

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

На правах рукопису

Фис Михайло Михайлович



УДК 528.21;550.312;521.21;52.17

**Математичні моделі розподілу густини надр планет та їх  
гравітаційних полів**

05.24.01—геодезія, фотограмметрія та картографія

Дисертація на здобуття наукового ступеня  
доктора технічних наук

Науковий консультант-  
доктор технічних наук  
професор, Черняга П. П.

Ідентичність всіх примірників дисертації засвідчую

Учений секретар спеціалізованої Вченої ради Д 35.052.12.



/ Паляниця Б.Б./

Львів – 2016

## ЗМІСТ

<b>ВСТУП</b> .....	6
<b>РОЗДІЛ 1. АНАЛІЗ СТАНУ ВИВЧЕННЯ ПЛАНЕТАРНИХ ХАРАКТЕРИСТИК.</b>	18
1.1. Постановка задачі.....	18
1.2. Сучасний стан вивчення внутрішньої структури та гравітаційних полів ...	20
1.2.1. Способи представлення гравітаційних полів планет та моделі, що їх представляють. ....	20
1.2.2. Визначення фігури планет	28
1.2.3. Розподіл мас планетарних тіл.....	29
<b>ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 1</b> .....	33
<b>РОЗДІЛ 2. МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ НАБЛИЖЕННЯ ТРИВИМІРНИХ РОЗПОДІЛІВ МАС В ЕЛІПСОЇДАЛЬНИХ ПЛАНЕТАХ</b> .....	34
2.1. Системи ортогональних функцій в еліпсоїді .....	34
2.2. Рекурентні формули для функцій $\omega_{mnk}, W_{mnk}$ .....	35
2.3. Аналоги формул Родріга многочленів $W_{mnk}, \omega_{mnk}$ .....	38
2.4. Біортогональність систем многочленів $\omega_{mnk}, W_{mnk}$ .....	41
2.5. Квазіортогональність системи многочленів $W_{mnk}$ .....	43
2.6. Аналітичні зображення многочленів $W_{mnk}, \omega_{mnk}$ .....	45
2.6.1. Вирази для визначення многочленів $W_{mnk}$ .....	46
2.6.2. Явні вирази многочленів $\omega_{mnk}$ .....	46
2.7. До екстремумів многочленів $W_{mnk}$ .....	47
2.8. Про значення многочленів $W_{mnk}$ , в початку системи відліку .....	49
2.9. Дослідження біортогональних систем функцій .....	50
2.10. Збіжність біортогональних рядів .....	53
<b>ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 2</b> .....	59
<b>РОЗДІЛ 3. ДОСЛІДЖЕННЯ ГРАВІТАЦІЙНОГО ПОЛЯ ПЛАНЕТАХ ЗА ДОПОМОГОЮ БІОРТОГОНАЛЬНИХ РЯДІВ</b> .....	60
3.1. Класичне представлення потенціалу притягання планети.....	60

3.2. Представлення кульових функцій в прямокутній планетарній системі координат .....	63
3.3. Аналіз структури стоксових постійних планетарних тіл.....	68
3.3.1. Радіальний розподіл мас еліпсоїда $\tau \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$ .....	69
3.3.2. Випадок функції двох змінних $\delta = \delta(\rho, \theta)$ відносного радіуса та широти.....	72
3.3.3. Випадок тривимірного розподілу мас.....	72
3.4. Використання біортогональних рядів для представлення потенціалу планети. Системи неортогональних гармонійних функцій.....	76
3.5. Еліпсоїдальна та декартова системи координат і зв'язок між ними.....	80
3.6. Геометричні характеристики еліпсоїдальних планетарних тіл.....	83
3.7. Порівняння одного класу гармонічних та кульових функцій при представленні потенціалу планети.....	89
3.8 До визначення еквіпотенціальних поверхнь планет з використанням біортогональних розкладів.....	97
3.9. Некласичне представлення потенціалу планети всюди збіжними рядами..	100
3.10. Про можливість визначення коефіцієнтів розкладу потенціалу всюди збіжними рядами та їх геофізичне тлумачення.....	105
ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 3 .....	111
<b>РОЗДІЛ 4... ПОБУДОВА ТРИВИМІРНИХ МОДЕЛЕЙ ГУСТИНИ РОЗПОДІЛУ МАС ЕЛІПСОЇДАЛЬНИХ ПЛАНЕТ .....</b>	<b>112</b>
4.1. Загальні зауваження до побудови тривимірних моделей розподілу мас ...	112
4.2. Побудова тривимірної моделі другого порядку .....	115
4.3. Оцінка точності представлення густини многочленом другого порядку ..	118
4.3.1. Визначення середньої густини небесних тіл Сонячної системи.....	118
4.3.2. Формула оцінки точності знаходження густини другого порядку.....	120
4.4. Наближений метод Мещерякова Г. О побудови тривимірного розподілу мас.....	123

4.5. Приведення фундаментальних постійних до загальної планетарної системи відліку. Використання цих даних при побудові тривимірних функцій розподілу мас планет .....	125
4.6. Частковий випадок зв'язку систем координат та співвідношення в цій системі .....	131
4.7. Практика побудови тривимірних моделей розподілу надр деяких планет	132
4.8. Умови наближеного визначення тривимірних розподілів густини. ....	139
4.9. До визначення густини розподілу мас в центрі мас планети .....	141
4.10. Побудова точних моделей розподілу мас з урахуванням поверхневої густини та стоксових постійних вищих порядків.....	145
4.10.1. Теоретичні основи методу побудови .....	145
4.10.2. Метод знаходження розподілу мас планети з урахуванням стоксових постійних до четвертого порядку .....	154
4.11. Знаходження оцінки для значення густини в центрі еліпсоїдальної планети.....	163
4.12. Новий підхід використання стоксових постійних для побудови функцій розподілів мас планет та її похідних .....	166
4.12.1. Нульове наближення.....	166
4.12.2. Перше наближення.....	171
ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 4 .....	181
<b>РОЗДІЛ 5. ВНУТРІШНІЙ ПОТЕНЦІАЛ І ГРАВІТАЦІЙНА ЕНЕРГІЯ СФЕРИЧНОЇ І ЕЛІПСОЇДАЛЬНОЇ ПЛАНЕТИ .....</b>	<b>182</b>
5.1. Потенціал радіального розподілу мас еліпсоїдальної планети.....	182
5.2. Методи апроксимації радіальних розподілів густини мас многочленами Лежандра та дослідження їх збіжності. ....	188
5.3. Приклади визначення внутрішнього потенціалу та енергії сферичної планети .....	195
5.4. Дослідження методики вивчення внутрішньої апроксимації функції густини планети на прикладі моделі PREM. ....	201
5.5. Внутрішній потенціал та енергія неоднорідної еліпсоїдальної планети. ...	209

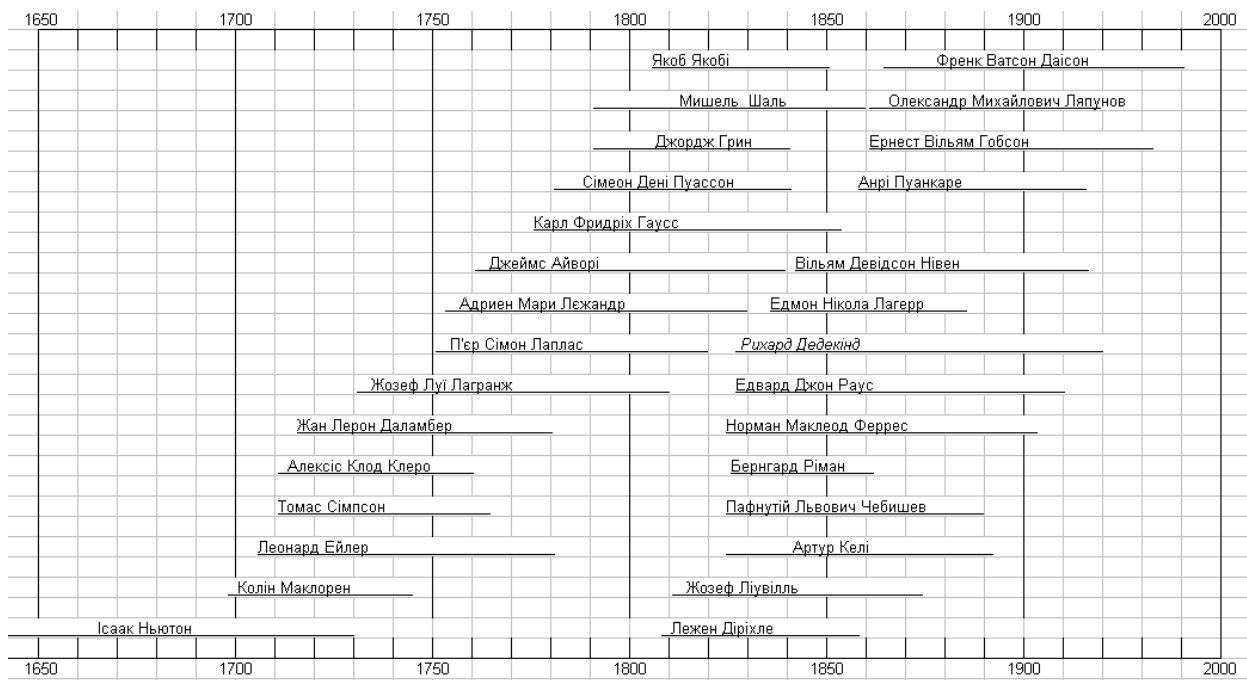
5.6. Гравітаційна енергія тривимірної еліпсоїдальної планети.....	212
5.7.Метод дослідження стану гідростатичної рівноваги тривимірної еліпсої- дальної планети. ....	215
5.8. Дослідження гідростатичного стану для тривимірного розподілу другого порядку еліпсоїдальної планети .....	218
<b>ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 5</b> .....	235
<b>ВИСНОВКИ</b> .....	236
<b>ЛІТЕРАТУРА</b> .....	238
<b>ДОДАТОК</b> .....	255

## ВСТУП

При вивченні фігури Землі та планет важливим моментом є одночасне дослідження їх внутрішньої структури та гравітаційного поля. Така постановка задачі була сформульована ще Клеро [33], яка звалась до вивчення потенціалу еліпсоїда. Завдяки роботам Стокса [92], а на сучасному етапі Молоденського [71] вдалось звести задачу визначення фігури планет без урахування їх внутрішньої будови. Таким чином, проблема розділилась на дві частини: визначення форми небесного тіла за його гравітаційним полем, що є основною задачею фізичної геодезії та встановлення структури планетарних надр, реалізованої в основному для Землі, що є предметом вивчення геофізики.

Таблиця 1

### Історія дослідження гравітаційного потенціалу [73]



Класична теорія потенціалу еліпсоїда, яка була предметом вивчення ряду визначних вчених (табл. 1), використовується в природничих науках: астрономії [19], астрофізиці [143], атомній фізиці [2,73], однак в геодезії вона практично не викорисовувалась. Такі дослідження започаткував Ньютон ще в своїх філософських трактатах [77,157], в яких вивчав стійкість обертання однорідного еліпсоїда. На протязі століть результати доповнювались видатними вченими [163,166,189], що ілюструється таблицею 1 [73]. Аналізуючи всіх їх детально, зауважимо, що етапи вивчення описані в працях

[143,189] Відмітимо лише, що зображення потенціалу стиснутого еліпсоїда отримав Маклорен [189], а сучасний запис похідних потенціалу, що нами використовуються, вперше ввів Гаусс [189]. Сьогоднішній стан досліджень характерний широким їх використанням Чандрасекхаром С. [143] для вивчення стійкості галактик. Запропонований ним віріальний метод дозволяє досліджувати неоднорідні згустки речовини галактичних скупчень.

