

ТЕОРІЯ І МЕТОДИ ПРОЕКТУВАННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

УДК 681.322

П.В. Тимошук

Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра систем автоматизованого проектування

ПРОЕКТУВАННЯ ПРЕЦИЗІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАТОРІВ ТА ІНТЕГРАТОРІВ ГАРМОНІЧНИХ СИГНАЛІВ

© Тимошук П.В., 2007

Конструюються аналогові та дискретні математичні моделі і відповідні структурно-функціональні схеми прецизійних диференціаторів й інтеграторів гармонічних сигналів. Математичні моделі визначаються у вигляді інтегро-диференціальних рівнянь. Структурно-функціональні схеми будуються на основі аналогових і цифрових диференціаторів, інтеграторів, суматорів, перемножувачів, подільників, функціональних перетворювачів й керованих перемикачів. Отримані аналогові моделі є точними для довільних скінченних значень параметрів сигналів.

Analog and discrete mathematical models and corresponding structure-functional circuits of precise differentiators and integrators of harmonic signals are built. Mathematical models are designed in a form of integral-differential equations. Structure-functional circuits are built on the basis of analog and digital differentiators, integrators, summers, multipliers, dividers, functional transformers and controlled switches. Analog models derived are precise for any finite values of signal parameters.

Вступ. Математичну модель нелінійної динамічної системи можна подати у вигляді такого інтегро-диференціального рівняння:

$$\Phi \left[x(t), x'(t), \dots, x^{(m)}(t), \int x(t)dt, \iint x(t)dt^2, \dots, \int \dots \int x(t)dt^r, \right. \\ \left. y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t), \int y(t)dt, \iint y(t)dt^2, \dots, \int \dots \int y(t)dt^s \right] = 0, \quad (1)$$

де аргументами функції Φ є скалярні часові функції від зовнішніх дій $x(t)$, реакцій системи $y(t)$, їхніх похідних та інтегралів за відомих початкових умов [1]. Відповідна функціонально-структурна схема може бути сконструйована методом прямого моделювання за допомогою блоків диференціювання, інтегрування, перемноження, підсилення, підсумовування та віднімання [2, 3]. Після зведення неявної моделі до явної форми вхідні та вихідні сигнали можуть додатково ділитися, підлягати нелінійним перетворенням та залежати від логічних умов. Для цього до функціональної схеми можна додати блоки ділення, функціонального перетворення та керованого перемикачів [4]. Схемну реалізацію функціональних блоків можна здійснювати на сучасній інтегральній елементній базі [5–7]. Зокрема, майже ідеальні диференціатори та інтегратори конструюються на основі операційних підсилювачів (ОП). За допомогою ОП ефективно виконуються операції сумування та віднімання [8]. Для перемноження сигналів можна використовувати, наприклад, мікросхеми AD427, AD429, AD432, AD433, AD434, AD530, AD531, AD532, AD532S, AD533, 525ПC1, 525ПC2, 526ПC1. Операція ділення реалізується за допомогою мікросхем AD201A, AD308, AD426L, AD427J, AD433, AD434B, AD436, AD530, AD531, AD531K, AD532, AD532J, AD532K. Піднесення до квадрата, видобування квадратного кореня та отримання абсолютної величини аналогових сигналів здійснюється на мікросхемах AD433 та 525ПC2. Як

