

Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Львівська політехніка»

На правах рукопису

Лук'янченко Юрій Олександрович



УДК 528.21+528.22

**Застосування супутникових та наземних даних для побудови
моделей гравітаційного поля Землі**

05. 24. 01 Геодезія, фотограмметрія та картографія

Дисертація

на здобуття наукового ступеня

кандидата технічних наук

Науковий керівник:

д. ф.-м. н., професор,

Марченко О. М.

Ідентичність усіх примірників дисертації

ЗАСВІДЧУЮ:

Вчений секретар спеціалізованої

вченої ради



Б. Наляниця

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ	4
ВСТУП.....	6
РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ВІДОМИХ МЕТОДІВ ТА ВИБІР ОСНОВНИХ НАПРЯМІВ ДОСЛІДЖЕННЯ.....	13
1.1. Різні методиками, які використовують при моделюванні гравітаційного поля Землі	13
1.2. Історичний розвиток моделей геопотенціалу	15
1.3. Основні методи обчислення гармонічних коефіцієнтів.....	17
1.4. Висновки та постановка основних задач дослідження	18
РОЗДІЛ 2. НЕОБХІДНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ГРАВІТАЦІЙНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛІ.....	20
2.1. Базові поняття теорії потенціалу	20
2.2. Супутникова градієнтометрія, місія GOCE.....	23
2.2.1. <i>Основні координатні системи місії GOCE.....</i>	<i>30</i>
2.2.2. <i>Кватерніони, як зв'язок між системами координат та класичний зв'язок між системами координат</i>	<i>33</i>
2.3. Основні поверхні та різниці нормальної та реальної сили тяжіння на них	40
2.4. Редукування супутникових гравітаційних градієнтів на сферичну поверхню	43
2.5. Методи фільтрації даних	45
2.6. Застосування методу найменших квадратів при побудові гравітаційного поля Землі	48
2.7. Процедура «видалення-відновлення»	51
2.8. Спектральна щільність, як характеристика гравітаційних моделей.....	52
2.9. Побудова наближеного квазігеоїда.....	54

2.10. Висновки та узагальнення.....	55
-------------------------------------	----

РОЗДІЛ 3. ОПТИМІЗАЦІЯ АЛГОРИТМУ ВИЗНАЧЕННЯ

ГАРМОНІЧНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ	57
---------------------------------------	-----------

3.1. Вибір параметрів редукції гравітаційних градієнтів на сферу.....	58
-----------------------------------------------------------------------	----

3.2. Антиподно-рівномірна сітка розташування вхідних даних	58
------------------------------------------------------------------	----

3.3. Створення 8 антиподних частин.....	66
-----------------------------------------	----

3.4. Складання та розв'язання нормальних рівнянь	70
--------------------------------------------------------	----

3.5. Висновки та узагальнення.....	80
------------------------------------	----

РОЗДІЛ 4. ПОБУДОВА КОМБІНОВАНОЇ МОДЕЛІ ГРАВІТАЦІЙНОГО

ПОЛЯ	82
-------------------	-----------

4.1. Підготовка вхідних даних	82
-------------------------------------	----

4.2. Редукування гравітаційних градієнтів на сферу	83
----------------------------------------------------------	----

4.3. Видалення апріорної моделі	84
---------------------------------------	----

4.4. Фільтрація даних	90
-----------------------------	----

4.5. Визначення гармонічних коефіцієнтів та їх відновлення.....	91
-----------------------------------------------------------------	----

4.6. Вилучення отриманої моделі з даних аномалій сили тяжіння	93
---------------------------------------------------------------------	----

4.7. Визначення остаточних гармонічних коефіцієнтів	94
-----------------------------------------------------------	----

4.8. Побудова наближеного квазігеоїда та його порівняння з даними GNSS- нівелювання	95
----------------------------------------------------------------------------------------------	----

4.9. Висновки та узагальнення.....	96
------------------------------------	----

ВИСНОВКИ	98
-----------------------	-----------

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	101
-----------------------------------------	------------

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

V – гравітаційний потенціал.

W – потенціал сили тяжіння.

U – нормальний потенціал.

T – збурюючий потенціал.

Φ – потенціал відцентрової сили.

g – сила тяжіння.

γ – нормальна сила тяжіння.

$\Delta g^{кл}$ – аномалія сили тяжіння в класичному розумінні (змішана аномалія).

Δg – аномалія сили тяжіння в сучасному розумінні або в сенсі Молоденського.

δg – збурення сили тяжіння (чиста аномалія).

ζ – аномалія висоти (висота квазігеоїда).

N – висота геоїда.

W_{zz} – вертикальний градієнт сили тяжіння.

V_{zz} – вертикальний гравітаційний градієнт.

λ – сферична довгота.

φ – сферична широта.

r – геоцентричний радіус-вектор.

GM – геоцентрична гравітаційна стала.

$\bar{C}_{nm}^*, \bar{S}_{nm}^*$ – повністю нормовані гармонічні коефіцієнти розкладу нормального потенціалу в ряд за сферичними функціями.

C_{nm}, S_{nm} – гармонічні коефіцієнти.

$\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$ – повністю нормовані гармонічні коефіцієнти.

$P_{nm}(\cos \theta)$ – приєднані функції Лежандра.

$\bar{P}_{nm}(\cos \theta)$ – повністю нормовані приєднані функції Лежандра.

∇^2 – оператор Лапласа.

Γ_{ij} – вимір виконаний електростатичним градієнтометром.

GPS – Global Positioning System (Глобальна система визначення положення).

GNSS – Global Navigation Satellite System (Глобальна навігаційна супутникова система).

GOCE – Gravity field and steady state Ocean Circulation Explorer (Дослідник гравітаційного поля та океанічних течій).

GRF – Gradiometer Reference Frame (Референцна система координат градієнтометра).

ARF – Accelerometer Reference Frame (Референцна система координат акселерометра).

LNOF – Local North Oriented Frame (Локальна орієнтована на північ система координат).

LORF – Local Orbital Reference Frame (Локальна орбітальна референцна система координат).

IRF – Inertial Reference Frame (Інерціальна референцна система координат).

EFRF – Earth Fixed Reference Frame (Фіксована із Землею референцна система координат).

FFT – Fast Fourier Transform (Швидке перетворення Фур'є).

SST – Satellite – Satellite Tracking (Спостереження супутник-супутник).

EGG – Electrostatic Gravitational Gradiometer (Електростатичний гравітаційний градієнтометр).

ВСТУП

Основною задачею геодезії є визначення фігури та гравітаційного поля Землі та їх варіацій з часом. В даній роботі фігура Землі розглядається як головна еквіпотенціальна поверхня або геоїд. Хоча, під словом «фігура» також може розумітись і фізична форма Землі або фігура гідростатичної рівноваги [91]. Як відомо, гравітаційне поле характеризується дискретним набором певних його трансформант, таких як відхилення виска, аномалія сили тяжіння і т.п. Знаючи таке поле, ми вже зможемо побудувати еквіпотенціальну поверхню і водночас, знаючи цю поверхню, зможемо побудувати поле [31] (у двовимірному випадку). Ці дві задачі взаємно доповнюють одна одну. Так, наприклад, визначаючи висоту поверхні океану за допомогою альтиметричних місій [13] ми визначаємо фігуру Землі з певним рівнем точності, а потім вже моделюємо гравітаційне поле Землі, наприклад, за допомогою сферичних гармонік [20, 21, 84, 57]. Але в той же час можна вимірювати прискорення вільного падіння (силу тяжіння) або так звані градієнти сили тяжіння [59], що є ні чим іншим, як інформацією про силу, яка виникає внаслідок дії гравітаційного поля Землі. І вже за цими вимірами можна будувати еквіпотенціальну поверхню, наприклад, геоїд. Існує декілька підходів для моделювання гравітаційного поля, але у даній роботі буде розглянуто лише метод моделювання гравітаційного поля способом його розкладу в ряд за сферичними гармоніками [7, 18, 20, 91].

$$V = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{N_{\max}} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos(m\lambda) + \bar{S}_{nm} \sin(m\lambda)) \bar{P}_{nm}(\cos\theta).$$

Знання такої поверхні дає можливість вирішувати ряд задач, таких як визначення поверхні Світового океану, перехід від геодезичних до нормальних висот, та багато ін. Кожна з таких задач потребує знання функції V гравітаційного потенціалу з різним рівнем точності. Тому постійно актуальна задача покращення точності (та роздільної здатності) даної функції. Оскільки

чим краще ми знаємо еквіпотенціальну поверхню, тим більше нам відкривається шляхів до вирішення питань, які раніше навіть могли і не виникати, так наприклад, питання відхилення поверхні моря від еквіпотенціальної поверхні набуло реальної ваги лише після запуску ряду супутникових альтиметричних місій [13], які надали нову точнішу інформацію про поверхню Світового океану. Такі відхилення можуть коливатися в районі 2-3 метрів [93].

Протягом останніх десятиліть було побудовано велику кількість моделей гравітаційного поля Землі [15, 16, 25, 41, 65, 76], які з кожним роком ставали все точнішими. Так у 2009 році було реалізовано місію GOCE [35, 37, 102], яка зробила реальністю вимірювання гравітаційних градієнтів на висоті близько 250 км. Протягом 2009-2013 рр. було накопичено масиви даних з різними типами інформації про нашу планету. Одним з них є набір гравітаційних градієнтів [12, 34, 35, 58, 59]. Після отримання реальних вимірів постало питання перевірки їх якості, і чи зможуть вони покращити вже існуючу інформацію про гравітаційне поле Землі. Зазначимо, що апріорна точність задекларована Europe Space Agency (ESA, Європейська Космічна Агенція) у визначенні аномалій сили тяжіння та висот геоїда для довгих та середніх хвиль становила 1 мгал та 1 см відповідно [35].

Ще однією проблемою є кількість даних, оскільки більшість методів визначення гармонічних коефіцієнтів базувались на наземних даних, яких було відносно небагато, порівняно із супутниковими. У зв'язку з тим, що виміри градієнтометра на супутнику GOCE [5, 8, 10, 17, 29, 50, 52, 58, 59] проводились кожної секунди протягом 2009-2013 рр., то не важко обчислити, що їхня кількість становить близько 100 млн. Опрацювання такої кількості даних потребує великих затрат технічних ресурсів, наприклад, таких як обчислювальні кластери. Тому в роботі поставлена задача ефективного використання супутникових та наземних даних для отримання комбінованого розв'язку. Також в роботі буде розглядатись оптимізація способу побудови моделі гравітаційного поля.

Актуальність теми: новим кроком у розвитку супутникових технологій стала місія GOCE. Тут вперше було реалізовано метод супутникової градієнтометрії (2009 рік), тобто було отримано тип інформації для побудови гравітаційних моделей, який до цього часу лише обчислювався. Цей тип інформації – супутникові гравітаційні градієнти. Такі дані мали б покращити гармоніки у середніх та довгих хвилях потенціалу сили тяжіння.

Провідними структурами в даних питаннях вважаються: ICGEM (International Centre for Global Earth Models) Міжнародний Центр Глобальних Моделей, який є однією з гілок IAG (International Association of Geodesy) Міжнародна Асоціація Геодезії), також, він є провідною структурою при моделюванні глобального гравітаційного поля Землі; GFZ (GeoForschungsZentrum), що займається безліччю питань зв'язаних з геодинамікою, гравітаційним полем та іншим; NOAA (National Oceanic and Atmospheric Administration) одна з основних служб Сполучених Штатів Америки, одним з основних завдань якої є моніторинг поверхні Світового океану, що дуже тісно пов'язано з гравітаційним полем Землі; ESA (European Space Agency) Європейська Космічна Агенція, одна з провідних світових структур в галузі космічних технологій, якій безпосередньо належить реалізація місії GOCE.

Другим важливим аспектом актуальності роботи є те, що ці дані дуже щільно розташовані у часі та просторі, порівняно з наземними типами даних. Так за 3 роки було накопичено близько 100 мільйонів точок з даними. Виникає проблема їх ефективного сумісного опрацювання. У роботі наведено алгоритм для визначення гармонічних коефіцієнтів, який вносить певні модифікації, що порівняно із класичними методами надає йому певні переваги, а саме: зменшується час обчислень та зменшуються необхідні комп'ютерні потужності. Це стає актуально, оскільки кількість інформації весь час зростає, що веде за собою збільшення затрат часу та комп'ютерних ресурсів для її опрацювання.

Основними експертами у питаннях побудови моделей гравітаційного поля вважаються: C. C. Tscherning, J. Bouman, P. Visser, R. Koop, O. L. Colombo, P. Ditmar, A. Eicker, T. Gruber, C. Jekeli, R. Pail, R. Rummel, F. Barthelmes, S.

Bruinsma, J. Brockmann, C. Forste, Th. Grombein, H. Moritz, J. Muller, R. Rapp, P. Schwintzer, N. Sneeuw, П. Зазуляк, О. Марченко. В Україні на сьогоднішній день питання моделювання глобального гравітаційного поля Землі є на стадії розвитку. Провідною структурою в даній сфері в Україні можна відзначити лабораторію ГНДЛ-97 Національного Університету «Львівська політехніка».

Таким чином, для побудови моделі використовуються дані супутникової градієнтометрії та інформація про аномалії сили тяжіння у вільному повітрі. Це дає змогу говорити про комбінований розв'язок, який базується на різнотипній інформації і втілений у побудові глобальної комбінованої гравітаційної моделі Землі. На сучасному етапі вже є досить багато типів вхідної інформації, яка використовується для визначення гармонічних коефіцієнтів. До цих типів даних належать: аномалії у вільному повітрі визначені на Земній поверхні, супутникова градієнтометрія та альтиметрія, морська гравіметрія та ін., всі вони так чи інакше характеризують гравітаційне поле. Але найдостовірніший розв'язок може дати лише комбінація цих даних. Одна з версій такої комбінації представлена в даній роботі.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами: розробки автора використовувались в рамках науково-дослідної роботи Національного університету «Львівська політехніка»: «Комплексна геодинамічна модель гравітаційного поля і деформацій земної кори регіону Чорного моря за супутниковими даними», («Геоїд»), (заклучний), номер держреєстрації 0111U001213.

Мета і задачі дослідження: дана робота націлена на вдосконалення існуючих методів побудови моделей гравітаційного поля Землі та сумісне використання різнотипної інформації. За останнє десятиліття дуже сильного розвитку набули супутникові місії (і не тільки Земні). До них можна віднести велику кількість альтиметричних супутників, супутники класу LEO (Low Earth Orbit) (особливо місія GOCE), загальноземні навігаційні супутникові системи та безліч космічних місій, які запуснені з метою вивчення гравітаційних полів інших космічних об'єктів. Всі ці проекти поєднує одна властивість, а саме - велика кількість даних, які отримуються в результаті їх функціонування. Саме з

цієї причини основною задачею роботи є розробка алгоритму, який дозволить ефективніше використовувати наявні масиви різнорідних даних для побудови моделей гравітаційного поля Землі. Основний акцент поставлено на побудові комбінованого розв'язку та розробці регулярної сітки, яка б дозволила значно спростити обчислення нормальних рівнянь та їх розв'язання. Для досягнення ефективного результату в роботі використовуються дані супутникової градієнтометрії та набір аномалій сили тяжіння, що дають змогу отримати комбінований розв'язок. Отже, в роботі поставлено такі основні задачі:

- Удосконалення методів оптимального використання первинних даних супутникової градієнтометрії (редукування даних, усунення шуму методами фільтрації, приведення даних на регулярну сітку).
- Розроблення алгоритму швидкого обчислення гармонічних коефіцієнтів при використанні великої кількості даних.
- Побудова комбінованої моделі гравітаційного поля Землі.

Об'єкт дослідження: гравітаційне поле Землі.

Предмет дослідження: моделювання гравітаційного поля Землі.

Методи дослідження: у роботі використовувались методи інтерполяції та усереднення для формування масиву вхідної інформації, методи фільтрації цифрових сигналів для стабілізації отриманого розв'язку, методи матричної алгебри для виконання основних обчислень, методи картографічного проектування для ефективно представлення даних. Усі обчислення велись із застосуванням методів програмування (Fortran, Delphi) на персональному комп'ютері.

Наукова новизна одержаних результатів: оскільки, кожна модель будується в залежності від вхідних даних, то від цього залежить і спосіб її побудови і максимальна точність та роздільна здатність, з якою вона зможе відобразити гравітаційне поле. Для побудови комбінованої моделі використовуються новітні дані супутникової градієнтометрії, отримані завдяки місії GOCE та сучасний набір аномалій сили тяжіння DTU 10, що дає змогу уточнювати попередні результати у даній галузі. Для опрацювання цих даних пропонується антиподно-рівномірна сітка, яка дає змогу використовувати певні

ортогональні властивості, що в свою чергу дозволяють розбити матрицю нормальних рівнянь на окремі частини, кожна з яких дає змогу незалежно визначити певні набори гармонічних коефіцієнтів певного ступеня, що значно пришвидшує процес обчислень. Цим даний підхід відрізняється від способу декомпозиції Халецького, який переважно застосовується ESA для побудови гравітаційних моделей за даними GOCE. Побудовано комбінований розв'язок для моделі глобального гравітаційного поля Землі з використанням новітніх даних супутникової градієнтометрії та аномалій сили тяжіння.

Практичне значення одержаних результатів: важливим практичним аспектом є те, що модель гравітаційного поля Землі високої роздільної здатності безпосередньо дозволяє отримувати нормальні висоти із GNSS спостережень. Також дана робота спрямована на зменшення часу опрацювання та зменшення необхідних комп'ютерних потужностей під час визначення гармонічних коефіцієнтів на основі великої кількості даних. Це дуже важливо, оскільки максимально якісний розв'язок можна отримати, використовуючи максимальну кількість вхідної інформації. У свою чергу, ця максимальна кількість є обмежена максимальною потужністю комп'ютерних ресурсів. Тому на практиці даний алгоритм дає змогу працювати з великою кількістю даних не використовуючи супер-комп'ютери. В цілому це дало змогу отримати модель LP - 04C з роздільною здатністю до 720 ступеня/порядку. Важливо зазначити, що часто науковці експериментують із алгоритмами, які використовуються при побудові моделі гравітаційного поля і тому доводиться повторювати процес обчислень. У цьому випадку застосування даної методики, має важливе значення, оскільки суттєво скорочує час очікування між різними тестами тих чи інших алгоритмів.

Особистий внесок здобувача: автором розроблено та запрограмовано алгоритм побудови антиподно-рівномірної сітки та її розбиття на 8 частин; спосіб розбиття матриці нормальних рівнянь з використанням ортогональних властивостей, що виникають внаслідок представлення вхідної інформації способом, запропонованим автором; також виконані дослідження по редукуванню гравітаційних градієнтів на сферичну поверхню; запропоновано

принцип комбінації супутникових та наземних даних, який втілюється у комбіновану модель гравітаційного поля Землі, побудовану за цим алгоритмом. Всі обчислення виконувались особисто автором.

Окремо автор висловлює подяку Європейській космічній агенції за можливість використання даних місії GOCE та Данському технічному університету за наданий набір аномалій сили тяжіння.

У роботах, опублікованих у співавторстві, дисертантові належать: [100] – постановка задачі, створення алгоритму та виконання основних обчислень, [101] – виконання основних обчислень та порівняння попередніх результатів з методом регуляризації, [102] - підготовка вхідних даних, [104] – постановка задачі, виконання основних обчислень, формування висновків, [99] – підготовка вхідної інформації та деякі ілюстрації.

Апробація результатів дисертації: матеріали дисертаційних досліджень було представлено на 3 міжнародних конференціях, а саме:

- XVI міжнародний науково-технічний симпозіум «Геоінформаційний моніторинг навколишнього середовища: GNSS і GIS – технології» (Алушта, 12-17 вересня 2011 р).
- XVIII міжнародний науково-технічний симпозіум «Геоінформаційний моніторинг навколишнього середовища: GNSS і GIS – технології » (Алушта, 10 -15 вересня 2013 р).
- V міжнародна наукова конференція «Геофізичні технології прогнозування та моніторингу геологічного середовища» (Львів, 1 - 4 жовтня 2013 р).

Публікації: за результатами дисертаційних досліджень опубліковано 7 наукових праць, 1 стаття у науковому періодичному виданні України, що входить до міжнародної наукометричної бази, 4 статті у фахових виданнях України та 2 у збірниках конференцій.

РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ВІДОМИХ МЕТОДІВ ТА ВИБІР ОСНОВНИХ НАПРЯМІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Різні методики, які використовують при моделюванні гравітаційного поля Землі

Розглянемо таку фігуру Землі, яка є еквіпотенціальною поверхнею, тобто, поверхня у точках якої значення потенціалу є постійним. У такому випадку дану фігуру неможливо представити правильною геометричною поверхнею, хоча на перший погляд, еліпсоїд обертання непогано представляє фігуру Землі. Еквіпотенціальна поверхня набуває досить складного вигляду через нерівномірний розподіл мас в середині Землі, їх постійне переміщення, вплив інших небесних тіл (Місяця, Сонця), особливості земної кори. На сучасному етапі представлення еквіпотенціальної поверхні за допомогою еліпсоїда обертання є настільки неточним, що не дозволяє виконувати основні задачі сучасної геодезії. До таких задач можна віднести: моніторинг поверхні Світового океану, прогнозування орбіт низьких супутників та багато інших.

Протягом останнього століття було розроблено декілька підходів до моделювання відлікової поверхні [4, 7, 14, 18, 20, 21, 43, 69, 84]. Часто вибір одної з таких поверхонь залежить від країни, яка займається даним питанням. Наприклад в Україні, Росії використовують нормальні висоти, в той час, як в США користуються ортометричними висотами. Такі поверхні є досить схожі між собою і відрізняються лише певними теоретичними особливостями при їх визначенні. Але дане питання вже не відноситься до дисертаційних досліджень.

Існує декілька способів побудови такої поверхні. Одним з найшвидших є пряме трансформування гравіметричних вимірів, а саме аномалій сили тяжіння у висоти квазігеоїда із використанням швидкого перетворення Фур'є (FFT) [80]. Іншим підходом щодо моделювання такої поверхні може бути представлення її як певної функції, яка залежить від великої кількості параметрів, більш того, чим краще ми хочемо знати таку поверхню, тим швидше буде зростати кількість параметрів, які її визначають. Такою функцією, наприклад, може бути розклад гравітаційного потенціалу в ряд за сферичними функціями [7, 18, 92], де такими параметрами виступають гармонічні коефіцієнти. Також таку

функцію можна представити в рамках мультипольного аналізу, який є менш популярним. У даній дисертації розглядається побудова еквіпотенціальної поверхні за допомогою гармонічних коефіцієнтів, тобто розкладу потенціалу в ряд за сферичними функціями [7, 18, 20, 21, 84]. Обрано саме цей підхід, оскільки він дає змогу моделювати гравітаційне поле у всьому зовнішньому просторі [82], а не як певну рівневу поверхню. Також на сучасному етапі цей спосіб моделювання гравітаційного поля Землі є найпопулярнішим з точки зору практики.

Крім цього існує три тенденції щодо представлення вимірів, які часто використовуються на сьогоднішній день при побудові супутникових моделей гравітаційного поля. Отже, до них належать : «Space-wise approach» [54, 55, 71], «Time-wise approach», «Direct approach» [70]. Перший підхід «Space-wise approach», в якому виміри розглядаються в просторовій області, тобто представляються функціями, аргументами якої є широта, довгота та сталий геоцентричний радіус-вектор (у випадку сферичних координат). Характерною ознакою тут є сталий радіус-вектор, що говорить про розташування всіх вимірів на певній сферичній поверхні. Другий підхід «Time-wise approach» принципово відрізняється від попереднього, оскільки тут виміри вже розглядаються у вигляді часових серій, що призводить до зовсім іншого принципу параметризації такої функції. І, на кінець, третій підхід «Direct approach» базується на тих самих засадах, що й перший «Space-wise approach», але виміри розглядаються, як функція широти, довготи, та радіус-вектора, а дані вже розташовуються безпосередньо у місці їх вимірювання, тобто не лежать на певній сфері, а знаходяться у просторі. З метою оптимізації процесу обрано перший підхід, де буде поставлено задачу редукції вимірів на сферичну поверхню (розділ 2.4) з подальшим використанням ортогональних властивостей (3.14, 3.15), які можна буде використати внаслідок розташування даних на антиподно-рівномірній сітці (розділ 3.3).

Варто зазначити, що галузь науки, що займається моделюванням гравітаційного поля Землі ділиться на декілька частин. Таким чином розрізняють такі поняття як моделювання глобального гравітаційного поля та

моделювання регіонального або навіть локального гравітаційного поля. Більш того, така модель, в силу постійної динаміки нашої планети та навколишнього світу, складається з двох частин: перша, що не залежить від часу та друга, яка залежить від часу. Чинники, які суттєво впливають на зміни гравітаційного поля Землі, зазвичай потребують досить великого проміжку часу, тобто складова частина, яка залежить від часу, на коротких проміжках часу майже не відчувається і тому використовується лише при високоточних обчисленнях. Отже, такі часові зміни в основному виникають внаслідок зміни параметрів обертання планети і впливають здебільшого на загальний тренд гравітаційного поля. Саме тому для моделі EIGEN-6C2, яка використовується міжнародним центром глобальних моделей (ICGEM [41]) для порівняння, надано часові варіації лише для коефіцієнтів до 50 порядку/ступеня. Сучасна теорія прецесії і нутації [56] може досить не погано прогнозувати такі зміни. Отже, основний внесок в моделі гравітаційного поля Землі формує частина незалежна від часу, так зване статичне гравітаційне поле [43]. Основною задачею тут є відображення зміни гравітаційного поля на досить невеликих відстанях (десятки кілометрів). Такі варіації в основному залежать вже тільки від зовнішньої структури нашої планети, гірських масивів, океанічних хребтів та впадин, густини породи та ін. Саме з цих причин в роботі розглядається моделювання глобального гравітаційного поля, а саме його статичної частини [43].

1.2. Історичний розвиток моделей геопотенціалу

Першим вагомим кроком у розвитку глобальних моделей гравітаційного поля можна вважати момент запуску першого штучного супутника Землі у 1957 році. В подальшому було запуснено ряд супутників, які дали змогу отримувати лазерні спостереження їх орбіт, що дозволяло робити певні висновки про гравітаційне поле Землі. У даному випадку гравіметричні наземні виміри не беруться до уваги, оскільки вони виконувались на суходолі і могли давати представлення лише про регіональне гравітаційне поле. Морська гравіметрія також була, але через відсутність глобальної системи визначення координат, отримані виміри досить важко було поєднати із рештою наземних. Саме з цієї

причини за допомогою вимірів на Земній поверхні досить важко будувати глобальні моделі гравітаційного поля Землі. Виявилось, що рух супутників є досить стабільним і їх координати можна визначати досить точно. Таким чином, загальноземний набір вимірів, на які не впливають топографічні маси, приведений до єдиної системи, став основною інформацією, яка давала б можливість уточнювати основні параметри еліпсоїда та будувати загальноземні моделі гравітаційного потенціалу. Із розвитком супутникових технологій, а особливо з появою GNSS [48, 77] розвивались і глобальні гравітаційні моделі, які з кожним разом будувались все до вищого порядку/ступеня, що забезпечувало кращу роздільну здатність [36, 39]. Також поява загальноземних систем визначення координат дала змогу об'єднати всі наземні виміри. Але, як відомо, гравітаційний потенціал є гармонічною функцією у зовнішньому просторі [106] та зі збільшенням висоти така функція стає все менш осцилюючою і наближається до концентричних кіл. Як відомо із краєвих задач Діріхле та Неймана, якщо ми маємо таку гармонічну функцію та її похідні на границі то вона може бути продовжена у зовнішньому просторі. Та, на жаль, продовження потенціалу вниз не є однозначним [47, 60, 66], саме тому такі супутникові виміри на високих орбітах (наприклад, GPS - 20 000 км [77]) могли використовуватись лише для обчислення довгохвильової складової гравітаційного поля. Для вирішення цієї проблеми застосовуються вже наземні виміри, які дають уявлення про поведінку потенціалу поблизу Земної поверхні, що якраз і є найважливішим для більшості задач, наприклад, таких як побудова геоїда. За останні десятиліття з'явилася така технологія, як супутникова альтиметрія [13]. Особливість цієї технології полягає в тому, що сам пристрій (супутник) знаходиться на орбіті, а вимірює він положення поверхні океану, що є якраз виміром близьким до Земної поверхні і не потребує продовження потенціалу вниз. Але така технологія не дає особливих результатів на суходолі (крім Антарктиди та Гренландії [93]). При опрацюванні цих даних в останні роки з'явилось таке поняття, як альтиметрично визначені аномалії сили тяжіння, які в комбінації з наземними аномаліями стали одними із основних типів інформації, яка використовується при визначенні високочастотної

складової гравітаційного поля Землі. Пік розвитку супутникових технологій у галузі побудови глобальних гравітаційних моделей Землі припав на супутники з низькою орбітою (LEO [24, 33, 87]) (на момент написання цієї роботи), однак вже заплановані і наступні етапи [74, 81, 85].

Великі сподівання у сфері глобальних гравітаційних моделей було покладено на супутники з низькою орбітою Champ, GRACE, GOCE (супутникова градієнтометрія [6, 12, 32]), оскільки вони мають усі переваги супутникових місій, і водночас, вимірювання виконуються максимально близько до земної поверхні.

Варто виокремити місію GOCE [10, 38, 42], активна фаза вимірювання якої тривала з 2009 по 2013 рр. Більш того, на супутник було вперше встановлено градієнтометр, який вперше забезпечив реальні вимірювання гравітаційних градієнтів на висоті 250 км. (не враховуючи наземних градієнтометрів [72]) На сьогоднішній день тривають активні спроби побудови різних моделей за цими даними, та пошук оптимального їх використання. В цьому процесі постало багато питань, які виникли при опрацюванні реальних даних і не достатньо розглядались на теоретичному етапі. До таких питань можна віднести: надмірний шум [28], який присутній у вимірах, продовження потенціалу вниз [47, 60, 66], приведення інформації на регулярну сітку [29], ефективне поєднання даних градієнтометрії з уже накопиченою десятиліттями інформацією про гравітаційне поле та інші [25, 38]. Тому, хоч зараз місія GOCE [42, 45, 49, 63, 86, 87, 89] вважається апогеєм Земних супутникових місій у сфері гравітаційного поля, однак тут ще залишається багато питань, які потребують кращого вивчення.

1.3. Основні методи обчислення гармонічних коефіцієнтів

У попередніх підрозділах в основному згадувалось про практичні аспекти побудови гравітаційного поля, а в теорії така задача переважно зводиться до розв'язання системи лінійних рівнянь [96], теорія яких була розроблена набагато раніше, у XVIII – XIX столітті. Одним з найпопулярніших методів розв'язання таких лінійних рівнянь є метод Гауса, в якому матриця нормальних рівнянь зводиться до трикутної, після чого всі подальші обчислення не

представляють великої складності. Основною причиною виникнення такого підходу було те, що в ті часи не було змоги обертати великі матриці. Такий метод може бути використаний при розкладі гравітаційного потенціалу в ряд за сферичними функціями, де невідомими є гармонічні коефіцієнти [100, 101]. Також існує два методи Неймана, які базуються на схожому підході. Такий підхід є порівняно нескладним. Варто зазначити, що зі збільшенням порядку/ступеня моделі кількість параметрів зростає як квадратична залежність, так наприклад для 10 порядку/ступеня кількість невідомих коефіцієнтів дорівнює 121, а при 100 порядку/ступені вже 10201.

З появою обчислювальних машин дане питання вже починає поставати в іншому світлі, оскільки вже майже неможлива задача обертання таких великих матриць стає порівняно нескладною задачею. Розвиваються багато способів розв'язання систем лінійних рівнянь, таких як: метод оберненої матриці [90], метод квадратних коренів та інші [95]. Також існує безліч ітеративних методів, але в даній дисертації вони не розглядаються. Здавалось б це питання вже далеко позаду. Але на сьогоднішній день більшість моделей будується до 360 порядку/ступеня, а це вже понад 100000 коефіцієнтів, і це далеко не найвищий порядок, наприклад існують моделі, порядок яких перевищує 2160 [65]. Тобто розв'язання таких систем рівнянь знов стає непростою задачею навіть з використанням сучасних комп'ютерів [1] та паралельного обчислення [61, 62]. На сьогоднішній день одним з найпопулярніших методів є метод розкладу Халєцького [96]. Та нажаль такі обчислення переважно виконуються на суперкомп'ютерах, на так званих обчислювальних кластерах. Саме з цієї причини однією з основних задач цієї роботи є оптимізація обчислень, що дозволило б будувати моделі високих порядків з використанням менших комп'ютерних ресурсів.

1.4. Висновки та постановка основних задач дослідження

Важливим питанням є опрацювання первинних даних супутникової градієнтометрії. А саме: редукування даних, усунення шуму методами фільтрації, приведення даних на регулярну сітку та інше.

З метою покращення роздільної здатності моделі, необхідно використовувати більшу кількість даних, що веде за собою збільшення часу обчислень. Отже необхідно розробити алгоритм, який пришвидшив би обчислювальний процес.

На сьогоднішній день доступно досить багато різнотипної інформації про гравітаційне поле Землі, тому важливо поєднати різні типи вимірів для отримання оптимального результату. Таким чином, у роботі ставиться задача використання даних супутникової градієнтометрії для покращення низькочастотної та середньочастотної складової гравітаційного поля Землі. В той же час поставлена задача використання аномалій сили тяжіння для визначення високочастотної складової гравітаційного поля Землі.

Після виконання огляду літератури по темі дисертації були визначені питання, які потребують більш детального дослідження. Виходячи з цього, було розглянуто основні задачі, які поставлені і будуть вирішуватись у даній дисертаційній роботі:

1. Удосконалення методів оптимального використання первинних даних супутникової градієнтометрії (редукування даних, усунення шуму методами фільтрації, приведення даних на регулярну сітку).
2. Розроблення алгоритму швидкого обчислення гармонічних коефіцієнтів при використанні великої кількості даних.
3. Побудова комбінованої моделі гравітаційного поля Землі.

РОЗДІЛ 2. НЕОБХІДНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ГРАВІТАЦІЙНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛІ

2.1. Базові поняття теорії потенціалу

Потенціал це певна абстрактна функція, яка була придумана для ефективного використання відомостей про гравітаційне поле Землі. А саме, ця функція є нічим іншим, як функцією похідна від якої дорівнює прискоренню вільного падіння або прискоренню сили тяжіння g . Як відомо сила притягання між двома об'єктами за законом Ньютона пропорційна добутку мас цих двох тіл поділена на квадрат відстані між ними [4, 23]. Запишемо формулу притягання Землі і певної матеріальної точки одиничною масою.

$$F = G \frac{Mm}{r^2}, \quad (2.1)$$

Де F - сила притягання, G - геоцентрична гравітаційна стала, M - маса Землі, m - маса матеріальної точки, яка рівна одиниці, r - відстань між цими двома об'єктами. Якщо переписати цю формулу з урахуванням того, що точка знаходиться на поверхні Землі, то можна сказати, що ця сила буде приблизно рівна по абсолютному значенню прискорення вільного падіння g , враховуючи припущення, що Земля є кулею.

$$g \approx \frac{GM}{R^2}, \quad (2.2)$$

де R - середній радіус Землі.

Оскільки g є похідною по радіусу від потенціалу, тоді значення самого потенціалу W по абсолютній величині буде наближено рівне:

$$W \approx \frac{GM}{R}, \quad (2.3)$$

Але ми живемо на планеті, яка постійно обертається і тому виникає крім сили притягання ще й відцентрова сила, яка набуває максимального значення на екваторі та нульового в точках полюсів. Таким чином, потенціал відцентрової сили можна записати так:

$$\Phi = \frac{1}{2} \omega^2 r_n, \quad (2.4)$$

де Φ - відцентровий потенціал, ω - кутова швидкість обертання Землі, r_n - радіус паралелі (залежить від широти).