**Актуальність теми і постановка задач.** Розвиток методологічної, теоретичної та інструментальної бази геодезії і геофізики призвів до отримання принципово нових знань про фігуру, гравітаційне поле і будову Землі та процеси, які є в її надрах. У зв'язку з перспективою розробки загальної теорії еволюції Землі набули особливої актуальності проблемні питання фізичної геодезії і геодинаміки, успішне вирішення яких потребує інтегрованого підходу у напрацюванні знань в таких науках про Землю, як геодезія, геофізика, геологія та астрономія.

Тема дисертаційної роботи охоплює широкий спектр теоретичних досліджень у побудові математичних моделей, які розкривають взаємозв'язок між зовнішнім і внутрішнім гравітаційним полем та розподілом густини в надрах планети. Ці дослідження на абсолютно новому теоретичному рівні продовжують геодезичну історичну традицію, започатковану ще Клеро, котрий стверджував, що зовнішнє і внутрішнє поле сили тяжіння і його генеруюче джерело – розподіл густини всередині Землі, нерозривно взаємозв'язані. Астрономогеодезія, що вивчає фігуру і гравітаційне поле Землі за допомогою астрономогеодезичних та гравіметричних вимірювань і точного нівелювання, має майже 200-річну історію. Класичне вирішення природничо-наукових завдань астрономогеодезії на рубежі ХІХ-ХХ ст. подано в знаменитих творах Ф.А. Слудського, Г. Брунса, А. Пуанкаре і Ф.Р. Гельмерта, в яких наведені приклади тісного зв'язку астрономії, геодезії, механіки та математики. Новий розвиток астрономогеодезії в першій половині ХХ ст. пов'язаний з роботами Ф.Н. Красовського, в яких нова предметна область геодезії – фізична геодезія, визначена як «проблема вивчення внутрішньої структури земної кулі, твердої

оболонки Землі, порушень рівноваги в ній, деформацій і переміщень різних частин літосфери». Він сформулював основні положення фізико-геометричного методу вивчення фігури Землі та її гравітаційного поля взагалі, а геоїда - зокрема, шляхом спільного використання даних астрономогеодезії, геології, геофізики, географії та геотектоніки. Ідеї міждисциплінарного вивчення фігури, гравітаційного поля і внутрішньої будови Землі знайшли своє продовження в багатьох наукових працях наприкінці ХХ ст. і були розвинуті та узагальнені в монографіях Г. Моріца «Фигура Земли: Теоретическая геодезия и внутреннее строение Земли» і М. М. Машимова «Планетарные теории геодезии» та «Теоретическая геодезия».

Дійсно, орбітальний рух і еволюція фігури планет значною мірою визначається їхньою внутрішньою структурною будовою та потенціалом сили ваги  $F$ . Потенціал притягання  $U$ , який є основною складовою величини  $F$ , генерується функцією розподілу мас  $\delta$  і поверхнею  $\tau$ , що обмежує тіло, та поділяється на внутрішній (саме  $U$ ) і зовнішній ( $V$ ). Значення  $U$  експериментально не визначається, а тому дані про  $V$ , які отримують із спостережень за орбітами штучних супутників Землі і результатами наземних гравіметричних вимірювань, є основним джерелом інформації.

Визначення зовнішнього потенціалу  $V$  Землі (планет) є основною задачею фізичної та супутникової геодезії. Методами її розв'язання займались багато вчених, зокрема: С. М. Молоденський, Г. Моріц, Т. Краруп, Р. Рапп, Л. П. Пеллінен, Ю. М. Нейман, М. І. Юркіна, М. І. Сагітов, М. М. Машимов, М. С. Петровська, К. В. Холшевников, Н. А. Чуйкова, Г. О. Мещеряков, О. М. Марченко, М. К. Мигаль, М. І. Марич, П. Д. Двудіт та інші. Представлення зовнішнього гравітаційного поля планет ортогональними функціями дозволило визначати потенціал  $V$  з великою точністю, за умови врахування великої кількості членів розкладу, наприклад, порядок сумування за кульовими функціями досягає тисячі і більше, що в свою чергу ставить питання збіжності такого математичного запису, особливо в приповерхневих областях планети.



Знаходження значень  $\delta$  і  $\tau$  за відомим  $V$  належить до оберненої задачі теорії потенціалу, яка характеризується неоднозначністю та нестійкістю її розв'язку. Фундаментальні роботи Стокса, а в подальшому і радикальна теорія Молоденського С. М. про визначення фігури Землі (планети) за її потенціалом  $V$ , дозволили звести задачу до формул без урахування внутрішнього розподілу мас, і це визначило шлях теоретичних та практичних наукових пошуків у вирішенні основної задачі геодезії. Саме С. М. Молоденському приписують відомий вислів, який був озвучений в дискусії з Ф. Н. Красовським, що геодезія повинна бути не «фізичною», а, навпаки, аналітичною. З того часу виявилась тенденція відкидати геофізичну компоненту в глобальних та регіональних геодезичних дослідженнях. Однак ситуація докорінно змінилась в результаті впровадження проектів глобальних геодинамічних досліджень, в яких геодезична інформація стала пріоритетною завдяки своїй достовірності та точності в процесі інтерпретації цих даних з позицій накопичених знань про внутрішню будову Землі.

Розв'язком оберненої геофізичної задачі (знаходження функції розподілу густини  $\delta$  надр планети за відомим потенціалом  $V$ ) займались Г. Моріц, В. М. Страхов, А. І. Прилепко та інші. В Україні ця проблематика відображена в роботах В. Г. Козленка, В. І. Старостенка, Е. Л. Шена, П. О. Міненка та інших. Вагомі результати отримали науковці Львівської школи, яку започаткував Г. О. Мещеряков, зокрема, П. М. Зазуляк, О. М. Марченко, А. Л. Церклевич, Ю. П. Дейнека, О. С. Заяць.

З потенціалом  $U$  та густиною  $\delta$  планет пов'язана ще одна важлива характеристика – гравітаційна (потенціальна) енергія, яка визначається за відомою формулою:

$$E = -\frac{1}{2} \int_{\tau} \delta U d\tau. \quad (1)$$

Фізичний зміст даної величини – це робота, виконана переміщенням мас в об'ємному тілі  $\tau$ . Основні дослідження даної характеристики проводились в рамках вивчення гідростатично врівноважених планет, оскільки мінімум потенціальної енергії забезпечує такий стан. Найбільш вагомі результати в

цьому напрямку були отримані Г. Моріцом, В. М. Жарковим, В. П. Трубіциним, в Україні Г. О. Мещеряковим, О. М. Марченком, Е. Л. Шеном.

У дисертаційній роботі також розглядається проблема визначення параметрів планети, що входять в рівняння[28,90]:

$$U(P) = f \int_{\tau} \frac{\delta(Q)}{r(P, Q)} d\tau. \quad (2)$$

Побудова моделей розподілу величин  $U$ ,  $\delta$  та  $\tau$  є надзвичайно актуальною проблемою в науках про Землю та планети. Вибір методів та алгоритмів визначення  $U$ ,  $\delta$  і  $\tau$  залежить від поставленої задачі та відомої інформації.

Оскільки дослідження виконуються в основному, для тіл еліпсоїдальної форми, то виникає необхідність в удосконаленні апарату наближення функцій в еліпсоїді, який може бути реалізований за допомогою многочленів трьох змінних. Побудову ортогональних систем можна виконати за допомогою процесу Грамма-Шмідта, однак реалізувати його практично неможливо. Тому будуються дві біортогональні системи многочленів  $W_{mnk}$  і  $\omega_{mnk}$  в еліпсоїді. Вони дозволяють представити функцію розподілу мас  $\delta$  у вигляді:

$$\delta(x, y, z) = \sum_{k=1}^m \delta_k(x_k, y_k, z_k) + \delta^0(\rho) + \sum_{m+n+k=0}^N b_{mnk} W_{mnk}(x, y, z), \quad (3)$$

де  $\delta^0(\rho)$  – одновимірний (сферично-симетричний) розподіл мас;  $\delta_k(x_k, y_k, z_k)$  – значення густини в конкретній точці (точкові маси),

$\delta(x, y, z) = \sum_{k=1}^m \delta_k(x_k, y_k, z_k) + \delta^0(\rho) + \sum_{m+n+k=0}^N b_{mnk} W_{mnk}(x, y, z)$  – тривимірна частина функцій розподілу мас;  $b_{mnk}$  – коефіцієнти розкладу.

Визначення коефіцієнтів  $b_{mnk}$  за даними про гравітаційне поле можливе лише наближено. При великих  $N$  реалізація алгоритму ускладнюється, у зв'язку з чим виникає необхідність удосконалення методики обчислень. Наявність великої кількості даних у вигляді коефіцієнтів розкладу (стоксових постійних) має бути раціонально використана, для цього запропонований новий метод їх застосування для знаходження  $b_{mnk}$ .

Властивості біортогональних систем дають можливість описати потенціал еліпсоїдального тіла рівномірно збіжним рядом:

$$U = f \int_{\tau} \frac{\delta}{r} d\tau = f \sum_{k=1}^m \frac{\delta_k}{r} d\tau + f \int_{\tau} \frac{\delta^0}{r} d\tau + f \sum_{m+n+k=0}^N b_{mnk} \int_{\tau} \frac{W_{mnk}}{r} d\tau. \quad (4)$$

Класичні результати представлення потенціалу еліпсоїда дозволяють обчислювати елементи формули (4) для кульових планет в замкнутому вигляді за відомими  $b_{mnk}$ ,  $\delta^0(\rho)$ ,  $\delta_k$ . В еліпсоїдальному випадку обчислення елементів виразу (4) значно ускладнюється. Тому більш раціонально обчислювати їх наближено. Для цього сферично-симетричні розподіли  $\delta^0(\rho)$  доцільно представляти у вигляді комбінацій многочленів Лежандра однієї змінної. Надалі це дає можливість також визначати гравітаційну енергію одновимірної функції  $\delta^0(\rho)$  для еліпсоїда. Практичне застосування запропонованої методики з використанням референцної моделі розподілу мас надр Землі – моделі PREM дозволило отримати не тільки оцінку значення енергії, а й використати її для вивчення стану гідростатичної рівноваги Землі.

#### **Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.**

Дослідження, виконані автором за темою дисертації, відповідають тематиці кафедри картографії та геопросторового моделювання «Математичне моделювання в геодезії, геофізиці з прогнозуванням розвитку територій на основі їх картографування та урахування функціональних властивостей і впливу геодинамічних процесів», що є одним з напрямів Інституту геодезії "Дослідження фігури та зовнішнього гравітаційного поля Землі та планет, створення геоінформаційних систем, програмних продуктів і баз геопросторових даних". Також деякі питання за темою дисертації знайшли відображення в рамках наукової програми Міжнародного проекту, підготованого в межах полярного року (2007-2008 р.) Polar Earth Observing Network (POLENET) – керівник Terry Wilson, Ohio State University, USA.

