 5, 6]; 3 праці опубліковано без співавторів.

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел (212 найменувань) та додатків. Загальний обсяг дисертаційної роботи – 152 сторінки, з них 115 сторінок основного тексту, в тому числі 32 рисунки.

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, сформульовано мету та основні задачі дослідження, визначено наукову новизну роботи та її зв'язок із науковими програмами, планами і темами, наведено дані про апробацію результатів роботи.

У першому розділі міститься огляд праць стосовно сучасного стану досягнень у сфері математичного та комп'ютерного моделювання сингулярно збурених процесів масоперенесення в пористих та біпористих середовищах, а також здійснено постановку задач дослідження. Основні ідеї математичного моделювання процесу масоперенесення в пористих середовищах базуються, зокрема, на роботах А.Фіка, А.Дарсі, І.-Ж.Ленгмюра, П.Я.Полубаринової-Кочиної, Я.Бера, С.М.Нумерова, Н.Н.Веригіна, Ж.Каргера, Д.Рутвена, С.Корнера та інших. Розробці різних методів числового та числово-аналітичного розв'язання задач волого- і солеперенесення розповсюдження забруднень у навколишньому середовищі та суміжних їм процесам присвячені роботи І.І.Ляшка, С.І.Ляшка, В.І.Лаврика, В.В.Скопечького, В.М.Булавацького, І.В.Сергієнка, В.С.Дейнеки, М.З.Згуровського, Я.Й.Бурака, Є.Я.Чаплі, О.Ю.Чернухи, Я.Г.Савули, Б.В.Гері, Я.Д.П'янила, О.А.Самарського, Л.М.Журавчак, А.Я.Бомби, А.П.Власюка, П.М.Мартинюка та інших. Теоретичні дослідження проблем моделювання масопереносу в двопористих середовищах розглянуті в працях І.-Ж.Ленгмюра, С.Хіншелвуда, М.Шірато, Ф.М.Тіллера, Ж.Фрессарда, С.Леклерка, М.Р.Петрика. Оскільки при моделюванні процесів фільтрування їх складові (конвекція, дифузія, масообмін, різні співвідношення між параметрами) входять не рівнозначно, диференціальні рівняння, що описують такі процеси, як правило містять малі параметри. При використанні класичних різницевих схем для розв'язання рівнянь з малим параметром при старшій похідній виявляється, що ці схеми дають достатню точність, якщо крок сітки значно менше величини малого параметра. Тому для стійкості різницевої схеми потрібно дуже невеликий крок сітки, що призводить до величезних витрат машинних ресурсів або застосування спеціальних адаптивних схем. Отже, відповідні модельні задачі доцільно розв'язувати за допомогою методів теорії збурень. Розвитком і використанням асимптотичних методів зокрема займалися В.Вазов, М.Ван-Дайк, П.Файф, Р.О'Маллі, К.Чанг, Н.Левінсон, Б.Панайоті, М.І.Вішик, Л.А.Люстернік, А.Б.Васильєва, В.Ф.Бутузов, В.О.Митропольский, Н.Н.Боголюбов, А.М.Айзен, В.Г.Сушко, А.Найфе, Е.Т.Копсон та багато інших. Використовуючи ідеї переходу до координат області комплексного потенціалу у рівнянні конвективної дифузії та відповідних крайових і початкових умовах, А.Я.Бомба, А.П.Власюк та їх учні розв'язали ряд нелінійних сингулярно збурених крайових задач масопереносу при фільтрації в неоднорідних анізотропних пористих середовищах.

На основі проведеного аналізу проблем математичного моделювання процесів конвективно-дифузійного масоперенесення розчинних речовин в біпористих середовищах, огляду існуючих моделей та методів математичного моделювання відповідних процесів, показано, що актуальним є науково-практичне завдання моделювання процесів багатокomпонентного тепломасоперенесення в мікропористих середовищах за умови домінування одних складових цих процесів над іншими та розвитку асимптотичних методів розв'язання відповідних нелінійних сингулярно збурених задач.



У **другому** розділі розвинено методику дослідження нелінійних сингулярно збурених процесів конвективної дифузії в пористих середовищах на випадок багатокомпонентного тепломасоперенесення за умови протікання екзотермічної хімічної реакції між забруднюючими речовинами. Розроблено алгоритми розв'язання відповідних крайових двовимірних та просторових задач, які реалізовано у вигляді комп'ютерних програм, здійснено відповідні числові розрахунки та проведено їх аналіз.

Зокрема, побудовано асимптотичне розвинення розв'язків модельної сингулярно збуреної задачі, що описує процес конвективно-дифузійного поширення трьох сортів забруднюючих речовин, дві з яких вступають в екзотермічну хімічну реакцію з утворенням третього сорту речовини:

$$\operatorname{div} (D_j(T) \cdot \operatorname{grad} C_j) - \vec{v} \cdot \operatorname{grad} C_j - \varepsilon \alpha_j S_j(T) C_1 C_2 = \sigma (C_j)_t', \quad j = \overline{1, 3}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} (D_T \cdot \operatorname{grad} T) - \vec{v} \cdot \operatorname{grad} T + \varepsilon f^{**}(C_1, C_2) = T_t, \quad (2)$$

$$C_j(x, y, z, 0) = C_{j0}^0(x, y, z), \quad T(x, y, z, 0) = T_0^0(x, y, z), \quad (3)$$

$$\begin{aligned} C_j \Big|_{ABB^*A^*} &= C_{j*}(M, t), \quad C_j \Big|_{CDD^*C^*} = C_{j*}^*(M, t), \quad C_j \Big|_{ADD^*A^*} = C_{j**}(M, t), \\ C_j \Big|_{BCC^*B^*} &= \tilde{C}_j^{**}(M, t), \quad C_j \Big|_{ABCD} = C_{j**}^*(M, t), \quad C_j \Big|_{A^*B^*C^*D^*} = C_{j**}^{**}(M, t), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} T \Big|_{ABB^*A^*} &= T_*(M, t), \quad T \Big|_{CDD^*C^*} = T^*(M, t), \quad T \Big|_{ADD^*A^*} = T_{**}(M, t), \\ T \Big|_{BCC^*B^*} &= T^{**}(M, t), \quad T \Big|_{ABCD} = T_{**}^*(M, t), \quad T \Big|_{A^*B^*C^*D^*} = T_{**}^{**}(M, t), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\vec{v} = \kappa \operatorname{grad} \varphi, \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0,$$

$$\varphi \Big|_{ABB^*A^*} = \varphi_*, \quad \varphi \Big|_{CDD^*C^*} = \varphi^*, \quad \frac{d\varphi}{dn} \Big|_{ADD^*A^* \cup A^*D^*C^*B^* \cup B^*C^*CB \cup ADCB} = 0, \quad (6)$$