Отже, якщо розглядати реальний потенціал сили тяжіння без врахування інших космічних об'єктів, таких як Місяць і Сонце [106], то реальний потенціал сили тяжіння буде складатися із суми цих двох потенціалів: гравітаційного (притягання) та відцентрового. Позначимо такий реальний потенціал сили тяжіння через W . Обрано назву “потенціал сили тяжіння”, оскільки ми розглядаємо певну неактивну силу, тобто силу, яка не залежить від самого об'єкта на який вона діє. Варто зазначити, що вага безпосередньо є характеристикою об'єкта і в такому випадку буде залежати від параметрів притягуваного об'єкта. Отже ми розглядаємо потенціал притягуючого об'єкта, який не залежить від параметрів об'єкта, який притягується, а саме “потенціал сили тяжіння”.

$$W = V + \Phi, \quad (2.5)$$

Де W - потенціал сили тяжіння, V - гравітаційний потенціал, або потенціал притягання, Φ - відцентровий потенціал.

Якщо розбити Землю на елементарні маси, то можна записати потенціал як суму потенціалів цих притягуючих частинок [4]. В інтегральному вигляді це виглядає так:

$$V(x, y, z) = G \iiint_v \frac{\rho(x', y', z')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} dx' dy' dz', \quad (2.6)$$

де x, y, z - координати точки, в якій визначається потенціал, x', y', z' - координати точок, які належать притягуючому тілу, v - область об'єму притягуючого тіла, $\rho(x', y', z')$ - густина в точці, яка знаходиться в середині притягуючого тіла [41]. Оскільки така функція повинна бути гармонічною в зовнішньому просторі, то вона задовольняє рівнянню Лапласа ззовні

$$\nabla^2 V = 0, \quad (2.7)$$

де $\nabla^2 V$ - лапласіан, який рівний сумі квадратів часткових других похідних [92],

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}, \quad (2.8)$$

та рівнянню Пуасона в середині

$$\nabla^2 V = -4\pi G\rho. \quad (2.9)$$

Такий зовнішній потенціал наближено можна представити як потенціал еліпсоїда обертання, в якого швидкість обертання рівна швидкості обертання Землі, маса Землі рівна масі такого еліпсоїда, його центр знаходиться в центрі мас Землі, та їхні зональні гармоніки другого порядку рівні. Потенціал такого еліпсоїда називають нормальним і позначають через U . Для геодезії є важливими якраз відхилення реального потенціалу W від нормального U . Такий потенціал називається збурюючим і позначається через T .

$$T = W - U. \quad (2.10)$$

Очевидно, що відцентровий потенціал вже не фігурує в збурюючому. Саме збурюючий потенціал є основним об'єктом досліджень в геодезії. Представимо збурюючий потенціал у вигляді сферичних гармонік:

$$T = \frac{GM}{R} \sum_{n=2}^{N_{\max}} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (\overline{\Delta C}_{nm} \cos(m\lambda) + \overline{\Delta S}_{nm} \sin(m\lambda)) \overline{P}_{nm}(\cos\theta), \quad (2.11)$$

де $\overline{\Delta C}_{nm}, \overline{\Delta S}_{nm}$ - різниці відповідних гармонічних коефіцієнтів реального та нормального потенціалів. Дане рівняння є загальновідоме і було отримане з розв'язків рівняння Лапласа по кожній з трьох сферичних координат [40]. Такі ж вирази можна записати для реального та нормального гравітаційних потенціалів. Розглядаються гравітаційні потенціали, а не потенціали сили тяжіння, оскільки відцентровий потенціал має однакове значення як для нормального, так і для реального, і при обчисленні збурюючого потенціалу він просто скорочується.

$$W = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{N_{\max}} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (\overline{C}_{nm} \cos(m\lambda) + \overline{S}_{nm} \sin(m\lambda)) \overline{P}_{nm}(\cos\theta), \quad (2.12)$$

$$U = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{N_{\max}} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (\overline{C}_{nm}^* \cos(m\lambda) + \overline{S}_{nm}^* \sin(m\lambda)) \overline{P}_{nm}(\cos\theta), \quad (2.13)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{\Delta C}_{nm} \\ \overline{\Delta S}_{nm} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \overline{C}_{nm} - \overline{C}_{nm}^* \\ \overline{S}_{nm} - \overline{S}_{nm}^* \end{array} \right., \quad (2.14)$$

Оскільки нормальний потенціал представляється фігурою еліпсоїда обертання, то часто для його моделювання достатньо використовувати декілька перших парних зональних коефіцієнтів, а саме $C_{2,0}^*, C_{4,0}^*, C_{6,0}^*, C_{8,0}^*, C_{10,0}^*$, ці

коефіцієнти залежать від еліпсоїда, який приймається для обчислень. Оскільки нульова гармоніка відповідає за масштаб, який в обох випадках однаковий і рівний 1, то очевидно, що коефіцієнт нульового порядку для збурюючого потенціалу буде рівний нулю. Коефіцієнти першого порядку також рівні нулю, оскільки відповідають за координати центру еліпсоїда, а як відомо, одна з основних умов задання нормального еліпсоїда полягає в тому, щоб його центр збігався з центром мас Землі. Саме з цих причин збурюючий потенціал розкладають з другого порядку, а не з нульового.

За таким же принципом можна розкласти прискорення вільного падіння g :

$$g = \frac{GM}{R^2} \sum_{n=0}^{N_{\max}} (n+1) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+2} \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos(m\lambda) + \bar{S}_{nm} \sin(m\lambda)) \bar{P}_{nm}(\cos\theta), \quad (2.15)$$

Використовуються не лише перші похідні потенціалу, але й другі. Такі похідні разом утворюють тензор градієнтів, який складається із 9 часткових похідних

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_{rr} & V_{r\varphi} & V_{r\lambda} \\ V_{\varphi r} & V_{\varphi\varphi} & V_{\varphi\lambda} \\ V_{\lambda r} & V_{\lambda\varphi} & V_{\lambda\lambda} \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

де кожен з них можна обчислити так:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{rr}(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{R^3} \sum_{n=N_{\min}}^{N_{\max}} (n+1)(n+2) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+3} \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \\ V_{r,\theta}(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{R^2} \sum_{n=N_{\min}}^{N_{\max}} (n+1) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+2} \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}'_{nm}(\cos\theta) \sin\theta \\ V_{r,\lambda}(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{R^2} \sum_{n=N_{\min}}^{N_{\max}} (n+1) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+2} \sum_{m=0}^n m (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda - \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \\ V_{\theta,\theta}(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{R} \sum_{n=N_{\min}}^{N_{\max}} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \left\{ \bar{P}''_{nm}(\cos\theta) \sin^2\theta - \bar{P}'_{nm}(\cos\theta) \cos\theta \right\} \\ V_{\theta,\lambda}(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{R} \sum_{n=N_{\min}}^{N_{\max}} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n m (\bar{C}_{nm} \sin m\lambda - \bar{S}_{nm} \cos m\lambda) \bar{P}'_{nm}(\cos\theta) \sin\theta \\ V_{\lambda,\lambda}(r, \theta, \lambda) = -\frac{GM}{R} \sum_{n=N_{\min}}^{N_{\max}} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n m^2 (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \end{array} \right. \quad (2.17)$$

2.2. Супутникова градієнтометрія, місія GOCE

Ця місія може вважатися новим кроком у розвитку супутникових технологій [37]. Супутник GOCE [8, 9, 10, 12, 17, 34, 58, 61] було запущено у 2009 році із космодрому Плесецк Європейською космічною агенцією. Основна

задача місії полягає у вимірюванні гравітаційних градієнтів (других похідних гравітаційного потенціалу) за допомогою електростатичного гравітаційного градієнтометра. Супутник має видовжену форму із секціями шириною близько 0.9 м і довжиною приблизно 5.0 м (рис. 2.1). Характерною особливістю цього супутника є наявність двох повністю симетричних панелей, які призначені для зменшення атмосферних збурень і є конструктивною особливістю космічного носія. Для зручності супутник розділений на три платформи, на які кріпляться різні модулі. Нижній модуль включає в себе AOCS/DFACS (Attitude and Orbit Control System/ Drag Free Attitude Control System- система контролю орбіти/Вільна від гальмувань система контролю положення) та комплект іонних двигунів (ІТА – Ion Thrusters Assembly). У центральному модулі розташований комплект EGG (електростатичний гравітаційний градієнтометр). Центр EGG знаходиться в центрі мас супутника (основною вимогою є суміщеність центру EGG та центру мас супутника протягом всієї експлуатації космічного носія). Верхній модуль переважно складається з електричного обладнання, пристроїв пам'яті, радіочастотного обладнання і містить бак для зберігання 40 кілограм палива для іонних двигунів.

Електрична енергія генерується чотирма сонячними панелями встановленими на корпусі супутника та двома – на «крилах» (їх площа складає приблизно 5 м^2). Літій-іонна батарея забезпечує потреби супутника, яка має загальну потужність 2.246 кВт та місткість 78 Аг. Космічний апарат є термостійким і містить системи пасивного радіаційного контролю та ізоляції. Загальна маса супутника при запуску становить близько 1000 кг, включаючи паливо для двигунів супутника.

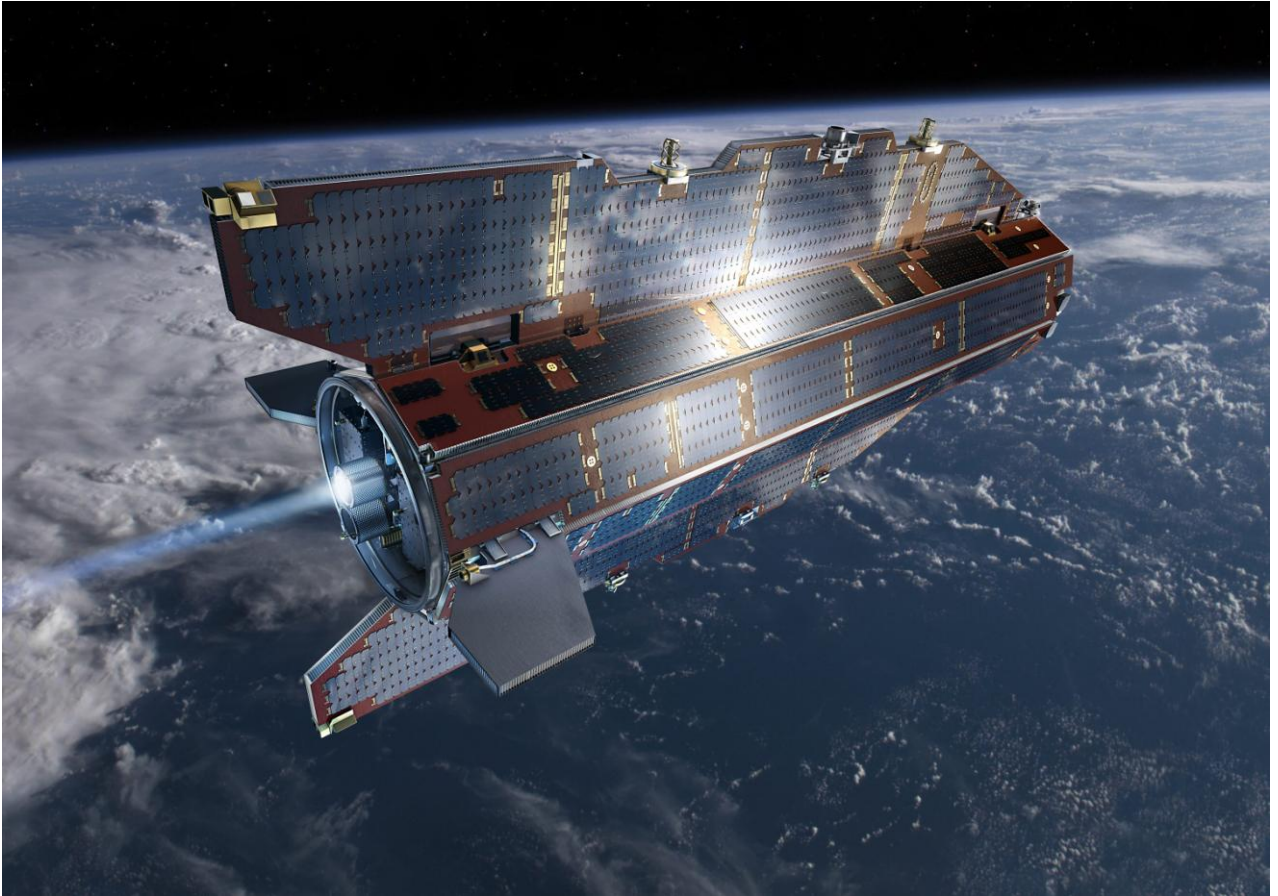


Рис. 2.1. Загальний вигляд супутника GOCE.

Ключовим елементом системи AOCS/DFACS на супутнику GOCE є вільний від гальмування контроль положення (drag-free attitude control) [17]. DFACS була розроблена для компенсації ефектів, що впливають на виміри градієнтометра в діапазоні від 5 мГц до 100 мГц (які пов'язані з силами та моментами атмосферного тертя). Ця система використовує іонні двигуни та мікродвигуни. Загальна похибка градієнтометра складає близько $3 \text{ мЕ}/\sqrt{\text{Гц}}$ (примітка $1 \text{ Е} = 1 \text{ Eötvös} = 10^{-9} \text{ s}^{-2}$, одиниця градієнту сили тяжіння). У вільному від гальмування режимі система орієнтації космічного корабля (з абсолютною точністю 0.38 мрад) вимагає відстеження зірок та інформації з градієнтометра. Однак інформація про положення супутника може забезпечуватись за допомогою сенсора Землі, сенсора Сонця та тривісним магнетометром в інших режимах місії.

Основна система збереження даних, яка встановлена на борту базується на MIL-1553 bus, та 32-ох процесорному ERC, і об'ємом пам'яті 2.5 Гбіт. Зв'язок забезпечує S-band (два когерентних S-band джерела, дві антени та

радіочастотний модуль) з швидкістю відправки даних 2 кбіт/с та прийому – 850 кбіт/с. Головна наземна станція знаходиться в місті Кірума. Контроль над місією GOCE здійснює ESOC.

Орбіта супутника є сонце-синхронною та низькою (висота = 250 км; нахил близько 96.5°). Номінальна протяжність місії GOCE планується на 20 місяців. Для виходу на орбіту використовується ракетносієй класу Rockot.

Основні принципи супутникової градієнтометрії (SGG)

Розглянемо декілька ортогональних систем координат (рис. 2.2). Система F0 відноситься до супутника та її центр розміщений в номінальному центрі мас супутника (це зафіксована точка в супутнику). Система F1 є паралельною до системи F0, але її центр знаходиться в актуальному центрі мас супутника, тобто він не мусить залишатись постійною точкою, як номінальний, в процесі зміни маси супутника з часом. Система F2 також фізично зв'язана з супутником, але її центр розташований в центрі мас градієнтометра та її осі співпадають з осями приладу. Нарешті F3 – це земна система, центр якої суміщений з центром F0, але осі мають інше орієнтування, вісь z спрямована у радіальному напрямку від Землі, та осі x та y є перпендикулярними до z (так, що вони є тангенціальними до орбіти), оскільки вісь x лежить вздовж орбіти, то вісь y - впоперек нього.

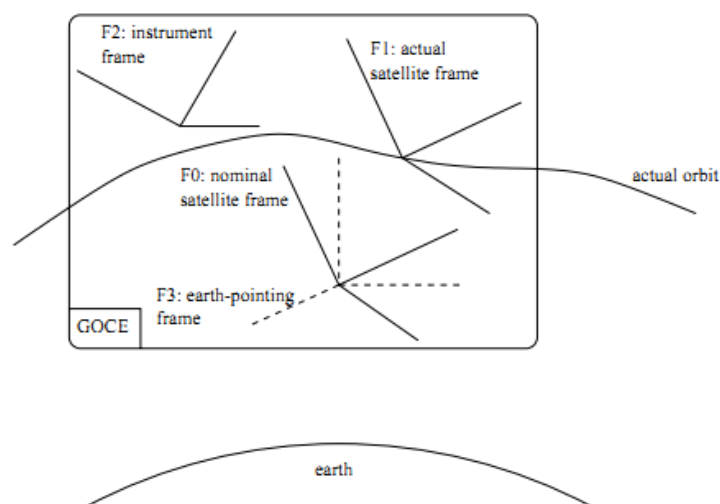


Рис. 2.2. Системи координат супутника GOCE.

В ідеалі всі ці системи мали б мати спільний центр, тому протягом всієї місії важливо зберегти різниці між цими системами настільки малими, наскільки це можливо. Але реально між орієнтуванням систем F0 та F2 завжди будуть невеличкі розходження через неідеальне встановлення інструменту на супутник. Хоча різницю в їх орієнтуванні можна знайти із конструкції супутника, проте ця різниця буде відома з визначеною точністю. Більше того, це відносне орієнтування буде трішки змінюватися з часом через зміни температури та механічні вібрації, як супутника, так і приладу. Орієнтування цих двох систем може бути змодельоване стохастично, тобто кути відомі, а помилки розраховуються за моделлю спостережень.

Супутник буде прагнути зберігати орієнтування земної системи на стільки добре, наскільки це можливо. Однак виникають різниці в орієнтуванні систем F0 та F3 через помилки в спостереженнях, які виникають внаслідок неправильного орієнтування приладу через помилки системи контролю орієнтування та інших збурюючих обертових рухів супутника. Трансформувати тензор гравітаційних градієнтів з одної системи в іншу непотрібно з двох причин: по-перше, різниці між положеннями координатних систем є незначними, і по-друге, спостереження гравітаційних градієнтів базуються на лінеаризації виміряних прискорень довільно вибраної точки, для якої природним вибором був би центр мас супутника, навіть якщо ця точка не є суміщена з центром мас інструмента. Оскільки F0 та F1 є визначені з однаковою точністю, то можна використовувати той самий тензор в обох цих системах. Тензор градієнтів сили тяжіння може бути трансформований з однієї системи в іншу за допомогою матриці поворотів. Кути, які використовуються в матриці поворотів, можуть бути відомими або вимірними під час польоту. Поворот від системи F2 до F0 є відомим, хоча і не безпомилково, тому ці помилки треба враховувати (внаслідок цього очікується, що помилки будуть дуже малими або взагалі несуттєвими). Кути повороту між F0 та F3 визначають зі спостережень градієнтометра та відстежувача зірок. Через постійне функціонування системи контролю положення, супутник намагається зберегти відповідність системи F0 із системою F3.

Градiєнтометр має два режими: так званий диференціальний режим та загальний режим, це різниця і сума даних двох акселерометрів відповідно. Гравітаційні прискорення $\bar{a} = V_i$ в точці P_1 (центр одного з двох акселерометрів) лінеаризуються на точку O , яка є центром градiєнтометра, це можна представити так:

$$\bar{a}(P_1) = V_i(P_1) = V_i(0) + V_{ij}(0)\Delta x_j + 0(\Delta x_j^2) \quad (2.18)$$

де $V_{ij}(0)$ - це гравітаційний градiєнт в точці O , а Δx_j є різницею відповідних координат між P_1 та O . Такий вираз може бути записаний і для точки P_2 . Коли береться різниця між прискореннями в точках P_1 та P_2 , то прискорення в точці O скорочується і тоді гравітаційний градiєнт отримують з точністю до першого порядку. Існують і вищі порядки, однак вони дуже малі і їх точність при лінеаризації є гіршою, ніж очікувана точність. Диференційний режим позначається символом ξ - це первинна інформація, яку дає градiєнтометр. В свою чергу спостереження градiєнтометра позначаються Γ_{ij} . В ці спостереження входять $V_{ij}, \dot{\Omega}$ та $\Omega\Omega$, які пізніше будуть розкладені на дві складових. Γ_{ij} - це калібровані спостереження, куди вже входять поправки за невідповідність осей та центру, за масштаб акселерометрів, які є визначені і виправлені. Ці дані складають модель помилок. Спостереження Γ_{ij} ведуться в системі градiєнтометра F2, тому вони мають бути приведені до системи супутника F0 чи F1. Для того, щоб відділити гравітаційну частину від обертової частини спостережень, ми представимо спостережуваний тензор як симетричну частину та антисиметричну. Симетрична частина виглядає так :

$$\frac{1}{2}(\Gamma_{ij} + \Gamma_{ji}) = \begin{bmatrix} V_{xx} & V_{xy} & V_{xz} \\ V_{yx} & V_{yy} & V_{yz} \\ V_{zx} & V_{zy} & V_{zz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\Omega_y^2 - \Omega_z^2 & \Omega_x\Omega_y & \Omega_x\Omega_z \\ \Omega_y\Omega_x & -\Omega_x^2 - \Omega_z^2 & \Omega_y\Omega_z \\ \Omega_z\Omega_x & \Omega_z\Omega_y & -\Omega_x^2 - \Omega_y^2 \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

та антисиметричну частину:

$$\frac{1}{2}(\Gamma_{ij} - \Gamma_{ji}) = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\Omega}_z & -\dot{\Omega}_y \\ -\dot{\Omega}_z & 0 & \dot{\Omega}_x \\ \dot{\Omega}_y & -\dot{\Omega}_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Антисиметрична частина може бути проінтегрована, і таким чином знаходиться кутова швидкість Ω . Стала інтегрування може бути визначена із спостережень відстежувача зірок. Більше того з аналізу активності двигунів, які впливають на рух супутника, можна визначити положення космічного носія. Після визначення Ω , її можна використати для коректування симетричної частини спостережуваного тензора, і виділити гравітаційні градієнти V_{ij} [10, 12, 32].

Остаточні виміряні гравітаційні градієнти треба трансформувати з F1 до F3 (від супутникової системи до земної). Для того, щоб це зробити необхідно проінтегрувати вираз по кутовій швидкості два рази, внаслідок чого отримаємо кути повороту між цими системами. Протягом того, як супутник буде утримувати земне орієнтування, очікується, що кути будуть залишатися дуже малими. Однак помилки все ж таки представляються тензором помилок PSD, частина яких походить від неідеального визначення Θ , та інша частина походить від недіагональних елементів тензора градієнтів. Найбільшим обертовим компонентом є поворот навколо осі у, тому хz- компоненти входять в діагональні елементи xx та zz. Якщо змінити налаштування градієнтометра так, щоб хz-компоненти вимірювались приблизно з такою точністю, як діагональні елементи, то пропадає внесок обертових помилок (що і було зроблено при проектуванні градієнтометра).

Коротка характеристика вимірів супутник-супутник (SST)

Також важливими є виміри супутник-супутник (SST) [78], які також несуть певну інформацію про гравітаційне поле землі. Тому розглянемо їхні характеристики більш детально.

На GOCE встановлений GRAS приймач, який має 16 двочастотних каналів. Є можливість для використання трьох антен, але використовується лише одна (відсутнє шифрування радіо сигналу). Будь-який канал можна вільно підключити до GPS чи ГЛОНАСС супутників.

GRAS приймач здатний забезпечувати прийом таких сигналів:

- Псевдовіддалі на некорельованому С/А кодів зі стандартним відхиленням 50 см, з частотою даних 1 Гц;
- Некорельовані фазові спостереження на частоті L1, зі стандартним відхиленням 1 мм, частота даних 10 Гц, та некодовані спостереження на частотах L2-L1 зі стандартним відхиленням 2 мм.

Також приймач може забезпечувати ГЛОНАСС спостереження.

Варто зазначити, що можливість прийому даних з частотою 10 Гц не є обов'язковою вимогою, просто інструмент має таку здатність. Для GOCE достатньо приймати дані з частотою 1 Гц.

2.2.1. Основні координатні системи місії GOCE

В геодезії існує безліч систем координат [44, 73, 105] для різних цілей, але в даному підрозділі ми розглянемо лише ті, які стосуються GOCE [58].

GRF - Референцна система градієнтометра (Gradiometr Reference Frame) та

ARF - Референцна система акселерометра (Accelerometr Reference Frame)

GRF – це система координат, в якій GOCE вимірює компоненти тензора гравітаційних градієнтів (Рис. 2.3). GRF використовується для орієнтації триосного градієнтометра відносно інших референцних систем. Також в цій системі розташовуються системи одновісних градієнтометрів, так звані OAGRФ – One Axis Gradiometr Reference Frame (Референцна система одновісного градієнтометра). Номінально центри всіх референцних систем одновісних градієнтометрів попарно знаходяться на осях системи GRF. Відповідно осі трьох OAGRФ є колінеарними. Отже, 6 референцних систем акселерометрів є паралельними та мають однакові напрямки.

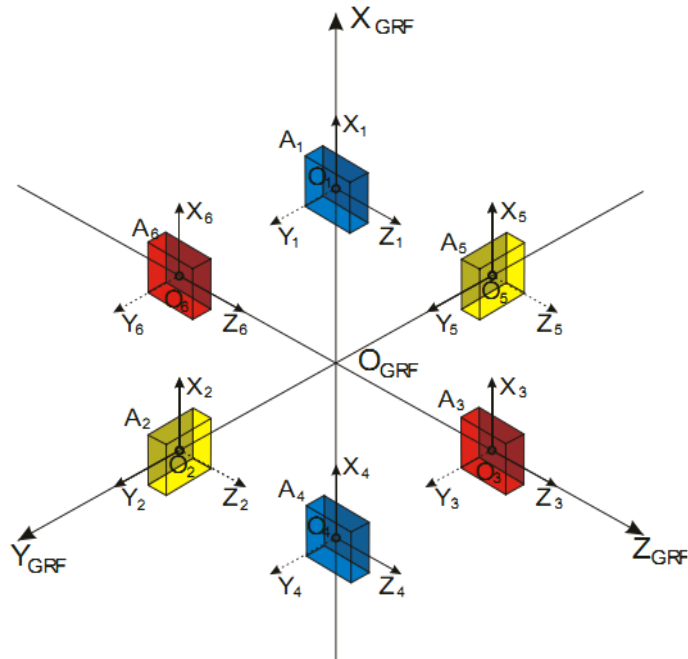


Рис. 2.3. GRF та розташування 6 ARF.

LORF- Локальна орбітальна референцна система (Local Orbital Reference Frame)

Центр O_{LORF} знаходиться в центрі мас супутника; вісь X_{LORF} (обертання) є паралельною до миттєвого вектора швидкості (\mathbf{V}) на орбіті з тим же напрямком. Вісь Y_{LORF} (висота) до миттєвого напрямку орбітального кутового моменту (\mathbf{N}), з тим же знаком, що і \mathbf{N} (\mathbf{V} та \mathbf{N} ортогональні за визначенням, $\mathbf{N} = \mathbf{R} \times \mathbf{V}$ де \mathbf{R} є вектором від центру Землі до центру даної системи). Вісь Z_{LORF} (розворот) є паралельною до напрямку векторного добутку $\mathbf{V} \times \mathbf{N}$.

Взаємна орієнтація GRF та LORF в просторі

На рис. 2.4 показано, як співставляються фундаментальні референцні системи. GRF не повністю співпадає з LORF. З наукової точки зору супутник буде працювати у вільному від гальмування режимі у напрямку польоту тільки для контролю широти, що забезпечується магнітними моментами над полюсам. Оскільки магнітні моменти проявляються тільки близько полюсів, розвертання спричиняє кут обертання на екваторі близько декількох градусів. Максимальний кут розвороту становить 3.5° він досягається на екваторі через вплив зовнішніх сил, спричинених обертанням Землі. Таким чином супутник

буде розвертатися в межах $\pm 3.5^\circ$ (по відношенню до LORF) в зв'язку з тим, щоб зменшити горизонтальні сили та моменти.

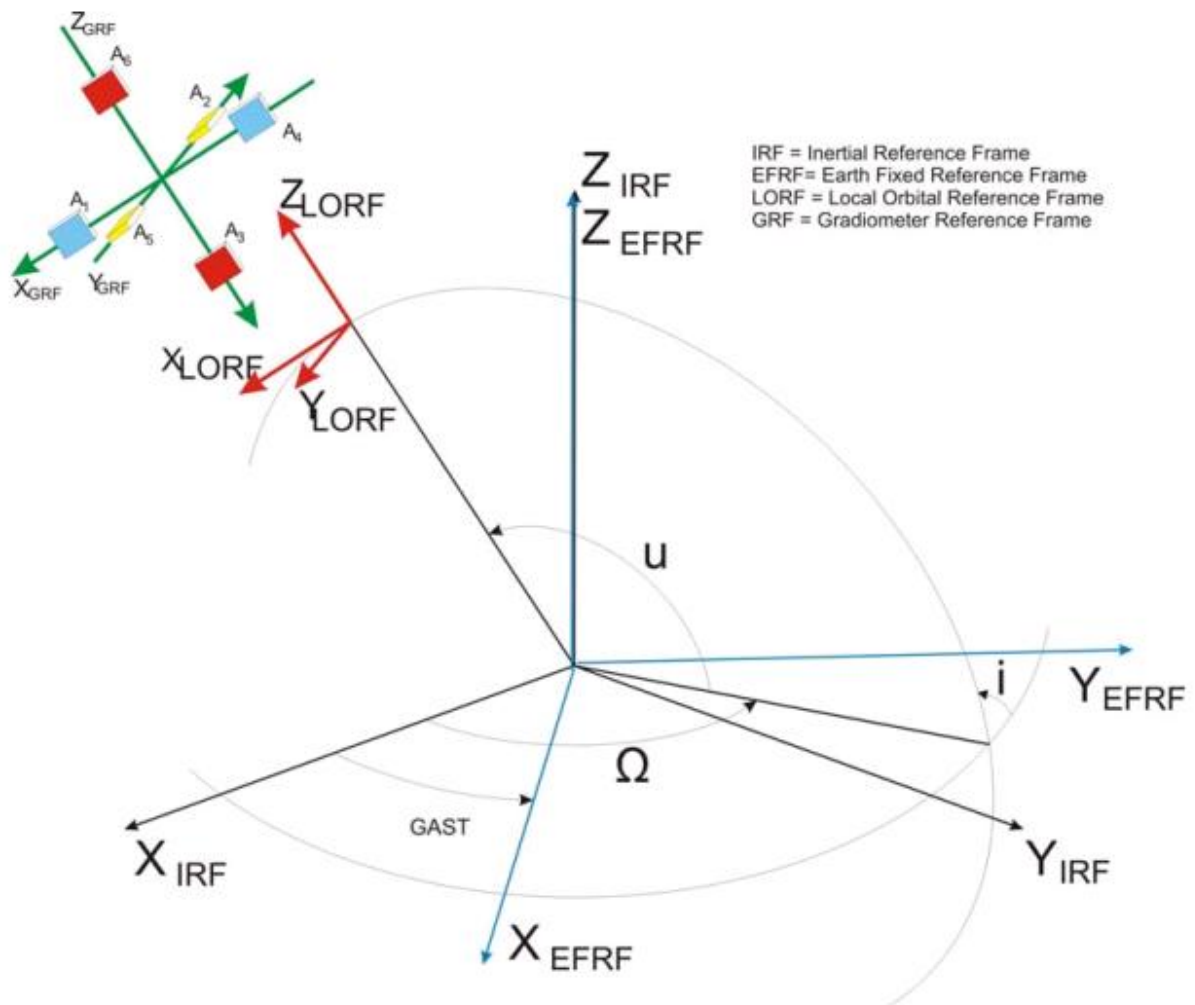


Рис. 2.4. Основні референційні системи координат GOCE.

IRF – Інерціальна референційна система (Inertial Reference Frame)

Інерціальна референційна система (IRF) є просторовою референційною системою, яка зафіксована в просторі. IRF є ортогональною правою системою. Її центр знаходиться в центрі мас Землі (геоцентр), орієнтація - екваторіальна, вісь Oz напрямлена в небесний полюс. Вісь Ox зафіксована в площині екватора і напрямлена в точку весняного рівнодення. Вісь Oy також лежить в площині екватора, але розвернута на 90 градусів на схід.

EFRF – Земна фіксована референційна система (Earth Fixed Reference Frame)

Земна фіксована референційна система (EFRF) є просторовою референційною системою, яка обертається разом із Землею в добовому русі.

EFRF є ортогональною, правою системою. Її центр знаходиться в центрі мас Землі (геоцентр), орієнтація - екваторіальна, (вісь Oz напрямлена в точку полюсу). Вісь Oх зафіксована у площині екватора і напрямлена до Гринвіцького меридіана. Кут між віссю Oх Інерціальної референцної системи (визначений точкою весняного рівнодення) та Гринвіцьким меридіаном називається Greenwich Apparent Sideral Time (GAST) або просто часовим кутом t .

LNOF – Локальна система, орієнтована на північ (Local North Oriented Frame)

Локальна система, орієнтована на північ, (LNOF) є правою Північ-Захід-Верх системою, вісь X спрямована на Північ, вісь Y – на Захід та вісь Z- вверх. В цій системі подаються калібровані гравітаційні градієнти EGG_TRF_2.

- Центр O_{LNOF} , розташований у номінальному центрі мас супутника;
- Z_{LNOF} визначена вектором від геоцентру до центру O_{LNOF} , (радіальний напрям);
- Y_{LNOF} є паралельна до нормального вектора до геоцентричного меридіана, який проходить через центр мас супутника (західний напрям);
- X_{LNOF} є нормальним вектором до площини, яка визначена Y_{LNOF} та Z_{LNOF} .

Цих три осі, по відношенню до геоцентричної широти та східної довготи (φ , λ) центру мас GOCE в CTRS (Conventional Terrestrial Reference System), визначаються так:

$$Z_{LNOF} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\lambda \\ \cos\varphi \sin\lambda \\ \sin\varphi \end{pmatrix}; Y_{LNOF} = \begin{pmatrix} \sin\lambda \\ -\cos\lambda \\ 0 \end{pmatrix}; X_{LNOF} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \cos\lambda \\ -\sin\varphi \sin\lambda \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

2.2.2. Кватерніони, як зв'язок між системами координат та класичний зв'язок між системами координат

Як видно з попереднього підрозділу у місії GOCE використовується досить багато систем координат, саме тому для трансформування вимірних величин

було обрано кватерніонне обчислення [98]. Оскільки, добре відомо, що кількість необхідних операцій при перетворенні вимірних величин між декількома системами координат є меншою при використанні кватерніонів ніж із застосуванням класичних матриць із кутами повороту.

Кватерніоном називається гіперкомплексне число, яке геометрично реалізується у чотирьохмірному просторі. Система кватерніонів була створена у 1843 р Вільямом Роуеном Гамільтоном і була першою системою, яка узагальнює комплексні числа. Кватерніони були забуті і до 60-х років ХХ століття майже не використовувались. Починаючи із середини 60-х років

кватерніони набувають все більшої популярності у аналітичній фотограмметрії та інших прикладних науках. На сучасному етапі кватерніонне обчислення є основною частиною математичного апарату сучасної космічної фотограмметрії та космічної геодезії.

Кватерніони дозволяють досить ефективно вирішувати задачі, зв'язані з композиціями обертань простору. Вони мають ряд переваг порівняно з описанням обертання за допомогою ейлеревих кутів, оскільки дають можливість отримати безпосередньо координати вектора у новій системі координат при повороті простору на кут θ навколо деякої інваріантної осі C^0 .

Кватерніони утворюють чотиривимірну алгебру над полем дійсних чисел з базисом $(1, e_x, e_y, e_z)$. Насправді e_x, e_y, e_z можуть мати більш загальну суть, ніж орти в ортонормованому базисі.

Для роботи з кватерніонами необхідно знати правила їх перемноження (таблиця 2.1).

Таблиця 2.1

Правила перемноження кватерніона

$1 \times 1 = 1$	$1 \times e_x = e_x$	$1 \times e_y = e_y$	$1 \times e_z = e_z$
$e_x \times 1 = e_x$	$e_x \times e_x = -1$	$e_x \times e_y = e_z$	$e_x \times e_z = -e_y$
$e_y \times 1 = e_y$	$e_y \times e_x = -e_z$	$e_y \times e_y = -1$	$e_y \times e_z = e_x$
$e_z \times 1 = e_z$	$e_z \times e_x = \overline{e_y}$	$e_z \times e_y = -e_x$	$e_z \times \overline{e_z} = -1$

Таким чином:

$$\mathbf{e}_x^2 = \mathbf{e}_y^2 = \mathbf{e}_z^2 = \mathbf{e}_x \mathbf{e}_y \mathbf{e}_z = -1, \quad (2.22)$$

де порядок множників у добутку $\mathbf{e}_x \mathbf{e}_y \mathbf{e}_z$ строго фіксований.