**Мета і завдання досліджень.** Мета роботи полягає в розробці методики апроксимації тривимірних функцій всередині еліпсоїдального тіла та її практичного застосування в дослідженнях об'ємних розподілів густини надр,

потенціалу та енергії планети. Для досягнення цієї мети в дисертації були поставлені такі завдання:

- удосконалити математичні методи апроксимації тривимірних кусково-неперервних функцій в еліпсоїді;
- встановити в повному обсязі властивості біортогональних систем, необхідних для реалізації методики наближення тривимірних кусково-неперервних розподілів мас надр планет;
- дослідити біортогональні ряди на збіжність (збіжність в середньому та збіжність за Чезаро і Абелем);
- використати біортогональні розклади для представлення потенціалу притягання планети;
- удосконалити формули для зовнішніх та внутрішніх кульових функцій в прямокутній системі координат;
- дослідити структуру стоксових постійних з використанням біортогональних рядів;
- побудувати алгоритми для обчислення некульових гармонічних функцій;
- представити потенціал притягання всюди збіжними рядами;
- визначити тривимірні модельні розподіли мас на основі даних спостережень з використанням нових наближених методів та застосувати їх для геофізичних інтерпретацій;
- отримати формули для визначення потенціалу одновимірної та тривимірної еліпсоїдальної планети;
- обчислити гравітаційну енергію для кульової та еліпсоїдальної планети;
- дослідити відхилення неоднорідного розподілу мас від стану гідростатичної рівноваги на прикладі планети Земля.

**Об'єкт дослідження.** Гравітаційні поля планет (зокрема Землі) та їх внутрішня структура.

**Предметом дослідження** є математичні моделі, методи визначення розподілів густини надр планет та їх зв'язок із зовнішнім і внутрішнім гравітаційним полем на основі біортогональних розкладів і дослідженням властивостей головних інтегральних характеристик.

**Методи дослідження.** Під час проведення теоретичних досліджень і розробки алгоритмів та комп'ютерних програм використовувались різні методи апроксимації функцій, елементи теорії потенціалу еліпсоїда, деякі положення математичного аналізу, алгебри матриць та результати геофізичних досліджень.

**Наукова новизна одержаних результатів.** Результати теоретичних досліджень та отримані алгоритми побудови математичних моделей мають фундаментальне значення для вивчення внутрішньої структури та гравітаційних полів планет. Вирішена важлива наукова проблема встановлення зв'язку тривимірної функції розподілу мас еліпсоїдальної планети та її потенціалу. Окрім цього:

1. Удосконалена методика апроксимації кусково-неперервних функцій в еліпсоїді, яка адаптована для побудови тривимірних розподілів мас всередині планети.
2. Уперше запропонована система неортогональних функцій, яка представляє потенціал планет у всьому просторі і є гармонічною поза небесним тілом, фігура якого – еліпсоїд.
3. Уперше отримане представлення потенціалу планети у вигляді всюди збіжних рядів.
4. Уточнені співвідношення для зовнішніх та внутрішніх кульових функцій в декартовій системі координат.
5. Подано формальне представлення для значення густини в центрі мас еліпсоїдальної планети та визначені інтервали його зміни.
6. Уперше запропонований алгоритм зведення stokсових постійних та динамічного стиснення в загальнопланетарну систему відліку.

7. Досліджений класичний наближений метод побудови тривимірних розподілів мас. Запропонований новий наближений спосіб знаходження функцій розподілу густини мас.
8. Отримано формули обчислення потенціалу еліпсоїда для деяких розподілів мас, на основі яких отриманий потенціал кульової та еліпсоїдальної планет.
9. Запропонований наближений метод обчислення потенціалів кусково-неперервних одновимірних функцій розподілу густини еліпсоїда (кулі). Визначені формули обчислення наближеного значення енергії еліпсоїда.
10. Виведено співвідношення для визначення потенціалу та енергії тривимірної еліпсоїдальної планети, на основі якого запропоновано новий метод дослідження стану гідростатичної рівноваги планет. Встановлені закономірності відхилення розподілу мас від стану гідростатичної рівноваги на прикладі планети Земля.

**Практичне значення одержаних результатів.** Практичне значення роботи полягає в розробці методики апроксимації розподілів мас планет та її використання для дослідження внутрішньої будови планет. Вона застосована в процесі виконання держдоговірної науково-дослідної роботи 4493 “Аналіз і дослідження геометричних і гравітаційних фігур Марса та його супутників” (номер державної реєстрації 1870088611) в Центральному науково-дослідному інституті геодезії, аерознімання і картографії (ЦНДІГАіК, м. Москва). На основі розроблених алгоритмів та програмних продуктів обчислені значення модельних розподілів густини мас всередині Марса та виконана інтерпретація основних марсіанських гравітаційних аномалій. Частина результатів роботи була використана при виконанні державної бюджетної теми ДБ “Референц” 2002-2003рр. (номер держреєстрації №0102U001196), зокрема при представленні тривимірних розподілів густини надр Місяця. Результати дисертаційних досліджень використані також при виконанні міжнародного проекту, підготовленого в межах полярного року (2007–2008 р.) Polar Earth Observing Network (POLENET) – керівник Terry Wilson, Ohio State University,

USA (IPY # 383” Geodynamic GPS Network for Argenninean Islands (Antarctsc Peninsula)).

Отримані результати можуть бути використані для інтерпретації гравітаційних аномалій Землі, а методика обчислення основних інтегральних величин - при вивченні планетарних геодинамічних процесів. Представлення потенціалу всюди збіжними рядами дає можливість практичного дослідження збіжності рядів за сферичними функціями, які описують гравітаційні поля планет.

Результати роботи впроваджені у навчальному процесі Національного університету “Львівська політехніка”, зокрема у процесі викладання навчальної дисципліни “Картографія” для базового напрямку 6.080101 “Геодезія, картографія та землеустрій” та дисципліни “Фізика Землі” магістерського напрямку “Космічна геодезія”.

#### **Основні положення, що виносяться на захист.**

1. Удосконалення методів апроксимації кусково-неперервних функцій в еліпсоїді та її використання для визначення функцій розподілу мас еліпсоїдальних планет.
2. Аналіз структури стоксових постійних зовнішніх гравітаційних полів планет.
3. Удосконалення формул представлення зовнішнього потенціалу в прямокутній системі координат.
4. Некласичні способи опису гравітаційних полів небесних тіл.
5. Наближений метод побудови функцій розподілу планетарних надр з використанням даних про гравітаційне поле.
6. Формула, що дає зображення значення густини в центрі мас та інтервал його зміни.
7. Метод побудови тривимірних функцій розподілу та їх похідних, що використовує стоксові постійні.

8. Наближені формули обчислення внутрішнього потенціалу еліпсоїдальної планети та порівняння їх із замкнутими співвідношеннями для кулі.

9. Формули для визначення гравітаційної енергії кульової та еліпсоїдальної планети.

10. Визначення потенціалу та гравітаційної енергії Землі, внутрішнім наповнення якої є модель PREM.

11. Метод дослідження стану гідростатичної рівноваги тривимірної еліпсоїдальної планети.

**Особистий внесок здобувача.** В одноосібних роботах [100-105] поданих дисертантом, розроблено методи опису потенціалу за допомогою неортогональних функцій, метод апроксимації фігур планет та обчислення їх внутрішнього потенціалу і гравітаційної енергії, отримано формулу визначення значення густини в центрі еліпсоїдальної планети та встановлені межі її зміни, що дозволяє створювати більш вірогідні моделі розподілів мас планет.

- У роботах, опублікованих у співавторстві, автору належить:
- постановка завдання, розробка методу, алгоритму і програм для проведення обчислень та інтерпретація отриманих результатів [25,66 - 68,106-109,112-115,117-119,121-126,128,129,131,133,134,135,139]
- інтерпретація отриманих результатів [56].
- розробка алгоритму та інтерпретація результатів [116,136,141,145].

**Апробація результатів дисертації.** Основні положення і результати роботи доповідались і обговорювались на міжнародних, всесоюзних та українських наукових конференціях, а також симпозіумах, зокрема на Міжнародному симпозіумі «Figure and Dynamics of the Earth, Moon and Planets» (Прага, 1987 р.), Всесоюзній науковій конференції “Селенодезія и динамика Луны” (Київ, 1987 р.), II Орловській конференції «Изучения Земли как планеты методами геофизики, геодезии и астрономии» (Київ, 1988 р.), III Орловській конференції «Изучение Земли как планеты методами астрономии, геофизики и геодезии» (Київ, 1994 р.), Міжнародному симпозіумі «Геодинаміка гірських



систем Європи», (Львів-Яремче, 1994 р.), Міжнародна науково-технічна конференція «Сучасні досягнення геодезичної науки і виробництва в Україні» (Львів, 1997 р.), Міжнародній науково-практичній конференції «Геодезичний моніторинг, геодинаміка і рефрактометрія на межі ХХІ століття» (Львів, 1998 р.), Науково-технічній конференції «Сучасні досягнення геодезії, геодинаміки та геодезичного виробництва», (Львів, 1999 р.), Міжнародному науково-технічному симпозиумі «VI міжнародний науково-технічний симпозиум геоінформаційний моніторинг навколишнього середовища – GPS і GIS – технології», (Алушта (Крим), 2001 р.), X Jubilee international scientific and technical symposium «Geoinformation monitoring of environment: GPS and GIS TECHNOLOGIES», (Alushta (Ukraine, Crimea), 2005 р.), Міжнародна науково-практична конференція «Новітні досягнення геодезії, геоінформатики та землевпорядкування – Європейський досвід» (Чернігів, 2007 р.), XIII міжнародному науково-технічному симпозиумі «Геоінформаційний моніторинг навколишнього середовища: GPS і GIS – технології», (Алушта (Крим), 2008 р.), Науковій конференції «Місяць через 40 років» (Київ, 2008 р.), Міжнародній науковій конференції «Культурний ландшафт і наука про Землю – основні завдання та шляхи вирішення», (Львів, 2009 р.), XVI міжнародному науково-технічному симпозиумі «Геоінформаційний моніторинг навколишнього середовища GPS і GIS – технології», (Алушта (Крим), 2011 р.), VIII міжнародній науково – практичній конференції «Новітні досягнення геодезії, геоінформатики та землевпорядкування – Європейський досвід», (Чернігів, 2012 р.), XVII міжнародному науково-технічному симпозиумі «Геоінформаційний моніторинг навколишнього середовища: GNSS і GIS – технології», (Алушта (Крим), 2012 р.), Всеукраїнській науково-практичній конференції «Проблеми землеустрою та геоінформатики», (Рівне, 2012 р.), XVIII міжнародному науково-технічному симпозиумі «Геоінформаційний моніторинг навколишнього середовища: GNSS і GIS – технології», (Алушта (Крим), 2013 р.), VII міжнародній науково-практичній конференції «Нові технології в геодезії, землевпорядкуванні та природокористуванні», (Ужгород,

2014 р.), Всеукраїнській науково-практичній конференції «Геодезія. Землеустрій. Природокористування: присвячується пам'яті П.Г. Черняги», (Рівне, 2014 р.), Міжнародних науково-технічних конференціях присвячених професійному святу працівників геології, геодезії і картографії України «GEOFORUM» (Львів–Яворів, 1997, 1999, 2004, 2005, 2008 рр.) та семінарах кафедри картографії та геопросторового моделювання (2010– 2015 р.).

**Публікації.** Результати дисертаційних досліджень опубліковані в 40 наукових роботах. Серед них: 4 – в наукометричних, 20 статей у періодичних фахових виданнях, 16 робіт у наукових збірниках, матеріалах і тезах конференцій.

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертація складається зі вступу, п'яти розділів, висновку, списку використаних джерел (195 найменувань) та додатку. Загальний обсяг роботи становить 255 сторінок, в тому числі 24 ілюстрацій та 40 таблиць.