де  $C_j(x, y, z, t)$  – відповідно, масові концентрації  $j$ -ї компоненти речовини у фільтраційному розчині,  $D_j(T) = \varepsilon d_j(T)$  – коефіцієнт дифузії  $j$ -ї компоненти речовини,  $D_T = \varepsilon d_T$  – коефіцієнт термодифузії,  $\varepsilon S_j(T)$  – швидкість хімічної реакції,  $\tilde{f}^{**}(C_1, C_2)$  – неперервні обмежені функції, які характеризують швидкість теплоутворення в результаті масообміну,  $d^i(T)$  та  $S^i(T)$  виражаються, наприклад, згідно з законом Арреніуса,  $\varphi$  і  $\vec{v}$  – відповідно, потенціал і вектор швидкості фільтрації,  $\kappa = \kappa(x, y, z, C_j, T)$  – коефіцієнт (тензор) фільтрації,  $\varepsilon > 0$  – малий параметр (характеризує переважання конвективної складової процесу над дифузійною та масообмінною),  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ,  $\alpha_3 = -1$ ;  $a$  – коефіцієнт температуропровідності;  $\gamma$  – константа швидкості теплоутворення внаслідок хімічної реакції,  $\sigma$  – пористість середовища. Всі функції, що фігурують в (4) – (5) достатньо гладкі функції, узгоджені між собою вздовж ребер області  $G_z \times (0, \infty)$ ,

де  $G_z = ABCDA_*B_*C_*D_*$  – криволінійний паралелепіпед, обмеженому еквіпотенціальними (квазіеквіпотенціальними) поверхнями та поверхнями течії,  $M$  – біжуча точка відповідної поверхні;  $\vec{n}$  – зовнішня нормаль до відповідної поверхні.

Припустивши, що задача (6) є розв’язаною, зокрема з допомогою числового методу квазіконформного відображення  $G_z \mapsto G_w$  (або  $G_w \mapsto G_z$ ), зокрема, знайдено поле швидкості  $\vec{v}(v_x(x, y, z), v_y(x, y, z), v_z(x, y, z))$ . Тут  $G_w = \{w = (\varphi, \psi, \chi) : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, Q_* < \psi < Q^*, Q_{**} < \chi < Q^{**}\}$  – відповідна  $G_z$  область комплексного потенціалу,  $\psi = \psi(x, y, z)$ ,  $\chi = \chi(x, y, z)$  – функції течії (комплексно спряжені до  $\varphi = \varphi(x, y, z)$ );  $Q = Q_0 \cdot Q^0$  – потік через довільний поперечний переріз  $G_z$ , де  $Q_0 = Q^* - Q_*$  і  $Q^0 = Q^{**} - Q_{**}$  – потоки через відповідні горизонтальний і вертикальний шари. Тоді, здійснивши заміну змінних  $x = x(\varphi, \psi, \eta)$ ,  $y = y(\varphi, \psi, \eta)$ ,  $z = z(\varphi, \psi, \eta)$  у рівняннях (1)–(2) та умовах (3)–(5), отримаємо відповідну “дифузійну задачу” для відповідної області комплексного потенціалу  $G_w \times (0, \infty)$  [5], розв’язок якої знайдено у вигляді асимптотичних рядів:

$$C_j(\varphi, \psi, \chi, t) = C_{j,0}(\varphi, \psi, \chi, t) + \varepsilon C_{j,1}(\varphi, \psi, \chi, t) + \dots + \varepsilon_n C_{j,n}(\varphi, \psi, \chi, t) + \\ + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \Pi_{j,i}(\xi, \psi, \chi, t) + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^2 \underline{\Pi}_{j,\frac{i}{2}}(\varphi, \eta, \chi, t) + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^2 \overline{\Pi}_{j,\frac{i}{2}}(\varphi, \mu, \chi, t) + \\ + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^2 \underline{\underline{\Pi}}_{j,\frac{i}{2}}(\varphi, \psi, \beta, t) + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^2 \overline{\overline{\Pi}}_{j,\frac{i}{2}}(\varphi, \psi, \alpha, t) + R_1^j(\varphi, \psi, \chi, t, \varepsilon), \quad (7)$$

$$T(\varphi, \psi, \chi, t) = T_0(\varphi, \psi, \chi, t) + \varepsilon T_1(\varphi, \psi, \chi, t) + \dots + \varepsilon^n T_n(\varphi, \psi, \chi, t) + \\ + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i P_i(\xi, \psi, \chi, t) + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^2 \underline{P}_{\frac{i}{2}}(\varphi, \eta, \chi, t) + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^2 \overline{P}_{\frac{i}{2}}(\varphi, \mu, \chi, t) + \\ + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^2 \underline{\underline{P}}_{\frac{i}{2}}(\varphi, \psi, \beta, t) + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^2 \overline{\overline{P}}_{\frac{i}{2}}(\varphi, \psi, \alpha, t) + R_1^4(\varphi, \psi, \chi, t, \varepsilon), \quad (8)$$