Також наслідком цих базових співвідношень є:

$$\mathbf{e}_x \mathbf{e}_y = -\mathbf{e}_y \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_z; \quad \mathbf{e}_y \mathbf{e}_z = -\mathbf{e}_z \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_x; \quad \mathbf{e}_z \mathbf{e}_x = -\mathbf{e}_x \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_y. \quad (2.23)$$

Будь-який кватерніон можна представити наступним чином:

$$Q = A + c_1 \mathbf{e}_x + c_2 \mathbf{e}_y + c_3 \mathbf{e}_z. \quad (2.24)$$

При цьому розрізняють скалярну частину A та векторну:

$$\mathbf{C}^0 = c_1 \mathbf{e}_x + c_2 \mathbf{e}_y + c_3 \mathbf{e}_z, \quad (2.25)$$

отже:

$$Q = A + \mathbf{C}^0. \quad (2.26)$$

Якщо $A=0$, то кватерніон є вектором, що свідчить про тісний зв'язок кватерніонного та векторного обчислення (історично векторне обчислення виникло із кватерніонного).

Для кожного кватерніону існує спряжений кватерніон

$$Q^{-1} = A - c_1 \mathbf{e}_x - c_2 \mathbf{e}_y - c_3 \mathbf{e}_z = A - \mathbf{C}^0, \quad (2.27)$$

при цьому

$$Q Q^{-1} = Q^{-1} Q = A^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2. \quad (2.28)$$

Величина $Q Q^{-1}$ є дійсним числом і називається нормою кватерніона та позначається $N(Q)$. Норма кватерніона $N(Q)$ задовольняє співвідношення

$$N(Q_1 Q_2) = N(Q_1) N(Q_2). \quad (2.29)$$

Будь-яке обертання тривимірного простору навколо початку координат можна задати за допомогою кватерніона q з нормою, яка дорівнює одиниці. Поворот, що відповідає кватерніону q , перетворює вектор $\mathbf{r}^0 = l\mathbf{e}_x + m\mathbf{e}_y + n\mathbf{e}_z$ у вектор $\mathbf{R}^0 = L\mathbf{e}_x + M\mathbf{e}_y + N\mathbf{e}_z$.

$$\mathbf{R}^0 = q\mathbf{r}^0 q^{-1} = L\mathbf{e}_x + M\mathbf{e}_y + N\mathbf{e}_z. \quad (2.30)$$

Розглянемо алгоритм, який описує кватерніонний поворот простору в ортонормованому базисі.

Нехай напрям на точку простору перед поворотом задано одиничним вектором

$$\mathbf{r}^0 = l\mathbf{e}_x + m\mathbf{e}_y + n\mathbf{e}_z, \quad (2.31)$$

відомо кут θ повороту простору та напрямні косинуси c_1, c_2, c_3 осі повороту $\mathbf{c}^0 = c_1\mathbf{e}_x + c_2\mathbf{e}_y + c_3\mathbf{e}_z$. Потрібно визначити напрямні косинуси одиничного вектора $\mathbf{R}^0 = L\mathbf{e}_x + M\mathbf{e}_y + N\mathbf{e}_z$, в який перетворився вектор r^0 в результаті повороту осі c^0 на кут θ .

Розглянутому повороту відповідає нормований кватерніон q :

$$q = \frac{1}{N}(A + c_1\mathbf{e}_x + c_2\mathbf{e}_y + c_3\mathbf{e}_z) = a + b\mathbf{e}_x + c\mathbf{e}_y + d\mathbf{e}_z, \quad (2.32)$$

де

$$A = N \cos \frac{\theta}{2}; \quad (2.33)$$

$$N = \sqrt{A^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}, \quad (2.34)$$

звідки

$$N = \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}}; \quad A = \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}.$$

Спряжений нормований кватерніон q^{-1} буде мати вигляд:

$$q^{-1} = \frac{1}{N}(A - c_1\mathbf{e}_x - c_2\mathbf{e}_y - c_3\mathbf{e}_z) \quad (2.35)$$

Тоді вектор \mathbf{R}^0 можна визначити за формулою:

$$\mathbf{R}^0 = q\mathbf{r}^0q^{-1}. \quad (2.36)$$

Де при перемноженні компонент треба дотримуватись правил перемноження ортів (табл. 2.1) [109].

Перепишемо елементи кватерніона через такі позначення q_1, q_2, q_3, q_4 , що в свою чергу відповідає A, c_1, c_2, c_3 , тоді матрицю повороту \mathbf{R} можна записати через елементи кватерніона.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1q_2 + q_3q_4) & 2(q_1q_3 - q_2q_4) \\ 2(q_1q_2 - q_3q_4) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_2q_3 + q_1q_4) \\ 2(q_1q_3 + q_2q_4) & 2(q_2q_3 - q_1q_4) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Інтерполяція кватерніонів та координат супутника

Місія GOCE [3, 19, 32, 38, 53] дає можливість отримати велику кількість різноманітних даних і часто ці дані приведені на різні епохи. Тоді виникає необхідність у їх інтерполяції. При вирішенні поставленої задачі виникла потреба в інтерполяції двох типів даних, а саме: прямокутних координат супутника та кватерніонів переходу від одної системи до іншої.

Для інтерполяції координат було використано інтерполяційний поліном Лагранжа третьої степені, тобто бралось два попередніх та два наступних вузли інтерполяції відносно точки, на яку виконується інтерполяція. Для інтерполяції кватерніонів використовувалась методика, яку радить Європейська космічна агенція [35].

Нехай нам потрібно знайти кватерніон на певну епоху, маючи два сусідніх кватерніони (один заданий на попередню епоху, інший заданий на наступну) назвемо їх відповідно q_a та q_b , результуючий кватерніон назвемо q_{ab} , отже, отримаємо такий вираз $q_{ab} = q_a q_b$, і тоді елементи нового кватерніона будуть обчислюватись за формулами (2.38)

$$\left. \begin{aligned} q_{ab4} &= q_{a4}q_{b4} + q_{a1}q_{b1} + q_{a2}q_{b2} + q_{a3}q_{b3} \\ q_{ab1} &= q_{a4}q_{b1} - q_{a1}q_{b4} + q_{a3}q_{b2} - q_{a2}q_{b3} \\ q_{ab2} &= q_{a4}q_{b2} - q_{a2}q_{b4} + q_{a1}q_{b3} - q_{a3}q_{b1} \\ q_{ab3} &= q_{a4}q_{b3} - q_{a3}q_{b4} + q_{a2}q_{b1} - q_{a1}q_{b2} \end{aligned} \right\} \quad (2.38)$$

Нехай кожен кватерніон заданий на певну епоху, введемо відповідні позначення: t, t_a, t_b , після чого обчислимо наступні величини:

$$\Phi_{ab} = 2 \arccos(q_{ab4}); \quad (2.39)$$

$$\Phi_{at} = \Phi_{ab} \frac{t - t_a}{t_b - t_a}; \quad (2.40)$$

Тоді можна обчислити елементи кватерніона q_{at}

$$\left. \begin{aligned}
 q_{at4} &= \cos \frac{\Phi_{at}}{2} \\
 q_{at1} &= q_{ab1} \frac{\sin \frac{\Phi_{at}}{2}}{\sin \frac{\Phi_{ab}}{2}} \\
 q_{at2} &= q_{ab2} \frac{\sin \frac{\Phi_{at}}{2}}{\sin \frac{\Phi_{ab}}{2}} \\
 q_{at3} &= q_{ab3} \frac{\sin \frac{\Phi_{at}}{2}}{\sin \frac{\Phi_{ab}}{2}}
 \end{aligned} \right\} \cdot \quad (2.41)$$

Після цього потрібний нам кватерніон можна знайти із рівняння (2.42)

$$q_t = q_a q_{at}, \quad (2.42)$$

де елементи q_t знаходять за виразами (2.43).

$$\left. \begin{aligned}
 q_{t4} &= q_{a4}q_{at4} - q_{a1}q_{at1} - q_{a2}q_{at2} - q_{a3}q_{at3} \\
 q_{t1} &= q_{a4}q_{at1} + q_{a1}q_{at4} - q_{a3}q_{at2} + q_{a2}q_{at3} \\
 q_{t2} &= q_{a4}q_{at2} + q_{a2}q_{at4} - q_{a1}q_{at3} + q_{a3}q_{at1} \\
 q_{t3} &= q_{a4}q_{at3} + q_{a3}q_{at4} - q_{a2}q_{at1} + q_{a1}q_{at2}
 \end{aligned} \right\} \quad (2.43).$$

Перетворення тензора градієнтів між системами координат

Розглянемо такі системи координат: GRF, LNOF, EFRF, IRF [35]. Останніх дві системи є добре відомими, земна та інерціальна системи відповідно. Система LNOF, її центр знаходиться в центрі мас супутника, вісь Ox напрямлена на північ, вісь Oz збігається з радіус-вектором до супутника і вісь Oy доповнює систему до правої. Система GRF є системою самого градієнтометра, її центр знаходиться у центрі мас градієнтометра, вісь Ox напрямлена в напрямку руху супутника, вісь Oz близька до напрямку радіус-вектора до супутника, але за рахунок зовнішніх сил має невелике відхилення від нього, вісь Oy доповнює систему до правої (рис. 2.5). Можна сказати, що система GRF є реальною, напрямки якої визначаються положенням градієнтометра, а система LNOF є модельною.

Положення супутника визначається за допомогою системи GNSS та спеціальних камер, що слідкують за зірками (star-trackers).

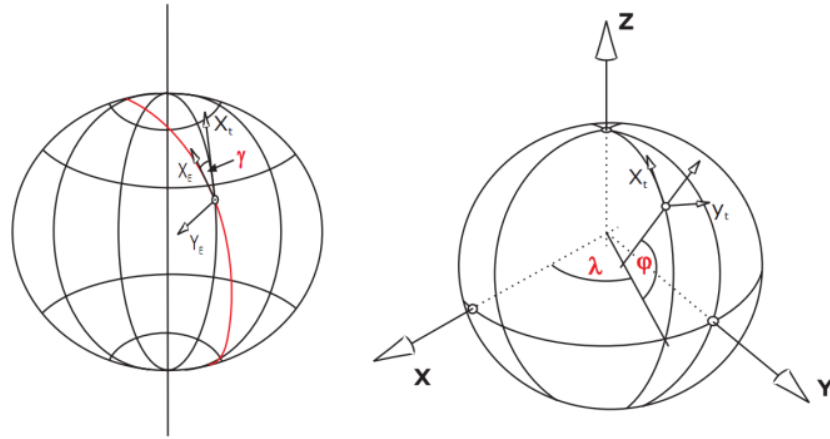


Рис. 2.5. На правому рисунку показано систему LNOF для геодезичних координат; лівий рисунок ілюструє розходження між напрямками осей GRF та LNOF.

Перехід від системи LNOF до EFRF реалізується через матрицю повороту \mathbf{R} (2.44),

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \lambda & \sin \lambda & \cos \varphi \cos \lambda \\ -\sin \varphi \sin \lambda & -\cos \lambda & \cos \varphi \sin \lambda \\ \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \end{pmatrix}. \quad (2.44).$$

Перетворення тензора градієнтів між різними системами координат

При трансформуванні координат від одної системи до іншої використовуються матриця повороту простору \mathbf{R} , наприклад трансформування координат від геоцентричної до топоцентричної системи виконується відповідно до рівняння:

$$\mathbf{X}_g = \mathbf{R}\mathbf{X}_t, \quad (2.45)$$

де \mathbf{X}_g і \mathbf{X}_t є векторами прямокутних координат у геоцентричній та топоцентричній системах відповідно.

Для того, щоб трансформувати градієнти між цими системами потрібно використати правило перетворення коваріації (2.46).

$$\mathbf{V}_g = \mathbf{R}\mathbf{V}_t\mathbf{R}^T, \quad (2.46),$$

де V_g і V_t є тензорами градієнтів у геоцентричній та топоцентричній системах відповідно.

Отже, остаточно трансформування гравітаційних градієнтів із системи GRF до системи LNOF можна виконати так:

$$V_{LNOF} = R_{L-E}^T [R_{E-I}^T (R_{G-I} V_{GRF} R_{G-I}^T) R_{E-I}] R_{L-E}, \quad (2.47)$$

де R з відповідними індексами означає трансформування між певними системами, так букви в індексах показують між якими системами координат відбувається трансформування (LNOF, GRF, IRF, EFRF).

За цим же правилом можна виконувати оцінку точності.

2.3. Основні поверхні та різниці нормальної та реальної сили тяжіння на них

Для виконання будь-яких вимірів спочатку необхідно визначити систему координат, в якій будуть проводитись ці виміри. Так і в геодезії існує декілька основних поверхонь [4, 83]. Основною математичною відліковою поверхнею прийнято двоосний еліпсоїд обертання орієнтований певним чином до тіла Землі (вимоги до такого еліпсоїда описані в пункті 2.1). Такий еліпсоїд та встановлене на ньому нормальне значення потенціалу сили тяжіння визначає геодезичну референцну систему. (Оскільки більшість інформації черпалась із іноземних джерел то для перекладу використовувався англійсько-українсько геодезичний словник [94]).

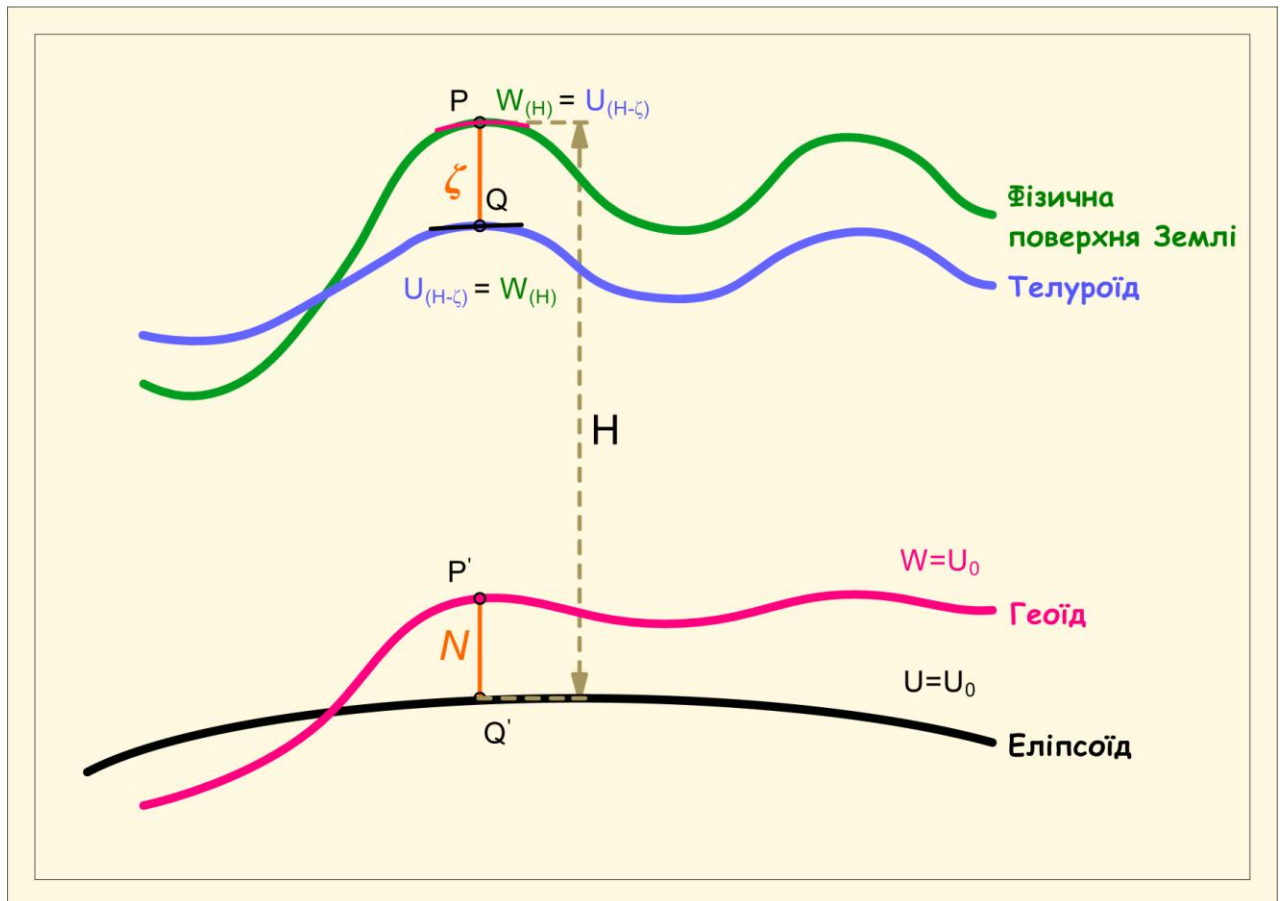


Рис. 2.6. Основні відлікові поверхні в геодезії.

Еквіпотенціальна поверхня, на якій значення реального потенціалу W рівне значенню нормального потенціалу на еліпсоїд U_0 називається геоїдом. Відхилення геоїда від еліпсоїда називають висотою геоїда і позначають N . Також важливим поняття є поверхня телуроїда.

Телуроїд – це поверхня, на якій значення нормального потенціалу $U_{(Q)}$ рівне значенню реального потенціалу на поверхні Землі $W_{(P)}$. Точки P та Q з'єднуються лінією, яка співпадає із силовою лінією, яка проходить через ці дві точки. Відхилення телуроїда від фізичної поверхні Землі називають аномалією висоти і позначають через ζ . Якщо відкласти такі відхилення від поверхні еліпсоїда то утвориться поверхня квазігеоїда.

Як згадувалось вище основною досліджуваною функцією є збурюючий потенціал, який представляється різницею нормального та реального потенціалів, так і для вимірів прискорення сили тяжіння існує різниця вимірюваного значення g та нормального значення γ , яка називається аномалією сили тяжіння Δg . Протягом того як розвивалась геодезія це поняття змінювало

свій сенс, більш того, є декілька його трактувань [4, 91], розглянемо такі визначення аномалії сили тяжіння у вільному повітрі: класичне визначення та сучасне визначення (в сенсі Молоденського). Аномалія сили тяжіння у вільному повітрі у класичному значенні (змішана аномалія) дорівнює різниці зредукованої реальної сили тяжіння на геоїд та нормальній силі тяжіння на еліпсоїді.

$$\Delta g^{kl} = g_N - \gamma_0. \quad (2.48)$$

Молоденський ввів інше визначення аномалії сили тяжіння, яким зараз користуються на практиці. Аномалія сили тяжіння в сучасному сенсі це різниця реальної сили тяжіння на поверхні Землі та нормальної сили тяжіння на телуроїді.

$$\Delta g = g_P - \gamma_Q. \quad (2.49)$$

Варто зазначити, що ще існує поняття збурення сили тяжіння δg - це різниця реальної сили тяжіння на поверхні Землі та значення нормальної сили тяжіння у цій ж самій точці (чиста аномалія)

$$\delta g = g_P - \gamma_P. \quad (2.50)$$

Оскільки аномалію сили тяжіння [40, 91,] можна представити наступним рівнянням:

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - 2\frac{T}{r}, \quad (2.51)$$

то остаточно Δg через гармонічні коефіцієнти запишеться так:

$$\Delta g = \frac{GM}{R^2} \sum_{n=2}^{N_{\max}} (n-1) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+2} \sum_{m=0}^n (\overline{\Delta C}_{nm} \cos(m\lambda) + \overline{\Delta S}_{nm} \sin(m\lambda)) \overline{P}_{nm}(\cos\theta) \quad (2.52)$$

Якщо дані розташовані на поверхні геоїда тобто $r=R$, то рівняння (2.52) переписеться так:

$$\Delta g = \frac{GM}{R^2} \sum_{n=2}^{N_{\max}} (n-1) \sum_{m=0}^n (\overline{\Delta C}_{nm} \cos(m\lambda) + \overline{\Delta S}_{nm} \sin(m\lambda)) \overline{P}_{nm}(\cos\theta) \quad (2.53)$$

Зовнішнє підсумування починається з 2, оскільки коефіцієнти нульового та першого порядків є сталими і дорівнюють одиниці та нулям відповідно.

Аналогічні перетворення виконують для збурення сили тяжіння δg .

$$\delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} \quad (2.54)$$

$$\delta g = \frac{GM}{R^2} \sum_{n=2}^{N_{\max}} (n+1) \sum_{m=0}^n (\overline{\Delta C}_{nm} \cos(m\lambda) + \overline{\Delta S}_{nm} \sin(m\lambda)) \overline{P}_{nm}(\cos \theta) \quad (2.55)$$

Залежність аномалії сили тяжіння та її збурення можна представити за допомогою такого рівняння:

$$\delta g = \Delta g + \frac{2}{R} T. \quad (2.56)$$

2.4. Редукування супутникових гравітаційних градієнтів на сферичну поверхню

На сьогоднішній день розв'язання різноманітних задач виконується з надзвичайно великою кількістю надлишкових вимірів. Часто невідомі параметри залежать від великої кількості різних змінних. При громістких обчисленнях доцільно зводити кількість таких змінних до мінімуму. Розглянемо вертикальні гравітаційні градієнти V_{zz} [11], які безпосередньо використовуються в даній роботі. Отже, дана функція, а саме градієнт залежить від трьох основних аргументів: широта, довгота та радіус-вектор, очевидно, що також необхідно знати ряд певних констант.

Дані гравітаційні градієнти, отримані за допомогою місії GOCE, є новим типом вимірювальних даних, то це дасть змогу покращити вже відомі параметри гравітаційного поля Землі. Виміри виконуються в просторі і залежать від трьох координат, тому при їх опрацюванні потрібно використовувати досить громісткі формули, де буде фігурувати радіус кожного виміру. Приведення цих даних на сферу [47, 60, 66, 104] дасть змогу значно спростити та прискорити обчислення. Отже, необхідно розробити алгоритм редукування вимірних градієнтів сили тяжіння на сферу, при відносно невеликих відстанях, а саме декілька десятків кілометрів.

Оскільки $V_{rr} = V_{zz}$, то такий градієнт можна задати наступним рівнянням :

$$V_{zz} = \frac{GM}{R^3} \sum_{n=0}^{N_{\max}} (n+1)(n+2) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+3} \sum_{m=0}^n (\overline{C}_{nm} \cos(m\lambda) + \overline{S}_{nm} \sin(m\lambda)) \overline{P}_{nm}(\cos \theta). \quad (2.57)$$

Очевидно, що при сталому радіус-векторі (r), функція V_{zz} буде залежати лише від двох аргументів: широти і довготи, що у свою чергу спростить

обчислення. Отже, основним завдання цього параграфу є приведення всіх вимірів на певну сферу [29, 47, 60, 66] заданого радіусу.

Таку функцію можна розкласти в ряд Тейлора відносно певного нульового значення.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a) \frac{(x-a)^n}{n!} = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} \dots, \quad (2.58)$$

де a - точка відносно якої розкладається функція, x - біжуча точка, $f^{(n)}(a)$ - похідна від функції в точці, $(x-a)$ - приріст аргументу, який рівний Δr .

Для того, щоб виконати таке редукування, потрібно обрати сферичну поверхню з радіусом, який і буде приймати значення a і відносно якого буде виконаний розклад. Також важливо визначити кількість членів розкладу ряду. Так, наприклад, нульовий член розкладу отримується підстановкою a замість r в рівняння (2.57). Для обчислення другого члену необхідно знати похідну від виразу (2.57).

$$\frac{\partial V_{zz}}{\partial r} = -\frac{GM}{R^4} \sum_{n=0}^{N_{\max}} (n+1)(n+2)(n+3) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+4} \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos(m\lambda) + \bar{S}_{nm} \sin(m\lambda)) \bar{P}_{nm}(\cos\vartheta) \quad (2.59)$$

Так для прикладу розклад з використанням нульового та першого члена буде виглядати:

$$V_{zz} = V_{zz(a)} + \frac{\partial V_{zz}}{\partial r_{(a)}} \Delta r \quad (2.60),$$

де V_{zz} - вимірний градієнт, a - радіус обраної сфери, $V_{zz(a)}$ - градієнт у відповідній точці на сфері (широта та довгота змодельованого та вимірного градієнтів однакові), $\frac{\partial V_{zz}}{\partial r_{(a)}}$ - похідна в точці, Δr - приріст радіус-вектора який рівний різниці біжучого радіусу та радіуса сфери $\Delta r = r - a$.

Підставивши значення похідної та перенісши шукане значення $V_{zz(a)}$ градієнта на сфері отримаємо остаточний вираз :

$$V_{zz(a)} = V_{zz} + \frac{GM}{R^4} \sum_{n=0}^{N_{\max}} (n+1)(n+2)(n+3) \left(\frac{R}{a}\right)^{n+4} \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos(m\lambda) + \bar{S}_{nm} \sin(m\lambda)) \bar{P}_{nm}(\cos\vartheta) \bullet \Delta r \cdot (2.61)$$

2.5. Методи фільтрації даних

При виконанні реальних вимірів завжди присутні похибки, які залежать від точності приладів, які виконують ці виміри. Так само у даних гравітаційних градієнтів присутні похибки, які ще називають шумом. Основною причиною такого шуму в даних GOCE [28] є постійна зміна швидкості супутника, яка впливає на роботу електростатичного градієнтометра, що впливає на точність вимірювання. Для того щоб зменшити вплив шуму на основний сигнал існує багато способів фільтрації. В роботі використовуються два фільтра: фільтр Гауса та FFT – фільтр. Розглянемо їх більш детально.

Фільтр Гауса.

В основі цього фільтру лежить нормальний закон розподілу або закон розподілу Гауса [30]. Для одновимірного випадку цей закон виглядає так:

$$G(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad (2.62)$$

де σ – стандарте відхилення, a – математична сподівання.

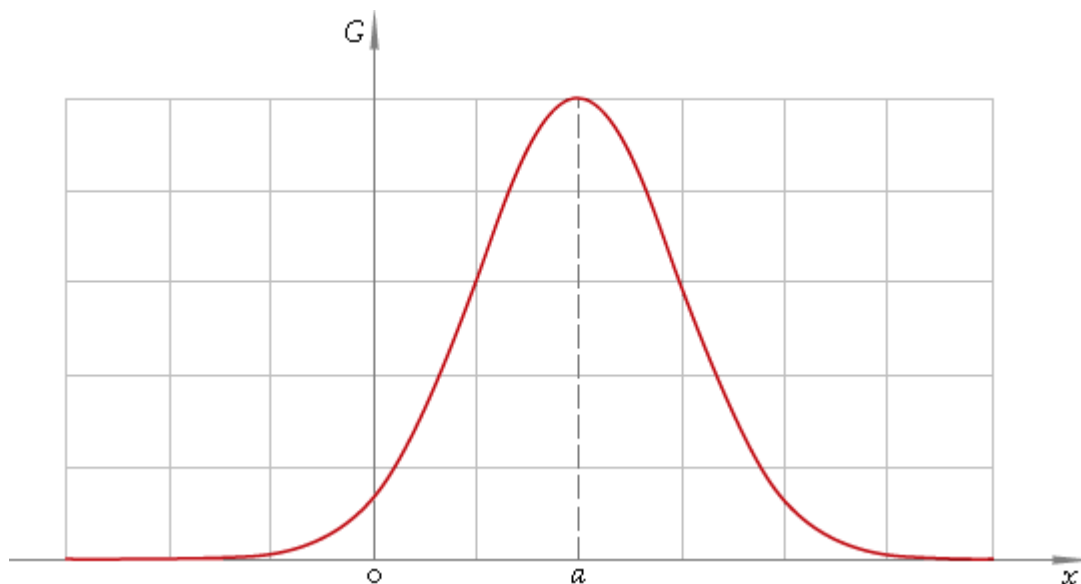


Рис. 2.7. Нормальний закон розподілу.

Якщо дані центровані, тобто a рівне нулю, то цей закон приймає наступного вигляду:

$$G(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}. \quad (2.63)$$

Видно, що закон працює на проміжку $x \in (-\infty; +\infty)$, тобто не безмежному проміжку, тому потрібно встановити обмеження. Зазвичай таким обмеженнями є потрійне стандартне відхилення.

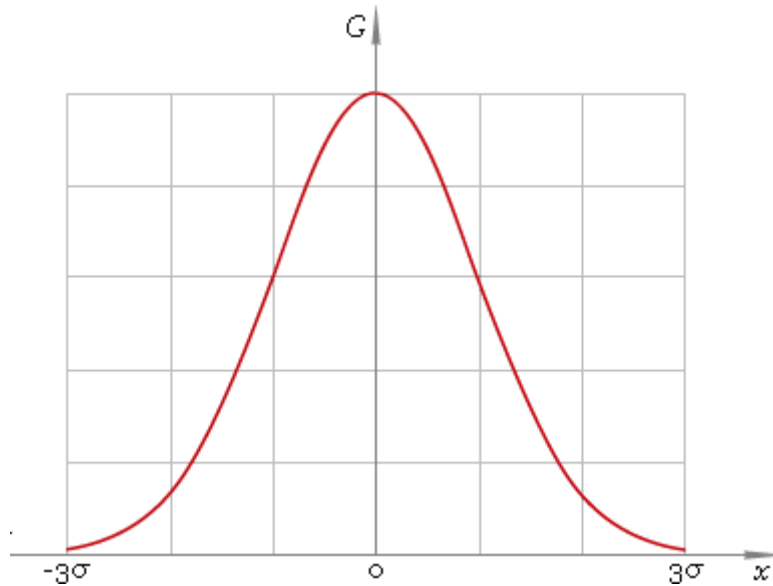


Рис. 2.8. Нормальний закон на проміжку $x \in (-3\sigma; 3\sigma)$.

Нехай маємо сигнал $S=s(i)$, тоді для того, щоб отримати нове фільтроване значення $s'(i)$, потрібно обчислити нормовані ваги G'_n на всьому проміжку $x \in (-3\sigma; 3\sigma)$ при чому x набуває значень від $-N$ до $+N$, де $s'(i)$ знаходиться в центрі цього проміжку, такі дії повторюються для кожного елементу сигналу S . Оскільки сума нормованих ваг має дорівнювати одиниці, отже $G'_n = \frac{G_n}{\sum_{n=-N}^N G_n}$.

Фільтровані значення тоді будуть обчислюватись $s'_i = \sum_{n=-N}^N s_{i+n} G'_n$.

В нашому випадку дані розташовані на поверхні сфери, тому очевидно, що це двовимірний випадок і тоді двовимірний нормальний закон розподілу можна представити, як добуток двох одновимірних

$$G(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (2.64a)$$

$$G(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \quad (2.64b)$$

$$G(x, y) = G(x)G(y) \quad (2.64b)$$

$$G(x, y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \quad (2.64)$$

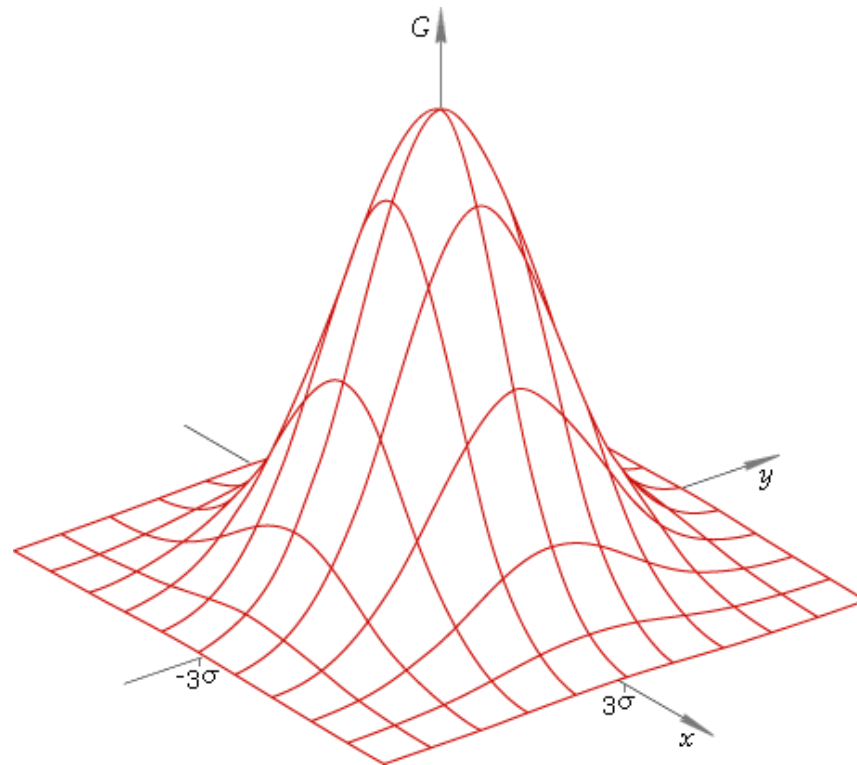


Рис. 2.9. Нормальний закон розподілу для двох змінних.

Для того, щоб профільтрувати такий двовимірний масив, потрібно його розбити на колонки та рядки і про фільтрувати по черзі як два одномірних масиви.

FFT – фільтр.

Суть швидкого перетворення Фур'є полягає у розкладі певної функції у просторі на суму функцій (гармонік), які залежать від частоти. Іншими словами функція у просторовій галузі переводиться у частотну. Маючи функцію представлену сумую певних гармонік ми можемо виключити певні гармоніки відповідної частоти і скласти первинну функцію вже без цих частот, в цьому і полягає суть фільтрування способом Швидкого Перетворення Фур'є [68, 107].

Нехай дискретна задана функція в просторовій галузі буде позначатись F_n , тоді дискретно задана функція в частотній галузі (аргументом є частота) нехай буде позначена f_k . Користуючись даними позначеннями можна записати такий вираз :

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-\frac{2\pi}{N}kn}, \quad (2.65)$$

де N - кількість дискретних значень функції.

Варто зазначити експоненту можна переписати у вигляді тригонометричної функції

$$e^{i\phi} = \cos(\phi) + i \sin(\phi), \quad (2.66)$$

що показує, що значення функції f_k є нічим іншим, як коефіцієнтами певного тригонометричного ряду. Такі коефіцієнти можна знайти за допомогою оберненого перетворення Фур'є:

$$f_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{\frac{2\pi}{N}kn}. \quad (2.67)$$

Після знаходження таких гармонік ми можемо виключити нам необхідні частоти і вже скласти первинний сигнал без внеску відкинутих частот.

2.6. Застосування методу найменших квадратів при побудові гравітаційного поля Землі

Даний метод найменших квадратів [5, 75, 84, 96] є досить популярним у багатьох галузях науки, але особливо часто він також використовується і в геодезії.

Вихідними даними для побудови моделі служать вертикальні гравітаційні градієнти V_{zz} , які відповідають другій похідній від гравітаційного потенціалу вздовж радіус-вектора [12].

$$V_{zz} = V_{rr}, \quad (2.68)$$

$$V_{rr} = \frac{GM}{R^3} \sum_{n=N_{\min}}^{N_{\max}} (n+1)(n+2) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+3} \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos(n\lambda) + \bar{S}_{nm} \sin(n\lambda)) \bar{P}_{nm}(\cos\vartheta). \quad (2.69)$$

Розписавши даний вираз ми побачимо, що гармонічні коефіцієнти C_{lm} та S_{lm} лінійно входять в даний вираз. Нехай кількість вимірів рівна k . Перепишемо утворену систему рівнянь у матричному вигляді [96]:

$$\mathbf{Ax} + \mathbf{L} = \mathbf{V}, \quad (2.70)$$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^t \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{L} \quad (2.71)$$

де \mathbf{A} - матриця параметричних рівнянь, \mathbf{X} - вектор невідомих (гармонічних коефіцієнтів), \mathbf{L} - вектор вільних членів (V_{zz}), \mathbf{V} - вектор поправок. Розглянемо детальніше матрицю параметричних рівнянь $\mathbf{A}=(a_{ij})$, де a_{ij} - елемент матриці параметричних рівнянь, який знаходиться на перетині i -го рядка та j -го стовпця. Нехай порядок розкладу рівний n , тоді кількість невідомих гармонічних коефіцієнтів можна визначити як $nn=(n+1)^2$, де nn - кількість невідомих гармонічних коефіцієнтів. Згідно цих позначень матриця \mathbf{A} буде мати розмірність $k \times nn$. Якщо будувати модель до 250 порядку/ступеня використовуючи масив даних за один місяць з частотою одна секунда, то розмірність такої матриці буде більша за розмірність $10^6 \times 6 \cdot 10^4$, а опрацювання таких матриць забирає багато часу та вимагає потужного апаратного забезпечення [61, 62].