## РОЗДІЛ 1.

### АНАЛІЗ СТАНУ ВИВЧЕННЯ ПЛАНЕТАРНИХ ХАРАКТЕРИСТИК

#### 1.1. Постановка задачі.

Поведінка планетарних тіл визначається їх параметрами, одні з яких отримуються безпосередньо з спостережень, а інші вираховуються з функціональних залежностей. Не применшуючи ваги інформації, що характеризує планету як механічне тіло (швидкості поширення поперечних та поздовжніх хвиль, частоти власних коливань тощо), наголосимо, що дані про зовнішні гравітаційні поля є основою наших подальших досліджень. Такий вибір обумовлений насамперед їх універсальністю. Адже набори стоксових постійних достатньо репрезентативно представляють зовнішній потенціал  $V$  всіх планет, що забезпечується великим їх об'ємом. Інтегральне рівняння (2), що пов'язує величину  $V$  з іншими параметрами небесних тіл: їх фігурою та розподілом мас, можна трактувати з різних позицій. Проста на вигляд формула (1) не є практично придатною, тому що об'ємне інтегрування не може бути реалізовано для тіл довільної форми. Відомі вирази лише в окремих випадках, наприклад, для паралелепіпеда постійної густини [14,15], потенціалу тіла сферичної форми [91], причому зовнішній та внутрішній потенціал визначаються різними формулами (розв'язок прямої задачі гравіметрії [15]). При цьому зовнішній потенціал  $V$  та його опис досить повно вивчений, на відміну від внутрішнього  $U$ , для якого в загальному випадку не існує достатньо простих формул їх зображення, не кажучи про можливість його спостереження. Тим більше, не існує єдиного алгоритму визначення потенціалу планети (зовнішнього та внутрішнього). В зв'язку з цим виникає завдання одночасного опису  $U$  та  $V$  через параметри розподілу мас тривимірної еліпсоїдальної планети, а вирішення цієї проблеми дозволяє створити алгоритми обчислення енергії  $E$  [155,156,174]

Фігури планет достатньо добре апроксимуються трьохосевим еліпсоїдом (двохосевим або кулею), а розподіл густини мас в середині передбачається

тривимірним та кусково-неперервним. В зв'язку з цим постає задача наближення таких функцій в еліпсоїді з допомогою ортогональних многочленів. Так як на сьогодні не відоме існування таких функцій, а замість них розглядаються системи біортогональних виразів в кулі [8], то постає задача такого узагальнення для еліпсоїда, а також адаптації такої методики до апроксимації розподілів густини надр планетарних тіл.

В такій постановці виникає завдання зв'язку коефіцієнтів розкладу з представленням гравітаційного поля, особливо зовнішнього, яке в принципі вважається відомим, і це дає можливість визначати їх по  $V$ . Реалізація такого зв'язку забезпечується обчисленням членів розкладу гравітаційного поля, які є потенціалами і володіють всіма їх властивостями. Поскільки область розгляду це еліпсоїд, то дається можливість використати класичну теорію потенціалу еліпсоїда для наших досліджень, а саме: встановити вирази для вирахування функцій розкладу. Такий підхід визначає залежність між гравітаційним полем планет, апроксимованих трьохосевим еліпсоїдом та їх розподілом густини надр, поданих розкладами по біортогональних рядах.

Визначення величини  $\delta$ , сформульованої в даному випадку як обчислення коефіцієнтів розкладу за відомим  $V$  представляє собою обернену задачу теорії потенціалу [53,55] та називається оберненою геофізичною задачею і є неоднозначною [46,51,76,78,83,84] та нестійкою [45] навіть для простих тіл [14,15]. Детальні дослідження в даному напрямку зроблені Страховим В.М. в його праці [93]. Для однозначного її розв'язання Мещеряков Г.О. запропонував метод побудови модельних розподілів мас планети, суть якого зводиться до наближеного визначення степеневих моментів [47,50]. Реалізація цього методу, особливо для великих порядків стоксових постійних, вимагає значного його удосконалення, що і робиться в даній роботі.

Пошук коефіцієнтів з допомогою степеневих моментів допускає разом з тим безпосереднє їх визначення. Для цього необхідно встановити зв'язки між стоксовими постійними та кофіцієнтами розкладу, а далі урівняти їх під умовою мінімального відхилення шуканого розподілу від відомого [55,182].

Метод наближеної побудови тривимірних розподілів мас потребує хорошого наближення, яке вибирається многочленом другої степені і включає всю сейсмічну інформацію для Землі у вигляді однієї з одновимірних моделей густини, а для інших небесних тіл як функцію стрибків. Подальше його уточнення на основі існуючої інформації та її використання з допомогою інших підходів є предметом дослідження даної роботи.

До оберненої задачі теорії потенціалу відноситься також визначення поверхні відносності за відомим гравітаційним полем  $V$  є основним предметом вивчення геодезії та проходить без урахування внутрішньої будови планет [92] фігури планети як поверхні рівня (значення функції постійної величини) на основі іншого представлення гравітаційного поля дає альтернативний спосіб їх побудови [100,119,122, 129].

Результати дослідження потенціалу еліпсоїда дають формулу для його визначення в однорідному випадку, а також загальний алгоритм обчислення для кусково-неперервних одновимірних розподілів мас, реалізувати який практично неможливо. Розробка методів апроксимації кусково-неперервних функцій і на їх базі обчислення внутрішнього потенціалу, а далі гравітаційної енергії є також предметом наших досліджень, а отримання виразів для енергії тривимірної планети дозволяє приступити до вивчення поведінки розподілу мас в середині планети (стану його гідростатичної та динамічної рівноваги).

## **1.2. Сучасний стан вивчення внутрішньої структури та гравітаційних полів .**

### **1.2.1.Способи представлення гравітаційних полів планет та моделі, що їх представляють.**

Зовнішнє гравітаційне поле планет, особливо земної групи, достатньо добре досліджено і воно є базою подальшого отримання інших інтегральних характеристик. Але використання формули (2), як підкреслювалось вище, практично не здійснене, тому що навіть при відомих,  $\delta, \tau$  (що далеко не завжди має місце) інтегрування проблематичне.

Для практичної реалізації необхідно розглядати два випадки: внутрішній і зовнішній потенціал. Внутрішній потенціал визначити на основі спостережень практично неможливо, в той же час вивчення зовнішнього потенціалу представляє собою одну з основних задач фізичної геодезії [16,165]. Для цього зовнішнє гравітаційне поле представляється у вигляді певних співвідношень.

Класичний спосіб представлення зовнішнього поля планет [16] – це розклад потенціалу у вигляді ряду за кульовими функціями, а саме:

$$V(P) = \frac{fM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n \times \left[ C_{n0} \times P_n^0(\cos \theta) + \sum_{k=0}^n P_n^k(\cos \theta)(C_{nk} \cos k\lambda + S_{nk} \sin k\lambda) \right], (1.1)$$

де  $R$  – середній радіус сфери (екваторіальний радіус  $a_e$ ), що охоплює тіло  $\tau$ ;  $P_n^k(\cos \theta)$  – приєднані многочлени Лежандра;  $(\theta, \lambda, r)$  – сферичні координати точки притягання;

$$\left. \begin{matrix} C_{nk} \\ S_{nk} \end{matrix} \right\} = \frac{1}{MR^n} \int_{\tau} \delta P_n^k(\cos \theta') \begin{cases} \cos k\lambda' \\ \sin k\lambda' \end{cases} r^n d\tau_Q - \text{стоксові постійні}, (1.2)$$

$Q(\theta, \lambda, r)$  — внутрішня точка інтегрування.

Такий метод характеризується простотою запису, збіжністю поза сферою  $S$ , можливістю визначення величин  $C_{nk}, S_{nk}$ . В фізичній геодезії стоксові постійні визначались за наземними даними [16,165]. Математичні основи для такого визначення представляють основну задачу геодезії [75,80,81,165]. Різкий поштовх до розширення вивчення зовнішнього потенціалу дали запуски штучних супутників планет [4,44]. Обробка даних про зміну орбіт внаслідок варіацій гравітаційного поля дозволила збільшити порядок сумування перших десятків [171,172]. Подальші дослідження для Землі дали дані альтиметрії, які дозволили довести ступінь сумування [41,171, 185] до  $N=180$ . На сьогодні відомі розклади до степені 1000 і більше [184,193]. Запуск штучних сателітів на інші планети і супутники також дозволяє суттєво збільшити ступінь сумування розвитку (1.3). Наприклад для Місяця відомі моделі гравітаційного поля, ступінь утримання в ряд досягає 165 [167] (модель LP165p), хоча надійним їх визначенням можна вважати до степені 60; для Марса такий розклад зроблений

до  $N=95$  [170,194] (модель GMM2BC80). Степінь вивчення гравітаційних полів приведена в табл. 1, взятої з роботи [140].

Таблиця 1.1.

**Порівняльна характеристика вивченості гравітаційного поля і топографії планет**

Планета	Результати досліджень середини 80-их років			Сучасні результати досліджень		
	Максимальний порядок розкладу		Макс. розд. здатність предст. харак. грав.поля, км	Максимальний порядок розкладу		Макс. розд. здатність предст. харак. грав.поля, км
	Гравіт. поля	Висот рельєфу		Гравіт. поля	Висот рельєфу	
Земля	180	–	110	2190	2160	9
Венера	10	18	1900	180	719	100
Марс	18	16	600	95	719	110
Місяць	16	12	340	165	359	33

Отже, класичний спосіб представлення доволі репрезентивно представляє потенціал планет, в зв'язку з чим формула (1.1) є інструментом при побудові фігури планет як поверхонь постійного потенціалу. Побудовані таким чином фігури дають досить детальну картину фізичної поверхні планет, наприклад, для земної поверхні геоїд побудований із сантиметровою точністю на поверхні океанів [184].

Разом з тим використання (1.1) для  $r \leq R$  хоч математично обґрунтоване (ряд збіжний поза сферою Бьєрхамера [38,80]), проте практично вона не гарантована і знаходження значень суми при великих  $n$  співвимірні з похибками величин, а обчислення є проблематичні. В зв'язку з цим виникає необхідність інших представлень потенціалу планет.

Якщо за область відносності брати тривісний еліпсоїд

$$\tau \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}, \quad (1.3)$$

то потенціальну функцію можна апроксимувати за допомогою еліпсоїдальних функцій Ламе[3,11, 24]. Приведемо коротко суть методу, який описаний в [3]. Потенціальна функція може бути представлена як добуток функцій Ламе [3]:

$$\hat{O}(x, y, z) = L(\lambda)M(\mu)N(\nu) , \quad (1.4)$$

де  $\lambda, \mu, \nu$  – еліпсоїдальні криволінійні координати, що визначаються як корені рівняння

$$\frac{x^2}{a^2 + s} + \frac{y^2}{b^2 + s} + \frac{z^2}{c^2 + s} - 1 = 0 . \quad (1.5)$$

Більш детально опис і дослідження таких систем відліку будуть приведені в розділі 2.

Приведемо визначення функцій Ламе  $L(\lambda)$  (дві інші  $M(\mu), N(\nu)$  визначаються аналогічно). Введемо базові функції:

$$R_q(\lambda) = \begin{cases} \sqrt{\lambda + a_i^2} & \text{при } q = 1, \\ \sqrt{(\lambda + a_i^2)(\lambda + a_j^2)} & \text{при } q = 2, \\ \prod_{i=1}^3 (\sqrt{\lambda + a_i^2}) & \text{при } q = 3. \end{cases} \quad (1.6)$$

Тоді функції Ламе  $n$  –го порядку визначаються за формулою:

$$L(\lambda) = R_{ij}(\lambda)P_m(\lambda) , \quad (1.7)$$

де  $P_m(\lambda)$ - многочлен, що визначається з умови:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(\lambda)}{\lambda^{n/2}} = l$ ,  $l$  – постійна.