де  $C_{j,i}(\varphi, \psi, \chi, t)$  та  $T_i(\varphi, \psi, \chi, t)$  ( $j = \overline{0,3}$ ,  $i = \overline{0,n}$ ) – члени регулярних частин асимптотики,  $\Pi_{j,i}(\xi, \psi, \chi, t)$  і  $P_i(\xi, \psi, \chi, t)$  ( $i = \overline{0,n+1}$ ) – функції типу прилежового шару на виході фільтраційного потоку із області  $G_w$ ;  $\underline{\Pi}_{j,i/2}(\varphi, \eta, \chi, t)$ ,  $\underline{P}_{i/2}(\varphi, \eta, \chi, t)$ ,  $\overline{\Pi}_{j,i/2}(\varphi, \mu, \chi, t)$ ,  $\overline{P}_{i/2}(\varphi, \mu, \chi, t)$ ,  $\underline{\underline{\Pi}}_{j,i/2}(\varphi, \psi, \beta, t)$ ,  $\underline{\underline{P}}_{i/2}(\varphi, \psi, \beta, t)$ ,  $\overline{\overline{\Pi}}_{j,i/2}(\varphi, \psi, \alpha, t)$ ,  $\overline{\overline{P}}_{i/2}(\varphi, \psi, \alpha, t)$  ( $i = \overline{0,2n+1}$ ) – функції типу прилежового шару відповідно в околах водонепроникних границь області фільтрації, що враховують вплив бічних джерел забруднень,  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\mu$ ,  $\beta$ ,  $\alpha$  – відповідні регуляризуючі перетворення (розтяги),  $R_1^j$  – залишкові члени.

Отримано аналітичні вирази для знаходження регулярних частин асимптотики та примежових функцій та здійснено оцінку залишкових членів. На цій основі створено програмні засоби комп'ютерної реалізації, що дозволяють отримати часово-просторові розподіли концентрації забруднюючих речовин, автономно доповнювати до конвективних складових розв'язку дифузійної та масообмінні складові, а також функції типу примежового шару в околах границь фільтраційної області.

Як приклад ефективності застосування запропонованого підходу розв'язування крайових задач, також досліджено сингулярно збурений процес конвективно-дифузійного теплоперенесення у тонкій трубці з врахуванням теплообміну із зовнішнім середовищем та побудоване асимптотичне розв'язання розв'язку відповідної модельної задачі з умовами третього роду на бічній границі. Такі задачі, зокрема, виникають при моделюванні роботи ґрунтового теплообмінника. Проведені числові експерименти дозволяють робити висновки про вплив параметрів теплообмінника, сезонної зміни температури ґрунту та його фізичних характеристик на ефективність відбору ґрунтового тепла, і на основі цього запропонувати оптимальні конструктивні характеристики теплообмінника (такі як оптимальна довжина горизонтального або глибина вертикального теплообмінника для конкретних умов експлуатації).

У **третьому розділі** запропоновано та обґрунтовано підхід стосовно дослідження процесів масоперенесення розчинної речовини в мікропористому середовищі (рис. 1) у випадку превалювання конвективної складової процесу над дифузійними та масообмінними.

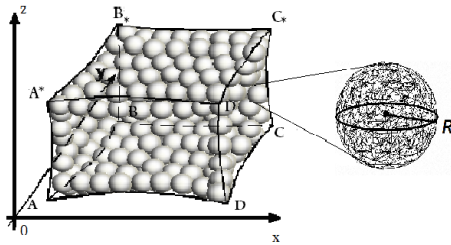


Рис.1. Фізична область – мікропористе середовище

Зокрема, розроблено підхід стосовно дослідження сингулярно збуреного процесу конвективно-дифузійно-адсорбційного масоперенесення у середовищі частинок мікропористої структури, що описується системою диференціальних рівнянь (без зменшення загальності розглянуто одновимірний випадок):

$$\sigma_1 C_t' = \varepsilon d C_{xx}'' - v(x) C_x' - \varepsilon d^* (U_r') \Big|_{r=R}, \quad (9)$$

$$\sigma_2 U_t' = \varepsilon d^* \left( U_{rr}'' + \frac{2}{r} U_r' \right), \quad (10)$$

$$0 \leq x \leq L, 0 \leq r \leq R.$$

Цю систему доповнюємо початковими та граничними умовами, зокрема умовою адсорбційної рівноваги на поверхні частинок, що пов'язує концентрації в міжчастинковому просторі  $C(x,t)$  та внутрішньочастинковому  $U(x,r,t)$ :

$$U(x,r,t)\Big|_{r=R} = k \cdot C(x,t). \quad (11)$$

В рівняннях (9) та (10) малий параметр  $0 < \varepsilon \ll v^* < v(x)$  характеризує переважання конвективної складової процесу над дифузійними та адсорбційними,  $v(x)$  – швидкість конвективного перенесення, коефіцієнти  $\varepsilon d$  та  $\varepsilon d^*$  характеризують швидкість дифузійного перенесення розчинної речовини відповідно в міжчастинковому просторі та в частинках,  $\varepsilon d_*^*$  – коефіцієнт впливу внутрішньочастинкового перенесення на міжчастинкове,  $\sigma_1$  та  $\sigma_2$  – пористості міжчастинкового простору та мікропористих частинок відповідно,  $R$  – радіус частинок,  $k$  – константа адсорбційної рівноваги,  $L$  – довжина фільтра. Модельну конструкцію (9)–(10) за додаткової умови (11) називатимемо системою диференціальних рівнянь з локально-іншорідними особливостями.

Розв'язок поставленої задачі з точністю  $O(\varepsilon^n)$  знайдено у вигляді асимптотичних рядів:

$$C(x,t) = C_0(x,t) + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j C_j(x,t) + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^j \Pi_j(\xi,t) + R_n^1(x,t,\varepsilon), \quad (12)$$

$$U(x,r,t) = U_0(x,r,t) + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j U_j(x,r,t) + \sum_{j=0}^{2n+1} \varepsilon^{j/2} F_{j/2}(x,\rho,t) + R_n^2(x,r,t,\varepsilon), \quad (13)$$

де  $C_j(x,t)$  та  $U_j(x,r,t)$  – члени регулярних частин асимптотики,  $\Pi_j(\xi,t)$  – функції типу примежового шару в околі виходу течії з фільтраційної області  $x=L$ ,  $F_{j/2}(x,\rho,t)$  – функції типу примежового шару в околі поверхні мікрочастинки  $r=R$ ,  $\xi = (L-x) \cdot \varepsilon^{-1}$ ,  $\rho = (R-r) \cdot \varepsilon^{-1/2}$  – відповідні регуляризуючі розтяги,  $R_n^1(x,t,\varepsilon)$  та  $R_n^2(x,r,t,\varepsilon)$  – залишкові члени асимптотики, оцінка яких, у випадках малих нелінійностей, встановлюється з використанням принципу максимуму для параболічних рівнянь.