Розглянемо детальніше елементи матриці параметричних рівнянь a_{ij} , згідно виразу вертикального гравітаційного градієнту (2.69) їх можна записати:

$$a_{ij} = \frac{GM}{R^3} (n+1)(n+2) \left(\frac{R}{r_i} \right)^{n+3} \Omega_i(j) \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta_i), \quad (2.72)$$

де функція $\Omega_i(j)$ може набувати значень $\cos(m\lambda_i)$ або $\sin(m\lambda_i)$ в залежності від j .

Розглянемо одне з параметричних рівнянь:

$V_{zz,i} = a_{i0}C_{00} + a_{i1}C_{10} + a_{i2}C_{11} + a_{i3}S_{11} + a_{i4}C_{20} \dots$, звідси легко побачити, що при $j=0,1,2,4$, функція $\Omega_i(j)=\cos(m\lambda_i)$, а при $j=3$, функція $\Omega_i(j)=\sin(m\lambda_i)$. За цим же принципом визначаються індекси n та m .

Введемо позначення матриці нормальних рівнянь $\mathbf{N}=(n_{ij})$, тоді $\mathbf{N}=\mathbf{A}^T\mathbf{A}$. Оскільки розмірність $\mathbf{A} \in k \times nn$, то розмірність \mathbf{N} буде $nn \times nn$. Звідси видно, що матриця \mathbf{N} менша за матрицю \mathbf{A} , отже доцільно зразу будувати матрицю нормальних рівнянь без проміжної побудови матриці параметричних рівнянь.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdot & a_{1,nn} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k,1} & \cdot & a_{k,nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdot & a_{k,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1,nn} & \cdot & a_{k,nn} \end{bmatrix}. \quad (2.73)$$

Отже, елемент матриці нормальних буде визначатись: $n_{ij} = \sum_{s=1}^k a_{s,i} a_{s,j}$, тоді

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sum_{s=1}^k a_{s,1} a_{s,1} & \cdot & \sum_{s=1}^k a_{s,1} a_{s,nn} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum_{s=1}^k a_{s,nn} a_{s,1} & \cdot & \sum_{s=1}^k a_{s,nn} a_{s,nn} \end{bmatrix}. \quad (2.74)$$

Оскільки елементи матриці можна визначати незалежно один від одного це дає можливість обчислювати окремі частинки матриці окремо на різних комп'ютерах, що дає суттєву перевагу у часі обчислень (за наявності декількох комп'ютерів). Видно, що кожен елемент є певною сумою і можна винести сталий коефіцієнт за знак суми, що в подальшому значно прискорить процес обчислень.

Суму можна розкласти на дві суми:

$$\sum_{s=1}^k a_{s,i} a_{s,j} = \sum_{s=1}^{p_1} a_{s,i} a_{s,j} + \sum_{s=p_2}^k a_{s,i} a_{s,j}, \quad (2.75)$$

де p_1 та p_2 два послідовні цілі числа відповідно, які лежать у проміжку $(1, k)$.

Згідно цього впливає ще одна важлива властивість даного методу. Розглянемо проміжок часу у два місяці, загальну матрицю нормальних рівнянь можемо отримати, як суму двох матриць нормальних рівнянь для кожного місяця.

Нехай початкова епоха t_0 , кінець першого місяця t_1 , і кінець другого місяця t_2 , тоді загальна матриця буде мати вигляд:

$$\begin{bmatrix} \sum_{s=t_0}^{t_2} a_{s,1} a_{s,1} & \cdot & \sum_{s=t_0}^{t_2} a_{s,1} a_{s,nn} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum_{s=t_0}^{t_2} a_{s,nn} a_{s,1} & \cdot & \sum_{s=t_0}^{t_2} a_{s,nn} a_{s,nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{s=t_0}^{t_1} a_{s,1} a_{s,1} & \cdot & \sum_{s=t_0}^{t_1} a_{s,1} a_{s,nn} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum_{s=t_0}^{t_1} a_{s,nn} a_{s,1} & \cdot & \sum_{s=t_0}^{t_1} a_{s,nn} a_{s,nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{s=t_1+1}^{t_2} a_{s,1} a_{s,1} & \cdot & \sum_{s=t_1+1}^{t_2} a_{s,1} a_{s,nn} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum_{s=t_1+1}^{t_2} a_{s,nn} a_{s,1} & \cdot & \sum_{s=t_1+1}^{t_2} a_{s,nn} a_{s,nn} \end{bmatrix}. \quad (2.76)$$

Даний принцип [97] можна використати не тільки для розбиття на дві частини. Кількість частин потрібно вибирати в залежності від того, матрицю, якого розміру зручно будувати.

Аналогічні виведення будуть і для аномалій сили тяжіння Δg , елементами параметричного рівняння для якого буде:

$$a_{ij} = \frac{GM}{R^2} (n-1) \left(\frac{R}{r_i} \right)^{n+2} \Omega_i(j) P_{nm}(\cos \vartheta_i) \quad (2.77)$$

2.7. Процедура «видалення-відновлення»

На даний час існує дуже багато побудованих моделей гравітаційного поля Землі. Різні моделі побудовані різними методами та базуються на різних наборах вхідної інформації. Наприклад, цілий ряд супутникових даних, таких як альтиметрія, градієнтометрія, відомості про орбіту цих супутників, а також є цілий ряд як морської так і наземної гравіметрії. Кожен з цих типів даних по-різному відображає короткохвильову, середньохвильову та довгохвильову складові. Місія GOCE мала на меті покращити середньохвильову та короткохвильову складові гравітаційного потенціалу. Таким чином постало питання зменшити вплив довгохвильової або низькочастотної складової.

Першим кроком є обчислення модельних значень, для прикладу візьмемо вертикальні гравітаційні градієнти V_{zz} та модельне значення V_{zz}^* , яке обчислюється:

$$V_{zz}^* = \frac{GM}{R^3} \sum_{n=0}^{N_{\max}} (n+1)(n+2) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+3} \sum_{m=0}^n \left(\bar{C}_{nm}^* \cos(m\lambda) + \bar{S}_{nm}^* \sin(m\lambda) \right) \bar{P}_{nm}(\cos\theta), \quad (2.78)$$

тоді обчислюються різниці:

$$\Delta V = V_{zz} - V_{zz}^* \quad (2.79)$$

Таким чином, в подальшому ми будемо обчислювати не гармонічні коефіцієнти \bar{C}_{nm} та \bar{S}_{nm} , а прирости до них $\overline{\Delta C}_{nm}$ та $\overline{\Delta S}_{nm}$. Для отримання остаточних коефіцієнтів необхідно відновити значення додавши модельні коефіцієнти

$$\left. \begin{array}{l} \bar{C}_{nm} \\ \bar{S}_{nm} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \overline{\Delta C}_{nm} + \bar{C}_{nm}^* \\ \overline{\Delta S}_{nm} + \bar{S}_{nm}^* \end{array} \right. \quad (2.81)$$

Отже, можна розв'язати одну із основних задач дисертаційного дослідження – побудову комбінованого розв'язку [25, 26, 27, 38] моделі гравітаційного поля Землі.

2.8. Спектральна щільність, як характеристика гравітаційних моделей

Для наочного порівняння моделей гравітаційного поля було запроваджено спектральну щільність [51], яка відображає внесок кожного окремого порядку. Такий внесок можна розрахувати, як для самих коефіцієнтів, так і для: аномалій сили тяжіння, висоти геоїда, збурення сили тяжіння, гравітаційних градієнтів, збурюючого потенціалу та ін. Варто зазначити, що спектральна щільність і порядкові дисперсії це є різні речі, хоча деколи їх не розрізняють (дисперсія $\sigma_n = \left(\sum_{m=0}^n \bar{C}_{nm}^2 + \bar{S}_{nm}^2 \right) / (2n+1)$, за умови якщо вважати, що гармонічні коефіцієнти є центрованими величинами). Спектральна щільність для коефіцієнтів, які відображають збурюючий потенціал розраховується так:

$$\sigma_n = \sqrt{\sum_{m=0}^n \bar{C}_{nm}^2 + \bar{S}_{nm}^2}, \quad (2.82)$$

Тоді можна розрахувати всі інші внески:

- в збурюючий потенціал (m^2/c^2), $\sigma_n(T) = \frac{GM}{R} \sigma_n$,
- у висоти геоїда (m), $\sigma_n(N) = R \sigma_n$,
- у збурення сили тяжіння (m/c^2), $\sigma_n(\delta g) = \frac{GM}{R^2} (n+1) \sigma_n$,
- в аномалії сили тяжіння (m/c^2), $\sigma_n(\Delta g) = \frac{GM}{R^2} (n-1) \sigma_n$,
- у вертикальні гравітаційні градієнти ($1/c^2$),
 $\sigma_n(V_{zz}) = \frac{GM}{R^3} (n+1)(n+2) \sigma_n$.

Згідно закону Каула [46] гармонічні коефіцієнти згасають за таким правилом:

$$\sigma_n \approx \sqrt{(2n+1) \frac{10^{-10}}{n^4}}, \quad (2.83)$$

Даним законом можна користуватись для регуляризації розв'язку з метою усунення осциляцій або раптового зростання коефіцієнтів з причин наявності певного шуму.

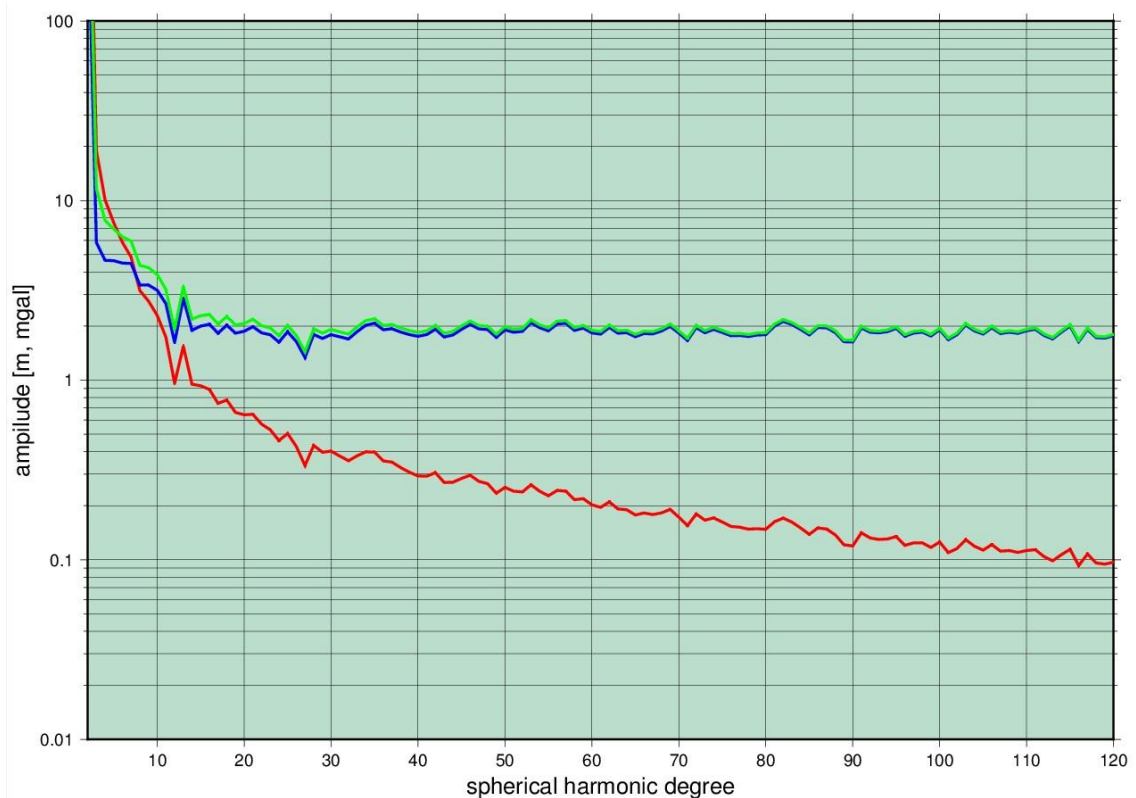


Рис. 2.10. Приклад спектральної щільності висот геоїда (червоний), збурення сили тяжіння (зелений) та аномалії сили тяжіння (синій).

Зазвичай такі характеристики починають виводити з третього порядку, для кращої наочності.

Існує ще одна характеристика, яка може бути розрахована для кожної з попередніх, це загальне накопичення, яке обчислюється так:

$$\sigma_{n_1 n_2} = \sum_{n=n_1}^{n_2} \sqrt{\sigma_n^2}. \quad (2.84)$$

Коли використовують спектральні характеристики для порівняння двох моделей, то це зазвичай внесок в геоїд цих двох моделей, їх різниця та накопичена різниця на кожному порядку. Наведемо приклад порівняння двох моделей.

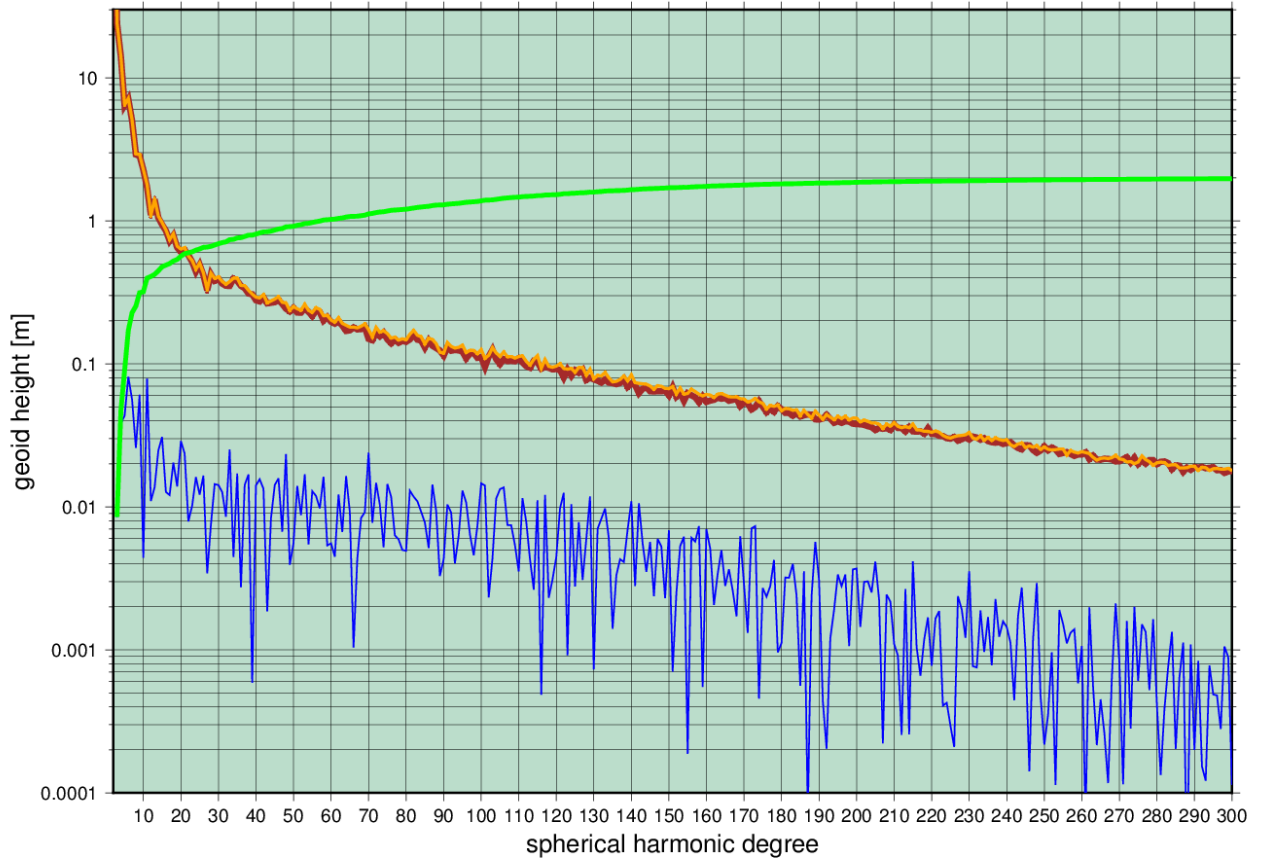


Рис. 2.11. Порівняння спектральної щільності моделей EGM2008 та однієї з моделей автора (EGM2008 - коричневий, модель автора – помаранчевий, різниці цих двох моделей – синій, накопичені різниці -зелений).

2.9. Побудова наближеного квазігеоїда

Як відомо висоти геоїда можна обчислити за допомогою формули Брунса, згідно роботи [40]:

$$N = \frac{T}{\gamma}, \quad (2.85)$$

Де збурюючий потенціал можна обчислити згідно відомої формули

$$T = \frac{GM}{R} \sum_{n=2}^{N_{\max}} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (\overline{\Delta C}_{nm} \cos(m\lambda) + \overline{\Delta S}_{nm} \sin(m\lambda)) \overline{P}_{nm}(\cos\theta) \quad (2.86)$$

А нормальну силу тяжіння на еліпсоїді – за допомогою формули Сомільяна

$$\gamma = \frac{a\gamma_a \cos^2(\varphi) + b\gamma_b \sin^2(\varphi)}{\sqrt{a \cos^2(\varphi) + b \sin^2(\varphi)}}, \quad (2.87)$$

Де a і b велика та малі півосі еліпсоїда відповідно, γ_a та γ_b - нормальна сила тяжіння на екваторі та полюсі відповідно.

Отримані висоти використовуються для порівняння із даними GNSS-нівелювання.

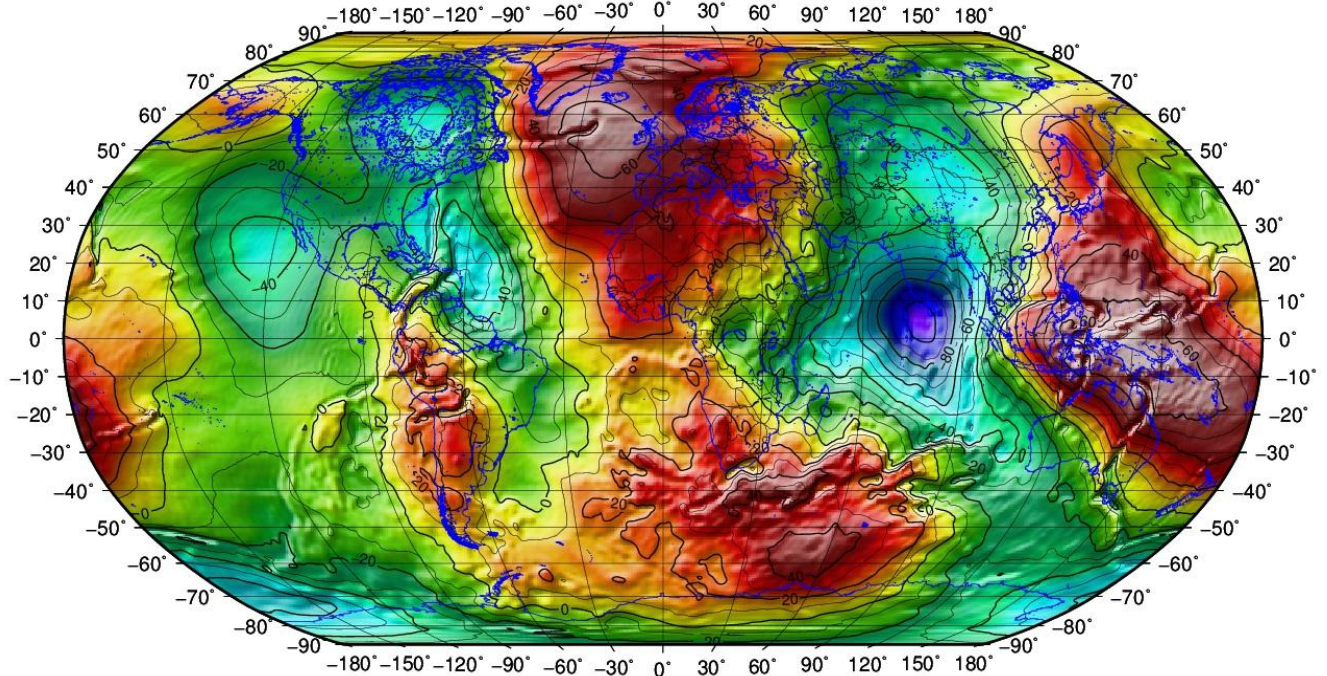


Рис. 2.12. Приклад побудови квазігеоїда за однією із моделей автора.

2.10. Висновки та узагальнення

1. Таким чином у другому розділі наведено основні теоретичні відомості про методи та поняття, які безпосередньо стосуються дисертаційного дослідження та використовуються при розв'язанні основних задач, поставлених у першому розділі. Описано базові поняття теорії потенціалу, супутникову градієнтометрію, яка є новим кроком в питаннях дослідження гравітаційного поля Землі, показано основні відлікові поверхні та зв'язок вимірної сили тяжіння з цими поверхнями, що є важливо при складанні нормальних рівнянь. Також показано спосіб редукції вертикальних гравітаційних градієнтів на сферичну поверхню, що є одним із кроків під час моделювання гравітаційного поля Землі за допомогою методики, яка наведена у даній роботі.

2. Відповідальним кроком при роботі з будь-якими вимірами є їх перевірка, тому другий розділ містить пункт, у якому показано методи фільтрації даних: FFT-фільтр та фільтр Гауса. Оскільки робота базується на

методі найменших квадратів, тому підрозділ 2.6 описує базові співвідношення даного методу. Для вирішення проблеми спільного використання даних запропоновано процедуру «видалення-відновлення».

3. Модель гравітаційного поля – це досить великий набір коефіцієнтів, тому для їх швидкого аналізу наведено характеристики спектральної щільності, які подаються за допомогою наглядного графіка. У кінці розділу наведено основні співвідношення для побудови наближеного квазігеоїда з метою перевірки алгоритму визначення гармонічних коефіцієнтів.

4. Для вирішення третьої задачі (комбінований розв’язок для гравітаційного поля Землі) обрано техніку «видалення-відновлення» (розділ 2.7), яка дає змогу обчислити низькочастотну та середньочастотну складові гравітаційного поля Землі за даними супутникової градієнтометрії, а високочастотну за даними аномалій сили тяжіння.

5. Додатково у розділі 2.6 показано алгоритм паралельного обчислення матриці нормальних рівнянь, який може бути рекомендований для будь-яких задач що базуються на методі найменших квадратів з однотипними даними.

РОЗДІЛ 3. ОПТИМІЗАЦІЯ АЛГОРИТМУ ВИЗНАЧЕННЯ ГАРМОНІЧНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ

Визначення C_{nm} та S_{nm} виконується за двома наборами даних, а саме: масиви вертикальних гравітаційних градієнтів та аномалій сили тяжіння. Для знаходження невідомих використовується метод найменших квадратів (параметричний спосіб). Відомо, що кількість параметричних рівнянь рівна кількості вимірів, що в даному випадку буде не мала (більше 20 млн.). Також відомо, що матриця нормальних рівнянь на пряму залежить від кількості невідомих, наприклад, для моделі 360 порядку/ступеня, розмірність такої матриці буде $361^2 \times 361^2$, що досить ускладнює її обертання. Більш того, кожен вимір характеризується трьома координатами. Якщо у випадку Δg вони приведені на сферу і мають постійний радіус-вектор, то про вертикальні гравітаційні градієнти такого сказати не можна (супутник не знаходився постійно на одній висоті).

Отже, зі всього вище сказаного будуть виконуватися такі оптимізації:

- Приведення вертикальних гравітаційних градієнтів на сферичну поверхню, з метою надання радіус-вектору всіх вимірів сталого значення, що спрощує процес подальших досліджень.
- Оскільки кількість невідомих значно менша від кількості вхідних даних, то алгоритм буде базуватися на складанні матриці нормальних рівнянь без попереднього складання матриці параметричних рівнянь.
- Розбиття вхідної інформації на 8 частин з метою ефектинішого її використання.
- Розрідження матриці нормальних рівнянь за допомогою розроблення антиподно-рівномірного ґриду, внаслідок чого виникають певні ортогональні властивості.
- Обертання розрідженої матриці нормальних рівнянь, способом її розбиття на певну кількість менших незалежних матриць.

Таким чином третій розділ описує власні напрацювання автора, що дозволяють оптимізувати процес визначення гармонічних коефіцієнтів.

3.1. Вибір параметрів редукції гравітаційних градієнтів на сферу

Для виконання редукування супутникових градієнтів за принципом, який пропонується у підрозділі 2.4, необхідно обрати кількість членів ряду та обчислити похідні. Для обчислення основного внеску редукційної поправки достатньо використати три члени [104] розкладу ряду (3.1).

$$V_{zz0} = V_{zz} - \left(\frac{\partial V_{zz}}{\partial r} \right)_0 \Delta r - \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 V_{zz}}{\partial r^2} \right)_0 \Delta r^2 - \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 V_{zz}}{\partial r^3} \right)_0 \Delta r^3 \quad (3.1)$$

Для обчислення остаточного виразу необхідно обчислити похідні (3.2а,б,в).

$$\left(\frac{\partial V_{zz}}{\partial r} \right)_0 = -\frac{GM}{R^4} \sum_{n=0}^{180} (n+1)(n+2)(n+3) \left(\frac{R}{a} \right)^{n+4} \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos(m\lambda) + \bar{S}_{nm} \sin(m\lambda)) \bar{P}_{nm}(\cos\vartheta) \quad (3.2a)$$

$$\left(\frac{\partial^2 V_{zz}}{\partial r^2} \right)_0 = \frac{GM}{R^5} \sum_{n=0}^{180} (n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \left(\frac{R}{a} \right)^{n+5} \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos(m\lambda) + \bar{S}_{nm} \sin(m\lambda)) \bar{P}_{nm}(\cos\vartheta) \quad (3.2б)$$

$$\left(\frac{\partial^3 V_{zz}}{\partial r^3} \right)_0 = -\frac{GM}{R^6} \sum_{n=0}^{180} (n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5) \left(\frac{R}{a} \right)^{n+6} \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos(m\lambda) + \bar{S}_{nm} \sin(m\lambda)) \bar{P}_{nm}(\cos\vartheta) \quad (3.2в)$$

Саме за такими редукційними параметрами буде обчислюватись поправка з використанням апріорної моделі 180 порядку/ступеня гравітаційного поля Землі, що розв'язує першу основну задачу, поставлену у розділі 1.4.

3.2. Антподно-рівномірна сітка розташування вхідних даних

При побудові моделей гравітаційного поля важливим кроком є розташування вхідних даних, оскільки це може дати певні переваги в залежності від подальшого алгоритму обчислення. Існує багато таких сіток, розроблених для різних алгоритмів обчислень гармонічних коефіцієнтів. Наприклад, є такі регулярні сітки: географічна, сітка Дріскола-Хілі, трикутна сітка із точками у вершинах або в центрі, сітка Ройтера, майже рівномірна сітка та багато інших [22]. Всі дані сітки часто називають «ґрид» (grid) [29], тому щоб не відхилялись від всесвітньо прийнятих стандартів і для збереження зрозумілості про що саме йдеться надалі, ми будемо вживати замість словосполучення «регулярна сітка» слово «ґрид».

Виходячи із поставлених задач, а саме знайти таке розташування точок, щоб воно давало суттєві переваги при подальших обчисленнях, та використання ортогональних властивостей на сфері [64]. Далі буде розроблено антиподно-рівномірний ґрид. Однією з переваг при розташуванні даних на такому ґриді є розріджена система нормальних рівнянь, тобто домінуюча більшість елементів дорівнює нулю. Ще однією перевагою є необхідність використання лише даних першого октанту на сфері, тобто при обчислення елементів матриці нормальних рівнянь потрібно підсумовувати лише 1/8 частину даних від загальної кількості.

Отже, в даному пункті потрібно дослідити ці елементи матриці нормальних рівнянь. Таким елементом є ніщо інше як добуток певних рядків матриці параметричних рівнянь. Позначимо такий добуток n_{ij} (згідно пункту 2.6), в свою чергу він обчислюється так:

$$n_{ij} = \sum_{k=1}^K \left(\frac{GM}{R^3} \right)^2 (n_1 + 1)(n_1 + 2)(n_2 + 1)(n_2 + 2) \left(\frac{R}{r} \right)^{n_1 + 3 + n_2 + 3} \begin{Bmatrix} \cos(m_1 \lambda_k) \\ \sin(m_1 \lambda_k) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(m_2 \lambda_k) \\ \sin(m_2 \lambda_k) \end{Bmatrix} \times \quad (3.3) \\ \times \overline{P_{n_1 m_1}(\cos(\theta_k))} \overline{P_{n_2 m_2}(\cos(\theta_k))}$$

Де i та j номери рядка та колонки відповідно такої матриці, k - кількість вимірів. У даному виразі n_1 , n_2 , m_1 , m_2 є функціями від i та j [97]. У даному рівнянні фігурує лише залежність від широти та довготи, а радіус-вектор є величиною сталою. Тому ми можемо винести у рівнянні (3.3) сталий множник за знак суми, і воно набуде наступного вигляду:

$$n_{ij} = \left(\frac{GM}{R^3} \right)^2 (n_1 + 1)(n_1 + 2)(n_2 + 1)(n_2 + 2) \left(\frac{R}{r} \right)^{n_1 + n_2 + 6} \times \quad (3.4) \\ \times \sum_{k=1}^K \begin{Bmatrix} \cos(m_1 \lambda_k) \\ \sin(m_1 \lambda_k) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(m_2 \lambda_k) \\ \sin(m_2 \lambda_k) \end{Bmatrix} \overline{P_{n_1 m_1}(\cos(\theta_k))} \overline{P_{n_2 m_2}(\cos(\theta_k))}$$

Для оптимізації обчислень доцільно винести сталий множник для обчислення всіх елементів, таким сталим множником є $\left(\frac{GM}{R^3} \right)^2 R^6 = G^2 M^2$, в такому вигляді такий множник не можна виносити, оскільки елемент b_{ij} буде обчислюватись так:

$$n_{ij} = G^2 M^2 (n_1 + 1)(n_1 + 2)(n_2 + 1)(n_2 + 2) \left(\frac{1}{r}\right)^{n_1+n_2+6} R^{n_1+n} \times \quad (3.5)$$

$$\times \sum_{k=1}^K \left\{ \begin{array}{l} \cos(m_1 \lambda_k) \\ \sin(m_1 \lambda_k) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \cos(m_2 \lambda_k) \\ \sin(m_2 \lambda_k) \end{array} \right\} \overline{P_{n_1 m_1}(\cos(\theta_k))} \overline{P_{n_2 m_2}(\cos(\theta_k))}$$

Такий вираз не можна використовувати в обчисленнях оскільки в ньому присутній множник $\left(\frac{1}{r}\right)^{n_1+n_2+6}$, при збільшенні показника степеня, сам степінь прямує до нуля, і коли він перетинає межу точності обчислення, степінь стає рівний нулю і тоді весь подальший добуток стає рівний нулю. З цього можна зробити висновок, що при спрощенні подібних виразів слід уникати множників, які швидко наближаються до нуля. Отже, оптимальним варіантом спрощення виразу (3.3) є даний вираз (3.4). В такому випадку можна обчислити один раз для всіх елементів множник $\left(\frac{GM}{R^3}\right)^2$, що суттєво зменшує час обчислень.

Розглянемо розташування деяких чотирьох точок на одній із широт (рис. 3.1).

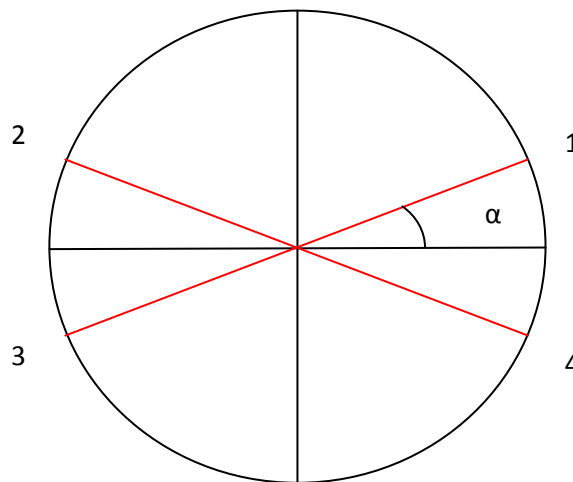


Рис. 3.1. Антиподне розміщення точок.

Таке антиподне розміщення точок можна трактувати, як симетричне розміщення точки відносно двох осей Ox та Oy . З цього випливають наступні властивості:

$$|\cos(\alpha)| + |\cos(180 - \alpha)| + |\cos(180 + \alpha)| + |\cos(360 - \alpha)| = 4 \cos \alpha . \quad (3.6)$$

Аналогічне правило працює і для \sin :

$$|\sin(\alpha)| + |\sin(180 - \alpha)| + |\sin(180 + \alpha)| + |\sin(360 - \alpha)| = 4 \sin \alpha . \quad (3.7)$$

Очевидно, що це справедливо для квадратів таких функцій

$$\sum_{i=1}^4 (\cos \alpha_i)^2 = 4(\cos \alpha_i)^2, \quad \sum_{i=1}^4 (\sin \alpha_i)^2 = 4(\sin \alpha_i)^2. \quad (3.8)$$

На такій паралелі можна розмістити безліч таких груп по 4 точки. Для прикладу наведемо 2 набори точок рисунок 3.2.

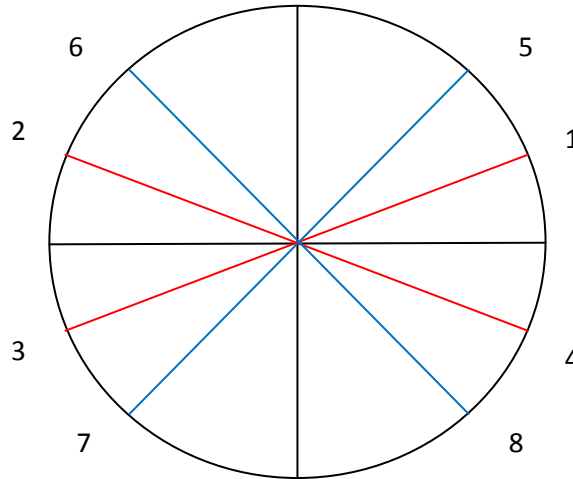


Рис. 3.2. Два набори антиподних груп.