Тоді розв'язок внутрішньої задачі Діріхле зобразиться:

$$V(P) = \sum_k c_k M_k(\mu) N_k(\nu) \frac{L_k(\lambda)}{L_k(\lambda_0)} , \quad (1.8)$$

де  $\lambda_0$  – координата, що описує еліпсоїд  $\tau$  в криволінійних координатах,  $\{k\}$  – сукупність індексів,

$$c_k = \frac{1}{\sigma_k} \iint_{\sigma} \frac{f(\mu, \nu) M_k(\mu) N_k(\nu)}{\sqrt{(\lambda_0 - \mu)(\lambda_0 - \mu)}} d\sigma ,$$

$$\sigma_k = \iint_{\sigma} \frac{M_k^2(\mu) N_k^2(\nu)}{\sqrt{(\lambda_0 - \mu)(\lambda_0 - \mu)}} d\sigma .$$



Коефіцієнти  $c_k$  визначаються з заданої на поверхні функції:

$$f(\mu, \nu) = \sum_k c_k M_k(\mu) N_k(\nu).$$

Для наглядності приведемо декілька перших членів, взятих з монографії [3], ортогональних многочленів

$$n=0; \Phi=1;$$

$$n=1; \hat{O} = x_1; \hat{O} = x_2; \hat{O} = x_3;$$

$$n=2; \hat{O} = x_1 x_3; \hat{O} = x_1 x_2; \hat{O} = x_2 x_3;$$

$$\hat{O} = \frac{x_1^2}{a_1^2 + \theta_j} + \frac{x_2^2}{a_2^2 + \theta_j} + \frac{x_3^2}{a_3^2 + \theta_j} (j=1,2),$$

$$\text{де } 3\theta_{1,2} = -(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \pm \sqrt{a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 - a_1^2 a_2^2 - a_2^2 a_3^2 - a_1^2 a_3^2}, \quad (1.9)$$

$$n=3;$$

$$\hat{O} = x_1 x_2 x_3;$$

$$\hat{O} = x_i \left( \frac{x_1^2}{a_1^2 + \theta_j} + \frac{x_2^2}{a_2^2 + \theta_j} + \frac{x_3^2}{a_3^2 + \theta_j} - 1 \right) (j=1,2; i=1,2,3)$$

$$5\theta_{1,2} = -(a_1^2 + 2a_2^2 + 2a_3^2) \pm \sqrt{a_1^4 + 4a_2^4 + 4a_3^4 - a_1^2 a_2^2 - 7a_3^2 a_2^2 - a_1^2 a_3^2}$$

Для зручності запису тут та далі вводяться позначення:

$$x_1 = x; x_2 = y; x_3 = z; a_1 = a; a_2 = b; a_3 = c.$$

З приведенного алгоритму видно, апарат представлення внутрішнього потенціалу доволі громіздкий, а тому його використання пов'язано з певними труднощами.

Приведемо ще один спосіб представлення потенціалу для малостиснутих еліпсоїдів обертання [55].

Нехай заданий потенціал на поверхні еліпсоїда  $E$ , тобто

$$f(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^m Y_m^n(\theta, \lambda), \quad (1.10)$$

де  $Y_m^n(\theta, \lambda) = (A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda) P_m^n(\cos \theta)$ ,  $A_{nm}$ ,  $B_{nm}$  -суть коефіцієнти розкладу,

що визначаються так:

$$\left. \begin{matrix} A_{nm} \\ B_{nm} \end{matrix} \right\} = RR \frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\theta', \lambda') P_m^n(\cos \theta') \begin{cases} \cos m\lambda' \\ \sin m\lambda' \end{cases} \sin \theta' d\lambda' d\theta', \quad (1.11)$$

$$RR = \begin{cases} 2, m \neq 0 \\ 1, m = 0 \end{cases}.$$

Тоді розв'язок, що відповідає зовнішній задачі Діріхле, має вигляд:

$$U(\eta, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n y_n^m(\theta, \lambda) \frac{Q(\text{ish}(\eta))}{Q(\text{ish}(\eta_0))}, \quad (1.12)$$

причому ряд абсолютно збіжний при  $\eta > \eta_0$  (зовні еліпсоїда  $E$ ).

Зв'язок між прямокутними та еліпсоїдальними координатами визначається так:

$$\begin{aligned} x &= cch(\eta) \sin \theta \cos \lambda \\ y &= cch(\eta) \sin \theta \sin \lambda \\ z &= cch(\eta) \cos \theta \\ c &= \sqrt{a^2 - b^2}, 0 \leq \eta < \infty, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \lambda \leq 2\pi \end{aligned} \quad (1.13)$$

Рівняння поверхні еліпсоїда  $E$ , вигляд якого в прямокутній системі відліку:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

в еліпсоїдальній системі наступний:

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_0, \\ \eta_0 &= \text{arcth}\left(\text{th}\left(\frac{b}{a}\right)\right). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Таким чином, перехід від (1.1) до (1.12) дещо покращує ситуацію при вивченні поведінки потенціалу в приповерхневих точках планети, але кардинально не міняє ситуації, тим більше, що кількість обчислень значно збільшується. Через це (1.12) досить мало використовується у побудові потенціалу.

Врахування потенціалу необхідне при прогнозуванні орбіт штучних супутників планет, тому що їх рух описується системою диференціальних рівнянь [4, 44], розв'язок яких подається з допомогою числових [17,19,94] або числово-аналітичних методів [19]. Для досягнення необхідної точності потрібно вибирати невеликий інтервал інтегрування, що в свою чергу потребує великої кількості обчислень, а тому необхідні такі зображення, що дозволяють просто і швидко вираховувати значення потенціалу. В зв'язку з цим набуло широкого використання точкового представлення гравітаційного поля, тому що

вираз потенціалів точкової маси є найпростіший [7,37,39]. Сумарне гравітаційне поле в такому випадку представляється у вигляді:

$$V(P) \approx f \sum_{i=0}^n \frac{m_i}{r_i(P)}, \quad (1.15)$$

де  $m_i$  – маси зосереджені в точках;  $r_i$  – радіус-вектор від точкової маси до точки притягання.

Вибір мас  $m_i$  та їх розміщення в середині тіла здійснюється по різними методами. Найпростіший спосіб – це апроксимація реального потенціалу точковими потенціалами, що знаходиться під певною умовою, наприклад, найменшого квадратичного відхилення величин [79]

$$\min \sum_i (V_a(P_i) - V_t(P_i))^2. \quad (1.16)$$

Реалізація принципу (1.16) за всіма змінними  $m_i, x_i, y_i, z_i$  приводить до системи нелінійних рівнянь, тому для спрощення просторове розміщення як правило фіксується і вибирається з певних міркувань. Наприклад, при ймовірно відомих скупченнях мас планет (маскони для Місяця [86,150]), аномалії густини, що генерують екстремуми гравітаційного поля [7, 79], тощо), логічно розміщувати в центрах мас цих скупчень, а самі маси відшукувати з системи лінійних рівнянь, що отримуються з (1.16).

Дещо інший підхід пропонується в [11,39], який ґрунтується на Максвеловому представленні потенціалу [11,180]

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{r_i} \right). \quad (1.17)$$

Якщо необхідно вивчати потенціал в навколопланетному просторі, то виправданим є зображення потенціалу у вигляді нецентрального мультиполів [37], розміщених близько поверхні планети. Таке представлення потенціалу, а далі і його похідних, обґрунтовується геофізичним його використанням.

Узагальнюючи дискретне зображення через точкові маси, прийдемо до неперервних розподілів [101,124]

$$(\rho^2 - 1)^N = \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right)^n \quad (1.18)$$

і його похідних:

$$W_{mkn} = \frac{1}{2^{m+n+k} m!n!k!} \frac{\partial^N}{\partial \xi^n \partial \eta^m \partial \zeta^k} (\rho^2 - 1)^N. \quad (1.19)$$

В результаті одержимо потенціал виду

$$u_{mkn} = \int_{\tau} \frac{W_{mkn}}{r} d\tau \quad (1.20)$$

Визначені таким чином  $u_{mkn}$  є лінійно незалежні, гармонічні, проте, на відміну від сферичних, не є ортогональні. Таке представлення поряд з позитивною стороною (збіжність у всьому просторі), що використовується в геофізичних дослідженнях, має і негативну – великий об’єм обчислень.

Дослідження зображення внутрішнього потенціалу, а на його основі методів побудови потенціальної (гравітаційної) енергії тривимірних еліпсоїдальних планет набагато скромніші, хоча проводились багатьма дослідниками. Так, в статті японського науковця прискорення сили тяжіння представлені поліномом Лежандра другого порядку [164]. Відомо [15,16], що для однорідної кульової планети існує проста формула для обчислення величини  $V$ . При відомому законі розподілу мас для сферично - симетричної планети також можна вираховувати значення внутрішнього потенціалу [72,73]. Детальні дослідження в даній проблематиці проведені Г. Моріцом в його монографії [73], де детально вивчена можливість знаходження  $V$ , в тому числі наближено для еліпсоїдальних планет. На основі отриманих результатів проф. Марченком О.М. визначені потенціали конкретних розподів мас і, як наслідок, отримані значення енергії для них [175-178], які добре узгоджуються з результатами, одержаними іншими авторами [48,55,73,186]. Вони дозволили зробити ряд важливих висновків про вклад еліпсоїдальної форми планети та тривимірного розподілу мас [174] в значення величини енергії, а також алгоритм його обчислення. Вище описаний алгоритм широко використовується в геофізиці та геодезії. Разом з тим існує інший підхід при розв’язанні такого типу задач. Він набув поширення в астрономічних [19], астофізичних [143] та фізичних дослідженнях [2,73]. Так, Чандрасекхаром внутрішній потенціал, тому числі і об’ємної густини зображується з допомогою "віріального методу" [143],

таке представлення дозволило автору досліджувати стійкість небесних тіл (галактик, міжзоряних утворень і т.д.). В атомній фізиці в теорії стійкості плазми її згустки представлені у вигляді еліпсоїдальної форми, а тому в праці [2] широко використовується методика, описана в [73]. Оскільки в геодезії та геофізиці такий підхід не практикується, тому зроблена спроба застосувати його для геодезичних та геофізичних задач.

Отже, підсумовуючи вище сказане, можна стверджувати, що вибір представлення потенціалу залежить від поставленої задачі, в якій фігурує  $V$ , і необхідного часу для його обчислення.

### **1.2.2. Визначення фігури планет**

Другим важливим об'єктом є вивчення фігури планети. Її визначення представляє собою основну задачу геодезії і займає великий історичний проміжок часу від початкового визначення її ще древніми греками гіпотетичної кулі до реального визначення на основі вимірів радіуса цієї кулі [16]. Подальше уточнення фігури звелось до поверхонь, які є еліпсоїдами обертання, або трьохосевим. Теоретичні розробки Стокса [92], а пізніше, і сучасних геодезистів Молоденського [70], Моріца [165], дозволили звести задачу визначення фігури до визначення рівневого потенціалу планети. В сучасній геодезії фігуру планети трактують як потенціал постійної величини (геоїд - для Землі [16], селеноїд - для Місяця [85,86], аероїд - для Марса [10,69]). Уточнюються лише відхилення від деякої поверхні відносності, яка, як правило, береться як еліпсоїд обертання (для Землі [16]) або тривісний еліпсоїд для Марса [70], Місяця [25,4,108]. Вибір поверхні відносності вимагає малості відхилень від цієї поверхні, що дозволяє використовувати методи уточнення цих величин, а також застосовувати наближені методи їх знаходження [109,119].

При наших дослідженнях достатньо приймати фігуру планети двохвісним, а в деяких випадках тривісним еліпсоїдом, особливості ж фізичної поверхні розглядати як відхилення від поверхні, якою є еліпсоїд. Саме тому представлення поверхні планети еліпсоїдом дозволяє ставити задачу побудови

тривимірних функцій в еліпсоїді [63,64], тому, що до визначення нулем функції густини між фізичною поверхнею та еліпсоїдом залишає незмінними основні інтегральні характеристики, а тому достатньо розглядати фігуру планети як тривісний еліпсоїд.