відомо, поширена схема добування квадратного кореня на основі подільника із зворотним зв'язком за малих значень вхідних сигналів функціонує із значними похибками, її швидкодія знижується, з'являється гістерезис. Добування квадратного кореня ефективно здійснюється за допомогою багатофункціональних схем, виконаних на ОП з коефіцієнтом підсилення або послаблення. Точність функціонування таких схем при зменшенні значень вхідних сигналів підвищується. За існуючими схемами можна отримувати квадратний корінь у випадках, коли полярність вхідних сигналів невідома [9, 10]. Логарифмічні схеми виконання операції добування квадратного кореня за малих значень вхідних сигналів дають змогу уникати зниження точності, забезпечують широкий динамічний діапазон вхідних сигналів [5]. Логарифмічні схеми здійснення операцій перемноження, ділення сигналів, добування квадратного кореня та піднесення до степеня, реалізовані на базі комутованих конденсаторів, дають змогу досягати точності перетворення 0.01 % та часу виконання операцій 10–20 нс [11]. Керовані перемикачі можуть змінювати структуру та параметри схеми у момент перетину вхідним сигналом перемикача певного рівня. Отже, можна виконувати перемикання полярності аналогових сигналів за допомогою комплементарних перемикальних схем або електронних перемикачів, які керуються безпосередньо логічними інтегральними схемами [5]. Керовані перемикачі можуть реалізовуватись на основі мікросхем ADG704, ADD732 [12]. За реальними схемами вищеперелічених базових схемних елементів можна обробляти сигнали реального часу з похибкою, яка не перевищує 1 % у динамічному діапазоні зміни вхідних сигналів $\pm 10V$ та смузі робочих частот до мегагерців та вище [5, 11–16].

Дискретні схеми, які відрізняються високою точністю, надійністю функціонування та стабільністю характеристик, широко застосовують при обробці сигналів. Нехай необхідно побудувати математичну модель у вигляді інтегро-диференційного рівняння, потім знайти відповідне дискретне рівняння, а відтак створити структурно-функціональну схему цифрового пристрою, що виконує задане перетворення “вхід–вихід” з необхідною точністю. На першому етапі розв'язання поставленої задачі відтворимо сімейство відображень “вхід–вихід” у вигляді єдиного для множин вхідних та вихідних сигналів опису у формі математичної моделі (1). На другому етапі перейдемо від інтегро-диференційного до відповідного дискретного рівняння. Структурно-функціональну схему пристрою за відомим дискретним рівнянням, яку необхідно виконати на третьому етапі розв'язання задачі, побудуємо на основі блоків цифрових диференціаторів, інтеграторів, суматорів, перемножувачів, подільників, функціональних перетворювачів та керованих перемикачів. Структурно-функціональну схему цифрового пристрою реалізуватимемо за допомогою АЦП та логічних інтегральних схем окремих функціональних блоків. Зазначимо, що сучасні технології дають змогу отримувати тривалості середніх затримок таких інтегральних схем, що не перевищують 5 нс [17].

Проектування прецизійних диференціаторів гармонічних сигналів. У напівпровідниковій схемотехніці часто необхідно здійснювати перетворення сигналів, яке має характер диференціювання або інтегрування. Традиційно таке перетворення виконується за допомогою диференціальних або інтегровальних схем. Диференціальні схеми точніше формують вихідні сигнали на високих частотах вхідних сигналів, а інтегровальні – навпаки, точніше функціонують на низьких частотах. Чим більшою (меншою) є постійна часу, тим ближчим є реальний вихідний сигнал інтегровальної (диференціальної) схеми до ідеального [18, 19]. Побудуємо структурно-функціональні схеми, призначені для диференціювання гармонічних сигналів, на основі інтеграторів, а для інтегрування – на базі диференціаторів. Для цього визначимо алгоритми перетворювачів гармонічних сигналів, на виході яких отримуються похідні та інтеграли від вхідних сигналів. Структурно-функціональні схеми отримуватимемо в аналоговій та дискретній елементних базах на основі побудови математичних моделей у вигляді рівнянь, що містять дії $x(t)$, їхні похідні й інтеграли та реакції $y(t)$, а також у вигляді відповідних дискретних рівнянь. Аналогові моделі визначатимемо чисельними методами за вхідними та вихідними сигналами. Дискретні моделі отримаємо, перейшовши шляхом дискретизації від аналогових до дискретних рівнянь.