Для такого розміщення точок можна записати наступний вираз:

$$\begin{aligned} & ((\cos \alpha_1)^2 + (\cos \alpha_2)^2 + (\cos \alpha_3)^2 + (\cos \alpha_4)^2) + \\ & + ((\cos \alpha_5)^2 + (\cos \alpha_6)^2 + (\cos \alpha_7)^2 + (\cos \alpha_8)^2) = 4((\cos \alpha_1)^2 + (\cos \alpha_5)^2). \end{aligned} \quad (3.9)$$

З виразу (3.9) очевидно, що для знаходження такої суми по всій паралелі необхідно лише використовувати точки першого квадранту. Оскільки будується модель глобальна, то очевидно, що у будь-якої паралелі у північній півкулі знайдеться така ж сама антиподна паралель у південній. Зі всього вище сказаного можна зробити висновок, що для знаходження значень функцій

$\sum_{i=1}^l (\cos \alpha_i)^2$ та $\sum_{i=1}^l (\sin \alpha_i)^2$ по всій сфері можна використовувати дані лише з першого октанту. Дане твердження справедливе лише для такого антиподного розміщення точок.

$$\sum_{k=1}^K \left\{ \begin{array}{l} (\sin \alpha_k)^2 \\ (\cos \alpha_k)^2 \end{array} \right\} = 8 \sum_{k=1}^{K/8} \left\{ \begin{array}{l} (\sin \alpha_k)^2 \\ (\cos \alpha_k)^2 \end{array} \right\}. \quad (3.10)$$

Рівняння (3.10) показує що можна замінити підсумування по всій сфері на підсумування лише по першому октанту, що у свою чергу зменшує об'єм

роботи у 8 раз. Розглянемо детальніше вираз (3.4), а саме добуток, який фігурує під знаком суми:

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(m_1 \lambda_k) \\ \sin(m_1 \lambda_k) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \cos(m_2 \lambda_k) \\ \sin(m_2 \lambda_k) \end{array} \right\}. \quad (3.11)$$

Тут можливі чотири комбінації перемноження, але якщо припустити, що $m_1 = m_2 = m$, тоді залишається лише три варіанти:

$$(\cos m \lambda_k)^2, (\sin m \lambda_k)^2, (\cos m \lambda_k)(\sin m \lambda_k) \quad (3.12)$$

Отже, у двох з трьох випадків ми можемо переписати рівняння (3.4) таким чином:

$$n_{ij} = \left(\frac{GM}{R^3} \right)^2 (n_1 + 1)(n_1 + 2)(n_2 + 1)(n_2 + 2) \left(\frac{R}{r} \right)^{n_1 + n_2 + 6} \sum_{k=1}^{K/8} \left\{ \begin{array}{l} (\sin m \lambda_k)^2 \\ (\cos m \lambda_k)^2 \end{array} \right\} \overline{P_{n_1 m_1}(\cos(\theta_k))} \overline{P_{n_2 m_2}(\cos(\theta_k))} \quad (3.13)$$

У виразі (3.13) використовується підсумування лише по точках першого октанту, на відміну від виразу (3.4), де підсумування виконується по всій сфері. Варто лише зазначити, що вираз (3.13) справедливий лише у випадку $m_1 = m_2$ та коли відсутній добуток $(\cos m \lambda_k)(\sin m \lambda_k)$.

Тепер розглянемо властивості рівномірного розташування даних на паралелі. Якщо на паралелі рівномірно розташовано точки і в кожний квадрант потрапляє однакова кількість цих точок, то можна записати наступні властивості (3.14) (схожі властивості описані в роботах (Eicker, 2008 [22]), основною відмінністю є різні знаки при дельтах кронекера, що дуже важливо при побудові матриці нормальних рівнянь, та у роботі Марченко, 2014 [103], в якій описані умови лише нульових елементів):

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{2N} \cos(m_1 \lambda_i) \cos(m_2 \lambda_i) = (1 + \delta_{m_1 0} - \delta_{m_1 N}) N \delta_{m_1 m_2} \\ \sum_{i=1}^{2N} \sin(m_1 \lambda_i) \sin(m_2 \lambda_i) = (1 - \delta_{m_1 0} + \delta_{m_1 N}) N \delta_{m_1 m_2} \\ \sum_{i=1}^{2N} \sin(m_1 \lambda_i) \cos(m_2 \lambda_i) = 0 \end{array} \right\} \quad (3.14)$$

де N – кількість точок на меридіані, відповідно $2N$ – кількість точок на паралелі. Більш того отримані автором співвідношення відрізняються від класичних (3.14a), описаних в роботі N. Sneeuw [79]. Класичні співвідношення розроблені для такого розташування точок, які починаються із нульової довготи на відміну

від співвідношень розроблених автором для антиподно-рівномірного розміщення.

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^{2N} \cos(m_1 \lambda_i) \cos(m_2 \lambda_i) &= (1 + \delta_{m_1 0} + \delta_{m_1 N}) N \delta_{m_1 m_2} \\ \sum_{i=1}^{2N} \sin(m_1 \lambda_i) \sin(m_2 \lambda_i) &= (1 - \delta_{m_1 0} - \delta_{m_1 N}) N \delta_{m_1 m_2} \\ \sum_{i=1}^{2N} \sin(m_1 \lambda_i) \cos(m_2 \lambda_i) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.14a)$$

Вище описані властивості цих двох ґридів можна поєднати в одному. А саме антиподне розташування точок відносно осей Ox та Oy в площині екватора та відносно площини екватора по всій сфері. Ця умова не суперечить рівномірному розташуванню. Отже, поєднавши ці умови ми отримуємо ряд переваг при визначенні гармонічних коефіцієнтів.

Розглянемо властивості приєднаних функцій Лежандра $P_{nm}(\cos \theta)$ та головних поліномів Лежандра $P_n(\cos \theta)$, які виникають при симетричному дискретному розташуванні точок відносно екватора на меридіані. Оскільки дані функції є парними або непарними то в двох симетричних точках ці функції будуть рівні за абсолютним значенням. Відомо, що поліноми Лежандра з парними індексами є парними функціями, а з непарними – непарними. Для приєднаних функцій Лежандра також діє схоже правило. Якщо сума $n+m$ є парним числом, то дана приєднана функція Лежандра є парною, і навпаки, якщо така сума є непарним числом, то й функція є непарна. З цього можна зробити висновок, що сума добутків $\sum_{i=1}^N P_{n_1 m_1}(\cos \theta_i) P_{n_2 m_2}(\cos \theta_i)$ вздовж меридіана по точках які симетрично розташовані відносно екватора може набувати нульового значення за такої умови $-1^{n_1+n_2+m_1+m_2} < 0$

$$\sum_{i=1}^N P_{n_1 m_1}(\cos \theta_i) P_{n_2 m_2}(\cos \theta_i) = 0, \quad \text{при} \quad -1^{n_1+n_2+m_1+m_2} < 0 \quad (3.15)$$

Враховуючи ці всі властивості матриця нормальних рівнянь буде розрідженою.

Згідно виразу (2.74) елемент матриці нормальних рівнянь рівний $\sum_{s=1}^k a_{s,i} a_{s,j}$, де s – номер виміру. Розпишемо таку суму згідно виразу (2.72)

$$\sum_{s=1}^k a_{s,i} a_{s,j} = \sum_{s=1}^k \frac{GM}{R^3} (n_i + 1)(n_i + 2) \left(\frac{R}{r_s} \right)^{n_i+3} \Omega_s(i) \bar{P}_{n_i, m_i}(\cos \vartheta_s) \times$$

$$\times \frac{GM}{R^3} (n_j + 1)(n_j + 2) \left(\frac{R}{r_s} \right)^{n_j+3} \Omega_s(j) \bar{P}_{n_j, m_j}(\cos \vartheta_s) \quad (3.16)$$

Розглянемо випадок редукованих градієнтів коли $r_s = a = const$ і винесемо за знак суми сталий множник $X_{n_i n_j} = \frac{(GM)^2}{R^6} (n_i + 1)(n_i + 2)(n_j + 1)(n_j + 2) \left(\frac{R}{a} \right)^{n_i+n_j+6}$, тоді

вираз для обчислення елементів нормальних рівнянь переписеться так:

$$\sum_{s=1}^k a_{s,i} a_{s,j} = X_{n_i n_j} \sum_{s=1}^k \Omega_s(i) \bar{P}_{n_i, m_i}(\cos \vartheta_s) \Omega_s(j) \bar{P}_{n_j, m_j}(\cos \vartheta_s) \quad (3.17)$$

Введемо такі позначення згідно [40]:

$$\left. \begin{aligned} R_{nm}^s &= P_{nm}(\cos \vartheta_s) \cos(m \lambda_s) \\ S_{nm}^s &= P_{nm}(\cos \vartheta_s) \sin(m \lambda_s) \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

Користуючись формулами (2.6.6) та правилом визначення $\Omega(i)$ наведеним в розділі (2.6) запишемо в розгорнутому вигляді матрицю нормальних рівнянь для першого порядку

$$\left(\begin{array}{cccc} X_{00} \sum_{s=1}^k R_{00}^s R_{00}^s & X_{01} \sum_{s=1}^k R_{00}^s R_{10}^s & X_{01} \sum_{s=1}^k R_{00}^s R_{11}^s & X_{01} \sum_{s=1}^k R_{00}^s S_{11}^s \\ X_{10} \sum_{s=1}^k R_{10}^s R_{00}^s & X_{11} \sum_{s=1}^k R_{10}^s R_{10}^s & X_{11} \sum_{s=1}^k R_{10}^s R_{11}^s & X_{11} \sum_{s=1}^k R_{10}^s S_{11}^s \\ X_{10} \sum_{s=1}^k R_{11}^s R_{00}^s & X_{11} \sum_{s=1}^k R_{11}^s R_{10}^s & X_{11} \sum_{s=1}^k R_{11}^s R_{11}^s & X_{11} \sum_{s=1}^k R_{11}^s S_{11}^s \\ X_{10} \sum_{s=1}^k S_{11}^s S_{00}^s & X_{11} \sum_{s=1}^k S_{11}^s S_{00}^s & X_{11} \sum_{s=1}^k S_{11}^s S_{00}^s & X_{11} \sum_{s=1}^k S_{11}^s S_{11}^s \end{array} \right) \quad (3.19)$$

Суму по всій сфері можна розбити на дві суми по паралелях та меридіанах

$$\sum_{s=1}^k c_s = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{2N} c_{ij}, \quad (3.20)$$

Де N – кількість точок по меридіану, c_i – біжуча точка при підсумуванні по сфері, c_{ij} – біжуча точка при підсумуванні по паралелях та меридіанах.

Користуючись властивостями (3.14), (3.15), які визначають ортогональні властивості матриці нормальних рівнянь наведемо структуру не нульових елементів для матриці нормальних рівнянь 4 порядку/ступеня

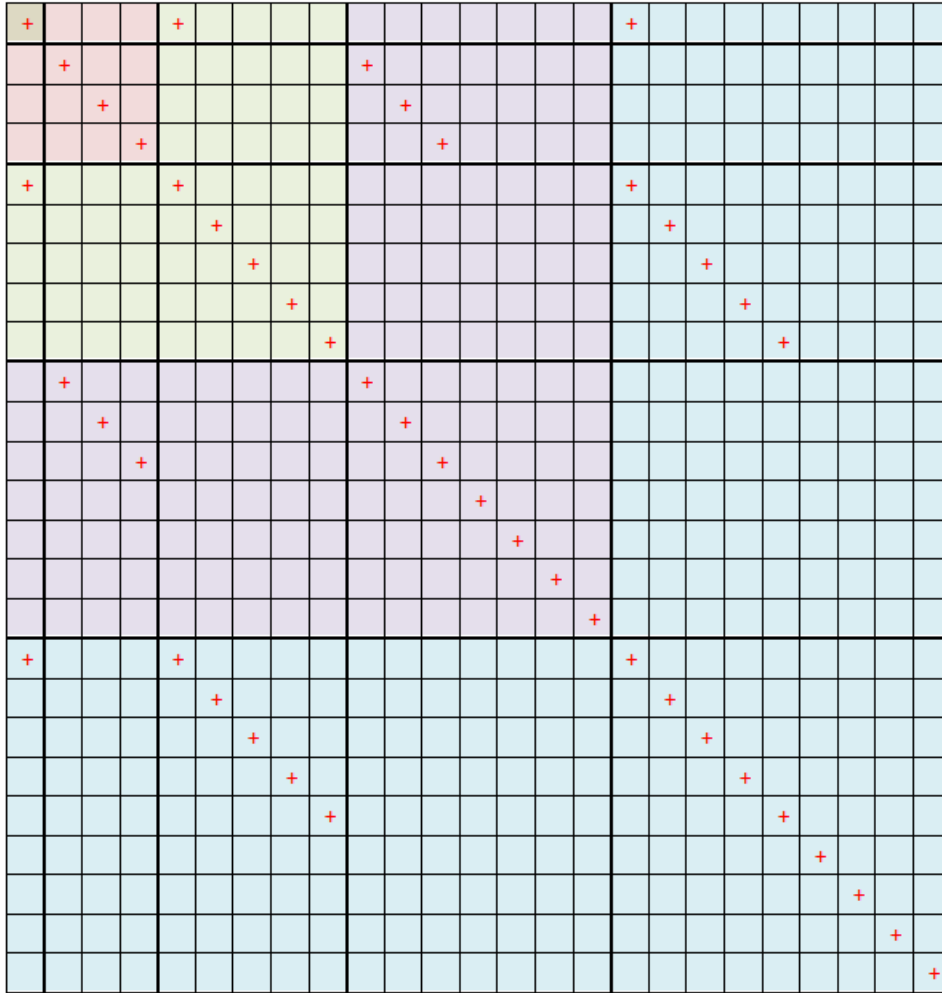


Рис. 3.3. Структура ненульових елементів матриці нормальних рівнянь. Різними кольорами розмежовуються різні порядки, червоні хрестики вказують на ненульові елементи.

У результаті даних виведень та практичних досліджень було виявлено, що ненульовими елементами є елементи при добутках $R_{n_1 m_1} R_{n_2 m_2}$, або $S_{n_1 m_1} S_{n_2 m_2}$, більш того, для виконання цієї умови потрібно, щоб $m_1 = m_2$ та щоб сума $n_1 + n_2$ приймала парне значення, тобто $(-1)^{n_1 + n_2} = 1$ або, іншими словами, n_1, n_2 мають бути обидва парними або непарними.

Отже, остаточними вимогами до такого ґриду має бути антиподно-рівномірне розміщення. Тобто всі точки мають бути згруповані по 8 точок, які включають антиподні властивості і одночасно мають виконуватись умови рівномірності, тобто точки на паралелях мають розміщуватись із сталим кроком.

3.3. Створення 8 антиподних частин

Розглянемо детальніше наш ґрид, нехай точок на меридіані буде N , тоді на паралелі – $2N$. Оскільки всі точки лежать на паралелях, то для всіх точок одної паралелі значення $P_{nm}(\cos\vartheta)$ є сталим. Більш того, при обчисленні елементів матриці нормальних рівнянь в нас будуть фігурувати добутки $P_{n_1m}(\cos\vartheta) \times P_{n_2m}(\cos\vartheta)$, в яких n_1 та n_2 є обидва парними або непарними, що дає можливість говорити про те, що такі добутки будуть набувати однакового значення в точках, симетричних відносно екватора. З цього можна зробити висновок, що для побудови матриці нормальних рівнянь достатньо знати набори поліномів лише для однієї півдуги меридіана $P_{nm}(\cos\vartheta_q), (q=1..N/2)$.

Для зручності подальших обчислень розіб'ємо наш ґрид на 8 частин, а саме на 8 октантів сфери. Заповнення кожного з таких октантів заповнюється по паралелях від екватора до полюса, а точки по самій паралелі від нульового або 180-го меридіану.

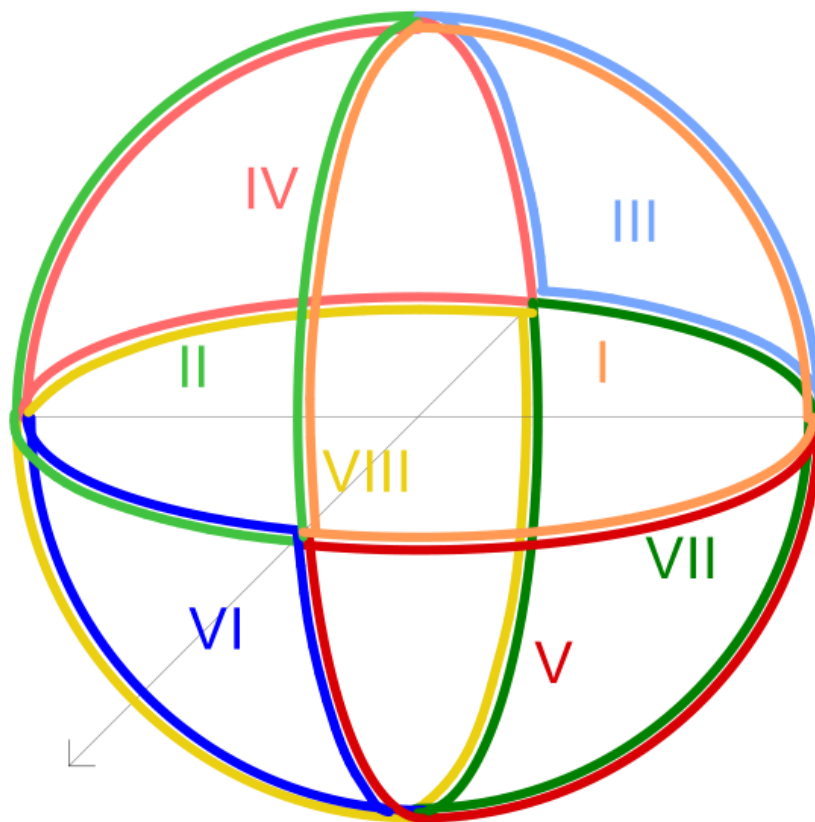


Рис. 3.4. Приклад розбиття сфери на октанти.

На наступному рисунку покажемо принцип заповнення для III октанту

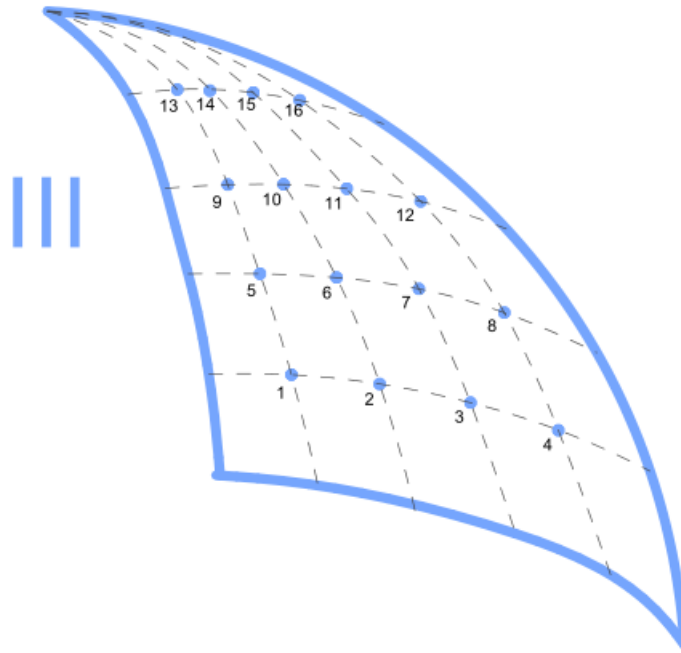


Рис. 3.5. Приклад нумерації точок третього октанту.

При такій нумерації точок сума по октанту запишеться так:

$$\sum_{i=1}^{N_\varphi^2} V_{zz_i} \quad (3.21)$$

При побудові моделі порядку/ступеня N_m визначемо крок ґриду згідно правила Нуйквіста

$$\frac{\lambda_N}{2} = \frac{180}{N_m}, \quad (3.22)$$

де $\frac{\lambda_N}{2}$ - півдовжина хвилі, що відповідає кроку по широті та довготі $\Delta\varphi$ та $\Delta\lambda$ відповідно. Наприклад, для побудови моделі $N_m = 360$ максимальний крок ґриду може бути $\frac{\lambda_N}{2} = 0.5^\circ$.

Визначимо кількість точок в одному октанті на меридіані $N_\varphi = \frac{90}{\Delta\varphi}$ та на паралелі $\frac{N_\lambda}{2} = \frac{90}{\Delta\lambda}$, $N_\lambda = \frac{180}{\Delta\lambda}$. Позначимо номер точки по меридіану φm , а по паралелі λm . Тоді таку суму точок такого октанту можна записати так:

$$\sum_{\varphi m=1}^{N_\varphi} \sum_{\lambda m=1}^{\frac{N_\lambda}{2}} V_{zz_{\varphi m, \lambda m}} \quad (3.23)$$

Наведемо приклад такої нумерації для V октанта

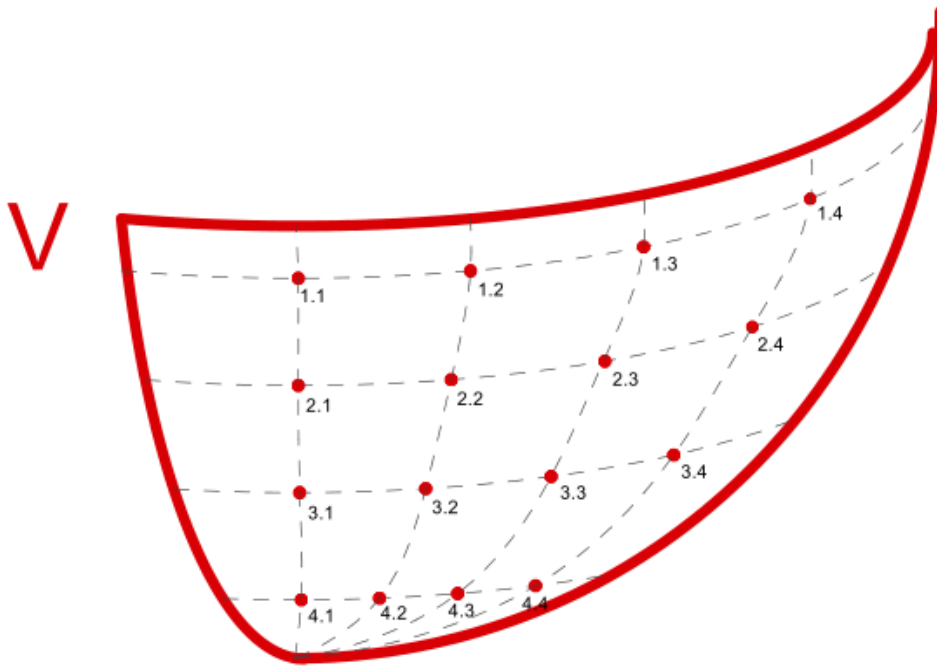


Рис. 3.6. Приклад альтернативної нумерації для 5 октанта.

Цих два способи нумерації є еквівалентними, хоча в подальшому буде використовуватись саме принцип нумерації з двома індексами. Суть задання певного алгоритму нумерації полягає у тому, щоб при формуванні файлів з вхідними даними записувати лише значення градієнта, а вже його координати визначались за порядковим номером запису. Такий підхід дозволяє зменшити об'єм файлу у три рази, що значно відчувається вже навіть при побудові моделі 360 порядку/ступеня, для якої вже необхідно мінімум 259200 вимірів.

Оскільки широта та довгота змінюються в таких межах : $-90 < \varphi < 90$, $-180 < \lambda < 180$, отже для даної регулярної сітки :

$$\varphi m \in [-N_\varphi; -1] \cup [1; N_\varphi], \quad \varphi m \text{ набуває лише цілих значень,}$$

$$\lambda m \in [-N_\lambda; -1] \cup [1; N_\lambda] \quad \lambda m \text{ набуває лише цілих значень,}$$

Відповідно:

$$\varphi m = \frac{\varphi}{\Delta\varphi} + 0.5, \quad \varphi > 0; \quad \varphi m = \frac{\varphi}{\Delta\varphi} - 0.5, \quad \varphi < 0, \quad (3.24)$$

$$\lambda m = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} + 0.5, \quad \lambda > 0; \quad \lambda m = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} - 0.5, \quad \lambda < 0. \quad (3.25)$$

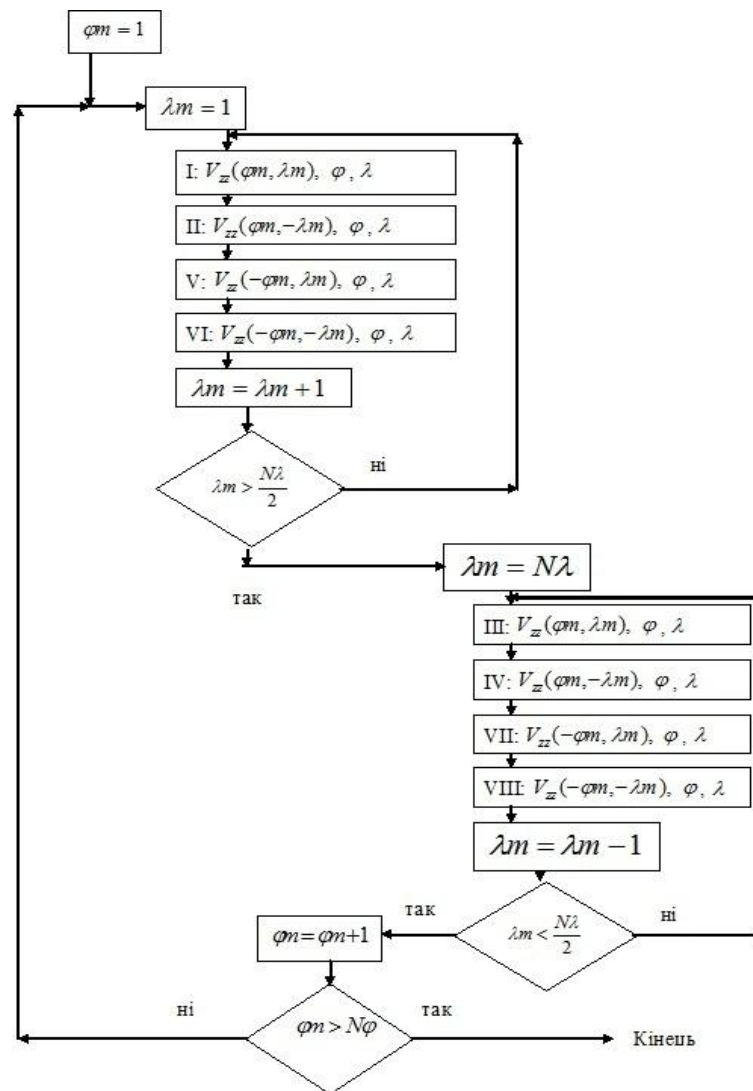
З врахування вище наведених виразів та принципу запису через подвійну суму можна записати підсумування для кожного октанта:

$$\begin{aligned}
 \text{I: } & \sum_{\varphi m=1}^{N_\varphi} \sum_{\lambda m=1}^{\frac{N_\lambda}{2}} V_{z\varphi m, \lambda m}, & \text{V: } & \sum_{\varphi m=-1}^{-N_\varphi} \sum_{\lambda m=1}^{\frac{N_\lambda}{2}} V_{z\varphi m, \lambda m}, \\
 \text{II: } & \sum_{\varphi m=1}^{N_\varphi} \sum_{\lambda m=-1}^{-\frac{N_\lambda}{2}} V_{z\varphi m, \lambda m}, & \text{VI: } & \sum_{\varphi m=-1}^{-N_\varphi} \sum_{\lambda m=-1}^{-\frac{N_\lambda}{2}} V_{z\varphi m, \lambda m}, \\
 \text{III: } & \sum_{\varphi m=1}^{N_\varphi} \sum_{\lambda m=\frac{N_\lambda}{2}}^1 V_{z\varphi m, \lambda m}, & \text{VII: } & \sum_{\varphi m=-1}^{-N_\varphi} \sum_{\lambda m=\frac{N_\lambda}{2}}^1 V_{z\varphi m, \lambda m}, \\
 \text{IV: } & \sum_{\varphi m=1}^{N_\varphi} \sum_{\lambda m=-\frac{N_\lambda}{2}}^{-1} V_{z\varphi m, \lambda m}, & \text{VIII: } & \sum_{\varphi m=-1}^{-N_\varphi} \sum_{\lambda m=-\frac{N_\lambda}{2}}^{-1} V_{z\varphi m, \lambda m},
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Варто зауважити, що у деяких сумах індекси зростають, а в деяких спадають. Остаточний алгоритм формування 8 таких октантів показано на блок-схемі (3.1). Вирази (3.27) показують як обчислювати довготу і широту у різних октантах, які використовуються у блок-схемі (3.1)

$$\begin{aligned}
 \text{I: } & \varphi = (\varphi m + 0.5) \cdot \Delta\varphi, \quad \lambda = (\lambda m + 0.5) \cdot \Delta\lambda \\
 \text{V: } & \varphi = (-\varphi m - 0.5) \cdot \Delta\varphi, \quad \lambda = (\lambda m + 0.5) \cdot \Delta\lambda \\
 \text{II: } & \varphi = (\varphi m + 0.5) \cdot \Delta\varphi, \quad \lambda = (-\lambda m - 0.5) \cdot \Delta\lambda \\
 \text{VI: } & \varphi = (-\varphi m - 0.5) \cdot \Delta\varphi, \quad \lambda = (-\lambda m - 0.5) \cdot \Delta\lambda \\
 \text{III: } & \varphi = (\varphi m + 0.5) \cdot \Delta\varphi, \quad \lambda = (\lambda m + 0.5) \cdot \Delta\lambda \\
 \text{VII: } & \varphi = (-\varphi m - 0.5) \cdot \Delta\varphi, \quad \lambda = (\lambda m + 0.5) \cdot \Delta\lambda \\
 \text{IV: } & \varphi = (\varphi m + 0.5) \cdot \Delta\varphi, \quad \lambda = (-\lambda m - 0.5) \cdot \Delta\lambda \\
 \text{VIII: } & \varphi = (-\varphi m - 0.5) \cdot \Delta\varphi, \quad \lambda = (-\lambda m - 0.5) \cdot \Delta\lambda
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Блок-схема 3.1. Алгоритм обчислення широти та довготи для 8-ми октантів.



Такий підхід також дуже зручно використовувати для створення регулярної сітки у випадку нерівномірного розташування даних, для цього спочатку потрібно визначити точки, які потрапляють в одну і ту ж трапецію (накласти умови заокруглення у виразах для визначення φ_m та λ_m) і потім визначити одне середнє значення для такої трапеції, яка буде точкою новоутвореного антиподно - рівномірного ґриду.

3.4. Складання та розв'язання нормальних рівнянь

Наведемо приклад конфігурації ненульових елементів матриці нормальних $A^t A$ рівнянь 2 порядку/ступеня. Згідно до рисунку (3.3) та формул (3.19) таку матрицю можна записати так:

$X_{00} \sum_{s=1}^k R_{00}^s R_{00}^s$	0	0	0	$X_{02} \sum_{s=1}^k R_{00}^s R_{20}^s$	0	0	0	0
0	$X_{11} \sum_{s=1}^k R_{10}^s R_{10}^s$	0	0	0	0	0	0	0
0	0	$X_{11} \sum_{s=1}^k R_{11}^s R_{11}^s$	0	0	0	0	0	0
0	0	0	$X_{11} \sum_{s=1}^k S_{11}^s S_{11}^s$	0	0	0	0	0
$X_{20} \sum_{s=1}^k R_{20}^s R_{00}^s$	0	0	0	$X_{22} \sum_{s=1}^k R_{20}^s R_{20}^s$	0	0	0	0
0	0	0	0	0	$X_{22} \sum_{s=1}^k R_{21}^s R_{21}^s$	0	0	0
0	0	0	0	0	0	$X_{22} \sum_{s=1}^k S_{21}^s S_{21}^s$	0	0
0	0	0	0	0	0	0	$X_{22} \sum_{s=1}^k R_{22}^s R_{22}^s$	0
0	0	0	0	0	0	0	0	$X_{22} \sum_{s=1}^k S_{22}^s S_{22}^s$

Рис. 3.7. Приклад обчислення та розташування елементів матриці нормальних рівнянь з врахуванням ортогональних властивостей.

У свою чергу вектор невідомих \mathbf{X} позначимо так:

$X_{C_{00}}$
$X_{C_{10}}$
$X_{C_{11}}$
$X_{S_{11}}$
$X_{C_{20}}$
$X_{C_{21}}$
$X_{S_{21}}$
$X_{C_{22}}$
$X_{S_{22}}$

Рис. 3.8. Вектор невідомих.

А вектор вільних членів $\mathbf{A}^t \mathbf{L}$:

$L_{C_{00}}$
$L_{C_{10}}$
$L_{C_{11}}$
$L_{S_{11}}$
$L_{C_{20}}$
$L_{C_{21}}$
$L_{S_{21}}$
$L_{C_{22}}$
$L_{S_{22}}$

Рис. 3.9. Вектор вільних членів.

Користуючись елементарними правилами лінійної алгебри зробимо перестановку наших лінійних рівнянь таким чином:

$X_{00} \sum_{s=1}^k R_{00}^s R_{00}^s$	0	0	0	$X_{02} \sum_{s=1}^k R_{00}^s R_{20}^s$	0	0	0	0	$X_{C_{00}}$	$L_{C_{00}}$
$X_{20} \sum_{s=1}^k R_{20}^s R_{00}^s$	0	0	0	$X_{22} \sum_{s=1}^k R_{20}^s R_{20}^s$	0	0	0	0	$X_{C_{10}}$	$L_{C_{20}}$
0	$X_{11} \sum_{s=1}^k R_{10}^s R_{10}^s$	0	0	0	0	0	0	0	$X_{C_{11}}$	$L_{C_{10}}$
0	0	$X_{11} \sum_{s=1}^k R_{11}^s R_{11}^s$	0	0	0	0	0	0	$X_{S_{11}}$	$L_{C_{11}}$
0	0	0	$X_{11} \sum_{s=1}^k S_{11}^s S_{11}^s$	0	0	0	0	0	$X_{C_{20}}$	$L_{S_{11}}$
0	0	0	0	0	$X_{22} \sum_{s=1}^k R_{21}^s R_{21}^s$	0	0	0	$X_{C_{21}}$	$L_{C_{21}}$
0	0	0	0	0	0	$X_{22} \sum_{s=1}^k S_{21}^s S_{21}^s$	0	0	$X_{S_{21}}$	$L_{S_{21}}$
0	0	0	0	0	0	0	$X_{22} \sum_{s=1}^k R_{22}^s R_{22}^s$	0	$X_{C_{22}}$	$L_{C_{22}}$
0	0	0	0	0	0	0	0	$X_{22} \sum_{s=1}^k S_{22}^s S_{22}^s$	$X_{S_{22}}$	$L_{S_{22}}$

Рис. 3.10. Перегрупувана система нормальних рівнянь.

Тепер очевидно, що така система лінійних рівнянь складається з декількох менших незалежних між собою систем лінійних рівнянь, а саме:

$X_{00} \sum_{s=1}^k R_{00}^s R_{00}^s$	$X_{02} \sum_{s=1}^k R_{00}^s R_{20}^s$	$X_{C_{00}}$	$L_{C_{00}}$
$X_{20} \sum_{s=1}^k R_{20}^s R_{00}^s$	$X_{22} \sum_{s=1}^k R_{20}^s R_{20}^s$	$X_{C_{20}}$	$L_{C_{20}}$
$X_{11} \sum_{s=1}^k R_{10}^s R_{10}^s$	$X_{C_{10}}$	$L_{C_{10}}$	
$X_{11} \sum_{s=1}^k R_{11}^s R_{11}^s$	$X_{C_{11}}$	$L_{C_{11}}$	
$X_{11} \sum_{s=1}^k S_{11}^s S_{11}^s$	$X_{S_{11}}$	$L_{S_{11}}$	
$X_{22} \sum_{s=1}^k R_{21}^s R_{21}^s$	$X_{C_{21}}$	$L_{C_{21}}$	
$X_{22} \sum_{s=1}^k S_{21}^s S_{21}^s$	$X_{S_{21}}$	$L_{S_{21}}$	
$X_{22} \sum_{s=1}^k R_{22}^s R_{22}^s$	$X_{C_{22}}$	$L_{C_{22}}$	
$X_{22} \sum_{s=1}^k S_{22}^s S_{22}^s$	$X_{S_{22}}$	$L_{S_{22}}$	

Рис. 3.11. Набір розділених систем нормальних рівнянь.