### 1.2.3. Розподіл мас планетарних тіл

Найбільш важливою і одночасно недостатньо вивченою характеристикою можна вважати розподіл мас всередині планети, оскільки безпосередні вимірювання можливі тільки на поверхні тіла або на невеликій його глибині. Та навіть у цьому випадку опис розміщення мас на поверхні може бути представлений лише узагальненою згладженою функцією, і не відобразити реальної картини розміщення мас.

В подальшому побудову розподілу мас розглядатимемо як таку, яка базується на даних спостережень. Такими є в першу чергу середній момент інерції, який для еліпсоїда визначається наступним чином [9]:

$$I = \frac{1}{2}(A + B + C), \quad (1.21)$$

де  $A, B, C$  – головні моменти інерції, а також  $M$  – маса планети.

Використання цих величин визначає функцію розподілу мас многочленом 2-го ступеня, яку можна отримати при використанні стоксових постійних до другого порядку включно з долученням динамічного стиснення  $H$ . Другим важливим інструментом в побудові розподілів є швидкість поширення хвиль всередині планети. Встановлено, що між густиною і швидкостями хвиль існують такі залежності [9,152]:

$$\delta V_p^2 = K + \frac{4}{3}\mu, \quad \delta V_s^2 = \mu, (\mu = 0) \text{ – для рідин,} \quad (1.22)$$

де  $V_p$  – швидкість повздовжніх хвиль,  $V_s$  – швидкість поперечних хвиль,  $K, \mu$  – модулі пружності, користуючись якими можна будувати функції розподілу мас всередині планет. Так на цій основі для Землі створені реалістичні моделі PREM [160], PREM [161], які досить добре описують розподіли мас, що узгоджуються

з даними спостережень, а тому широко використовуються в астрономії та геофізиці.

Разом з тим такі моделі не можуть охопити всі варіанти розподілу мас, оскільки гравітаційне поле є тривимірним [31,32]. Нерівність нулю стоксових постійних  $C_{nk}, S_{nk}$  при  $n \neq 2m, k \neq 0$  може бути трактована як відхилення від еліпсоїдальності або неоднорідністю розміщення мас. Отже, закон розподілу мас в еліпсоїді в найбільш загальному випадку має бути тривимірним, тобто має вигляд (2).

Побудова розподілів мас представляє основну задачу геофізики для Землі, а також планетогеодезії, проте ці науки вивчають в основному сферично-симетричні моделі густини. Для Місяця представленням тривимірного розподілу мас займався Щербаков А. М. [148], який в своїх роботах представив  $\delta$  у вигляді ряду за сферичними функціями. Чеськими дослідниками Мартінецем З. та Песом К. запропоновано представляти функції розподілу мас рядами за сферичними функціями, коефіцієнти розкладу яких є залежні від відносного радіусу та визначаються сумою многочленів Лежандра. Зокрема, в праці [179] виконані побудови модельних розподілів для Землі та Місяця відповідно. Побудовою тривимірних функцій розподілів мас займався професор Мещеряков Г.О., який в своїх працях [47,50] звів задачу знаходження коефіцієнтів  $b_{mnk}$  до проблеми моментів. В подальшому ним і його учнями цей метод був реалізований для Землі і планет земної групи [12,13,57-60,98,108], що дало можливість досліджувати основні глобальні особливості небесних тіл [12,13, 25-27,57-61]. Цей метод наближений, тому основою в ньому є нульова ітерація, яка повинна враховувати особливості реальних розподілів мас: його стрибків та глибини їх розміщення [58,59]. Нами поданий дещо інший підхід до даної проблеми: коефіцієнти розкладу до другого порядку включно відшукуються безпосередньо з стоксових постійних та динамічного стиснення, при цьому особливості одновимірних розподілів, отриманих з допомогою сейсмічних даних, враховуються повністю (для Землі беремо референсну модель PREM [161]). За рахунок математичних перетворень

вдається збільшити порядок апроксимації до четвертого порядку і вище. Вперше зроблена спроба побудови функцій похідних густини безпосередньо. Пропонується такий метод побудови: доведена єдиність розкладу до четвертого порядку включно, якщо задане поверхневе значення  $\delta$ , показана можливість додаткового залучення стоксових постійних вище другого (третього і четвертого), що дозволяє в подальшому створити наближений метод побудови тривимірного розподілу мас, в якому наближені величини є контрольованими, бо поверхневі інтеграли від  $\delta$   $\sigma_{mjk}$  можна вважати прогнозованими на поверхні або хоча б передбачувати їх поведінку. Для наближеного класичного методу проведені дослідження: при заданих стоксових постійних, динамічного стиснення і відомого одновимірного розподілу доведена єдиність розкладу при умові найменшого середньо-квадратичного відхилення; стоксові постійні  $C_{nk}, S_{nk}$  та динамічне стиснення  $H$  приведені до загальнопланетарної системи відліку, а також подане формальне представлення значення густини в центрі мас та досліджені варіації цієї величини для різних планетарних тіл. Зроблений порівняльний аналіз можливого використання цих двох методів.

Нагадаємо, що (1) є базою для одночасного вивчення зовнішнього гравітаційного поля та внутрішніх характеристик планет (внутрішнього гравітаційного поля, сили тяжіння, потенціальної енергії) на основі даних про зовнішнє гравітаційне поле. Так як фігура апроксимується тривісним еліпсоїдом (в тому числі – кулею чи двохвісним еліпсоїдом), а розподіл мас – тривимірною функцією, яка є кусково – неперервною, то виникає потреба в її зображенні у вигляді ортогональних рядів [8]. Їх можна отримати, використовуючи процес ортогонолізації Грама – Шмідта [18,89], який практично не може бути реалізований в зв'язку з громіздкістю обчислень. Це наглядно ілюструється працями [13, 60], в яких порядок апроксимації ледве досягає чотири, причому ніяких закономірностей для отриманих многочленів не проглядається. Існує другий шлях побудови таких функцій. Відомо [8], що для кулі існують дві системи многочленів  $\{W_{mjk}\}$ ,  $\{\omega_{mjk}\}$ , що біортогональні одна до другої [8]. Завданням даної роботи саме і є узагальнення таких систем



на випадок тривісного еліпсоїда з подальшим встановленням їх властивостей, які забезпечують подальше використання таких систем при вивченні зовнішнього гравітаційного поля. На основі встановленого представлення гравітаційного поля в прямокутній системі відліку отримані стоксові постійні для спеціальних розподілів. Використання формули Родріга для многочленів  $W_{mnk}$  породжує систему гармонійних функцій (1.20) яка є повною, але, на відміну від кульових неортогональною. Разом з тим такий розклад має свої переваги, а саме: ряди за цими функціями є всюди збіжними. Коефіцієнти розкладу є одночасно і коефіцієнтами для розкладу функції розподілу мас. Для функцій  $U_{mnk}$  розроблені алгоритми їх обчислень, причому як для зовнішнього, так і внутрішнього гравітаційного поля планет, що дозволяє знаходити одночасно внутрішній і зовнішній потенціал планетарних тіл при відомих коефіцієнтах  $b_{mnk}$ , тобто, при заданій функції  $\delta$ , по єдиному алгоритму.

## Висновки до розділу 1

1. Обґрунтована необхідність єдиного підходу до вивчення інтегральних характеристик (внутрішнього потенціалу, гравітаційної енергії і інших) та гравітаційних полів небесних тіл.
2. Зроблений аналіз сучасного стану визначення основних внутрішніх параметрів: описані методи їх вивчення, вказана можливість отримання спостережливої інформації цих величин, подані способи їх обчислень
3. Виконаний порівняльний аналіз методів представлення зовнішнього гравітаційного поля планет. Для тіл несферичної форми (еліпсоїда) показана необхідність використання рядів, елементи яких не є кульовими функціями, а саме використання еліпсоїдальних функцій дає можливість більш репрезентивно представляє зовнішній потенціал еліпсоїда, при врахуванні меншої кількості членів.
4. Запропонована система неортогональних функцій дає можливість подавати значення потенціалу з їх допомогою у всьому просторі, тобто в залежності від визначення коефіцієнтів розкладу, обчислювати як зовнішній, так і внутрішній потенціал.
5. Запропонований спосіб опису потенціалу еліпсоїда  $V$  дає можливість досліджувати збіжність різних його представлень (наприклад, за кульовими функціями), а постійність величини  $V$  дає поверхню рівня (для Землі - геоїд).

## РОЗДІЛ 2

### МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ НАБЛИЖЕННЯ ТРИВИМІРНИХ РОЗПОДІЛІВ МАС В ЕЛІПСОЇДАЛЬНИХ ПЛАНЕТАХ

#### 2.1. Системи ортогональних функцій в еліпсоїді

На відміну від функцій однієї змінної [89,95], для якої існує ряд ортогональних функцій на певних проміжках з різними вагами, питання існування ортогональних многочленів багатьох змінних в різних областях є суттєво проблематичним. Не існує загальних алгоритмів отримання таких систем, хоча відоме загальне правило їх побудови—процес ортогонолізації Грама—Шмідта[8]. З його допомогою будь-яка повна система функцій може бути зведена до ортогональної. Саме з допомогою такого підходу Мещеряковим Г.О. та його учнями [12,13,57,60] отримані декілька членів ортогональної системи, які використані для побудови тривимірних функцій розподілу мас планет. Практика такої побудови підтвердила відсутність закономірності таких конструкцій, що змусило шукати нові методи апроксимації кусково-неперервних функцій в еліпсоїді. Однією з таких альтернатив є використання біортогональних в області систем [8,60,62-64,151], які взаємоортогональні одна до другої. Такими є для кулі дві системи многочленів  $U$  та  $V$ , отримані з допомогою твірних функцій  $\varphi$  та  $\psi$  [8,151]. Узагальнюючи їх для еліпсоїда, зробимо наступне: нехай маємо тривісний

еліпсоїд  $\tau \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$

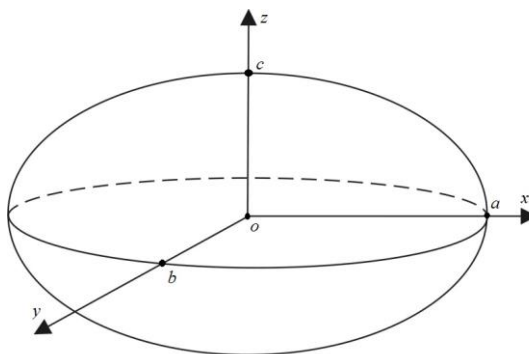


Рис 2.1. Геометрія тривісного еліпсоїда

За аналогією з методикою, приведеною в праці [8] розглянемо дві твірні функції

$$\varphi(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = \left[ \left( \frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2} - 1 \right)^2 + \left( \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} \right) \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.1)$$

$$\psi(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = \left[ 1 - \frac{2\beta x}{a^2} - \frac{2\beta y}{b^2} - \frac{2\gamma z}{c^2} + \left( \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} \right) \right]^{\frac{3}{2}}, \quad (2.2)$$

які визначені та аналітичні за змінними  $\alpha, \beta, \gamma$  в середині еліпсоїда  $\tau$ , а отже можуть бути представлені рядами

$$\varphi(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = \sum_{N=m+n+k=0}^{\infty} W_{mnk}(x, y, z) \alpha^m \beta^n \gamma^k, \quad (2.3)$$

$$\psi(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = \sum_{N=m+n+k=0}^{\infty} \omega_{mnk}(x, y, z) \alpha^m \beta^n \gamma^k. \quad (2.4)$$

Тоді коефіцієнти розкладу дають дві системи функцій  $\{\omega_{mnk}\}, \{W_{mnk}\}$ , які і є предметом подальшого їх дослідження та використання.