На рис. 2 наведено результати обчислюваного експерименту при  $L=1\text{ м}$ ,  $R=10^{-5}\text{ м}$ ,  $\varepsilon=10^{-10}$ ,  $d_* = 1\text{ м}^2 / \text{год}$ ,  $d^* = 1\text{ м}^2 / \text{год}$ ,  $d_*^* = 0.3\text{ м} / \text{год}$ ,  $\sigma_1 = 0.7$ ,  $\sigma_2 = 0.8$ ,  $v(x) = 1\text{ м} / \text{год}$ ,  $k = 0.8$ . Розподіл концентрації забруднюючої речовини в міжчастинковому просторі відображено на рис. 2, а. Так, крива 1 відповідає конвективній складовій розв'язку, тобто без врахування адсорбції мікропористими частинками, а криві 2, 3, 4 – розв'язку  $C(x,t)$  у моменти часу  $t=0.9\text{ год}$ ,  $t=1\text{ год}$ ,  $t=1.5\text{ год}$ . Як показав експеримент, очищення відбувається до певного моменту часу (забруднення мікропористих частинок). При заданих умовах це

$t = 0.9 \text{ год}$ , після чого починає знижуватись інтенсивність очищення, хоча частинки ще не є повністю забруднені. Максимальне відхилення розрахованого значення концентрації на виході фільтра при заданих умовах з врахуванням адсорбції складає 14 %. На рис. 2, б зображено розподіл концентрації забруднюючої речовини в мікропористій частинці з центром в точці з координатою  $x = 0.2$  у моменти часу  $t = 0.5 \text{ год}$ ,  $t = 0.6 \text{ год}$ ,  $t = 0.8 \text{ год}$ ,  $t = 1 \text{ год}$ ,  $t = 1.8 \text{ год}$  (криві 1 – 5 відповідно).

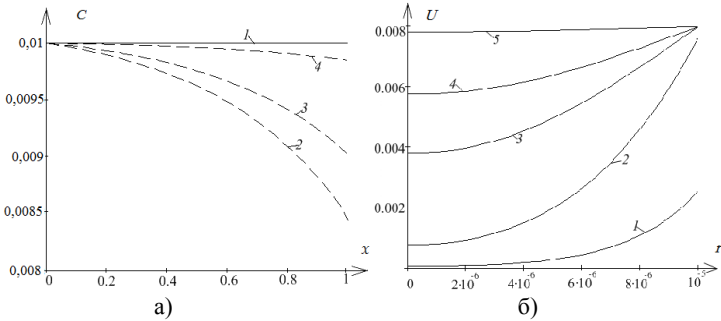


Рис. 2. Розподіли концентрації розчинної речовини в міжчастинковому та внутрішньочастинковому просторі

Запропоновану методику узагальнено на випадок дослідження просторових сингулярно збурених процесів конвективно-дифузійного масоперенесення в мікропористих багат шарових середовищах (рис. 3, а).

Розв'язок задачі в цьому випадку знайдено в області комплексного потенціалу (рис. 3, б), перехід до якої здійснюється з використанням ідей квазіконформних відображень, у вигляді асимптотичних рядів, що для шуканої концентрації в міжчастинковому просторі містить не лише регулярні частини асимптотики та поправки на виході з фільтраційного середовища, а також функції типу примежового шару в околах бічних граней та поверхонь розділу шарів.

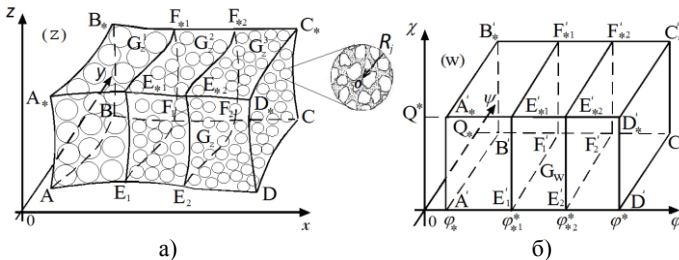


Рис. 3. Фізична область – багат шарове мікропористе середовище та відповідна область комплексного потенціалу

На основі ідей методу теорії збурень, побудовано алгоритм асимптотичного розв'язку сингулярно збурених крайових задач конвективної дифузії в

мікропористому середовищі за умов неповних даних. Зокрема, використовуючи спеціальним чином задану додаткову умову перевизначення ідентифіковано невідомі залежні від часу коефіцієнти дифузії макро- і мікросередовища, впливу внутрішньочастинкового дифузійного переносу на міжчастинковий та невідому функцію адсорбційної рівноваги.

У **четвертому розділі** досліджено нелінійні моделі процесів багатокомпонентного масоперенесення в мікропористих середовищах з використанням розробленої асимптотичної методології. Перехід до дослідження багатокомпонентного конвективно-дифузійного масоперенесення не вимагає значної модифікації розроблених процедур знаходження членів асимптотики.

Вперше розроблено комплексний підхід до моделювання сингулярно збурених неізотермічних процесів конвективно-дифузійного масоперенесення з урахуванням масообміну в мікропористих середовищах та враховано зворотній вплив характеристик процесу (температури, що зростає в результаті екзотермічної хімічної реакції між забруднюючими речовинами) на характеристики середовища (коефіцієнти дифузії, масообміну), що описується наступною системою диференціальних рівнянь:

$$\sigma_1(C_j)_t' = \sum_{s=1}^m \operatorname{div}(D_{js}(T) \cdot \operatorname{grad} C_s) + \operatorname{div}(D_T \cdot \operatorname{grad} T) - \bar{v} \cdot \operatorname{grad} C_j + \tilde{f}_j(C_1, \dots, C_j, T) - D_{*j}^*(T) (U_j)_r' \Big|_{r=R}, \quad (14)$$