де:

$$L_{C_{nm}} = \frac{GM}{R^3} (n+1)(n+2) \left(\frac{r}{R}\right)^{n+3} \sum_{s=1}^k R_{nm}^s L^s \quad (3.28a)$$

$$L_{S_{nm}} = \frac{GM}{R^3} (n+1)(n+2) \left(\frac{r}{R}\right)^{n+3} \sum_{s=1}^k S_{nm}^s L^s \quad (3.28b)$$

Закон ненульових елементів рядка матриці нормальних рівнянь, який відповідає рядку вектора невідомих $X_{C_{nm}}$ чи $X_{S_{nm}}$ можна записати так:

$$\left. \begin{matrix} X_{C_{nm}} \\ X_{S_{nm}} \end{matrix} \right\} \implies \left\{ \begin{matrix} X_{np} \sum_{s=1}^k R_{nm}^s R_{pm}^s \\ X_{np} \sum_{s=1}^k S_{nm}^s S_{pm}^s \end{matrix} \right\} (p = m, m+2, m+4, \dots, N_m), \text{ при } (-1)^{n+m} > 0 \quad (3.29a)$$

$$\left. \begin{matrix} X_{C_{nm}} \\ X_{S_{nm}} \end{matrix} \right\} \implies \left\{ \begin{matrix} X_{np} \sum_{s=1}^k R_{nm}^s R_{pm}^s \\ X_{np} \sum_{s=1}^k S_{nm}^s S_{pm}^s \end{matrix} \right\} (p = m+1, m+3, m+5, \dots, N_m - 1), \text{ при } (-1)^{n+m} < 0 \quad (3.29b)$$

Таким чином було показано, що систему лінійних рівнянь з такою розрідженою матрицею нормальних рівнянь можна розбити на певну кількість менших нерозріджених систем. На рисунку 3.12 наведено приклад розбивання такої матриці 4 порядку/ступеня.

Рис. 3.12. Приклад розбиття розрідженої матриці (однаковими буквами позначено елементи окремих матриць).

В загальному таку матрицю парного порядку/ступеня можна розбити за певним принципом. В одну з таких матриць, які утворились після розбиття можуть входити коефіцієнти з однаковим ступенем t , більш того, кожен ступінь розбивається на дві матриці з парними та непарними порядками n . Також окремо визначаються коефіцієнти C_{nt} та S_{nt} . Тобто, у нашому випадку для загальної матриці 2 порядку/ступеня утворяться 2 матриці для нульового ступеня (з парними та непарними порядками), лише дві, оскільки нульовий порядок не містить коефіцієнтів S_{nt} , для першого ступеня вже буде 4 матриці і для 2 ступеня знову буде 2 матриці, бо останній ступінь завжди є парним і $n \geq t$, тобто будуть лише матриці з парними порядками. З усього вище сказаного можна зробити висновок, що таку розріджену матрицю парного порядку завжди можна розбити на $(n-1) \cdot 4 + 4$ менших нерозріджених

матриць. При чому найбільшою буде матриця нульового ступеня і її розмірність можна обчислити так: $(0.5N_m + 1)^2$. Для кожних наступних ступеней розмірність буде зменшуватись на 1 і вкінці матриця останнього ступеня $m = N_m$ буде мати розмірність 1×1 .

Розглянемо даний алгоритм детальніше. Розпочнемо з обчислення зональних коефіцієнтів C_{n0} . Для їх обчислення потрібно сформувати дві матриці з парними та непарними порядками. Нульовий порядок зручно виділяти із загального циклу, оскільки в ньому заповнюються масиви вхідних даних $V_{zz_{\varphi m, \lambda m}} = L_{\varphi m, \lambda m}$, $P_{nm}(\cos \theta_{\varphi m})$, крім цього в такому випадку буде зручніше записати алгоритм для обчислення всіх подальших матриць.

Розглянемо формули обчислення елементів матриці нормальних рівнянь

$$X_{n_1 n_2} \sum_{s=1}^k R_{n_1 m}^s R_{n_2 m}^s \quad (3.30a)$$

$$X_{n_1 n_2} \sum_{s=1}^k S_{n_1 m}^s S_{n_2 m}^s \quad (3.30b)$$

Дані вирази представляють собою підсумування по всій сфері. Перепишемо їх через подвійні суми (сумування по широті та довготі, розділ (3.3) та розпишемо сферичні функції згідно формул (3.18).

$$X_{n_1 n_2} \sum_{\varphi m = -N\varphi}^{N\varphi} \sum_{\lambda m = -N\lambda}^{N\lambda} \cos(m\lambda_{\lambda m}) P_{n_1 m}(\cos \theta_{\varphi m}) \cos(m\lambda_{\lambda m}) P_{n_2 m}(\cos \theta_{\varphi m}), \varphi m, \lambda m \neq 0 \quad (3.31a)$$

$$X_{n_1 n_2} \sum_{\varphi m = -N\varphi}^{N\varphi} \sum_{\lambda m = -N\lambda}^{N\lambda} \sin(m\lambda_{\lambda m}) P_{n_1 m}(\cos \theta_{\varphi m}) \sin(m\lambda_{\lambda m}) P_{n_2 m}(\cos \theta_{\varphi m}), \varphi m, \lambda m \neq 0 \quad (3.31b)$$

Варто пам'ятати, що при такому підсумуванні значення φm та λm не повинні дорівнювати нулю. Очевидно, що добуток $P_{n_1 m}(\cos \theta_{\varphi m}) P_{n_2 m}(\cos \theta_{\varphi m})$ можна винести за знак внутрішньої суми:

$$X_{n_1 n_2} \sum_{\varphi m = -N\varphi}^{N\varphi} P_{n_1 m}(\cos \theta_{\varphi m}) P_{n_2 m}(\cos \theta_{\varphi m}) \sum_{\lambda m = -N\lambda}^{N\lambda} \cos(m\lambda_{\lambda m}) \cos(m\lambda_{\lambda m}), \varphi m, \lambda m \neq 0 \quad (3.32a)$$

$$X_{n_1 n_2} \sum_{\varphi m = -N\varphi}^{N\varphi} P_{n_1 m}(\cos \theta_{\varphi m}) P_{n_2 m}(\cos \theta_{\varphi m}) \sum_{\lambda m = -N\lambda}^{N\lambda} \sin(m\lambda_{\lambda m}) \sin(m\lambda_{\lambda m}), \varphi m, \lambda m \neq 0 \quad (3.32b)$$

Тепер видно що, під знаком внутрішньої суми (по паралелі) знаходяться вирази які можна замінити згідно (3.14):

$$X_{n_1 n_2} (1 + \delta_{m0} - \delta_{mN\varphi}) N\varphi \sum_{\varphi m = -N\varphi}^{N\varphi} P_{n_1 m}(\cos \theta_{\varphi m}) P_{n_2 m}(\cos \theta_{\varphi m}), \quad \varphi m, \lambda m \neq 0 \quad (3.33a)$$

$$X_{n_1 n_2} (1 - \delta_{m0} + \delta_{mN\varphi}) N\varphi \sum_{\varphi m = -N\varphi}^{N\varphi} P_{n_1 m}(\cos \theta_{\varphi m}) P_{n_2 m}(\cos \theta_{\varphi m}), \quad \varphi m, \lambda m \neq 0 \quad (3.33b)$$

Враховуючи симетричність добутоків поліномів Лежандра відносно екватора дані формули для обчислення елементів матриці нормальних рівнянь остаточно набудуть такого вигляду:

$$X_{n_1 n_2} (1 + \delta_{m0} - \delta_{mN\varphi}) 2N\varphi \sum_{\varphi m = 1}^{N\varphi} P_{n_1 m}(\cos \theta_{\varphi m}) P_{n_2 m}(\cos \theta_{\varphi m}), \quad (3.34a)$$

$$X_{n_1 n_2} (1 - \delta_{m0} + \delta_{mN\varphi}) 2N\varphi \sum_{\varphi m = 1}^{N\varphi} P_{n_1 m}(\cos \theta_{\varphi m}) P_{n_2 m}(\cos \theta_{\varphi m}). \quad (3.35b)$$

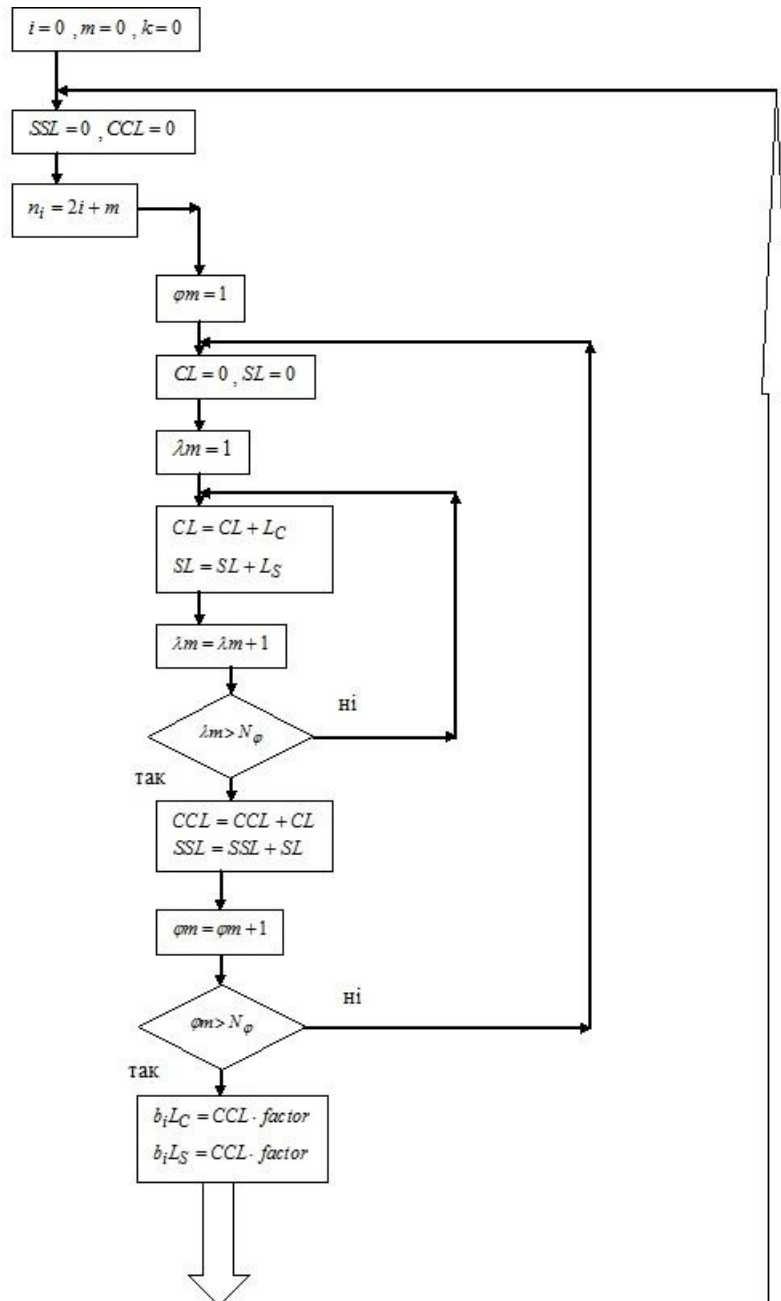
Отже даний підхід значно зменшив кількість елементів матриці нормальних рівнянь та значно спростив їх обчислення.

Примітка: на блок-схемі використовуються такі позначення:

$$PP = \sum_{\varphi m = 1}^{N\varphi} P_{n_1 m}(\cos \theta_{\varphi m}) P_{n_2 m}(\cos \theta_{\varphi m}).$$

Перейдемо тепер безпосередньо до визначення гармонічних коефіцієнтів використовуючи даний підхід. Розпочнемо із визначення парних порядків зональних коефіцієнтів. Першим кроком необхідно задати роздільну здатність $\Delta\varphi = \Delta\lambda = 0.5^\circ$, також заповнимо 8 масивів вхідних градієнтів $V_{\varphi m, \lambda m}^I$, $V_{\varphi m, \lambda m}^{II}$, $V_{\varphi m, \lambda m}^{III}$, $V_{\varphi m, \lambda m}^{IV}$, $V_{\varphi m, \lambda m}^V$, $V_{\varphi m, \lambda m}^{VI}$, $V_{\varphi m, \lambda m}^{VII}$, $V_{\varphi m, \lambda m}^{VIII}$ згідно блок-схеми (3.1). Поточну матрицю нормальних рівнянь позначимо $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \{C a_{ij}\} \{S a_{ij}\}$, вектор вільних членів - $\mathbf{A}^T \mathbf{L} = \{b_i L_c\} \{b_i L_s\}$, та вектор невідомих - $\mathbf{X}_{CS} = \{X_{C_i}\} \{X_{S_i}\}$.

Блок-схема 3.2а. Алгоритм побудови вектора-вільних членів.



На даній блок-схемі зображено алгоритм формування вектора вільних членів для поточної лінійної системи рівнянь, варто зазначити, що

$$L_C^1 = \cos(m\lambda_{\varphi m, \lambda m}^I) V_{ZZ, \varphi m, \lambda m}^I + \cos(m\lambda_{\varphi m, \lambda m}^{II}) V_{ZZ, \varphi m, \lambda m}^{II} + \cos(m\lambda_{\varphi m, \lambda m}^V) V_{ZZ, \varphi m, \lambda m}^V + \cos(m\lambda_{\varphi m, \lambda m}^{VI}) V_{ZZ, \varphi m, \lambda m}^{VI} \quad (3.36a)$$

$$L_S^1 = \sin(m\lambda_{\varphi m, \lambda m}^I) V_{ZZ, \varphi m, \lambda m}^I + \sin(m\lambda_{\varphi m, \lambda m}^{II}) V_{ZZ, \varphi m, \lambda m}^{II} + \sin(m\lambda_{\varphi m, \lambda m}^V) V_{ZZ, \varphi m, \lambda m}^V + \sin(m\lambda_{\varphi m, \lambda m}^{VI}) V_{ZZ, \varphi m, \lambda m}^{VI} \quad (3.36б)$$

та

$$L_C^2 = \cos(m\lambda_{\varphi m, \lambda m}^{III}) V_{ZZ, \varphi m, \lambda m}^{III} + \cos(m\lambda_{\varphi m, \lambda m}^{IV}) V_{ZZ, \varphi m, \lambda m}^{IV} + \cos(m\lambda_{\varphi m, \lambda m}^{VII}) V_{ZZ, \varphi m, \lambda m}^{VII} + \cos(m\lambda_{\varphi m, \lambda m}^{VIII}) V_{ZZ, \varphi m, \lambda m}^{VIII} \quad (3.37B)$$

$$L_S^2 = \sin(m\lambda_{\varphi m, \lambda m}^{III}) V_{ZZ, \varphi m, \lambda m}^{III} + \sin(m\lambda_{\varphi m, \lambda m}^{IV}) V_{ZZ, \varphi m, \lambda m}^{IV} + \sin(m\lambda_{\varphi m, \lambda m}^{VII}) V_{ZZ, \varphi m, \lambda m}^{VII} + \sin(m\lambda_{\varphi m, \lambda m}^{VIII}) V_{ZZ, \varphi m, \lambda m}^{VIII} \quad (3.37Г)$$

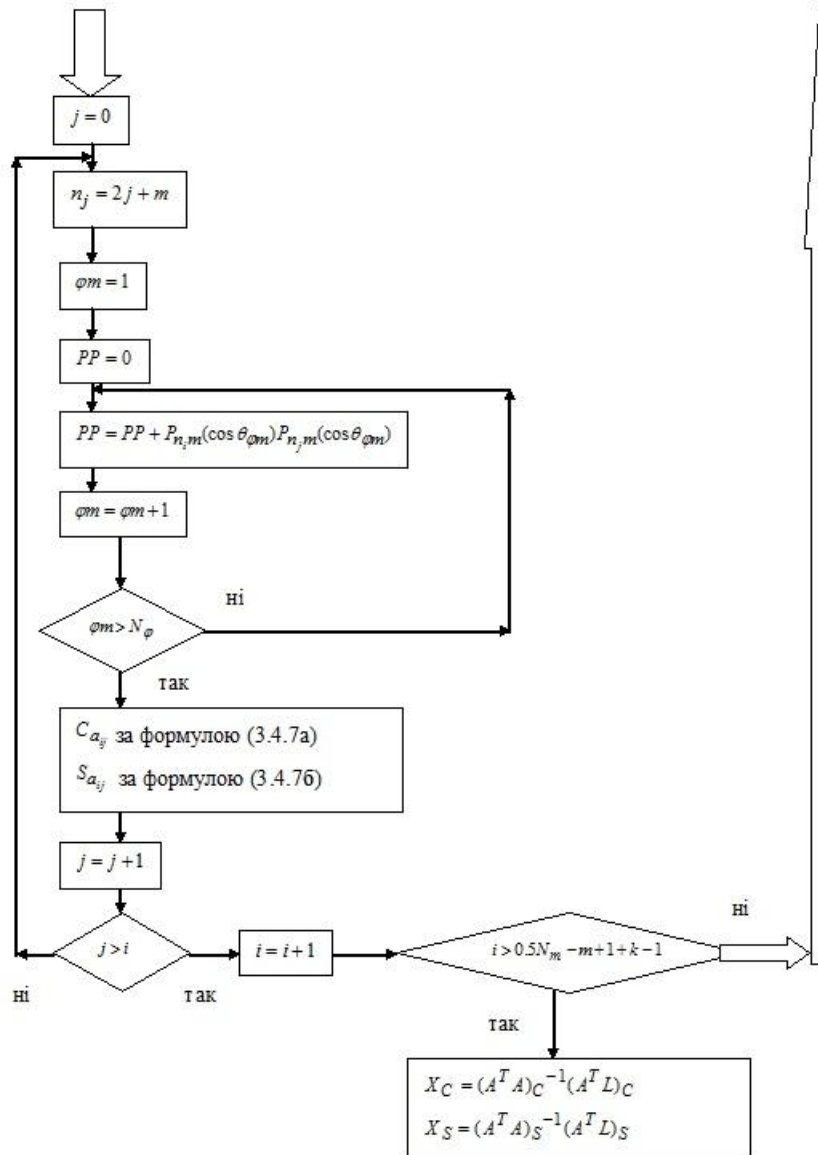
$$L_C = L_C^1 P_{n_i m}(\cos \theta_{\varphi m}) + L_C^2 P_{n_i m}(\cos \theta_{\varphi m}) \cdot (-1)^{n_i + m} \quad (3.38a)$$

$$L_S = L_S^1 P_{n_i m}(\cos \theta_{\varphi m}) + L_S^2 P_{n_i m}(\cos \theta_{\varphi m}) \cdot (-1)^{n_i + m} \quad (3.38б)$$

$$factor = \frac{GM}{R^3} (n_i + 1)(n_i + 2) \left(\frac{r}{R} \right)^{n_i + 3} \quad (3.38в)$$

Варто зазначити, що довготи відповідних октантів $\lambda_{\varphi m, \lambda m}^I$, $\lambda_{\varphi m, \lambda m}^{II}$, $\lambda_{\varphi m, \lambda m}^{III}$, $\lambda_{\varphi m, \lambda m}^{IV}$, $\lambda_{\varphi m, \lambda m}^V$, $\lambda_{\varphi m, \lambda m}^{VI}$, $\lambda_{\varphi m, \lambda m}^{VII}$, $\lambda_{\varphi m, \lambda m}^{VIII}$ обчислюються згідно (3.27). Продовжимо блок-схему, де наводиться алгоритм побудови нормальних рівнянь.

Блок-схема 3.2б. Алгоритм побудови нормальних рівнянь та їх розв'язання.



Сформувавши поточний вектор $\mathbf{A}^T \mathbf{L}$ та матрицю $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ легко обчислити вектор невідомих $\mathbf{X}_{CS} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{L})$, таким чином було визначено зональні коефіцієнти парних порядків. Для визначення коефіцієнтів непарних порядків алгоритм повторюється за винятком:

$$n_i = 2i + m + 1, \quad (3.39a)$$

$$n_j = 2j + m + 1, \quad (3.39б)$$

$$i > \frac{N_m}{2} - m + k - 1. \quad (3.39в)$$

Подальші коефіцієнти обчислюються за аналогічним алгоритмом для парних ступеней, але для непарних ступеней m потрібно використовувати такі умови:

Для парних порядків n :

$$n_i = 2i + m, \quad (3.40a)$$

$$n_j = 2j + m, \quad (3.40б)$$

$$i > \frac{N_m}{2} - m + k - 1. \quad (3.40в)$$

Для непарних порядків n :

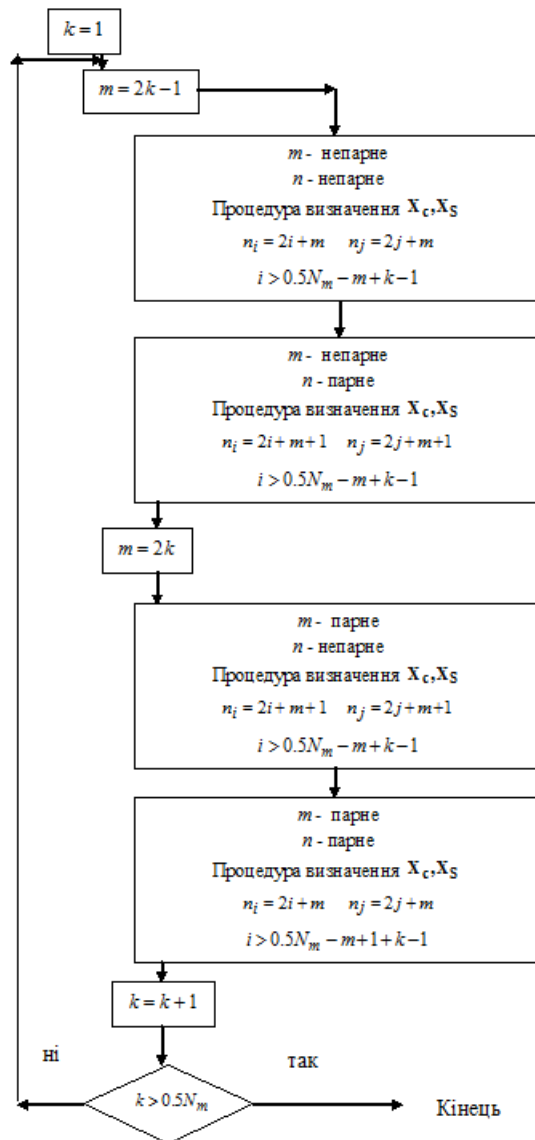
$$n_i = 2i + m + 1, \quad (3.41a)$$

$$n_j = 2j + m + 1, \quad (3.41б)$$

$$i > \frac{N_m}{2} - m + k - 1. \quad (3.41в)$$

На наступній блок-схемі представлена загальна процедура обчислення гармонічних коефіцієнтів після нульового ступеня.

Блок-схема 3.3. Загальний принцип визначення гармонічних коефіцієнтів.



3.5. Висновки та узагальнення

1. У третьому розділі показано основні теоретичні напрацювання автора, які будуть використовуватись в основі експериментальних дослідженнях наведених у 4 розділі. Також у цьому розділі вирішуються перша та друга основні задачі дисертації, а саме:

- оптимальне використання даних, яке втілилось у редукуванні градієнтів на сферичну поверхню з метою зробити радіус-вектор постійним, що дає змогу використати ортогональні властивості сферичних функцій у дискретному випадку.

- оптимізація алгоритму обчислень, яка представлена розробленим автором форматом вхідної інформації (розбиття на 8 октантів), та використанням ортогональних властивостей, що значно уточнюють та прискорюють процес обчислень.

2. Розбиття на вісім частин розроблено так, що існує строга послідовність запису даних, що дає можливість формувати вхідний файл лише з набору вимірів, без їх координат. Координати автоматично обчислюються при зчитуванні даних. Це суттєво пришвидшує процес, оскільки процедура обчислення довготи та широти безпосередньо виконується центральним процесором комп'ютера, що є швидшим, ніж зчитування їх із зовнішнього файлу.

3. Використання ортогональних властивостей дає нам можливість точно знати значення певних елементів, тобто уникається похибка накопичення при підсумуванні, яке дуже часто використовується у формулах для визначення елементів нормальних рівнянь.

4. В результаті розроблено алгоритм складання та розв'язання нормальних рівнянь, який вперше був адаптований до такого представлення вхідної інформації. Що дає можливість у декілька раз пришвидшити сам процес обчислень.

РОЗДІЛ 4. ПОБУДОВА КОМБІНОВАНОЇ МОДЕЛІ ГРАВІТАЦІЙНОГО ПОЛЯ

Даний розділ є експериментальною частиною дисертації, в якій виконується побудова комбінованої моделі гравітаційного поля Землі. Для цієї побудови використовується певна послідовність дій та використання модифікацій, розроблених автором та описаних у розділі 3.

Таким чином, апробація методики буде втілена в експериментальній побудові моделі гравітаційного поля. Отже, для визначення гармонічних коефіцієнтів та побудови на їх основі квазігеоїда буде використовуватися така послідовність дій:

- підготовка вхідних даних;
- редукування гравітаційних градієнтів на сферу;
- видалення апріорної моделі;
- фільтрація даних;
- визначення гармонічних коефіцієнтів на основі даних супутникової градієнтометрії;
- видалення отриманої моделі із даних аномалій сили тяжіння;
- побудова остаточного комбінованого розв'язку моделі гравітаційного поля Землі;
- побудова наближеного квазігеоїда за комбінованою моделлю з метою її апробації.

4.1. Підготовка вхідних даних

Перед тим, як отримати вхідні дані, які використовуються в дослідженні, вони були попередньо опрацьовані. Для оптимального зберігання інформації дані зберігаються у деревовидній структурі, тому було створено програму, яка перетворила дані із первинного XML формату в ASCII – формат. Градієнти було приведено із системи GRF (супутникова система) до системи LNOF (розділ 2.2.1), таке перетворення виконувалось за допомогою кватерніонів (розділ 2.2.2). Масивів даних складався з окремих файлів, які було об'єднано в один. Після цього виконувалась перевірка на значні похибки. Оскільки

спутник GOCE не покриває всю Землю [67], то було використано модель EGM 2008 для моделювання гравітаційних градієнтів над полярними шапками, з цих причин регуляризація не застосовувалась [53, 108] Таким чином був отриманий набір вертикальних гравітаційних градієнтів, які використовуються в основному дослідженні.

4.2. Редукування гравітаційних градієнтів на сферу

Для побудови супутникової моделі вхідними даними є набір вертикальних гравітаційних градієнтів V_{zz} виміряних вздовж супутникових трас. В опрацювання взято дані за період 2012 року, що становить 27,063,905 точок спостережень. На рисунку 4.1 представлено розподіл вхідних даних, а в таблиці 4.1 приведено характеристики вхідного набору даних.

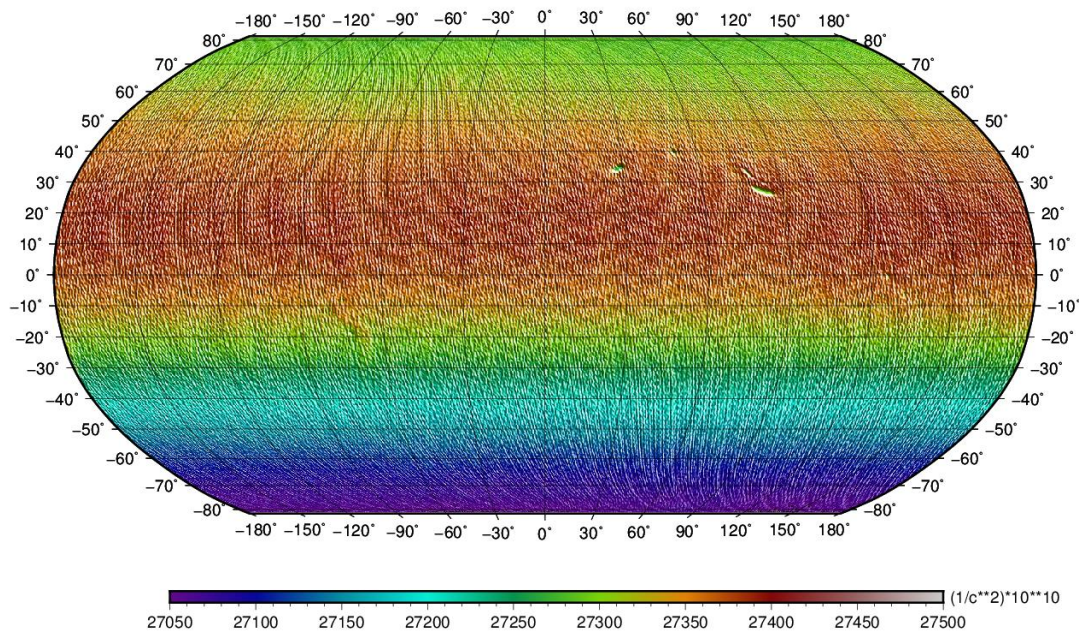


Рис. 4.1. Розподіл вхідних гравітаційних градієнтів.

Таблиця 4.1

Характеристики набору вхідної інформації

	Мінімальне	Максимальне	Середнє
<i>Широта, (°)</i>	-83.41578499	83.415452937	-0.1085540428
<i>Довгота, (°)</i>	-179.99999068	179.999998250	-0.7165846641
<i>Радіус-вектор, (м)</i>	6608094.716	6649059.647	6633820.850
<i>Вертикальний градієнт (1/C²)</i>	0.269601419E-05	0.275837525E-05	0.272680334E-05

З таблиці 4.1 видно, що супутник не покриває всю Землю, дані містять полярні прогалини. Це зумовлено конфігурацією орбіти супутника GOCE, яка має кут нахилу близько 96.5 градусів. На рисунку 4.1 зображено розподіл градієнтів на орбіті, тобто радіус-вектор таких вимірів непостійний, саме тому можна спостерігати сліди супутникових трас. З рисунку 4.1 можна побачити, що найменшого значення градієнт набуває в районі південного полюса. Як відомо чим менший градієнт тим менша кривизна поверхні, тому можна зробити висновок, що в районі південного полюсу знаходиться апогей орбіти супутника. Для того, щоб робити певні висновки з подібних рисунків про еквіпотенціальні поверхні необхідно розмістити всі градієнти на сферичній поверхні, тобто радіус-вектор всіх вимірів має бути сталий. Це необхідно зробити, щоб усунути ефект зміни градієнту через різну висоту вимірів, яка не дає змоги проілюструвати зміни градієнтів, спричинені характерними рисами рельєфу та внутрішнім розподілом мас. Проте на рисунку 4.1 все ж таки можна зауважити в районі Гімалаїв характерні прогалини, спричинені, мабуть, відсутністю інформації на даній території.

4.3. Видалення апріорної моделі

Для того, щоб використати описаний в роботі метод побудови моделі гравітаційного поля Землі необхідно привести всі виміри на одну сферичну поверхню, що також дасть змогу краще проілюструвати вплив топографії та внутрішнього розподілу мас на вертикальні гравітаційні градієнти.

Для обчислення такого редукованого градієнта використаємо модель $go_cons_gcf_2_spw_r2$ 180 порядку/ступеня, яка також побудована за даними місії GOCE за схожим алгоритмом, в якому використовуються редуковані градієнти. Спектральні характеристики даної моделі приведені на рисунку 4.2. (обчислені за формулами 2.82). Варто зазначити, що редукування винокується не на поверхню Землі а на середній радіус орбіти супутника, оскільки за цими даними визначаються лише перші 200 порядків у наборі гармонічних коефіцієнтів. Як відомо з продовженням потенціалу вверх на настільки незначну висоту в 250 км ці коефіцієнти не зазнають суттєвих змін і можна буде використовувати вже на земній поверхні у наступному етапі.

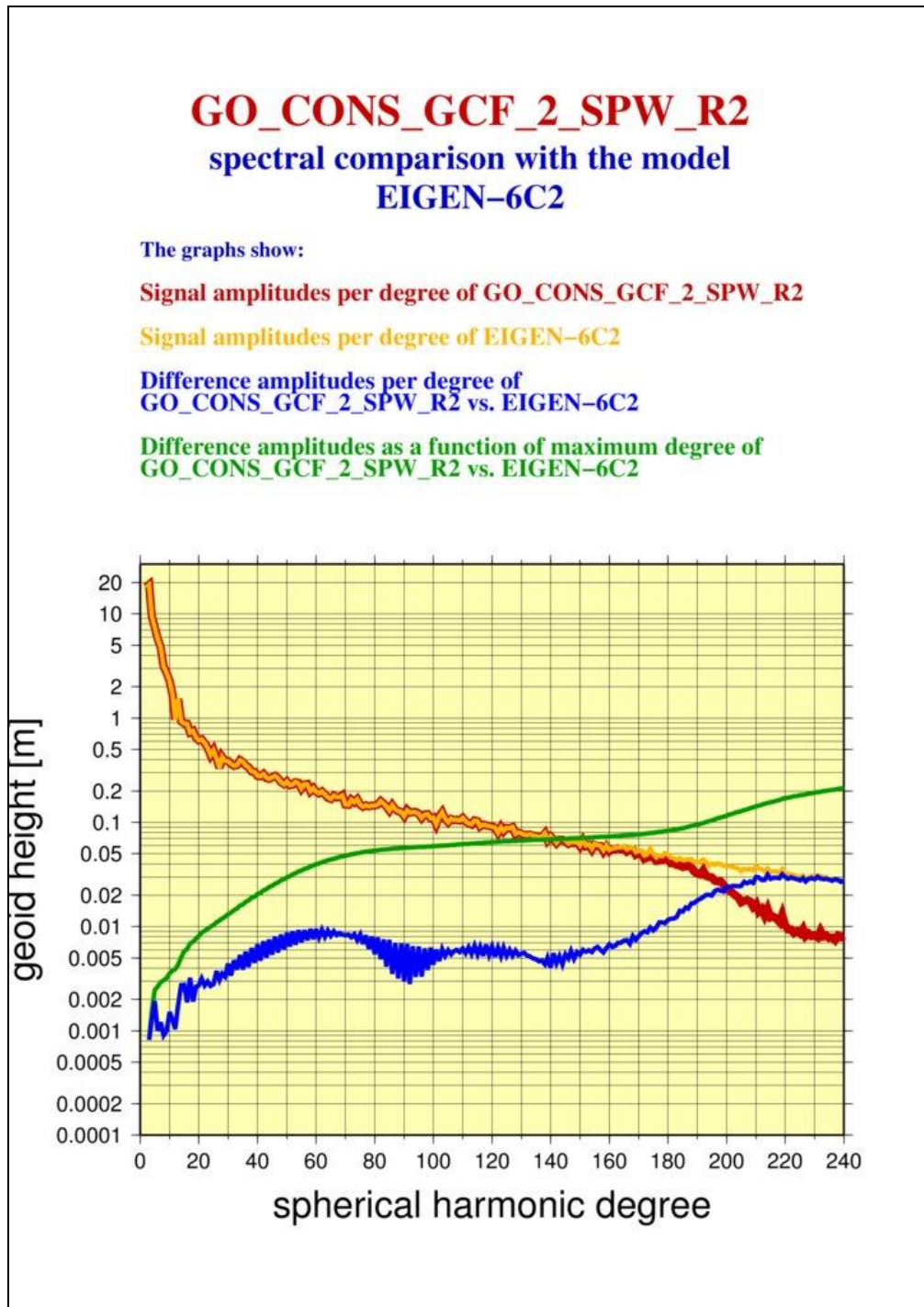


Рис. 4.2. Порівняння спектральної щільності моделей go_cons_gcf_2_spw_r2 та EIGEN-6C2 (ICGEM [41]).

Покажемо середні радіуси з кожних 500000 точок (рисунок 4.3), щоб побачити тенденцію зміни висоти орбіти супутника з часом та обрати оптимальний масив даних для подальших досліджень.