Сконструємо структурно-функціональні схеми диференціатора, який перетворює множину вхідних дій $x(t)=A\sin\omega t$ на множину відповідних вихідних реакцій $y(t)=KA\omega\cos\omega t$, де $K=0.5$ з максимальною відносною та середньоквадратичною похибками, які не перевищують значень $\varepsilon=6.680\cdot 10^{-2}$ та $\delta=6.136\cdot 10^{-3}$ відповідно. Для розв'язання поставленої задачі задамо значення A , ω , t , де $A\in[1.0;3.0]$, $\omega\in[0.1;5.0]$, $t\in[0;2\pi/\omega]$, дискретно з кроком 1.0 , 5.0 , $0.2\pi/\omega$ відповідно. Математичну модель диференціатора визначимо шляхом знаходження коефіцієнтів полінома:

$$\left\{ \sum_{k_1=0}^1 \sum_{k_2=0}^3 \sum_{k_3=0}^2 \sum_{k_4=0}^1 \sum_{k_5=0}^1 C_{k_1\dots k_5} [x(t)]^{k_1} \left[\int x(t) dt \right]^{k_2} \left[\iint x(t) dt^2 \right]^{k_3} \left[\iiint x(t) dt^3 \right]^{k_4} [y(t)]^{k_5} \right\}^2 \rightarrow \min_c,$$

де $C_{03000} = 1$. У результаті розв'язання задачі апроксимації за допомогою методу найменших квадратів отримуємо модель диференціатора у вигляді такого рівняння:

$$2 \int x(t) dt \iiint x(t) dt^3 y(t) - 2 \left[\iint x(t) dt^2 \right] y(t) + x(t) \int x(t) dt \iint x(t) dt^2 - \left[\int x(t) dt \right]^3 = 0.$$

В явній формі отримана модель має вигляд наступної дробово-раціональної функції:

$$y(t) = - \int x(t) dt \frac{\left[\int x(t) dt \right]^2 - x(t) \iint x(t) dt^2}{2 \left[\iint x(t) dt^2 \right]^2 - 2 \int x(t) dt \iiint x(t) dt^3},$$

де $x(t) = 0$, $\int x(t) dt = -\frac{KA}{\omega}$, $\iint x(t) dt^2 = 0$, $\iiint x(t) dt^3 = \frac{KA}{\omega^3}$ при $t = 0$. Дискретизація

останнього виразу приводить до отримання дискретної моделі:

$$y(k) = \frac{Ix(k) \left\{ [Ix(k)]^2 - x(k) I^2 x(k) \right\}}{2 [I^2 x(k)]^2 - 2 Ix(k) I^3 x(k)},$$

де дискретні інтеграли можуть бути сформовані у вигляді:

$$Ix(k+1) = Ix(1) + \sum_{i=1}^k \frac{x(i) + x(i+1)}{2}; \quad I^2 x(k+1) = I^2 x(1) + \sum_{i=1}^k \frac{Ix(i) + Ix(i+1)}{2}; \quad I^3 x(k+1) = I^3 x(1) + \sum_{i=1}^k \frac{Ix(i) + Ix(i+1)}{2}; \quad k = 1, 2, \dots, N-1; \quad Ix(1) = -\frac{KA}{\omega \Delta t}; \quad I^2 x(1) = 0; \quad I^3 x(1) = \frac{KA}{\omega^2 \Delta t};$$

Δt – крок дискретизації по часу. Отримана аналогова модель диференціатора є точною для $0 < A < \infty, 0 < \omega < \infty, 0 \leq t < \infty$. Похибки дискретної моделі для кроку $h=0.02\pi/\omega$ не перевищують заданих ε та δ .

Функціональні схеми аналогового та цифрового диференціаторів конструюються на базі інтеграторів, суматорів, помножувачів, подільників та ланок затримки за часом. При цьому постійні інтегрування інтеграторів у ввімкненому стані можна приводити до нуля, тобто в аналоговій схемі диференціатора можна передбачити відфільтрування постійних складових на виході інтеграторів [7, 20]. Такі схеми наведені на рис. 1 та 2 відповідно, де ЦІ – цифровий інтегратор.

Для коректного функціонування аналогового диференціатора з рис. 1 на виході інтеграторів необхідно передбачити наявність відповідних початкових значень першого, подвійного та потрійного інтегралів від сигналів $x(t)$. Своєю чергою, для коректного функціонування дискретного диференціатора з рис. 2 необхідна наявність початкових значень дискрет першого, подвійного та потрійного інтегралів від $x(t)$. Для цього треба знати значення амплітуди та частоти A та ω . Розв'язання задачі визначення A та ω може бути зведено до формування цільового функціоналу та його мінімізації [4].