$$\sigma_2(U_j)_t' = \sum_{s=1}^m r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( D_{js}^*(T) \frac{1}{r^2} \frac{\partial U_s}{\partial r} \right) - \tilde{f}_j^*(U_1, \dots, U_j, T), \quad (15)$$

$$T'_t = \operatorname{div}(D_T \cdot \operatorname{grad} T) - \bar{v} \cdot \operatorname{grad} T + \tilde{f}^{**}(C_1, \dots, C_j), \quad (16)$$

$$C_j(x, t) \Big|_{t=0} = C_j^0(x), \quad U_j(x, r, t) \Big|_{t=0} = U_j^0(x, r), \quad T(x, t) \Big|_{t=0} = T^0(x), \quad (17)$$

$$C_j(0, t) = C_{j*}(t), \quad (C_j(x, t))'_x \Big|_{x=L} = 0, \quad T(0, t) = T_*(t), \quad (T(x, t))'_x \Big|_{x=L} = 0, \quad (18)$$

$$U_j(x, r, t) \Big|_{r=R} = k_j(T) C_j(x, t), \quad (U_j(x, r, t))'_r \Big|_{r=0} = 0. \quad (23)$$

де  $C_j(x, t)$  і  $U_j(x, r, t)$  – відповідно, масові концентрації  $j$ -ї компоненти речовини у фільтраційному розчині і в мікрочастинках (на сферах з центром у точці  $(x, y, z)$  радіуса  $r$ ,  $0 \leq r \leq R$ ) у момент часу  $t$ ,  $j = \overline{1, m}$ ,  $s = \overline{1, m}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $D_{js}(T) = \varepsilon d_{js}(T)$  – коефіцієнт дифузії  $j$ -ї компоненти речовини за умови присутності  $s$ -ї компоненти у фільтраційному потоці,  $D_{js}^*(T) = \varepsilon d_{js}^*(T)$  – коефіцієнт дифузії  $j$ -ї компоненти речовини за умови присутності  $s$ -ї компоненти в мікропористих частинках,  $\tilde{f}_j(C_1, \dots, C_j, T)$  і  $\tilde{f}_j^*(U_1, \dots, U_j, T)$  – неперервні обмежені функції, які характеризують швидкість протікання масообмінних процесів між  $j$ -ю і  $s$ -ю компонентами речовини відповідно у фільтраційному розчині і в мікропористих

частинках ( $j = \overline{1, m}, s = \overline{1, m}$ ),  $D_{*j}(T) = \varepsilon d_{*j}(T)$  – неперервні обмежені функції, які характеризують швидкість протікання сорбційних процесів  $j$ -ї компоненти речовини (швидкість переходу концентрації з міжчастинкового простору у внутрішньочастинковий).

Ця модель описує процес руху частинок декількох сортів забруднюючої речовини у фільтраційному середовищі, що складається з мікропористих частинок. Побудовано алгоритм наближення розв'язку задачі в припущенні, що мікрочастинки миттєво нагрівається чи охолоджуються, тобто немає зміни температури вздовж радіуса мікропористої частинки. На рис. 4 показано вплив хімічної реакції та адсорбції мікропористими частинками на розподіл забруднюючої речовини в фільтрі.

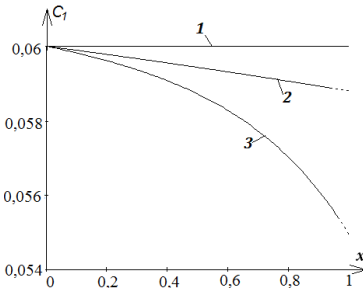


Рис. 4. Розподіл концентрації одного з сортів забруднюючої речовини за умови відсутності масообміну (крива 1), за умови протікання хімічної реакції (крива 2) та за умови і протікання реакції і адсорбції мікропористими частинками (крива 3)

Запропоновану методику математичного моделювання конвективно-дифузійно-адсорбційного масоперенесення в мікропористих середовищах узагальнено на випадок врахування зміни концентрації частинок, які конвективно переносяться у фільтраційному потоці, а саме розроблено алгоритм числово-асимптотичного наближення розв'язку сингулярно збуреної задачі конвективної дифузії в мікропористому середовищі з урахуванням масообміну між мігруючими мікропористими частинками та міжчастинковим простором, що описується системою рівнянь (9)-(10) з додатковим рівнянням конвективного перенесення адсорбуючих частинок та відповідними початковими та крайовими умовами. Коефіцієнт впливу внутрішньочастинкового перенесення на міжчастинкове не містить малого множника  $\varepsilon$  та залежить від невідомої концентрації мікрочастинок. На основі аналізу розв'язків відповідної модельної задачі встановлено моменту часу стабілізації процесу очищення, після якого необхідно збільшувати концентрацію адсорбенту, що поступає у фільтраційний потік.

## ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ РОБОТИ ТА ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота є завершеним науковим дослідженням, у якому розв'язано важливе науково-технічне завдання математичного моделювання технологічних процесів конвективно-дифузійного тепломасоперенесення розчинних речовин у пористих та мікропористих середовищах (фільтрах) у випадку переважання одних складових процесу над іншими та розвитку методів теорії збурень розв'язання відповідних нелінійних сингулярно збурених задач.

Найбільш важливі наукові та практичні результати полягають у наступному:

1. Узагальнено математичні моделі сингулярно збурених процесів конвективної дифузії в пористих середовищах на випадок дослідження відповідних багатокомпонентних неізотермічних процесів з урахуванням хімічної реакції між розчинними речовинами. Побудовано асимптотичне наближення розв'язків відповідних крайових задач, обґрунтованість яких забезпечується високим рівнем співпадання результатів числових експериментів та аналітичними розв'язками відповідних спеціальних типів модельних тестових задач. На основі отриманих числових результатів підтверджено прогнозовану інтенсифікацію дифузійних та масообмінних складових процесу зі збільшенням температури середовища.