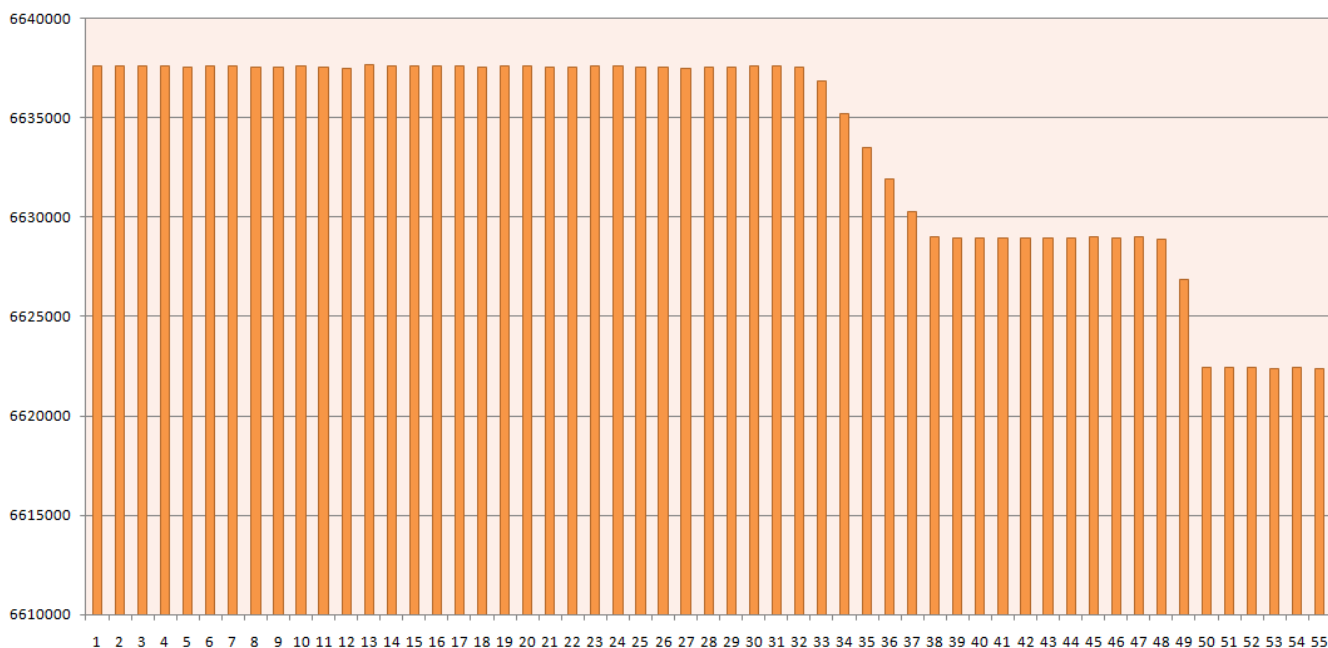


Рис. 4.3. Середні радіуси (м) наведені через кожні 500 тисяч вимірів (період 2012 року).

З рисунку 4.3. видно, що у другій половині року супутник почав знижувати свою висоту, що спричинено неможливістю постійно підтримувати постійну висоту за допомогою двигунів. З метою мінімізації редуційної поправки відкинемо ту частину даних, де супутник почав втрачати висоту (рис. 4.4).

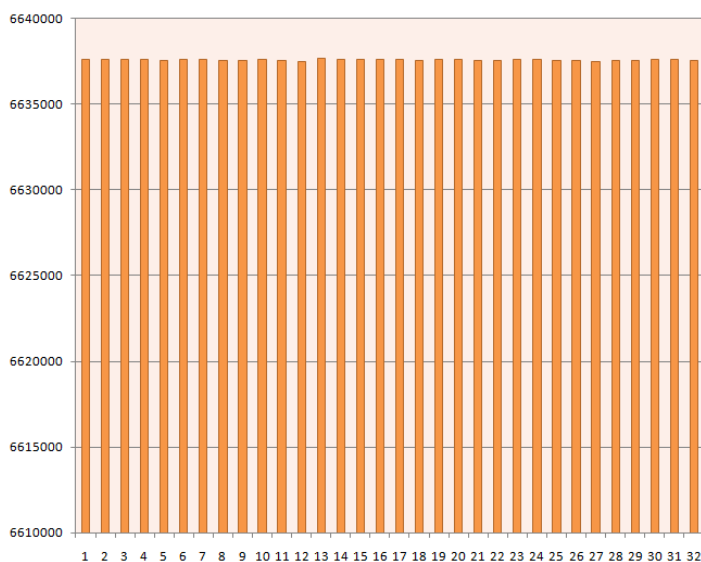


Рис. 4.4. Середні радіуси наведені через кожні 500 тисяч вимірів, які приймаються до обчислень.

Оберемо середній радіус $a = 6637000$ м. Користуючись формулами, наведеними в розділі 3.1, обчислимо редуковані градієнти на сфері (рис. 4.5а).

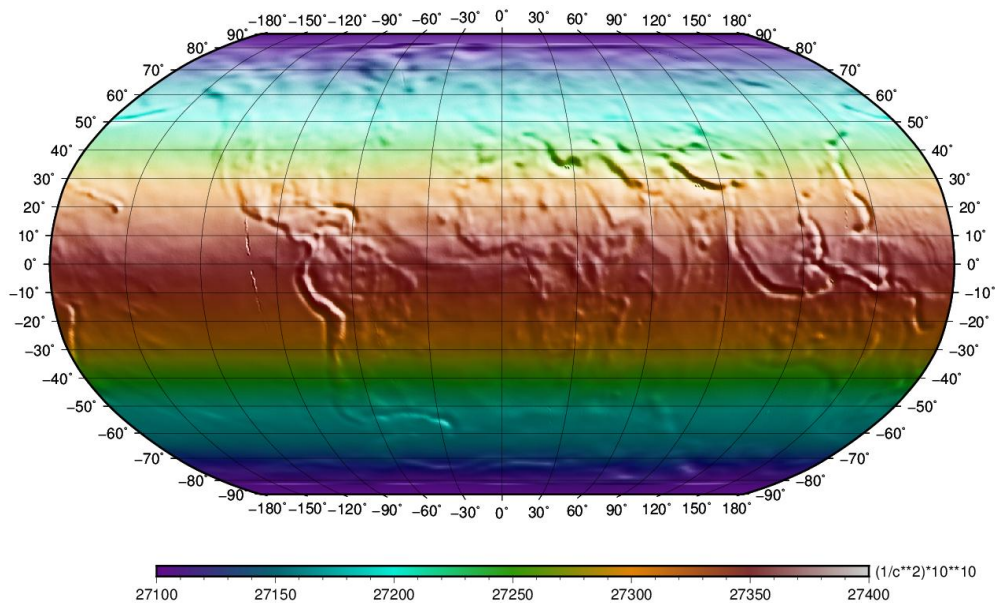


Рис. 4.5а. Редуковані градієнти на сферу радіусом $a = 6637000$ м, поправки моделювались за допомогою моделі `go_cons_gcf_2_spw_r2` 180 порядку/ступеня.

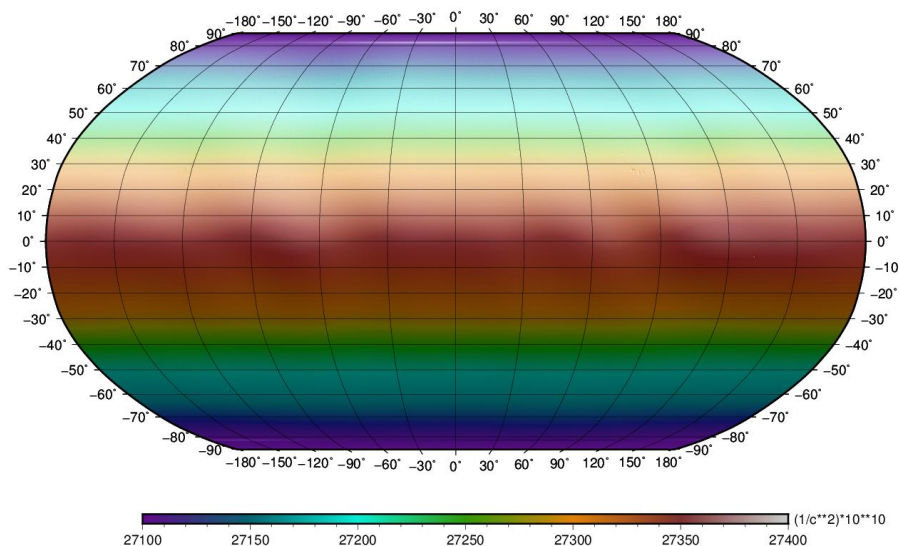


Рис. 4.5б. Модельні градієнти, змодельовані на основі моделі `go_cons_gcf_2_spw_r2` 10 порядку/ступеня.

На рисунку 4.5а представлено редуковані градієнти на сферичній поверхні, на відміну від не редукованих градієнтів в них вже відсутній вплив різних радіус-векторів. Саме тому на рисунку 4.5а вже чітко проявляються особливості

рельєфу. Також вже не спостерігається несиметричність відносно екватора, яка була спричинена еліптичною орбітою. Основні характеристики первинних, зредукованих та модельних наборів градієнтів показано в таблиці 4.2.

Таблиця 4.2

Значення мінімального, максимального та середнього вертикального градієнту для трьох наборів даних (одиниці виміру $1/C^2$)

	Мінімальне	Максимальне	Середнє
<i>Первинні значення</i>	0.269601419E-05	0.275837525E-05	0.272680334E-05
<i>Редуковані значення</i>	0.27103672E-05	0.27360260E-05	0.27227123E-05
<i>Модельні значення</i>	0.27103738E-05	0.27354272E-05	0.27227066E-05

Таблиця 4.2 підтверджує висновки зроблені з рисунку 4.1 та рисунків 4.5а,б, а саме первинні значення вертикальних градієнтів мають значно більший розмах ніж зредуковані, що обумовлено сталим радіус-вектором.

Наступним кроком є видалення апріорної моделі, з метою усунення загального тренду та фіксації гармонічних коефіцієнтів на сталу епоху. Сам процес обчислення гармонічних коефіцієнтів 2 порядку на певну епоху має пряме відношення до залежної від часу частини моделювання гравітаційного поля Землі. А оскільки на початку роботи було визначено, що дослідження виконується у рамках лише статичного гравітаційного поля, то основний внесок коефіцієнтів другого порядку було взято з апріорної моделі, однак у процесі «відновлення» до них було внесено обчислені поправки.

Отже після процедури «видалення» було отримано різниці градієнтів (рис. 4.6), за якими в подальшому буде визначатись низькочастотна та середньочастотна складові гравітаційного поля Землі.

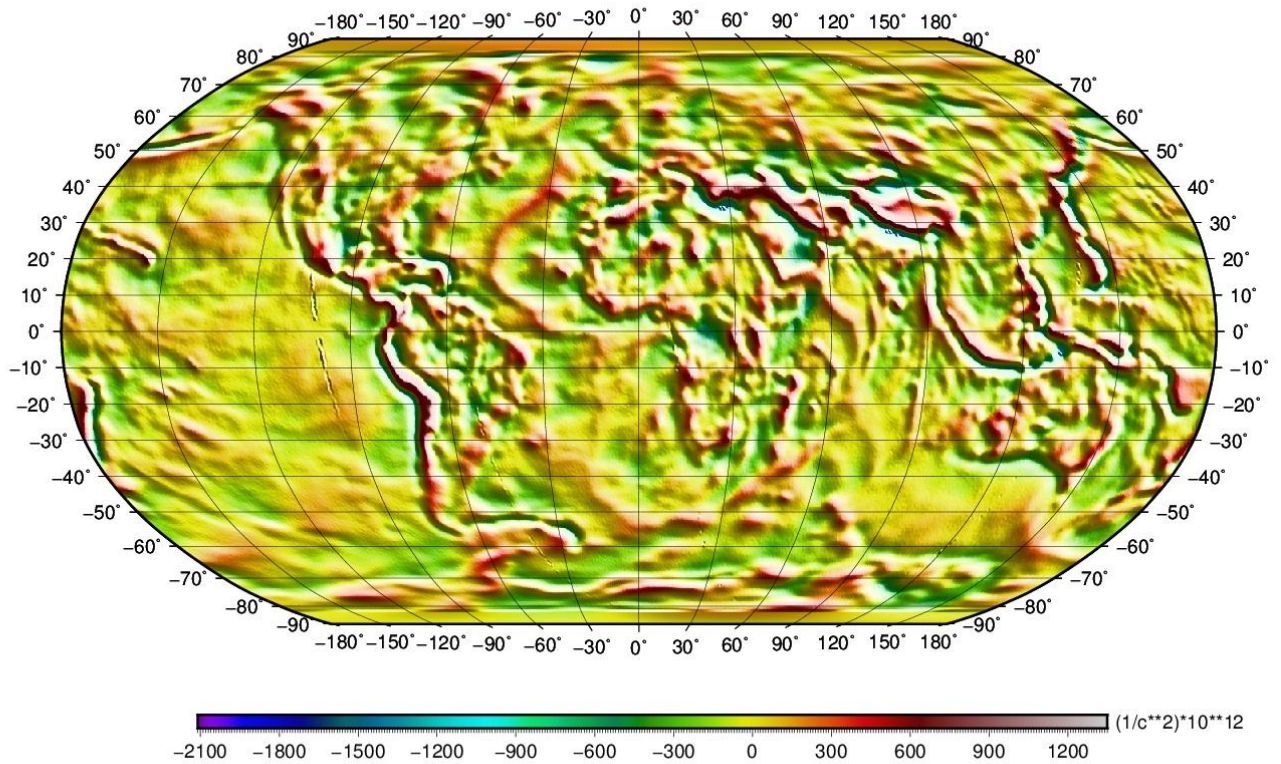


Рис. 4.6. Різниці між змодельованими та редукованими градієнтами.

На рисунку 4.6 показано залишки градієнтів, в яких відсутній загальний тренд, що дасть можливість уникнути згладжування основного розв'язку в процесі визначення гармонічних коефіцієнтів методом найменших квадратів.

Таблиця 4.3

Характеристики різниць градієнтів (одиниці виміру $1/c^2 10^{12}$)

	Мінімальне	Максимальне	Середнє	Стандартне відхилення
<i>Різниця градієнтів</i>	-2104	1343	5	171

З таблиці 4.3 видно, що у різницях майже відсутні систематичні похибки, що підтверджує середнє значення. Тому можна сказати, що і модельні і виміряні градієнти відносяться до одного і того ж еліпсоїда.

В подальшому планується будувати модель 250 порядку за даними супутникової градієнтометрії, тому достатньо мати дані розташовані на гріді $0,5^\circ \times 0,5^\circ$, що відповідає 360 порядку/ступеню.

4.4. Фільтрація даних

Наступним важливим кроком є фільтрація даних. У вимірах завжди присутні похибки або, як ще це називають – шум. Такий шум необхідно вилучити перед початком роботи, оскільки він сильно впливає на кінцевий результат, а саме визначення гармонічних коефіцієнтів. Ми будемо використовувати два типи фільтрів: FFT – цей фільтр розкладає все поле на окремі хвилі різних частот і тоді вже можна відкинути певні частоти, фільтр Гауса – усереднює дані у певному вікні, використовуючи ваги, які розраховуються згідно нормального розподілу. Також важливо при фільтруванні обрати такі параметри фільтру, щоб він усунув лише шум і не спотворив реальний сигнал, саме тому далі буде показано декілька варіантів фільтрації. Дані фільтри [30, 75, 110] потребують досить великих комп'ютерних потужностей, оскільки перед побудовою моделі нам буде потрібен грід $0,5^\circ \times 0,5^\circ$, то для якіснішої фільтрації даних оберемо грід $0,25^\circ \times 0,25^\circ$.

Оскільки на рисунку майже не буде видно різниці між різними фільтрами, то наведемо один рисунок для всіх (рис. 4.7).

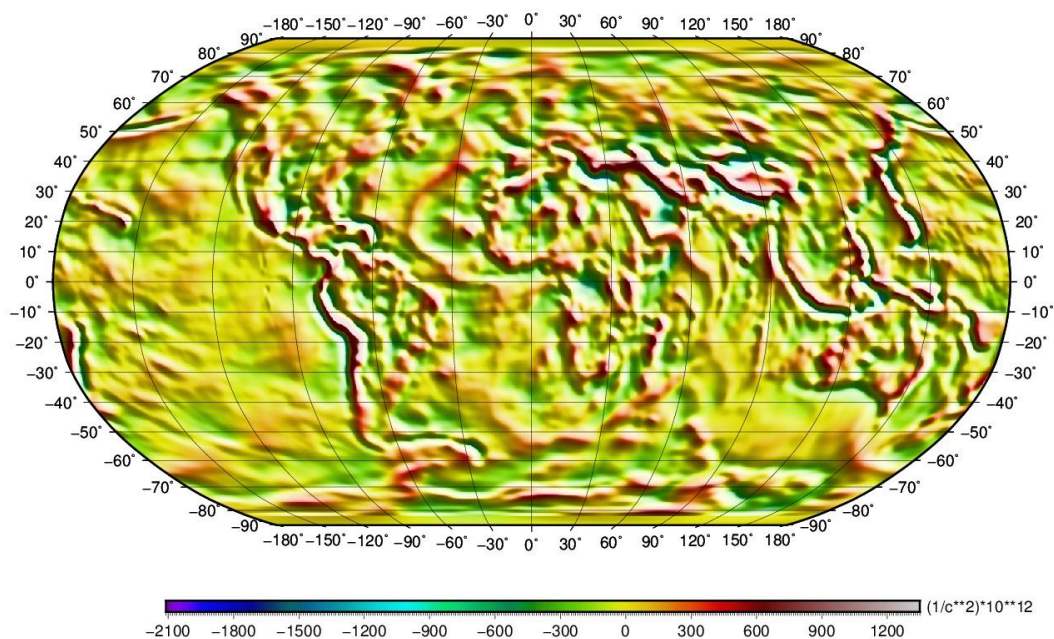


Рис. 4.7. Фільтровані різниці градієнтів.

З рисунку видно, що різниці стали більш згладженими і зникли очевидні похибки, наприклад, незрозуміла лінія в районі екватора та 110 західної довготи. Ще раз підтверджує важливість фільтрації первинних даних, які отримані безпосередньо з реальних вимірювань.

Після фільтрації даних, проведемо підготовку їх до визначення гармонічних коефіцієнтів, а саме згрідуємо дані на грід $0,5^\circ \times 0,5^\circ$ та розіб'ємо на 8 октантів, як це показано у розділі 3.3.

Для оцінки отриманих моделей в подальшому наведемо їх спектральні щільності в порівнянні з апріорною моделлю EIGEN – 6С2. Рисунки спектральних щільностей та розподілу вертикальних гравітаційних градієнтів виконані за допомогою програми GMT [88].

4.5. Визначення гармонічних коефіцієнтів та їх відновлення

В результаті визначення гармонічних коефіцієнтів (способом розглянутим у розділі 3) та їх відновлення було обрано один варіант моделі (робоча назва GOCE_FFT400/120). Такою моделлю став розв'язок, який будувався на основі фільтрованих даних (розділ 2.5) методом FFT 400/120 (довжини хвиль менші 120 кілометрів відкидались, довжини хвиль більше 400 кілометрів лишались без змін, а ті які потрапили посередині цих двох границь були згладжені за допомогою фільтру Гауса). На рисунку 4.8 показано спектральну щільність отриманої моделі та моделі EIGEN – 6С2.

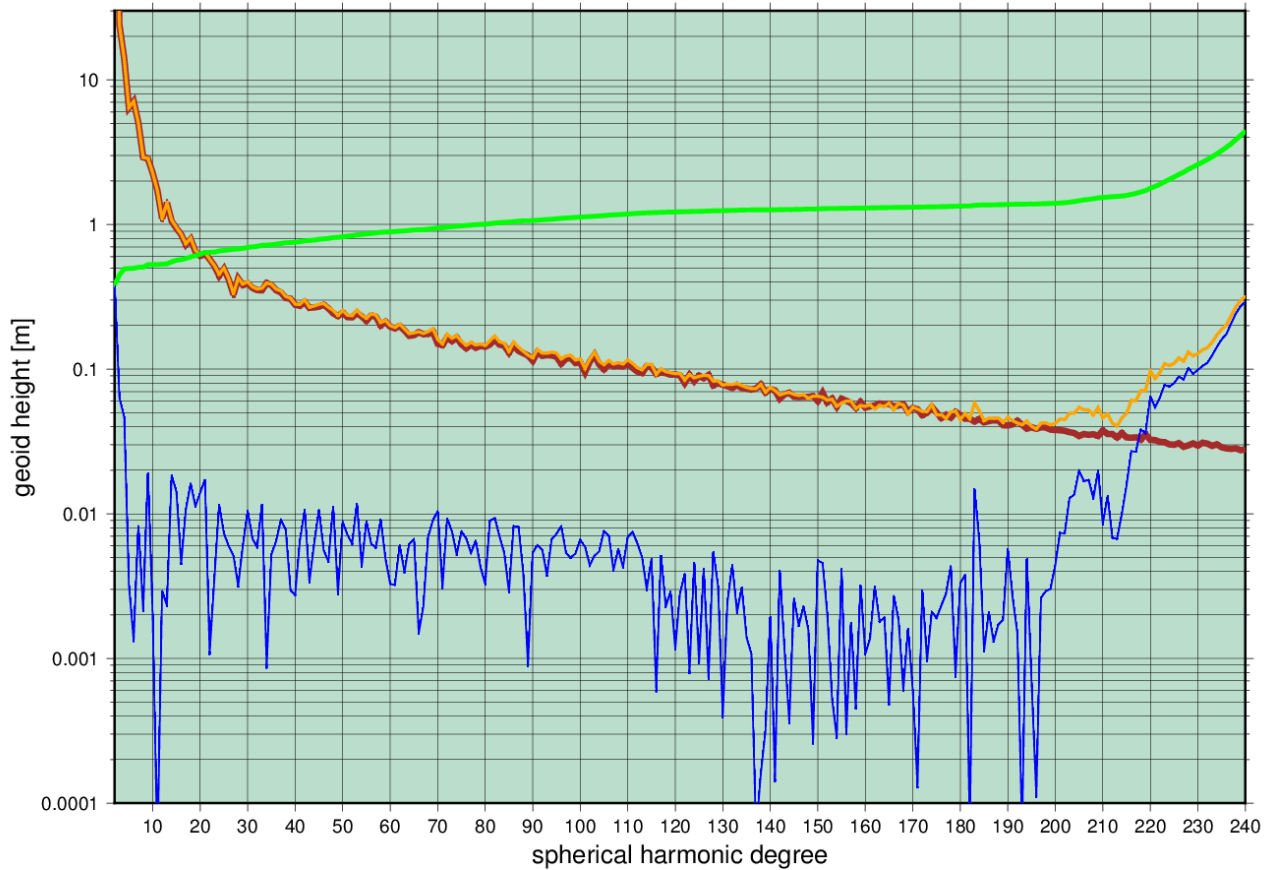


Рис. 4.8. Порівняння спектральної щільності моделі GOCE_FFT400/120 та EIGEN – 6C2 (сигнал моделі EIGEN – 6C2 позначено коричневим кольором, сигнал моделі GOCE_FFT400/120 позначено помаранчевим кольором, різниці відповідних порядків цих двох моделей – синій, акумульовані різниці – зелений).

Для перевірки отриманого результату, за даною моделлю були побудовані аномалії сили тяжіння і порівнянні із аномаліями сили тяжіння DTU10 [2] (рис. 4.9), які є розв'язком аномалій сили тяжіння для всієї Земної кулі, побудовані Данським технічним університетом. Такий розв'язок базується на реальних вимірах і тому використовується як незалежна інформація при апробації моделі GOCE_FFT400/120. Таке порівняння дало стандартне відхилення в 38 мгал, що підтверджує те, що запропонований метод обчислень може використовуватись для визначення гармонічних коефіцієнтів.

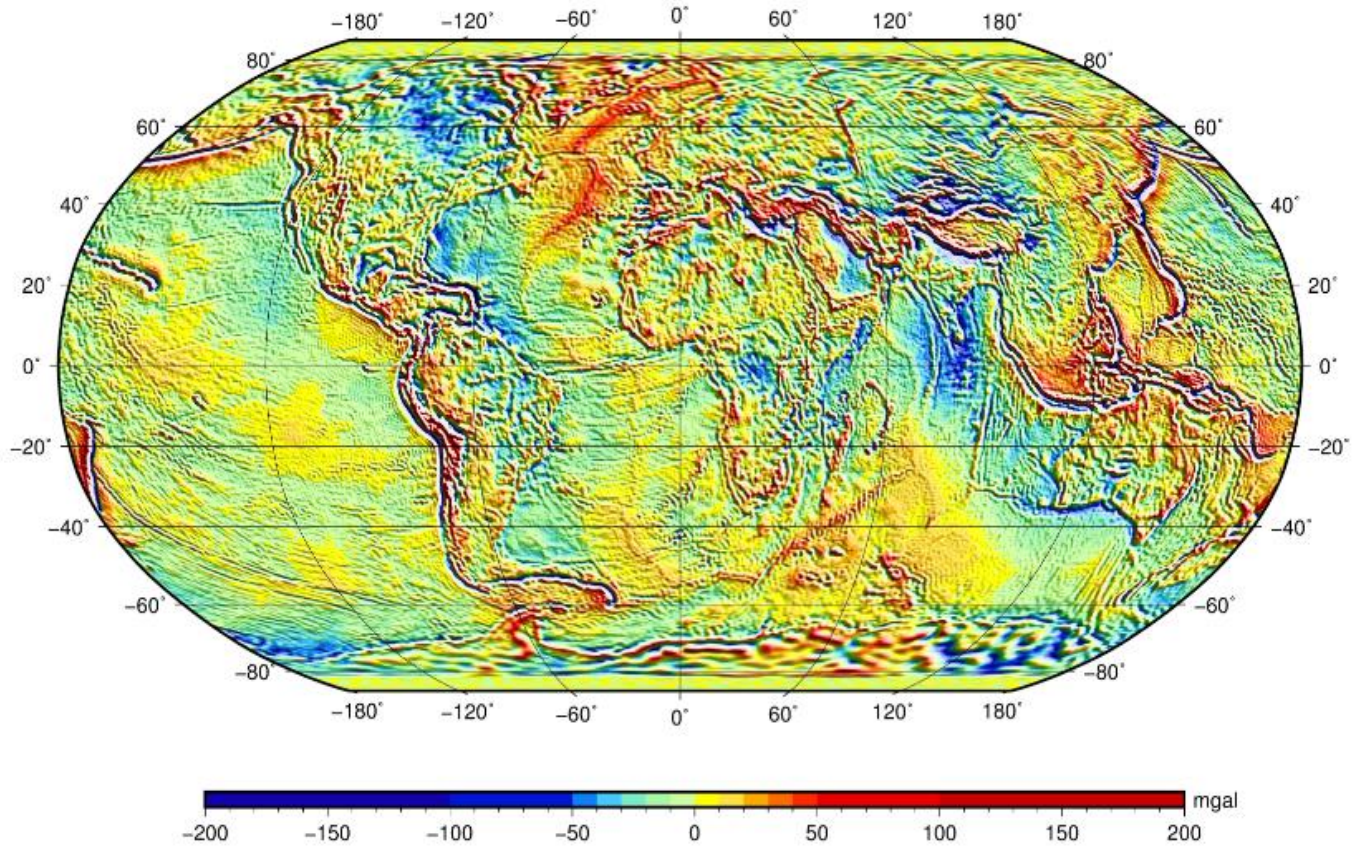


Рис. 4.9. Аномалії сили тяжіння у вільному повітрі (розв'язок для всієї Землі DTU10).

4.6. Вилучення отриманої моделі з даних аномалій сили тяжіння

Для побудови остаточної моделі будуть використовуватись аномалії сили тяжіння DTU10. Оскільки в роботі поставлена задача комбінованого розв'язку то з цих даних будуть вилучені аномалії, змодельовані за допомогою супутникової моделі GOCE_FFT400/120. Варто зазначити, що для моделювання таких аномалій використано лише модель до 200 порядку/ступеня, оскільки як видно з рисунку 4.8, що після 200 порядку гармонічні коефіцієнти починають відхилятися від закону затухання Каула (2.83), що свідчить про те, що дані коефіцієнти не відповідають реальному полю.

Після отримання таких різниць, була повторена процедура визначення гармонічних коефіцієнтів до 360 порядку/ступеня. На даному етапі не виконувалось фільтрації, оскільки дані аномалій сили тяжіння вже є опрацьовані і врівноважені Данським технічним університетом, на відміну від даних вертикальних градієнтів, які являються первинною інформацією отриманою із місії GOCE.

4.7. Визначення остаточних гармонічних коефіцієнтів

Отже, останнім кроком при побудові комбінованої моделі стали гармонічні коефіцієнти, обчислені за даними аномалій сили тяжіння з 200 по 360 порядок, а перші 200 порядків було визначено за даними супутникової градієнтометрії та уточнено за даними аномалій сили тяжіння. Таким чином було отримано комбіновану модель 360 порядку/ступеня (робоча назва LP-04C).

Варто відзначити, що при ґрдуванні аномалій сили тяжіння було поставлено цікавий експеримент. В першому випадку обчислювались гармонічні коефіцієнти на основі ґрду, дані якого були отримані внаслідок інтерполювання, а у другому - значення у вузлах ґрду брались, як середнє значення для всієї трапеції. Тобто у першому випадку побудована модель представляла функцію, яка проходить лише через вузли, а в другому будувалась модель, яка прагне відобразити всю поверхню, що дуже важливо оскільки в майбутньому така модель використовується для моделювання у будь-якій точці, а не тільки у вузлах. Дане твердження чітко підтверджується на рисунках 4.10а,б.

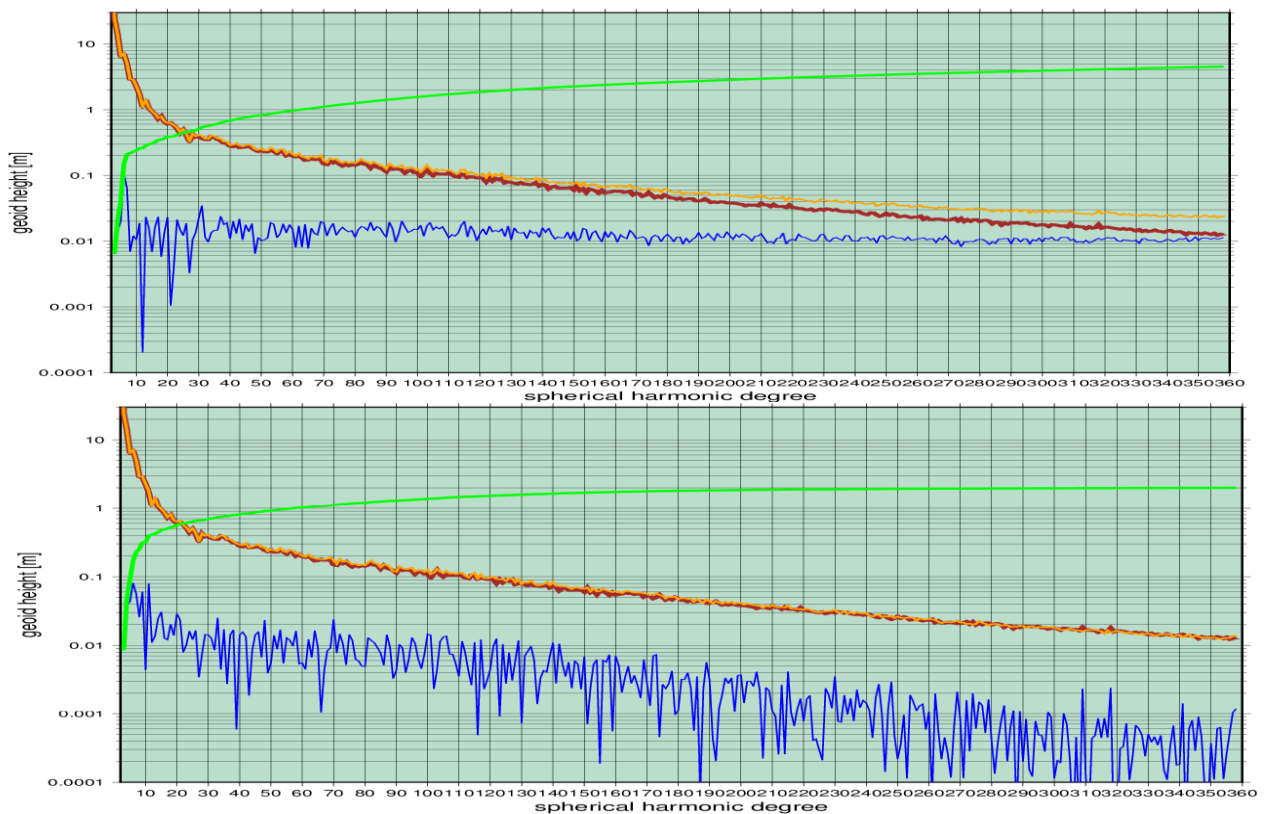


Рис. 4.10а,б. Порівняння спектральної щільності моделей LP-04C – помаранчевий та EIGEN – 6C2 – коричневий (рис а, зверху - інтерполювані вхідні дані; рис б, знизу - усереднені вхідні дані).

Видно, що на рисунку 4.10а сигнал отриманої моделі починає відхилятися від еталонного, а на рисунку 4.10б сигнал лежить в рамках еталонного. Це ще раз підтвердило правильність того, що при фільтрації різниць супутникових градієнтів було обрано ґрид з більшою роздільною здатністю і потім усереднено на ґрид для визначення гармонічних коефіцієнтів (підрозділ 4.4).

Для перевірки моделі, було виконано порівняння побудованих за моделлю аномалій сили тяжіння з аномаліями DTU10. Отримане стандартне відхилення становить 21 мгал, що майже в два рази краще за попередній супутниковий розв'язок, для якого стандарте відхилення становило 38 мгал.

Важливо наголосити, що даний алгоритм було також апробовано для побудови моделі 720 порядку, що виділяє його серед більшості інших алгоритмів, які використовуються для побудови гравітаційних моделей лише до 360 порядку. Дана модель 720 порядку отримала назву LP-04C(720), Нижче приведено порівняння цієї моделі із моделлю EIGEN – 6C2.

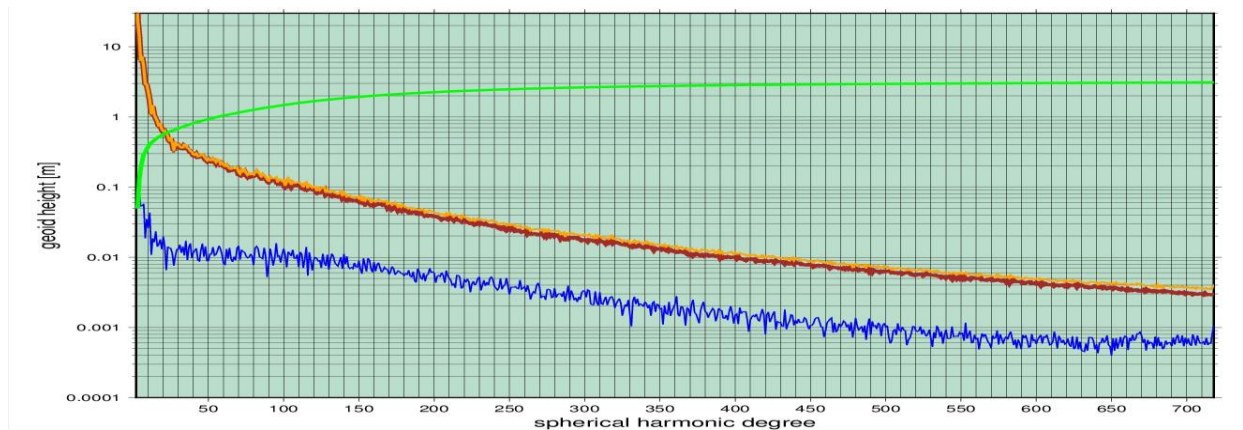


Рис. 4.11. Порівняння спектральної щільності моделей LP-04C(720) – помаранчевий та EIGEN – 6C2 – коричневий.

4.8. Побудова наближеного квазігеоїда та його порівняння з даними GNSS-нівелювання

На практиці найчастіше моделі гравітаційного поля використовують для моделювання висот квазігеоїда/геоїда. Однак даний процес не є таким простим, оскільки потребує введення великої кількості поправок різного типу. Саме тому в заголовку фігурує слово «наближеного». Більш того, побудова поверхні геоїда не є питанням даної дисертації, тому побудуємо наближений квазігеоїд

(рис. 4.11) за формулами підрозділу 2.9 та порівняємо із пунктами GNSS – нівелювання полігону Нью Мехіко, США.