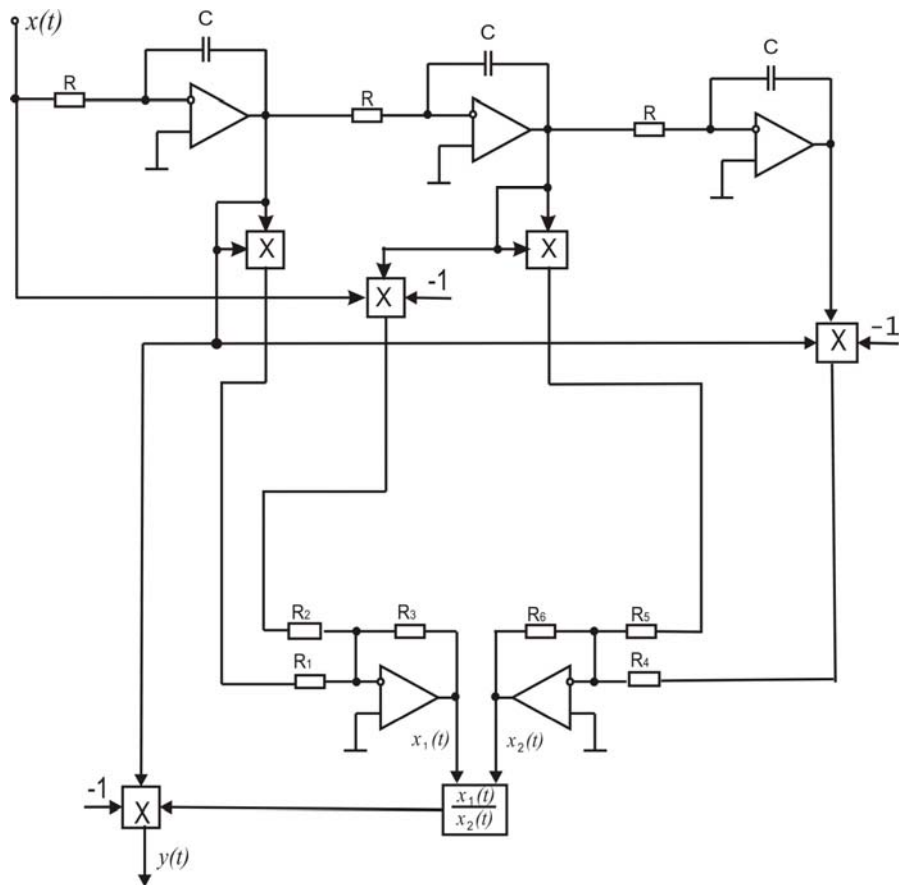


Рис. 1. Структурно-функціональна схема аналогового диференціатора гармонічних сигналів