## 2.2. Рекурентні формули для функцій $\omega_{mnk}, W_{mnk}$

Для визначення вигляду вище названих функцій встановимо рекурентні співвідношення для них, при цьому продиференціюємо спочатку (2.1), (2.2) за змінною  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = & -\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2} - 1 \right)^2 + \left( \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} \right) \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} * \\ & * \left[ 2 \left( \frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2} - 1 \right) \frac{x}{a^2} + \frac{2\alpha}{a^2} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \right) \right] = \sum_{N=0}^{\infty} m \alpha^{m-1} \beta^n \gamma^k w_{mnk} \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = -\frac{3}{2} \left( 1 - \frac{2\alpha x}{a^2} - \frac{2\beta y}{b^2} - \frac{2\gamma z}{c^2} + \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} \right)^{\frac{-3}{2}} \left( \frac{2\alpha - 2x}{a^2} \right) = \sum_{N=0}^{\infty} m \omega_{mnk} \alpha^{m-1} \beta^n \gamma^k. \quad (2.6)$$

Після відповідних перетворень формул (2.5) і (2.6) одержуємо:

$$\begin{aligned} & - \left[ \frac{\alpha}{a^2} \left( 1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \right) + \frac{x}{a^2} \left( \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2} - 1 \right) \right] \sum_{N=0}^{\infty} w_{mnk} \alpha^m \beta^n \gamma^k = \\ & \sum_{N=1}^{\infty} m w_{mnk} \alpha^{m-1} \beta^n \gamma^k \left[ \left( \frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2} - 1 \right)^2 + \left( \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} \right) \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \right) \right], \end{aligned}$$

та для другої функції:

$$\frac{3(x-\alpha)}{a^2} \sum_{N=0}^{\infty} \omega_{mnk} \alpha^m \beta^n \gamma^k = \sum_{N=1}^{\infty} \omega_{mnk} \alpha^{m-1} \beta^n \gamma^k \left( 1 - \frac{2\alpha x}{a^2} - \frac{2\beta y}{b^2} - \frac{2\gamma z}{c^2} + \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} \right).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , отримуємо формулу:

$$\begin{aligned} W_{mnk} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{m}\right)}{a^2} \left(1 - \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) W_{m-2,n,k} - \frac{1}{b^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}\right) W_{m,n-2,k} - \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) W_{mnk-2} \\ &- \left(2 + \frac{1}{m}\right) \frac{xz}{a^2 c^2} W_{m-1,n,k-1} + \left(2 + \frac{1}{m}\right) \frac{xy}{a^2 b^2} W_{m-1,n-1,k-1} - \frac{2yz}{b^2 c^2} W_{mn-1k-1} - \\ &- \left(2 + \frac{1}{m}\right) \frac{x}{a^2} W_{m-1nk} - \frac{2y}{b^2} W_{mn-1k} - \frac{2z}{c^2} W_{mnk-1}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

де  $m \geq 2, n \geq 2, k \geq 2$ .

Аналогічно визначаємо рекурентні співвідношення для другої системи функцій:

$$\omega_{mnk} = \left(2 + \frac{1}{m}\right) \frac{x}{a^2} \omega_{m-1nk} + \frac{2y}{b^2} \omega_{mn-1k} + \frac{2z}{c^2} \omega_{mnk-1} - \left(1 + \frac{1}{m}\right) \omega_{m-2nk} - \omega_{mn-2k} - \omega_{mnk-2}, \quad (2.8)$$

якщо  $m \geq 2, n \geq 2, k \geq 2$ .

Для визначення решти рекурентних співвідношень потрібно продиференціювати твірні функції за змінними  $\beta, \gamma$ . Узагальнюючи все разом, можна записати одну формулою:

$$\begin{aligned} W_{mnk} &= (1 + R_1) \varepsilon(m-2) \left(1 - \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) W_{m-2nk} + (1 + R_2) \varepsilon(n-2) \left(1 - \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2}\right) W_{mn-2k} \\ &+ \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) (1 + R_3) \varepsilon(k-2) W_{mnk-2} - (2 + R_1 + R_2) \varepsilon(m-1) \varepsilon(n-1) \frac{xy}{a^2 b^2} W_{m-1n-1k} \\ &- (2 + R_2 + R_3) \frac{yz}{b^2 c^2} W_{mn-1k-1} - (2 + R_1 + R_3) \varepsilon(m-1) \varepsilon(k-1) \frac{xz}{a^2 c^2} W_{m-1nk-1} \\ &- (2 + R_1) \varepsilon(m-1) \frac{x}{a^2} W_{m-1nk} - (2 + R_2) \varepsilon(n-1) \frac{y}{b^2} W_{mn-1k} - (2 + R_3) \varepsilon(k-1) \frac{z}{c^2} W_{mnk-1}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \omega_{mnk} &= (2 + R_1) \varepsilon(m-1) \frac{x}{a^2} \omega_{m-1nk} + (2 + R_2) \frac{y}{b^2} \varepsilon(n-1) \omega_{mn-1k} + (2 + R_3) \frac{z}{c^2} \varepsilon(k-1) \omega_{mnk-1} - \\ &- (1 + R_2) \varepsilon(m-2) \omega_{m-2nk} - (1 + R_1) \varepsilon(m-2) \omega_{m-2nk} - (1 + R_2) \varepsilon(n-2) \omega_{mn-2k} - (1 + R_3) \varepsilon(k-2) \omega_{mnk-2}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\text{де } \varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 1 \\ 1, & t = 1 \end{cases},$$

$$а \quad R_1(m, n, k) = \begin{cases} 1/m, m \neq 0 \\ 0, m = 0 \end{cases}; \quad R_2(m, n, k) = \begin{cases} 0, m \neq 0 \\ 1/n, m = 0, n \neq 0 \end{cases}; \quad R_3(m, n, k) = \begin{cases} 0, m \neq 0, a \neq 0, n \neq 0 \\ 1/k, m = 0, ik \neq 0 \end{cases}.$$

Випишемо аналітичні формули для функції  $\omega_{mnk}, W_{mnk}$  при  $N \leq 3$ , а саме:

$$N=0,$$

$$W_{000} = 1;$$

$$N = 1,$$

$$W_{100} = \frac{x}{a^2}, W_{010} = \frac{y}{b^2}, W_{001} = \frac{z^2}{c^2};$$

$$N = 2,$$

$$W_{110} = \frac{2xy}{a^2b^2}, W_{101} = \frac{2yz}{a^2b^2}; W_{101} = \frac{2yz}{a^2c^2}, W_{011} = \frac{2yz}{b^2c^2}; W_{002} = \frac{1}{2c^2} \left( \frac{3z^2}{c^2} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right);$$

$$N = 3,$$

$$W_{200} = \frac{1}{2a^2} \left( \frac{3x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right), W_{020} = \frac{1}{2b^2} \left( \frac{3y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right),$$

$$W_{300} = \frac{x}{2a^2} \left( \frac{5x^2}{a^2} + \frac{3y^2}{b^2} - \frac{3z^3}{c^2} - 3 \right),$$

$$W_{201} = \frac{3z}{2c^2} \left( \frac{3x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right), W_{102} = \frac{3}{2} \frac{x}{a^2} \left( \frac{3z^2}{c^2} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right),$$

$$W_{120} = \frac{3}{2} \frac{x}{a^2} \left( \frac{3y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right), W_{012} = \frac{3}{2} \frac{y^2}{b^2} \left( \frac{3z^2}{c^2} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right),$$

$$W_{012} = \frac{3}{2} \frac{y}{b^2} \left( \frac{3z^2}{c^2} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right), W_{021} = \frac{3}{2} \frac{z}{c^2} \left( \frac{3y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right),$$

$$W_{111} = 6 \frac{x}{a^2} \frac{y}{b^2} \frac{z}{c^2}, W_{003} = \frac{1}{2} \frac{z}{c^2} \left( \frac{5z^2}{c^2} + \frac{3y^2}{b^2} + \frac{3x^2}{a^2} - 3 \right),$$

$$W_{030} = \frac{1}{2} \frac{y}{b^2} \left( \frac{5y^2}{b^2} + \frac{3x^2}{a^2} + \frac{3z^2}{c^2} - 3 \right).$$

Аналогічні співвідношення отримуємо для многочленів  $\omega_{mnk}$ :

$$N=0,$$

$$\omega_{000} = 1:$$

$$N = 1,$$

$$\omega_{100} = \frac{3x}{a^2}, \omega_{010} = \frac{3y}{b^2}, \omega_{001} = \frac{3z}{c^2};$$

$$N = 2,$$

$$\omega_{200} = \frac{3}{2}a^2 \left( \frac{5x^2}{a^2} - 1 \right), \omega_{020} = \frac{3}{2b^2} \left( \frac{5y^2}{b^2} - 1 \right), \omega_{002} = \frac{3}{2c^2} \left( \frac{5z^2}{c^2} - 1 \right),$$

$$\omega_{110} = \frac{15xy}{a^2b^2}, \omega_{101} = \frac{15xz}{a^2c^2}, \omega_{011} = \frac{15yz}{b^2c^2};$$

$$N = 3,$$

$$\omega_{300} = \frac{5}{2a^3} \left( \frac{7x^3}{a^3} - \frac{3x}{a} \right), \omega_{210} = \frac{15}{2} \frac{y}{ba^2b} \left( \frac{7y^2}{b^2} - 1 \right), \omega_{012} = \frac{15}{2} \frac{y}{b^2c^2} \left( \frac{7z^2}{c^2} - 1 \right),$$

$$\omega_{030} = \frac{5}{2b^3} \left( \frac{7y^3}{b^3} - \frac{3y}{b} \right), \omega_{003} = \frac{5}{2c^3} \left( \frac{7z^3}{c^3} - \frac{3z}{c} \right), \omega_{102} = \frac{15x}{2a^2c^2} \left( \frac{7z^2}{c^2} - 1 \right),$$

$$\omega_{120} = \frac{15x}{a^2b^2} \left( \frac{7y^2}{b^2} - 1 \right), \omega_{111} = 105 \frac{xyz}{a^2b^2c^2}.$$

Вище приведені формули показують, що  $\omega_{mnk}$  – суть многочлени трьох змінних аргументів  $x, y, z$  загальна степінь яких  $N = m + n + k$ .

### 2.3. Аналоги формул Родріга многочленів $W_{mnk}$ , $\omega_{mnk}$

Функції  $\varphi$  та  $\psi$  для многочленів  $W_{mnk}$ ,  $\omega_{mnk}$  можна розглядати як узагальнення твірної функції при визначенні многочленів Лежандра однієї змінної. Тому логічно перенести частину властивостей для визначених нами елементів, однією з яких може бути формула Родріга.

Так як величини  $W_{mnk}$  – це коефіцієнти розкладу в ряд Маклорена функції  $\varphi$ , а значить є її похідними, які згідно формули Коші [74,88] визначаються так:

$$W_{mnk} = \frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{c'_1} \int_{c'_2} \int_{c'_3} \frac{\varphi(\alpha, \beta, \gamma, x, y, z)}{\alpha^{m+1} \beta^{n+1} \gamma^{k+1}} d\alpha d\beta d\gamma, \quad (2.11)$$

де  $i = \sqrt{-1}$  – уявна одиниця,  $c'_1, c'_2, c'_3$  – кола довільного радіуса в площинах  $xOy, xOz, yOz$  з центрами  $(0,0,0)$ , тобто в початку системи координат  $Oxyz$ .