2. Сформовано та обґрунтовано математичну модель сингулярно збуреного процесу конвективно-дифузійно-адсорбційного масоперенесення розчинної речовини в однорідному та кусково-однорідному середовищі частинок мікропористої структури, що на відміну від існуючих, враховує механізм конвективного перенесення, а також уточнює розрахунок розподілу концентрації в мікропористому середовищі (фільтрі); побудовано асимптотичне розв'язання розв'язків відповідної крайової задачі, у тому числі за умови неповних даних. Підтверджено, що незважаючи на малу швидкість протікання явищ дифузійного масоперенесення в порах частинок, з часом це суттєво впливає на розподіл концентрації у самій частинці та у всьому фільтрі, а отже, можливим є використання розглянутого мікропористого середовища з метою очищення рідин від забруднень. У рамках окреслених середовищ і моделей встановлено, що врахування сорбції мікропористими частинками уточнює розрахунок концентрації на виході фільтра на 10-14 %.

3. Вперше побудовано математичну модель сингулярно збуреного процесу багатокомпонентного конвективно-дифузійно-адсорбційного масоперенесення розчинної речовини в однорідному мікропористому середовищі (фільтрі), за умов врахування масообміну та взаємовпливу компонент. Побудовано асимптотичне розв'язання розв'язку відповідних одновимірних нелінійних сингулярно збурених крайових задач, на основі чого проведено комп'ютерний експеримент та отримано просторово-часовий розподіл концентрацій забруднюючих речовин при різних значеннях параметрів процесу. На основі аналізу отриманих результатів зроблено висновок про значний вплив адсорбції та реакції, не зважаючи на те, що вони є малими в порівнянні з конвекцією.

4. Отримано розв'язок модельної задачі процесу первинної очистки стічних вод з використанням мікропористих сорбентів, яка враховує зміну концентрації не лише забруднення, а й самих сорбуючих частинок. Як показав числовий експеримент, починаючи з деякого моменту часу процес очищення стабілізується, тому для подальшого зменшення концентрації забруднюючої речовини в середовищі доцільним є збільшення концентрації адсорбуючих мікрочастинок, що подаються на вході.

5. Змодельовано процес конвективно-дифузійного тепломасоперенесення у тонкій трубі за умови превалювання конвективних його складових над



дифузійними та розвинуто асимптотичне наближення сингулярно збуреної задачі з умовами теплообміну на бічній границі, що виникає, зокрема, при моделюванні відбору ґрунтового тепла за допомогою ґрунтового теплообмінника, на основі отриманих розв'язків встановлені оптимальні розміри теплообмінника для конкретних умов експлуатації (вид ґрунту, річна зміна температури ґрунту за глибиною).

На основі низки комп'ютерних експериментів, зокрема при створенні (на основі запропонованих моделей і розроблених обчислювальних методів) рекомендацій щодо покращення тепловологісного режиму будівлі фільтрів насосної станції «Новий двір» в (м. Рівне), а також при розробці робочих проектів реконструкції та налаштування роботи систем пом'якшення води для котелень (студмістечка НУВГП в м. Рівне та Більськовільської ЗОШ І-ІІІ ст. в с. Більська Воля), встановлено оптимальні технологічні параметри відповідних процесів, що дасть змогу відповідно збільшити продуктивність роботи господарських об'єктів.

### СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Бомба А. Я. Асимптотичний метод розв'язання одного класу модельних сингулярно збурених задач процесу масоперенесення в різнопористих середовищах / А. Я. Бомба, І. М. Присяжнюк, О. В. Присяжнюк // Доповіді НАН України. – 2013. – № 3. – С. 28–34.
2. Бомба А. Я. Моделирование нелинейных сингулярно возмущенных процессов двухкомпонентного конвективно-диффузионного массопереноса в нанопористой среде / А. Я. Бомба, О. В. Присяжнюк // Электронное моделирование. – 2015. – Т. 37. – №4. – С. 37–52
3. Присяжнюк І. М. Математичне моделювання просторових сингулярно збурених процесів конвективно-дифузійного масоперенесення в двопористих багатощарових середовищах / І. М. Присяжнюк, Ю. Є. Климюк, О. В. Присяжнюк // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2014. – № 39 (1082). – С. 159–177.
4. Бомба А. Я. Ідентифікація параметрів сингулярно збурених задач типу «конвекція-дифузія-масообмін» в різнопористих середовищах / А. Я. Бомба, І. М. Присяжнюк, О. В. Присяжнюк // Вісник Хмельницького національного університету. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – Вип. 22. – 2013. — С. 36–44.
5. Присяжнюк О. В. Сингулярно збурені задачі типу «фільтрація–конвекція–дифузія–масообмін» із урахуванням терморегіму / О. В. Присяжнюк // Вісник Тернопільського національного технічного університету. Серія «Математичне моделювання. Математика. Фізика». – Тернопіль : ТНТУ, 2014. – Т. 73. – № 1. – С. 259–268.
6. Бомба А. Я. Модельні сингулярно збурені задачі процесів відбору ґрунтового тепла / А. Я. Бомба, Б. П. Сидорчук, О. В. Присяжнюк // Вісник Тернопільського національного технічного університету. Серія «Математичне