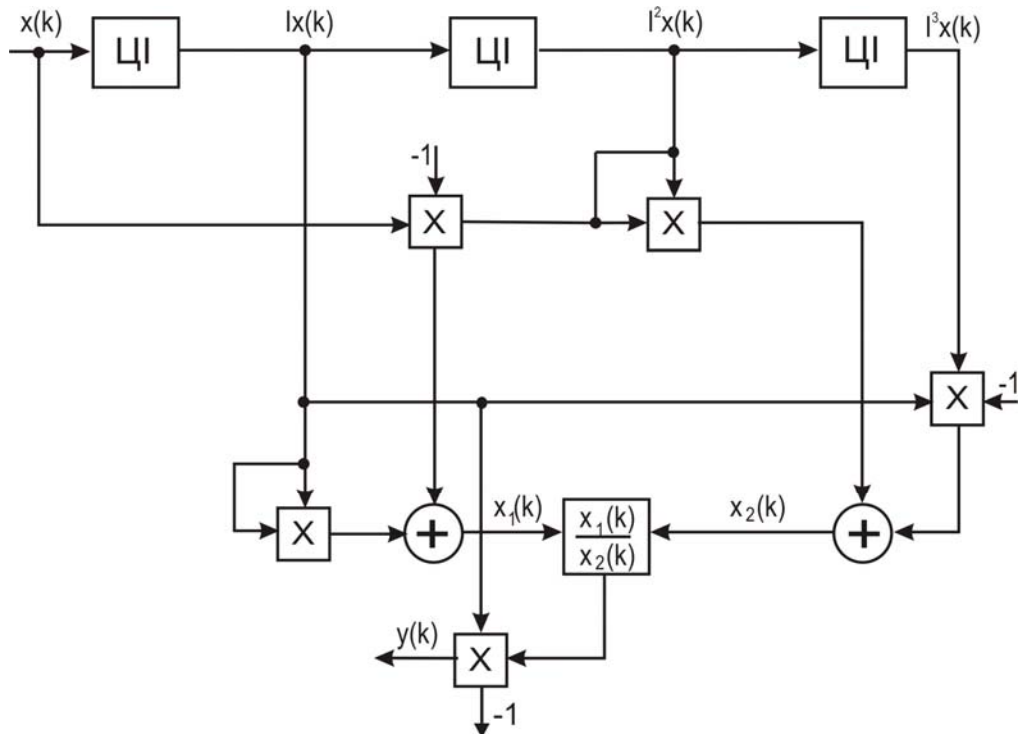


Рис. 2. Структурно-функціональна схема цифрового диференціатора гармонічних сигналів

Проектування прецизійних інтеграторів гармонічних сигналів. Сконструємо структурно-функціональні схеми інтегратора, який повинен перетворювати задану вище множину вхідних дій

$x(t)$ у множині відповідних вихідних реакцій $y(t) = -KA/\omega \cos \omega t$, де $K=1.5$ з похибками, не більшими від $\varepsilon=1.771 \cdot 10^{-2}$ та $\delta=1.803 \cdot 10^{-2}$. Задавши дискрети A , ω , t аналогічно вищезаданим, визначимо математичну модель інтегратора шляхом розв'язання задачі апроксимації виду:

$$\left\{ \sum_{k_1=0}^1 \sum_{k_2=0}^3 \sum_{k_3=0}^2 \sum_{k_4=0}^1 \sum_{k_5=0}^1 C_{k_1 \dots k_5} [x(t)]^{k_1} [x'(t)]^{k_2} [x''(t)]^{k_3} [x'''(t)]^{k_4} [y(t)]^{k_5} \right\}^2 \rightarrow \min_C,$$

де $C_{03000} = 1$. В результаті отримується модель інтегратора у вигляді наступного рівняння:

$$0.667x'(t)x'''(t)y(t) - 0.667[x''(t)]^2 y(t) + x(t)x'(t)x''(t) - [x'(t)]^3 = 0.$$

Отримане рівняння в явній формі:

$$y(t) = -x'(t) \frac{[x'(t)]^2 - x(t)x''(t)}{0.667[x''(t)]^2 - 0.667x'(t)x'''(t)}.$$

Дискретизувавши останнє рівняння, отримаємо різницеве рівняння:

$$y(k) = \nabla x(k) \frac{x(k)\nabla^2 x(k) - [\nabla x(k)]^2}{0.667[\nabla^2 x(k)]^2 - 0.667\nabla x(k)\nabla^3 x(k)},$$

де

$$\nabla x(k) = \frac{x(k+1) - x(k-1)}{2}, \quad \nabla^2 x(k) = x(k+1) - 2x(k) + x(k-1),$$

$$\nabla^3 x(k) = \frac{x(k+2) - 2x(k+1) + 2x(k-1) - x(k-2)}{2}$$

– скінченні різниці першого, другого та третього порядку відповідно. Отримана аналогова модель інтегратора є точною для $0 < A < \infty, 0 < \omega < \infty, 0 \leq t < \infty$. Похибки знайденої дискретної моделі для кроку $h=0.02\pi/\omega$ не перевищують заданих ε та δ .