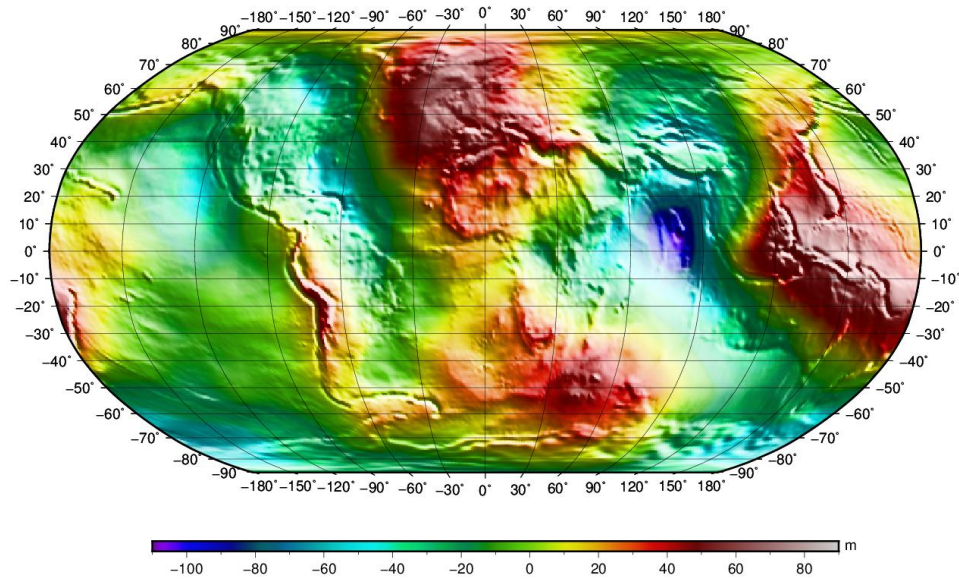


Рис. 4.11. Наближений квазігеоїд, побудований за моделлю LP-04C.

Змоделювавши висоти квазігеоїда на пункти GNSS-нівелювання та порівнявши отримані модельні висоти квазігеоїда із відповідними заданими висотами на полігоні Нью Мехіко ми отримали стандартне відхилення 50 см (а у випадку видалення трендової частини стандартне відхилення становило 4 см). Отже, дана модель досить непогано себе проявила в цьому питанні, що ще раз доказує, що запропонований підхід, щодо визначення гармонічних коефіцієнтів є досить ефективним та надійним, і що важливо – швидким.

4.9. Висновки та узагальнення

1. В даному розділі експериментально підтверджено ефективність теорії розробленої автором в 3 розділі. А саме, побудовано комбіновані моделі гравітаційного поля Землі LP-04C 360 порядку/ступеня та LP-04C 720 порядку/ступеня. Здатність використовувати даний метод для побудови гравітаційних моделей 720 порядку/ступеня різко виділяє його серед більшості інших методів, які дозволяють будувати моделі, обмежені 360 порядком/ступенем. Достовірність методики підтверджується апробацією отриманої моделі LP-04C 360 порядку/ступеня на двох незалежних масивах даних. У першому випадку за допомогою побудованої моделі було змодельовано аномалії сили тяжіння на всю Землю із кроком $30' \times 30'$ на точки,

у яких відомі аномалії сили тяжіння DTU10. Стандартне відхилення різниць цих двох наборів показало 21 мгал. У другому випадку було обрано полігон GNSS-нівелювання Нью Мехіко із відомими висотами квазігеоїда. Далі на ці пункти було побудовано висоти квазігеоїда за отриманою автором моделлю. Стандартне відхилення різниць цих двох наборів висот показало 50 см, а у випадку порівняння лише залишків таких висот (тобто у разі видалення трендової частини до 180 порядку) було отримано стандартне відхилення 4 см. Така апробація на двох незалежних масивах даних дає змогу говорити, що поставлені задачі у першому розділі було успішно виконано. А саме: ефективне використання вертикальних градієнтів, яке втілилось в процедурі редукування їх на сферичну поверхню, оптимізація алгоритму визначення гармонічних коефіцієнтів, яка представлена розробленим автором методом розбиття вхідних даних на 8 октантів та розбиття матриці нормальних рівнянь на частини та третя задача – побудова комбінованого розв'язку.

2. В ході експериментальних досліджень було підтверджено, що для моделювання глобального гравітаційного поля необхідно усереднювати вхідні дані, а не просто інтерполювати на вузли регулярної сітки. Тобто, якщо певна організація виставляє на загальний показ певний ґрид розроблений нею, то це буде певний дискретний набір, в якому відображається значення в конкретній точці. В такому випадку цей ґрид не можна використовувати для побудови моделі, оскільки для такої моделі потрібно мати ґрид, в якому відображається усереднене значення для окремого елемента, наприклад для трапеції, якщо це звичайний рівномірний географічний ґрид. Отже, якщо ми маємо дискретний набір точок $1' \times 1'$, що відображає значення, наприклад, аномалій сили тяжіння, в певних точках, то усереднивши такий набір і привівши середні значення для більших трапецій (ґрид усереднених даних по трапеціях $5' \times 5'$) ми зможемо використовувати такий масив, як вихідний для побудови моделей. У такому випадку дана модель буде описувати функцію розподілу по всій Землі а не функцію дискретного розподілу в певних точках.

3. Всі побудови моделей виконувались без застосування регуляризації, що говорить про стійкість алгоритму при обчисленнях високих порядків.

ВИСНОВКИ

У результаті дисертаційного дослідження було отримано оптимізований алгоритм визначення гармонічних коефіцієнтів геопотенціалу. Цей алгоритм, порівняно із класичними методами, дозволяє швидше будувати та розв'язувати систему нормальних рівнянь великої розмірності $721^2 \times 721^2$ і вище. Важливо зазначити, що у процесі обчислень унеможливаються похибки накопичення більшості елементів матриці нормальних рівнянь. Також даний метод дає можливість виконати оцінку точності, що не завжди можливо зробити для інших методів.

Основні наукові результати та практичні рекомендації:

1. В роботі розв'язано задачу одночасного опрацювання великої кількості різнотипних даних на персональному комп'ютері з метою визначення гармонічних коефіцієнтів геопотенціалу. Це дає змогу будувати моделі гравітаційного поля Землі 720 порядку/ступеня і вище. Здатність використовувати даний метод для побудови гравітаційних моделей 720 порядку/ступеня різко виділяє його серед більшості інших методів, які дозволяють будувати моделі, обмежені 360 порядком/ступенем. Однак на сьогоднішній день існують моделі порядок, яких досягає 2160, що відповідає роздільній здатності $5' \times 5'$. Отже в майбутньому при збільшенні інформації про гравітаційне поле Землі буде актуальною задача побудови моделі гравітаційного поля Землі (без застосування обчислювальних кластерів), так щоб ця модель забезпечила роздільну здатність не гірше $10 \text{ км} \times 10 \text{ км}$ на поверхні Землі.

2. В роботі використано новітній тип даних – супутникова градієнтометрія GOCE, що є актуально на сьогоднішній день, оскільки ці дані є вперше отримані (процес вимірювання вівся з 2009 по 2013 рік) і дають можливість уточнити існуючі моделі гравітаційного поля Землі.

3. З точки зору практики, дана робота представляє собою надійний інструмент для визначення гармонічних коефіцієнтів при великій кількості різнорідних даних, що важливо, оскільки постійно зберігається тенденція до збільшення роздільної здатності таких моделей, що веде за собою збільшення

вхідної інформації. Таким чином даний алгоритм може посприяти більш швидкому розвитку моделей геопотенціалу, оскільки цим питанням зможуть також займатись науковці, у яких немає доступу до потужних обчислювальних кластерів.

4. Розроблено та реалізовано алгоритм редукування вертикальних гравітаційних градієнтів на сферичну поверхню, радіус якої відповідає середній висоті польоту супутника, що дає змогу використати дискретні ортогональні властивості сферичних функцій, що значно прискорює процес обчислень.

5. Оптимізовано алгоритм визначення гармонічних коефіцієнтів, який дозволяє швидше будувати та розв'язувати нормальні рівняння (переваги в швидкості залежить від порядку бажаної моделі), крім того в алгоритмі уникаються похибки накопичення у більшості елементах матриці нормальних рівнянь у процесі їх складання. Також, даний алгоритм залишається стійким при обчисленні високих порядків, тобто не потрібно застосовувати метод регуляризації, який є необхідний для переважної більшості алгоритмів визначення гармонічних коефіцієнтів.

6. Побудовано комбіновану модель LP-04C(360/720), достовірність якої підтверджено на двох незалежних масивах даних. У першому випадку за допомогою побудованої моделі було змодельовано аномалії сили тяжіння на всю Землю із кроком $30' \times 30'$ на точки, у яких відомі аномалії сили тяжіння DTU10. Стандартне відхилення різниць цих двох наборів показало 21 мгал. У другому випадку було обрано полігон GNSS-нівелювання Нью Мехіко із відомими висотами квазігеоїда. Далі на ці пункти було побудовано висоти квазігеоїда за отриманою автором моделлю. Стандартне відхилення різниць цих двох наборів висот показало 50 см, а у випадку порівняння лише залишків таких висот (тобто у разі видалення трендової частини до 180 порядку) було отримано стандартне відхилення 4 см.

7. В процесі дослідження експериментально було підтверджено, що при побудові моделей гравітаційного поля Землі потрібно усереднювати вхідні дані по трапеціям, а не інтерполювати на вузли регулярної сітки. Тобто, якщо певна організація виставляє на загальний показ певний грід розроблений нею,

то це буде певний дискретний набір, в якому відображається значення в конкретній точці. В такому випадку цей ґрид не можна використовувати для побудови моделі, оскільки для такої моделі потрібно мати ґрид, в якому відображається усереднене значення для окремого елемента, наприклад для трапеції, якщо це звичайний рівномірний географічний ґрид.

8. Запропонований алгоритм може використовуватись для побудови інших моделей гравітаційного поля, які можуть бути використані для уточнення поверхні квазігеоїда України. Знання такої поверхні є дуже важливим, оскільки дає можливість отримувати нормальні висоти із GNSS-спостережень, оскільки нормальні висоти є основними висотами, які використовуються на практиці в Україні на сьогоднішній день. Однак для точного визначення нормальних висот потрібна досить щільна сітка квазігеоїда, де можуть і стати в нагоді уточнені моделі гравітаційного поля Землі, які можна будувати використовуючи запропоновані модифікації в даній роботі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Alkhatib H. Integration of the Monte Carlo covariance estimation strategy into tailored solution procedures for large-scaled least squares problems / Alkhatib H., Schuh W.-D. J. Geodesy 70 (2007), P. 53-66, DOI: 10.1007/s00190-006-0034-z.
2. Andersen Ole. B. The DTU10 Global Gravity field and mean sea surface – improvements in the Arctic / Ole B. Andersen - DTU Space, Technical University of Denmark, IGFS-2, Fairbanks, Alaska, Sept 2010.
3. Arabelos D. Improvements in height datum transfer expected from the GOCE mission / D. Arabelos, C. C. Tscherning – Journal of Geodesy, 2001 – №75 - P. 308-312.
4. Barthelmes Franz. Definition of Functionals of the Geopotential and Their Calculation from Spherical Harmonic Models: Scientific technical Report STR09/02 / Franz Barthelmes – Helmholtz-Zentrum Potsdam 2009.
5. Baur O. Efficient GOCE satellite gravity field recovery based on least-squares using QR decomposition / Baur O, G Austen, J Kusche. – Journal of Geodesy, DOI: 10.1007/s00190-007-0171-z, 2007.
6. Baur O. Methodology and use of tensor invariants for satellite gravity recovery / Baur O, N Sneeuw, E Grafarend - Journal of Geodesy, DOI: 10.1007/s00190-007-0178-5, 2007.
7. Blais J. A. R. Spherical harmonic analysis and synthesis for global multiresolution applications / J. A. R. Blais, D. A. Provins – Journal of Geodesy, 2002 – № 76 - P. 29-35.
8. Bock H. GPS-derived orbits for the GOCE satellite / H. Bock, A. Jäggi, U. Meyer, P. Visser, J. van den Ijssel, T. van Helleputte. M, Heinze, U. Hugentobler - Journal of Geodesy, 2011 - № 85 – P. 807–818.
9. Bouman J. Calibration of GOCE SGG data using high-low SST, terrestrial gravity data and global gravity field models / J. Bouman, R. Koop, C. C. Tscherning, P. Visser – Journal of Geodesy, 2004 – №78 – P. 124-137.

10. Bouman J. Error assessment of GOCE SGG data using along track interpolation / J. Bouman and R. Koop – *Advances in Geosciences*, 2003 – №1 – P. 27-32.
11. Bouman J. Gravity Gradients and spherical harmonics – a need for different GOCE products / J. Bouman and R. Koop – *Proc. Second International GOCE User Workshop “GOCE, The Geoid and Oceanography”*, 2004.
12. Bouman J. Preprocessing of gravity gradients at the GOCE high-level processing facility / Johannes Bouman, Sieste Rispens, Thomas Gruber, Radboud Koop, Ernst Schrama, Pieter Visser, Carl Christian Tscherning, Martin, Veicherts – *J Geod*, DOI 10.1007/s00190-008-0279-9.
13. Braun A. *Satellite Altimetry - Principles and Applications* / Alexander Braun and C. K. Shum - Byrd Polar Research Center and Laboratory for Space Geodesy and Remote Sensing, The Ohio State University, Columbus, OH, USA.
14. Brockmann J.M. EGM_TIM_RL05: An independent geoid with centimeter accuracy purely based on the GOCE mission / Brockmann J.M., Zehentner N., Höck E., Pail R., Loth I., Mayer-Gürr T., Schuh W.-D - *Geophysical Research Letters*, Vol. 41, No. 22, P. 8089-8099, doi: 10.1002/2014GL061904, 2014.
15. Bruinsma S. The new ESA satellite-only gravity field model via the direct approach / Bruinsma S. L., Foerste C., Abrikosov O., Marty J.C., Rio M.H., Mulet S., Bonvalot S. - *Geophysical Research Letters*, Vol. 40, P. 3607-3612, doi: 10.1002/grl.50716, 2013.
16. Bruinsma S.L. CNES/GRGS 10-day gravity field models (release 2) and their evaluation / Bruinsma, S.L., J.M. Lemoine, R. Biancale, N. Vales. - *Adv. Space Res* 45:587-601. doi:10.1016/j.asr.2009.10.012.
17. Canuto E. Drag free control for the European satellite GOCE. Part I: modeling / Enrico Canuto, Basilio Bona, Giuseppe Calafiore, Marina Indri – Las Vegas: *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, 2002 – P. 1269-1274.

18. Colombo Oscar L. Numerical Methods for Harmonic Analysis on there Sphere / Oscar L. Colombo – Columbus, Ohio 43210: The Ohio State University Department of Geodetic Science, 1981.
19. Dietrich R. Calibration/Validation of GOCE data over Antartica / R. Dietrich, M. Wiehl, M. Scheinert, C. Shum, A. Braun, S. Han, K. Shibuluya, Y. Fukuda, T. Sato – Proc. Second International GOCE User Workshop “GOCE, The Geoid and Oceanography”, 2004.
20. Ditmar P. Computation of spherical harmonic coefficients from gravity gradiometry data to be acquired by the GOCE satellite: regularization issues / P. Ditmar, J. Kusche, R. Klees – Journal of Geodesy, 2003 – №77 – P. 465-467.
21. Ditmar P. Fast and accurate computation of spherical harmonic coefficients / Ditmar P., R. Klees, Kostenko F. - Report of Delft University Technology, 2002, P. 50.
22. Eicker Annette. Gravity Field Refinement by Radial Basis Functions from In-situ Satellite Data: Inaugural-Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.) / Annette Eicker. – Bonn: Institut für Geodäsie und Geoinformation der Universität Bonn, 2008.
23. Eötvös L. Studies in the field of gravity and magnetic / Eötvös L. - “Three fundamental papers of Loránd Eötvös”, Transl. from Hungarian, ELGI Budapest, 1998, P. 83-125.
24. Farahani H.H. The static gravity field model DGM-1S from GRACE and GOCE data: computation, validation and an analysis of GOCE mission’s added value / Farahani H.H., Ditmar P., Klees R., Liu X., Zhao Q., Guo J. - *Journal of Geodesy* 87, 2013 p, doi: 10.1007/s00190-013-0650-3, P. 843-867.
25. Förste C. EIGEN-6C4 The latest combined global gravity field model including GOCE data up to degree and order 2190 of GFZ Potsdam and GRGS Toulouse / Förste C., Bruinsma S.L., Abrikosov O., Lemoine J.-M., Schaller T., Götze H.-J., Ebbing J., Marty J.C., Flechtner F., Balmino G., Biancale R. - the 5th GOCE User Workshop, Париж, 2014.
26. Förste C. EIGEN-GL05C - A new global combined high-resolution GRACE-based gravity field model of the GFZ-GRGS cooperation. Geophysical

Research Abstracts, 2008, Vol. 10, EGU2008-A-03426, SRef- ID: 1607-7962/gra/EGU2008-A-03426.

27. Förste Ch. Global Mean Gravity Field Models from Combination of Satellite Mission and Altimetry/Gravimetry Surface Data./ Förste, Ch. Flechtner, F. Schmidt, R. König, R. Meyer, Ul. Stubenvoll, R. Rothacher, M. Barthelmes, F. Neumayer, H. Biancale, R. Bruinsma, S. Lemoine, J.-M. Loyer. Proceedings of the 3rd GOCE User Workshop, ISBN 92-9092-938-3, ISSN 1609-042X, ESA 2007.

28. Freeden W. Spherical Tikhonov regularization wavelets in satellite gravity gradiometry with random noise / W. Freeden, S. Pereverzev – Journal of geodesy, 2001 – №74 – P. 730-736 .

29. Gatti A. Space-wise grids of gravity gradients from GOCE data at nominal satellite altitude / Gatti A., Reguzzoni M., Migliaccio F., Sanso F. - the 5th International GOCE User Workshop, Париж, 2014.

30. Gaussian Filtering. [электронный ресурс] / New Zealand, The University of Auckland – режим доступа: https://www.cs.auckland.ac.nz/courses/compsci373s1c/PatricesLectures/Gaussian%20Filtering_1up.pdf.

31. Gelderen N. The solution of the general geodetic boundary value problem by least squares / M. van Gelderen, R/ Rummel – Journal of Geodesy, 2001 – № 75 – P. 1-11.

32. Grombein Thomas. Smoothing GOCE gravity gradients by means of topographic- isostatic reductions / Thomas Grombein, Kurt Seitz and Bernhard Heck – Proc. of “4th International GOCE User Workshop”, Munich, 2011.

33. Gruber T. The role of the atmosphere for satellite gravity field missions / Gruber, T.; Peters, T.; Zenner, L.; Sideris, M.G. (eds.) Observing our Changing Earth, IAG Symposia, Vol. 133, pp 105-112, Springer, ISBN (Print) 978-3-540-85425-8, ISBN (Online) 978-3-540-85426-5, ISSN 0939-9585, DOI: [10.1007/978-3-540-85426-5_13](https://doi.org/10.1007/978-3-540-85426-5_13), 10/2008

34. Gruber Th. GOCE High Level Processing Facility GOCE Level 2 Product Data Handbook / Th. Gruber, R. Rummel, O. Abrikosov, R. van Hees - The European GOCE Gravity Consortium EGG-C, 2010 – P. 77.
35. Gruber Th. GOCE Level2 Product Data Handbook / Th. Gruber, R. Rummel, O. Abrikosov, R. van Hees - https://earth.esa.int/c/document_library/get_file?folderId=14168&name=DLFE-591.pdf.
36. Gruber Th. High-resolution gravity field modeling with full variance-covariance matrices / T. Gruber – Journal of Geodesy, 2001 – №75 – P. 505-514.
37. Gruber Th. The GOCE Gravity Field Space Mission as an important Step for the Exploration of our Planet; Proceedings of INCOSE2008 - Systems Engineering for the Planet, International Council of System Engineering (INCOSE), 06/2008.
38. Haagmans R. An Alternative Concept for Validation of GOCE Gradiometry Results Based on Regional Gravity, In: Gravity and Geoid 2002./ Haagmans R, Prijatna K, Omang O. - 3rd Meeting of the IGGC. Tziavos (ed.), Gravity and Geoid 2002, Ziti Editions, 2003 – P. 281-286.
39. Hirt Christian. New ultra-high resolution picture of Earth's gravity field / Christian Hirt, Sten Claessens, Thomas Fecher, Michael Kuhn, Roland Pail, Moritz Rexer – Geophysical Research Letters, 2013 – vol 40.
40. Hofmann-Wellenhof Bernhard. Physical Geodesy / Bernhard Hofmann-Wellenhof, Helmut Moritz – SpringerWieNewYork, 2005 – P. 412.
41. ICGEM (Міжнародний центр гравітаційних моделей Землі) - <http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/>
42. Janak Juraj. Application of GOCE data for regional gravity field modeling / Juraj Janak, Yoichi Fukuda, and Peiliang Xu – Earth Planets Space, 2009 – №61 – P. 835-843.
43. Jekeli C. Potential theory and static Gravity Field of the Earth / C. Jekeli – Elsevier B.V., 2007.
44. Jekeli Christopher. Geometric Reference Systems in Geodesy / Christopher Jekeli – Ohio, 2006 – P. 202.

45. Johannessen J. A. The European Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer Satellite Mission: Its impact on Geophysics / J. A. Johannessen, G. Balmino, C. LE Provost, R. Rummel, R. Sabadini, H. Sünkel, C. C. Tscherning, P. Visser, P. Woodworth, C. W. Hughes, P. Legrand, N. Sneeuw, F. Perosanz, M. Aguirre-Martinez, H. Rebhan and M. R. Drinkwater – *Surveys in Geophysics*, 2003 – № 24 – P. 339-386.
46. Kaula William M. *Theory of Satellite Geodesy* / William M. Kaula – Waltham, Massachusetts, Toronto, London: Blaisdel Publishing Company, 1966 – P. 125.
47. Kern Michael. *An Analysis of the Combination and Downward Continuation of Satellite, Airborne and Terrestrial Gravity Data: A dissertation for the degree of doctor of philosophy* / Michael Kern. – Alberta, 2003 – P. 175.
48. Klees R. *Combination of GPS-levelling and gravity data for height reference surface modeling* / R Klees, I Prutkin – Delft: The Netherlands Delft institute Earth Observation and space systems (DEOS).
49. Klees R. *Efficient gravity field recovery from GOCE gravity gradient observation* / R. Klees, R. Koop, P. Visser, J van den Ijssel - *Journal of Geodesy*, 2000 – №74 – P. 561-571.
50. Koop R. *The status of the GOCE High-level processing facility* / Koop R, T. Gruber, R Rummel - ‘The 3rd International GOCE User Workshop’, ESA-ESRIN, Італія, 2006 (ESA SP-627, 2007), P. 199-204.
51. Lambeck K., . *Aristoteles – An ESA Mission to Study the Earth’s Gravity Field*, 1990, *ESA Journal* 14: 1-2 1 .
52. Mayrhofer R. *Quick-look gravity field solution as part of the GOCE quality assessment* / Mayrhofer R., Pail R. & Fecher T. - the *ESA Living Planet Symposium*, Норвегія, ESA SP-686, ISBN 978- 92-9221-250-6, ISSN 1609-042X.
53. Metzler B. *GOCE data processing: the spherical cap regularization approach* / B. Metzler, R. Pail – *Stud. Geophys. Geod.*, 2005 – №49 – P. 441-462.

54. Migliaccio F. A GOCE-only global gravity field model by the space-wise approach / Migliaccio F., Reguzzoni M., Gatti A., Sanso F., Hecceg M. - the 4th International GOCE User Workshop, МЮНХЕН 2011.
55. Migliaccio F. Space-wise approach to satellite gravity field determination in the presence of coloured noise / F. Migliaccio, M. Reguzzoni, F. Sanso – Journal of Geodesy, 2004 – №78 – P. 304-313.
56. Moritz H. Earth's Rotation. Theory and estimations / Moritz H., & Muller I.I. – Нью Йорк.
57. Moritz H. Geometry, Relativity, Geodesy / Moritz H. & B. Hofmann-Wellenhof - Wichmann, Karlsruhe.
58. Müller J. GOCE gradients in various reference frame and their accuracies / J. Müller – Advances in Geosciences, 2003 – № 1 – P. 33-38.
59. Müller J. Quality Evaluation of GOCE Gradients / Müller, J., Jarecki, F., Wolf, K.I., Brieden, P. - Flechtner, F.M., (eds.), System Earth via Geodetic-Geophysical Space Techniques, Springer, Нью Йорк, P. 265-276.
60. Novak P. On the downward continuation of gravitational gradients(GOCE-GDC project) / Novak P., Sebera J., Val'ko M., Baur O. - GGHS, Venice, Italy, 2012.
61. Pail R. Assessment of three numerical solution strategies for gravity field recovery from GOCE satellite gravity gradiometry implemented on a parallel platform / R. Pail, G. Plank – Journal of Geodesy, 2002 – №76 – P. 462-474.
62. Pail R. Comparison of numerical solution strategies for gravity field recovery from GOCE SGG observations implemented on a parallel platform / R. Pail, and G. Plank – Advances in Geosciences, 2003 – №1 – P. 39-45.
63. Pail R. GOCE gravity field processing strategy / R. Pail, G. Plank – Stud. Geophys. Geod., 2004 – №48 – P. 289-309.
64. Pail R. Spatially restricted data distributions on the sphere: the method of orthonormalized functions and applications / R. Pail, G. Plank, W.-D. Schuh – Journal of Geodesy, 2001 – №75 – P. 44-56.
65. Pavlis Nikolaus K. The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008) / Nikolaos K. Pavlis, Simon A. Holmes,

- Steve C. Kenyon, and John K. Factor - Journal of geophysical research, 2012 – P. 117.
66. Pitonak Martin. Downward Continuation and Transformation of GOCE based disturbing gravity tensor / Martin Pitonak and Juraj Janak – GGHS, Венеція, 2012.
67. Preimesberger T. GOCE quick-look gravity solution: application of the semianalytic approach in the case of data gaps and non-repeat orbits / T. Preimesberger and R. Pail – Stud. Geophys. Geod., 2003 – №47 – P. 435-453.
68. Püschel Markus. Algebraic Signal Processing Theory: Cooley–Tukey Type Algorithms for DCTs and DSTs / Markus Püschel, and José M. F. Moura - IEEE Transactions on Signal Processing, 2008 – №56 (4) - P. 1502-1521.
69. Rapp Richar H. Geometric Geodesy Part II / Richard H. Rapp – Ohio, P. 1993 – 225.
70. Reguzzoni M. From the time-wise to space-wise GOCE observables / M. Reguzzoni - Advances in Geosciences, 2003 - №1 – P. 137–142.
71. Reguzzoni M. Optimal multi-step collocation: application to the space-wise approach for GOCE data analysis / Reguzzoni M., Tselfes N. - Journal of Geodesy, 2009, №83(1) – P. 13-29.
72. Rummel R. Gravity Gradiometry: From Loránd Eötvös to Modern Space Age / Rummel R. - Acta Geod. Geoph. Hung., 2002 - №37(4)- P. 435-444.
73. Rummel R. Reference Systems in Satellite Geodesy / R. Rummel T. Peters – Munchen, 2001 – P. 26.
74. Rummel R. The Future of Satellite Gravimetry, Report from the Workshop on The Future of Satellite Gravimetry / Rummel R., Koop R. - 12-13.4.2007, ESTEC, Нурдвік, Нідерланди, 2008.
75. Salzmann Martin. Least Squares filtering and testing for geodetic navigation applications / Martin Salzmann – Нідерланди, 1993.
76. Sean L. ESA's satellite-only gravity field model via the direct approach based on all GOCE data / Sean L. Bruinsma, Christoph Foerste, Oleg Abrikosov, Jean-Michel Lemoine, Jean-Charles Marty, Sandrine Mulet, Marie-Helene Rio, and Sylvain Bonvalot - Geophys. Research Letters, doi: 10.1002/2014GL062045.

77. Seeber Günter. Satellite Geodesy: [2nd completely revised and extended edition] / Günter Seeber – Berlin , New York: Walter de Gruyter, 2003 – P. 592.
78. Shin-Chan Han. Efficient Global Gravity Determination from Satellite-to-Satellite Tracking (SST) (Department of Civil and Environmental Engineering and Geodetic Science. Report No. 467)/ Shin-Chan Han – The Ohio State University, Columbus, Ohio, 2003.
79. Sneeuw N. Global spherical harmonic analysis by least-squares and numerical quadrature methods in historical perspective / Sneeuw N. - Physical Geodesy. Springer, Нью Йорк, 1994, P. 713.
80. Sneeuw N. Global spherical harmonic computation by two-dimensional Fourier methods / Sneeuw N - Journal of Geodesy, Springer-Verlag, 1996, №70 - P. 224-232.
81. Sneeuw N. Science requirements on future missions and simulated mission scenarios / Sneeuw N., Flury, J.; Rummel, R. - Earth, Moon, and Planets Vol. 94, №. 1-2, 113-142 cc, DOI: 10.1007/s11038-004-7605-7x, 01/2005.
82. Tóth Gy, The Eötvös spherical horizontal gradiometric boundary value problem – gravity anomalies from gravity gradients of the torsion balance. In: Gravity and Geoid 2002. / Tóth Gy - 3rd Meeting of the IGGC. Tziavos (ed.), Gravity and Geoid 2002, Ziti Editions, 2003 – P. 102-107.
83. Tscherning C. C. Closed covariance expressions for gravity anomalies, geoid undulation, and deflections of the vertical implied by anomaly degree variance models (Reports of the Department of Geodetic Science. Report No. 208) / C. C. Tscherning and Richard H. Rapp – The Ohio State University: Columbus, Ohio, 1974.
84. Tscherning C. C. Computation of spherical harmonic coefficients and their error estimates using least-squares collocation / C. C. Tscherning – Journal of Geodesy, 2001 – №75 – P. 12-18.
85. Vermeersen B. Challenges from solid earth dynamics for satellite gravity field missions in the post-GOCE era / Vermeersen B. – Earth, Moon, and Planets, Vol. 94, №. 1-2, 31-40 cc, DOI: 10.1007/s11038-004-1816-75, 01/2005.

86. Visser P.N.A.M. Exploring gravity field determination from orbit perturbations of the European Gravity Mission GOCE / P.N.A.M. Visser, J. van den Ijssel, R Koop, R Klees – Journal of Geodesy, 2001 – №75 – P. 89-98.
87. Visser P.N.A.M. GPS-based precise orbit determination of the very low Earth-orbiting gravity mission GOCE / P.N.A.M. Visser, J van den Ijssel – Journal of Geodesy, 2000 – №74 – P. 590-602.
88. Wessel P. The Generic Mapping Tools (GMT, Version 4). Technical Reference and Cookbook / Wessel P., Smith W.H.F. - Гонолулу, HI and Silver Spring, MD, 2004, P. 123.
89. Wolf Karen Insa. Accuracy Analysis of External Reference Data for GOCE Evaluation in the Space and Frequency Domain (Постер) / Karen Insa Wolf - Institut für Erdmessung, Leibniz Universität Hannover, Germany.
90. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Гантмахер Ф. Р. – М.: Наука. 1988 – С. 552.
91. Гофман-Велленгоф Бернхард. Физическая Геодезия / Бернхард Гофман-Велленгоф, Гельмут Мориц [Перевод с английского Ю.М. Неймана, Л.С. Сугаиповой Под редакцией доктора технических наук Ю.М. Неймана] – Москва: МИИГАиК 2007 – С. 426.
92. Двудіт П. Д. Фізична геодезія / П. Д. Двудіт; [підручник для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за напрямом «Геодезія, картографія та землеустрій»] – Київ: «Експрес», 2008 – С. 256.
93. Дослідження гравітаційного поля, топографії океану та рухів земної кори в регіоні Антарктики [О.М. Марченко, К.Р. Третяк, А.Я. Кульчицький, Ю.І. Голубінка, Д.О. Марченко, Н.П. Третяк] за заг. ред. О.М. Марченка та К.Р. Третяка – Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2012 – С. 308.
94. Заблоцький Федір. АНГЛІЙСЬКО – УКРАЇНСЬКИЙ ГЕОДЕЗИЧНИЙ СЛОВНИК / Федір Заблоцький, Олександра Заблоцька [англійсько – український геодезичний словник] – Львів: Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2010 – С. 360.

95. Зазуляк П. М. Основи математичного опрацювання геодезичних вимірювань / Зазуляк П. М., Гавриш В. І. Євсєєва Е. М., Йосипчук М. Д. - Львів: Видавництво "Растр-7", 2007. – С. 408.
96. Лоусон Ч. Численое решение задач метода наименьших квадратов [переклад з англійської Х. Д. Ікрамова] / Ч. Лоусон, Р. Хенсон – М.: Наука, 1986 – С. 232.
97. Лук'янченко Ю. О. Побудова нормальних рівнянь для опрацювання даних місії GOCE / Ю. О. Лук'янченко – Геодинаміка, 2013 – №1(14) – С. 34-37.
98. Лук'янченко Ю. О. Попереднє опрацювання супутникових гравітаційних градієнтів місії GOCE / Ю. О. Лук'янченко – Геодинаміка, 2012 – №1(12) – С. 63-66.
99. Марченко О. Компоненти тензора інерції Землі за даними місій GRACE і GOCE / Марченко О., Ярема Н., Лопушанський О., Лук'янченко Ю. - Збірник матеріалів, «Геоінформаційний моніторинг навколишнього середовища: GNSS і GIS – технології» 12-17 вересня 2011 р, Алушта (Крим) – С. 92-95.
100. Марченко О. М. Визначення зональних гармонічних коефіцієнтів / О. М. Марченко, Ю. О. Лук'янченко – Збірник матеріалів XVIII міжнародного науково-технічного симпозиуму «Геоінформаційний моніторинг навколишнього середовища: GNSS і GIS – технології », 2013 – С. 330-332.
101. Марченко О. М. Визначення зональних гармонічних коефіцієнтів методом регуляризації / О. М. Марченко, Ю. О. Лук'янченко – Геодинаміка, 2013 – №2(15) – С. 10-12.
102. Марченко О. М. Добові розв'язки гармонічних коефіцієнтів 2-го порядку за даними градієнтометра місії GOCE / О. М. Марченко, Н. П. Ярема, О. М. Лопушанський, Ю. О. Лук'янченко - Геодинаміка ,2011 №1 (10) – С. 22-26.

103. Марченко О. М. Побудова матриці нормальних рівнянь для моделювання локального гравітаційного поля / О. М. Марченко, Б. Б. Джуман – Геодезія, картографія та аерознімання, 2014 – №79 – С. 29-34.
104. Марченко О. М. Редукування вертикальних градієнтів сили тяжіння на сферичну поверхню / О. М. Марченко, Ю. О. Лук'янченко – Геодезія, картографія і аерофотознімання, 2014 – №79 – С. 48-53.
105. Марченко Олександр Миколайович. Референсні Системи в Геодезії / О.М. Марченко, К.Р. Третьак, Н.П. Ярема – Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2013 – С. 216.
106. Мориц Гельмут. Современная физическая геодезия / Г. Мориц; [Перевод с английского П.П. Медведева под редакцией Ю.М. Неймана] – МОСКВА: «Недра», 1983.
107. Оберхеттингер Ф. Преобразование Фурье распределений и их обращения / Оберхеттингер Ф. – М.: Наука 1979, С. 248.
108. Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач: 2-е издание / Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. - Наука. Главная редакция физико-математической литературы 1979.
109. Урмаев М. С. Космическая фотограмметрия: Учебник для вузов / М. С. Урмаев - Москва: Недра, 1989 – С. 279.
110. Хемінг Р. В. Цифрові фільтри [переклад з англійської] / під редакцією Трахімана – Сов. Радіо, 1980 – С. 224.