- модельовання. Математика. Фізика». – Тернопіль : ТНТУ, 2014. – Т. 74. – № 2. – С. 223–231.
7. Бомба А. Я. Обернені сингулярно збурені задачі процесу масоперенесення в різнопористих середовищах / А. Я. Бомба, І. М. Присяжнюк, О. В. Присяжнюк, О. А. Фурсачик // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: технічні науки. – 2012. – Вип. 7. – С. 3–11.
  8. Моделювання нелінійних сингулярно збурених трикомпонентних процесів типу «дифузія-конвекція-масообмін» в наносередовищі / А. Я. Бомба, М. Р. Петрик, Д. Леклерк, О. В. Присяжнюк, Ж. Фресар // Журнал обчислювальної та прикладної математики. Серія "Прикладна математика". – 2015. – №3 (120). – С. 107–115.
  9. Математичне моделювання процесів первинної очистки стічних вод із використанням пористих мікрочастинок / А. Я. Бомба, І. М. Присяжнюк, О. В. Присяжнюк, В. М. Сівак // Вісник Національного університету водного господарства та природокористування. Серія «Технічні науки». – 2014. – Вип. 1(65). – С. 104–112.
  10. Присяжнюк О. В. Асимптотичний метод розв'язання нелінійних сингулярно збурених задач типу «конвекція-дифузія-масообмін-терморезим» / О. В. Присяжнюк, І. М. Присяжнюк // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. – 2011. – Вип. 8(17). – С. 140–152.
  11. Присяжнюк О. В. Числово-асимптотичний метод розв'язання сингулярно збурених задач типу «конвекція-дифузія» для наносередовищ у чотирикутних криволінійних областях / О. В. Присяжнюк // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. – 2012. – Вип. 9(18). – С. 162–176.
  12. Присяжнюк О. В. Сингулярно збурені процеси багатокомпонентного конвективно-дифузійного масоперенесення в нанопористих середовищах з врахуванням терморезиму / О. В. Присяжнюк // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. – 2014. – Вип. 11(20). – С. 87–98.
  13. Bomba A. Modeling of the singularly perturbed processes of single component convection diffusion in the plane varying porous environments / A. Bomba, I. Prysiazniuk, O. Prysiazniuk // VIII International Conference POROUS MATERIALS Theory and Experiment (INTERPOR'12) & Symposium "Mathematical Modelling and Optimization in Mechanics". – Lviv-Briukhovychi, 2012. – P. 19–20.
  14. Bomba A. Modeling of singularly perturbed processes of heat-mass transfer in nanoporous environments / A. Ya. Bomba, O. V. Prysiazniuk // Third Conference "Mathematics for Life Sciences". – Rivne, 2015. – P. 5–6.
  15. Бомба А. Я. Математичне моделювання сингулярно збурених процесів пом'якшення води на натрій-катионітових фільтрах / А. Я. Бомба, О. В. Присяжнюк // Науково-технічна конференція «Мікро- та нанонеоднорідні матеріали: моделі та експеримент» (MNM 2015). – Львів, 2015. – С. 43–44.
  16. Бомба А. Я. Математичне моделювання процесів первинної очистки стічних вод із використанням пористих мікрочастинок / А. Я. Бомба, І. М. Присяжнюк, О. В. Присяжнюк // Праці міжнар. наук. конф. "Питання оптимізації

обчислень (ПОО-XL)". – К.: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2013. – С. 41.

17. Бомба А. Я. Моделювання сингулярно збурених процесів тепло-масоперенесення в нанопористих середовищах / А.Я. Бомба, О.В. Присяжнюк // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики (АРАМС-2015). – Львів : ЛНУ ім І. Франка, 2015. – С. 81–82.
18. Бомба А. Я. Просторові сингулярно збурені задачі типу «конвекція-дифузія-масообмін» при плоскій фільтрації з врахуванням терморезиму / А. Я. Бомба, І. М. Присяжнюк, О. В. Присяжнюк // Праці XVI Міжнародного симпозиуму «Методи дискретних особливостей в задачах математичної фізики» (МДОЗМФ-2013). – Харків-Херсон, 2013. – 93–96.
19. Бомба А. Я. Обернені сингулярно збурені задачі процесу масопереносу в різнопористих середовищах / А. Я. Бомба, І. М. Присяжнюк, О. В. Присяжнюк // Матеріали міжнародної наукової конференції «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь». – Київ : Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, 2012. – С. 3–4.
20. Бомба А. Я. Обернені сингулярно збурені модельні задачі типу нанофільтрування / А. Я. Бомба, І. М. Присяжнюк, О. В. Присяжнюк // Матеріали конф. Т. 1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. – К.: НТУУ «КПІ», 2015. – С. 44–45.
21. Бомба А. Я. Ідентифікація параметрів сингулярно збурених задач типу «конвекція-дифузія-масообмін» в різнопористих середовищах / А. Я. Бомба, І. М. Присяжнюк, О. В. Присяжнюк // Матеріали Всеукраїнської наукової конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів». – Рівне, 2013. – С. 34.
22. Бомба А. Я. Модельні сингулярно збурені задачі процесів очистки стічних вод із використанням пористих мікрочастинок / А. Я. Бомба, О. В. Присяжнюк // Праці міжнародної наукової конференції «Комп'ютерне моделювання в наукоемких технологіях» (КМНТ-2014). – Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2014. – С. 41–44.
23. Бомба А. Я. Сингулярно збурені процеси двокомпонентного конвективно-дифузійного масопереносу в нанопористому середовищі / А. Я. Бомба, І. М. Присяжнюк, О. В. Присяжнюк // VII Міжнародна наукова конференція імені І. І. Ляшка "Обчислювальна та прикладна математика". – Київ : КНУ імені Тараса Шевченка, 2014. – С. 28–29.
24. Бомба А. Я. Математичне моделювання нелінійних сингулярно збурених процесів очищення стічних вод від двокомпонентного забруднення в різнопористому середовищі / А.Я. Бомба, І.М. Присяжнюк, О.В. Присяжнюк // Сучасні комп'ютерні інформаційні технології: Матеріали III Всеукраїнської школи-семінару молодих вчених і студентів "АСІТ'2013". – Тернопіль : ТНЕУ, 2013. – С.16–17.
25. Бомба А. Я. Математичне моделювання сингулярно збурених процесів багатокомпонентної конвективної дифузії в нанопористих середовищах / А. Я. Бомба, І. М. Присяжнюк, О. В. Присяжнюк // II науково-технічна конференція

- ”Обчислювальні методи і системи перетворення інформації”, присвячена пам’яті професора Б.О. Попова. – Львів : ФМІ НАНУ, 2014. – С. 13–15.
26. Бомба А. Я. Просторові сингулярно збурені процеси багатокомпонентного конвективно-дифузійного масопереносу в нанопористих багатошарових середовищах з врахуванням терморегіму / А. Я. Бомба, О. В. Присяжнюк // Матеріали Міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів». – Рівне, 2015. – С. 34.
  27. Бомба А. Я. Моделювання сингулярно збурених процесів масоперенесення двокомпонентного забруднення в нанопористому багатошаровому середовищі / А. Я. Бомба, О. В. Присяжнюк // Сучасні комп’ютерні інформаційні технології: Матеріали V Всеукраїнської школи-семінару молодих вчених і студентів (АСІТ’2015). – Тернопіль : ТНЕУ, 2015. – С. 15–16.
  28. Присяжнюк І. М. Математичне моделювання процесів конвективної дифузії з урахуванням масообміну та терморегіму речовин / І. М. Присяжнюк, О. В. Присяжнюк // Матеріали доповідей IV Всеукраїнської науково-практичної конференції студентів, аспірантів та науковців «Інформаційні технології в професійній діяльності». – Рівне, 2010. – С. 84–86.
  29. Бомба А. Я. Числово-асимптотичний метод розв’язання сингулярно збурених задач типу «конвекція-дифузія» для наносередовищ / А. Я. Бомба, О. В. Присяжнюк, К. О. Гомон // Матеріали доповідей XV Всеукраїнської (X Міжнародної) студентської наукової конференції з прикладної математики та інформатики „СНКПМІ-2012”. – Львів : Львівський національний університет імені Івана Франка, 2012. – С. 123–124.