Відповідні структурно-функціональні схеми аналогового та цифрового інтеграторів конструюються на основі диференціаторів, суматорів, помножувачів, подільників та ланок затримки (зсуву) за часом. Такі схеми наведені на рис. 3 та 4, де символом T позначено ланку затримки на період $h = t_k - t_{k-1}$.

Отримані структурно-функціональні схеми дають можливість виконувати диференціювання гармонічних сигналів за допомогою інтеграторів на низьких частотах, а інтегрування – на базі диференціаторів на високих частотах. Дискретна схема диференціатора на інтеграторах може мати перевагу порівняно з дискретним диференціатором за наявності шумів для їх згладжування. Дискретна схема інтегратора на диференціаторах може давати можливість уникати накопичування локальних похибок дискретного інтегратора. Схеми є амплітудо- та частотонезалежними у широких межах зміни параметрів a та ω вхідних сигналів $x(t)$, тобто не потребують перенастроювання своїх параметрів. Треба зазначити, що отримані дискретні моделі диференціатора та інтегратора є досить складними. Тому, якщо вхідні сигнали $x(t)$ задані з достатньо високою точністю, а вимоги до точності отримання похідних та інтегралів від $x(t)$ не дуже високі, для диференціювання $x(t)$ доцільніше використовувати простіші різницевої схеми.

За необхідності використання отриманих схем для обробки сигналів з частотами $\omega \ll 1$ або $\omega \gg 1$ для обмеження динамічного діапазону зміни вихідних сигналів інтеграторів та диференціаторів, зумовленого складовими з множниками $\frac{1}{\omega}$ інтеграторів та складовими з множниками ω

диференціаторів, можна застосовувати нормування (масштабування) амплітуди вихідних сигналів інтеграторів та диференціаторів у необхідних межах діапазону $[0, A_{\max}]$ при відомій смузі частот $[0, \omega_{\max}]$. Це може бути здійснено, наприклад, шляхом зміни значень R, C інтеграторів та диференціаторів або за допомогою нормуючих підсилювачів, які виконують операцію пропорційного підсилення або послаблення аналогових сигналів і виконуються на основі інтегральних операційних підсилювачів

[5]. Такі засоби дають змогу зменшувати розмір динамічного діапазону вихідних сигналів проміжних вузлів схем. Крім цього, для уникнення появи занадто малих або великих значень амплітуд сигналів на виходах аналогових інтеграторів та диференціаторів можна застосовувати відповідні дискретні схеми.

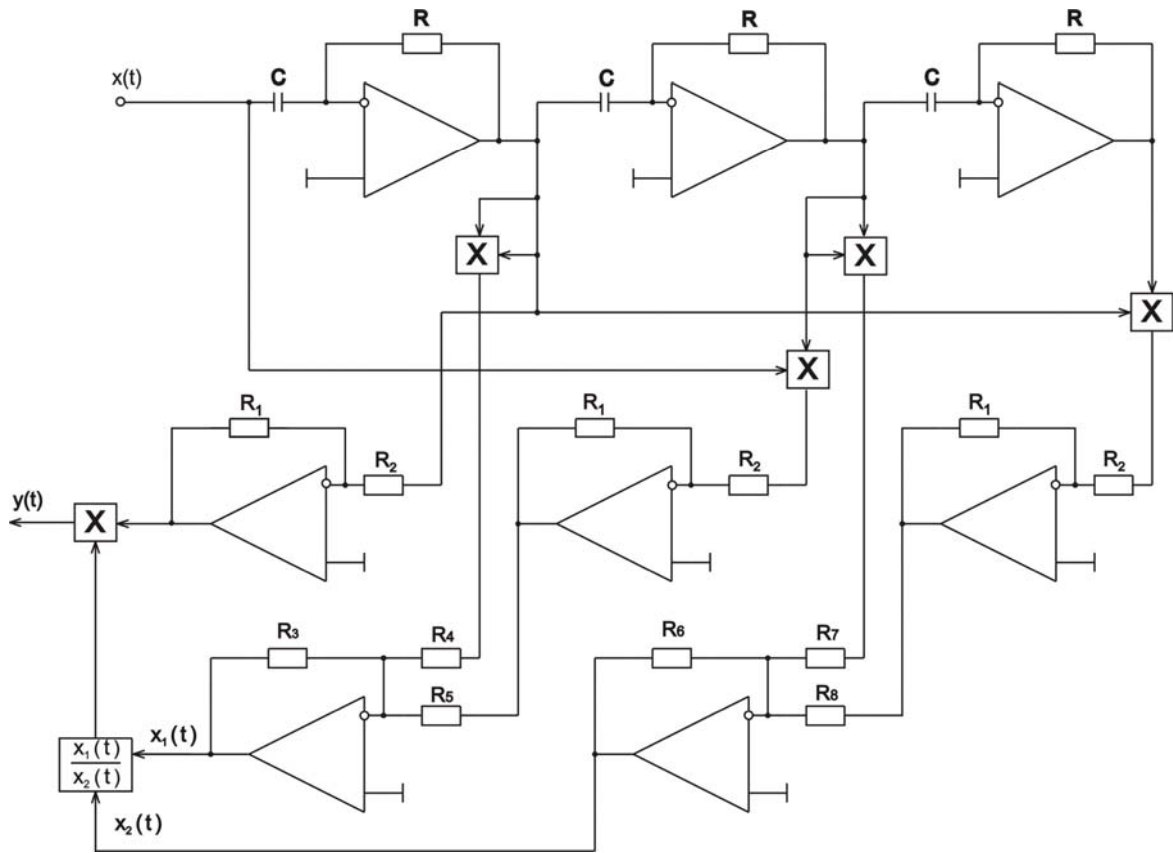


Рис. 3. Структурно-функціональна схема аналогового інтегратора гармонічних сигналів

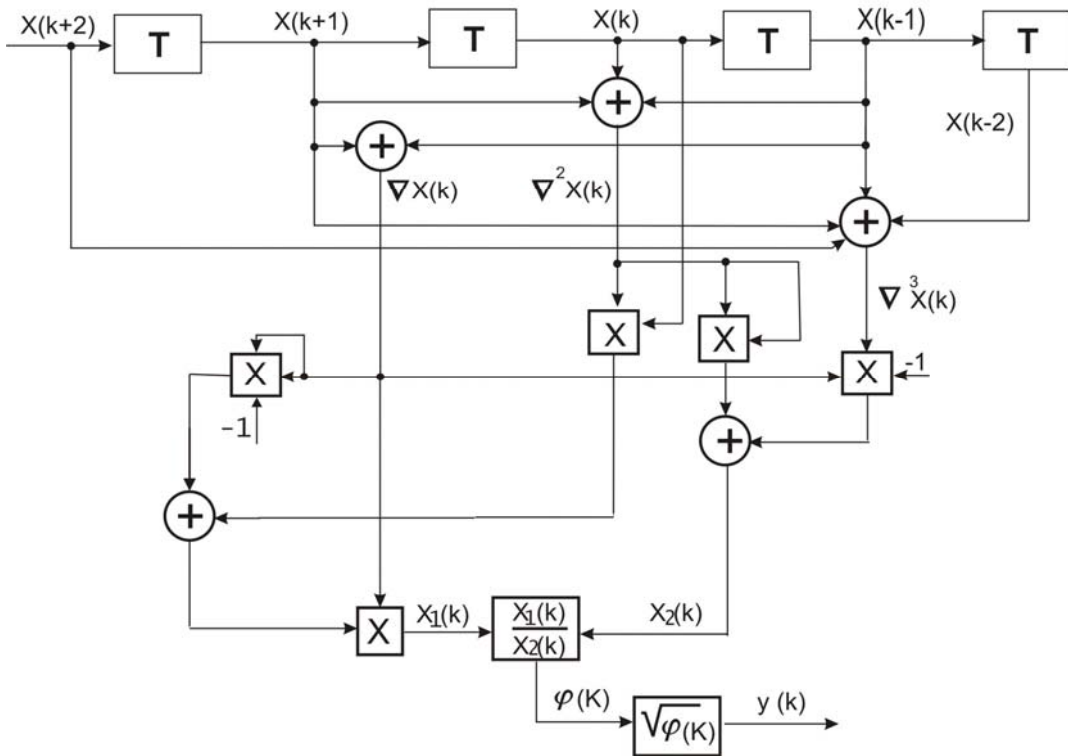


Рис. 4. Структурно-функціональна схема цифрового інтегратора гармонічних сигналів