## АНОТАЦІЇ

**Присяжнюк О. В. Математичне моделювання процесів конвективно-дифузійного тепломасоперенесення в пористих та мікропористих середовищах методами теорії збурень.** – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи. – Національний університет “Львівська політехніка”, Міністерство освіти і науки України, Львів, 2016.

Дисертація присвячена математичному моделюванню процесів конвективно-дифузійного масоперенесення з врахуванням масообміну та температурного режиму в пористих та мікропористих середовищах та розвитку методів теорії збурень розв’язання відповідних нелінійних сингулярно збурених задач.

Розроблено підхід до моделювання сингулярно збурених процесів масоперенесення розчинних речовин в одно- та багатошарових мікропористих середовищах, розвинено метод асимптотичного наближення розв’язків відповідних крайових задач та проведено числові експерименти, результати яких засвідчують високу ефективність запропонованих моделей та належну точність побудованих асимптотичних розкладів. Запропонований підхід узагальнено на випадок моделювання неізотермічного сингулярно збуреного процесу

багатокомпонентного масоперенесення за умови протікання хімічної реакції між розчинними речовинами в пористих і мікропористих середовищах та знайдено наближені розв'язки відповідних крайових задач. На основі отриманих алгоритмів створено програмні засоби комп'ютерної реалізації для розрахунку часово-просторових розподілів концентрацій забруднюючих речовин.

*Ключові слова:* сингулярне збурення, конвекція, дифузія, масообмін, тепломасоперенесення, мікропористе середовище, математичне моделювання.

**Присяжнюк Е. В. Математическое моделирование процессов конвективно-диффузионного тепломассопереноса в пористых и микропористых средах методами теории возмущений.** – На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 01.05.02 – математическое моделирование и вычислительные методы. – Национальный университет “Львівська політехніка”, Министерство образования и науки Украины, Львов, 2016.

Диссертация посвящена математическому моделированию процессов конвективно-диффузионного массопереноса с учетом массообмена и температурного режима в пористых и микропористых средах и развитию методов теории возмущений решения соответствующих нелинейных сингулярно возмущенных задач.

Разработан подход к моделированию сингулярно возмущенных процессов массопереноса растворимых веществ в одно- и многослойных микропористых средах, предложен метод асимптотического приближения решений соответствующих краевых задач и проведены числовые эксперименты, результаты которых подтверждают высокую эффективность предложенных моделей и надлежащую точность построенных асимптотических приближений. Предложенный подход обобщен на случай моделирования неизотермического сингулярно возмущенного процесса многокомпонентного массопереноса при протекании химической реакции между растворимыми веществами в пористых и микропористых средах и найдены приближенные решения соответствующих краевых задач. На основе полученных алгоритмов созданы программные средства компьютерной реализации для расчета временно-пространственных распределений концентраций загрязняющих веществ.

*Ключевые слова:* сингулярное возмущения, конвекция, диффузия, массообмен, тепломасооперенос, микропористая среда математическое моделирование.

**Prisiazhniuk O. V. Mathematical modeling of convective diffusion heat and mass transfer in porous and microporous media by perturbation methods.** – Manuscript.

The thesis for Ph.D degree in Technical Sciences by specialty 01.05.02 – mathematical modeling and computing methods. – Lviv Polytechnic National University, Ministry of Education and Science of Ukraine, Lviv, 2016.

The thesis is devoted to mathematical modeling of processes of convection-diffusion mass transfer with regard of mass exchange and temperature mode in porous

and microporous media and development of the methods of perturbation theory solving relevant nonlinear singularly perturbed problems.

A new mathematical model of convection-diffusion heat-mass transfer of soluble substances with regard to mass exchange generated by the chemical reaction between pollutants provided the domination of one component of the process over the other is formed. That enabled by taking into account (using perturbation) the impact of mass transfer components and process temperature conditions to clarify the dynamics of concentration distribution of individual multi-component mixtures.

The approach to modeling of singularly perturbed process of mass transfer of soluble substances in mono- and multilayer microporous media is developed, the algorithm of asymptotic expansions of solutions of the corresponding boundary problems is built and numerical experiments whose results confirm the high efficiency of the proposed models and appropriate precision built asymptotic approximations is conducted. Based on the proposed methodology for modeling of mass transfer process in microporous media a numerical identification of small parameters of diffuse and mass exchange was conducted.

The new mathematical model of unisothermal singularly perturbed multicomponent mass transfer process on condition of chemical reaction between soluble substances in porous and microporous media is constructed. Approximate solutions of the relevant systems of differential equations in partial derivatives containing small parameters in some states found. Based on the algorithm, software for calculation of time-space distributions of concentrations of pollutants were created. Analysis of the obtained results showed a significant influence adsorption and reactions, despite the fact that they are small compared to convection.

*Keywords:* singular perturbation, convection, diffusion, mass exchange, heat and mass transfer, microporous media, mathematical modeling.

Підписано до друку 23.05.2016 р.  
Папір офсетний. Гарнітура Times New Roman Суг.  
Формат 60х90 1/16. 0,9 ум. друк. арк.  
Замовлення № 889/3. Наклад 100 прим.

Віддруковано у редакційно-видавничому відділі  
Рівненського державного гуманітарного університету  
33028 м. Рівне, вул. С.Бандери, 12. Тел. (0362) 26-48-83