Висновки. Отримані аналогові та дискретні структурно-функціональні схеми прецизійних диференціаторів та інтеграторів гармонічних сигналів призначені для функціонування у широких межах зміни амплітуд та частот вхідних сигналів без зміни параметрів схем. Амплітуда вихідних сигналів та фазовий зсув між вхідними й вихідними сигналами таких схем не залежать від частоти, перетворення сигналів виконується лінійно, без спотворень амплітуди і частоти, тобто схеми не породжують гармонік. Отримані схеми не потребують додаткового фільтрування вихідних сигналів і дають змогу відносно просто виконувати перетворення сигналів.

1. Тимощук П.В., Столярчук Р.Р. Математичне макромодельовання нелінійних систем інтегро-диференціальними та відповідними дискретними рівняннями // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2002. – Т. 45, № 3. – С. 62–68. 2. Заде Л., Дезоер Ч. Теория линейных систем / Пер. с англ. – М., 1979. 3. Ланнэ А.А. Синтез нелинейных систем. Нерекурсивные системы, детерминированный случай // Электронное моделирование. – 1980. – № 1. – С. 60–68. 4. Cichocki A. and Unbehauen R. *Neural Networks for Optimization and Signal Processing*, John Wiley and Sons, 1993. 5. Справочник по нелинейным схемам. Проектирование устройств на базе аналоговых функциональных модулей и интегральных схем / Под ред. Д. Шейнгольда. – М.: Мир, 1977. – 528 с. 6. Гутников В.С. Интегральная электроника в измерительных устройствах. – Л.: Энергоатомиздат, 1988. – 304 с. 7. Титце У., Шенк К. Полупроводниковая схемотехника: Справочное руководство. – М.: Мир, 1982. – 512 с. 8. Хоровиц П., Хилл У. Искусство схемотехники. Т. 1. – М.: Мир, 1986. – 598 с. 9. Алексенко А.Г., Коломбет Е.А., Стародуб Г.М. Применение прецизионных аналоговых микросхем. – М.: Радио и связь, 1985. – 256 с. 10. Тимонтеев В.Н., Величко Л.М., Ткаченко В.А. Аналоговые перемножители сигналов в радиоэлектронной аппаратуре. – М.: Радио и связь, 1982. – 112 с. 11. Мичуда З.Р. Логарифмічні аналого-цифрові перетворювачі – АЦП майбутнього. – Львів: Простір, 2002. – 242 с. 12. Connolly J.A. *Analog Integrated Circuits. Devices, Circuits, Systems, and Applications*, John Wiley and Sons, 1977. 13. Аналоговые и цифровые интегральные микросхемы. Справочное пособие / Под ред. С.В. Якубовского. – М.: Радио и связь, 1985. – 432 с. 14. Функциональные устройства на микросхемах / Под ред. В.З. Найдерова. – М.: Радио и связь, 1985. – 200 с. 15. Анисимов Б.В., Голубкин В.Н., Петраков С.В. Аналоговые и гибридные ЭВМ. – М.: Высш. шк., 1986. – 288 с. 16. Корн Г., Корн Т. Электронные аналоговые и аналого-цифровые вычислительные машины. – М.: Мир, 1968. – 312 с. 17. Гутников В.С. Интегральная электроника в измерительных устройствах. – Л.: Энергоатомиздат, 1988. – 304 с. 18. Лэм Г. Аналоговые и цифровые фильтры. Расчет и реализация: Пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – 592 с. 19. Гоноровский М.С. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Сов. радио, 1967. – 328 с. 20. Philippow E., Bruckner P. *Anwendung kunstlicher Elemente hoherer Ordnung in selektiven Schaltungen* // 23 IWK. Vortragsreihe Theoretische Elektrotechnik. – TN Ilmenau. – 1978. – S. 21–26.