Для перетворення (2.11) зробимо заміну змінних

$$\alpha = \frac{2(\xi - x)}{l^2}, \beta = \frac{2(\eta - y)}{l^2}, \gamma = \frac{2(\zeta - z)}{l^2}, \quad (2.12)$$

$$\text{де } l^2 = \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} - 1.$$

Тоді контури  $c'_1, c'_2, c'_3$  переносяться в аналогічні  $c_1, c_2, c_3$  з центрами  $(x, 0, 0), (0, y, 0), (0, 0, z)$ . Твірна функція після перетворень прийме вигляд:

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta, x, y, z) = \frac{1}{l} \left[ \left( \frac{2\xi x}{a^2} + \frac{2\eta y}{b^2} + \frac{2\zeta z}{c^2} - \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} + 1 \right) \right]^{-1}.$$

Якобіан перетворення заміни (2.12) є наступним:

$$\frac{D(\alpha, \beta, \gamma)}{D(\xi, \eta, \zeta)} = -\frac{8}{l^4} \left[ \left( \frac{2\xi x}{a^2} + \frac{2\eta y}{b^2} + \frac{2\zeta z}{c^2} - \left( \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} \right) \right) \right]. \quad (2.13).$$

Підставимо його в (2.11) в результаті чого одержимо

$$W_{mnk} = \frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{c_1} \int_{\bar{c}_2} \int_{\bar{c}_3} \frac{4 \left[ \frac{2\xi x}{a^2} + \frac{2\eta y}{b^2} + \frac{2\zeta z}{c^2} - \left( \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} + 1 \right) \right]^{-1}}{(\varepsilon - x)^{m+1} (\eta - y)^{n+1} (\gamma - z)^{k+1} 2^{n+3}} \\ * \left( \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} - 1 \right)^{n+2} \left[ \frac{2\alpha x}{a^2} + \frac{2\beta y}{b^2} + \frac{2\gamma z}{c^2} - \left( \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} \right) + 1 \right]^{-1} d\xi d\eta d\zeta,$$

звідки

$$W_{mnk} = \frac{1}{(2\pi i)^3} 2^N \int_{c_1} \int_{c_2} \int_{c_3} \frac{\left( \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} - 1 \right)^N}{(\xi - x)^{m+1} (\eta - y)^{n+1} (\zeta - z)^{k+1}} d\xi d\eta d\zeta, \quad (2.14)$$

що згідно з формулою Коші визначає аналог формули Родріга для многочленів

$W_{mnk}$ .

$$W_{mnk} = \frac{1}{2^N m! n! k!} \frac{\partial^n}{\partial x^m \partial y^n \partial z^k} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right)^N. \quad (2.15)$$

Виведення подібної формули для другої системи  $\omega_{mnk}$  дещо складніше.

Заміною

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\xi}{a} \sqrt{1-r^2}, \frac{\beta y}{b} = \frac{\eta}{b} \sqrt{1-r^2}, \frac{\gamma}{c} = \frac{\zeta \sqrt{1-r^2}}{c}, \quad (2.16)$$

де  $r^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ ,  $r_1^2 = \frac{y_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} + \frac{y_3^2}{c^2}$

твірну функцію  $\psi$  перетворимо наступним чином :

$$\psi(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = \left( 1 - 2\sqrt{1-r^2} \left( \frac{\xi x}{a^2} + \frac{\eta y}{b^2} + \frac{\zeta z^2}{c^2} \right) + (1-r^2) \left( \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} \right) \right)^{-\frac{3}{2}}, \quad (2.17)$$



а після перепозначення:  $\frac{x}{a} = \frac{y_1 \sqrt{1-r^2}}{a}$ ,  $\frac{y}{b} = \frac{y_2 \sqrt{1-r^2}}{b}$ ,  $\frac{z}{c} = \frac{y_3 \sqrt{1-r^2}}{c}$ , вона набуде вигляду:

$$\psi(y_1, y_2, y_3, \xi, \eta, \zeta) = \left\{ 1 + \left( -\frac{2y_1\xi}{a^2} - \frac{2y_2\eta}{b^2} - \frac{2y_3\zeta}{c^2} + \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} \right) (1-r^2) \right\}^{-3/2}. \quad (2.18)$$

Оскільки  $1+r_1^2 = (1-r^2)^{-1}$ ,

$$\text{де} \quad 1+r_1^2 = 1 + \frac{y_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} + \frac{y_3^2}{c^2} = 1 + \left[ \left( \frac{x}{a} \right)^2 + \left( \frac{y}{b} \right)^2 + \left( \frac{z}{c} \right)^2 \right] \frac{1}{(1-r^2)} = \frac{1-r^2+r^2}{1-r^2}, \quad (2.19)$$

то вираз для  $\psi$  буде таким:

$$\begin{aligned} \psi(y_1, y_2, y_3, \xi, \eta, \zeta) &= \left\{ 1+r_1^2 - 2 \left( \frac{\xi y_1}{a^2} + \frac{\eta y_2}{b^2} + \frac{\zeta y_3}{c^2} \right) + \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} \right\}^{-3/2} \\ &= \left\{ 1 + \left( \frac{y_1 - \xi}{a} \right)^2 + \left( \frac{y_2 - \eta}{b} \right)^2 + \left( \frac{y_3 - \zeta}{c} \right)^2 \right\}^{-3/2} * (1+r_1^2)^{3/2}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Розклад функції  $\psi$  за змінними  $\xi, \eta, \zeta$  має вигляд

$$\begin{aligned} \psi(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) &= \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^m \beta^n \gamma^k \omega_{mnk}(x, y, z) = \sum_{N=0}^{\infty} (1-r^2)^{\frac{N}{2}} \xi^m \eta^n \zeta^k \omega_{mnk}(y_1, y_2, y_3) \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} (1+r_1^2)^{-\frac{N}{2}} \omega_{mnk}(y_1, y_2, y_3), \end{aligned}$$

тому загальний член розкладу в ряд функції  $\psi$  буде визначатись так:

$$(1+r_1^2)^{-N/2} \omega_{mnk}(y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{m!n!k!(2\pi i)^3} \int_{c_1} \int_{c_2} \int_{c_3} \frac{\psi(y_1, y_2, y_3, \xi, \eta, \zeta)}{\xi^{m+1} \eta^{n+1} \zeta^{k+1}} d\xi d\eta d\zeta, \quad (2.21)$$

звідки з урахуванням (2.20) маємо:

$$(1+r_1^2)^{-\frac{N}{2}} \omega_{mnk} = \frac{1}{m!n!k!(2\pi i)^3} \int_{c_1} \int_{c_2} \int_{c_3} \frac{\left[ 1 + \left( \frac{y_1 - \xi}{a} \right)^2 + \left( \frac{y_2 - \eta}{b} \right)^2 + \left( \frac{y_3 - \zeta}{c} \right)^2 \right]^{-3/2} (1+r_1^2)^{3/2}}{\xi^{m+1} r^{n+1} \zeta^{k+1}} d\xi d\eta d\zeta,$$

або після заміни  $\xi_1 = \frac{y_1 - \xi}{a}$ ,  $\eta_1 = \frac{y_2 - \eta}{b}$ ,  $\zeta_1 = \frac{y_3 - \zeta}{c}$ , одержуємо:

$$(1+r_1^2)^{-\frac{N}{2}} \omega_{mnk}(y_1, y_2, y_3) = \frac{(-1)^{N+3} a^{m+1} b^{n+1} c^{k+1}}{m!n!k!(2\pi i)^3} \int_{c_1} \int_{c_2} \int_{c_3} \frac{(1+\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2)^{\frac{3}{2}}}{(\xi_1 - y_1)^{m+1} (\eta_1 - y_2)^{n+1} (\zeta_1 - z)^{k+1}} d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1$$

і остаточно

$$\omega_{mnk} = \frac{(-1)^{N+3}}{m!n!k!} \frac{\partial^N}{\partial y_1^m \partial y_2^n \partial y_3^k} (1 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)^{-3/2} (1 + r_1)^{N+\frac{3}{2}} \quad (2.22)$$

#### 2.4. Біортогональність систем многочленів $\omega_{mnk}, W_{mnk}$

Важливе значення для подальших досліджень має формула інтегрування частинами в просторовому випадку, яка є наслідком формули Гаусса – Остроградського [139]:

$$\int_{\tau} u \frac{\partial v}{\partial x_i} d\tau = - \int_{\tau} v \frac{\partial u}{\partial x_i} d\tau + \int_{\sigma} uv \cos \alpha_i d\sigma, \quad (2.23)$$

яка при умовах:

$$u|_{\sigma} = 0 \text{ або } v|_{\sigma} = 0 \quad (2.24)$$

має вигляд

$$\int_{\tau} u \frac{\partial v}{\partial x_i} d\tau = - \int_{\tau} v \frac{\partial u}{\partial x_i} d\tau. \quad (2.25)$$

При цьому зроблені перепозначення:  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ ,  $\sigma$  – поверхня, що огортає тіло  $\tau$ ,  $\cos \alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – компоненти вектора нормалі до поверхні.

Вона в подальшому визначає основну властивість систем – їх ортогональність:

$$\int_{\tau} W_{mnk} \omega_{m_1 n_1 k_1} d\tau = 0. \quad (2.26)$$

Для функції  $u = \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial y^j \partial z^s} (\rho^2 - 1)^N$  при  $i + j + s < N$  виконується умова

$$u = \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial y^j \partial z^s} (\rho^2 - 1)^N \Big|_{\sigma} = 0. \quad (2.27)$$

Тому її врахування з застосуванням (2.25) дає для  $N > N_1$  ( $N = m + n + k, N_1 = m_1 + n_1 + k_1$ ) такий вираз:

$$\int_{\tau} W_{mnk} \omega_{m_1 n_1 k_1} d\tau = \frac{1}{2^{N+} m!n!k!} \int_{\tau} (\rho^2 - 1)^N \frac{\partial^N}{\partial x^{m_1} \partial y^{n_1} \partial z^{k_1}} (W_{mnk}) d\tau = 0.$$

Розглянемо випадок, коли  $N = N_1$  і зробимо наступні перетворення, а саме:

$$\int_{\tau} W_{mnk} \psi(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) d\tau = \frac{(-1)^N}{2^N m!n!k!} \int_{\tau} (\rho^2 - 1)^N \frac{\partial^N}{\partial x^m \partial y^n \partial z^k} \left[ 1 - \frac{2\beta x}{a^2} - \frac{2\beta y}{b^2} - \frac{2\gamma z}{c^2} + \left( \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} \right) \right]^{\frac{3}{2}} d\tau.$$

В результаті диференціювання за змінними  $x, y, z$  права частина останнього виразу буде мати вигляд:

$$\frac{\alpha^m \beta^n \gamma^k (2N+3)!! (-1)^N}{a^{2m} b^{2n} c^{2k} 2^N m!n!k!} \int_{\tau} (\rho^2 - 1)^N \left[ 1 - \frac{2\beta x}{a^2} - \frac{2\beta y}{b^2} - \frac{2\gamma z}{c^2} + \left( \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} \right) \right]^{\frac{3}{2}-N} d\tau,$$

звідки, до речі, впливає перша частина наведеної нерівності. При степені  $\alpha^m \beta^n \gamma^k$  є тільки один коефіцієнт –  $\omega_{mnk}$ , тому одержимо

$$\int_{\tau} W_{mnk} \omega_{mnk} d\tau = \frac{(2N+3)!!}{2^N m!n!k! a^{2m} b^{2n} c^{2k}} \int_{\tau} (\rho^2 - 1)^N d\tau,$$

або після інтегрування з врахуванням формули 5 (додаток) остаточно:

$$l_{mnk} = \int_{\tau} W_{mnk} \omega_{mnk} d\tau = \frac{3(2N+3)N!V_e}{a^{2m} b^{2n} c^{2k} m!n!k!} \quad (2.28)$$

Встановимо ортогональність при  $N < N_1$ . Для випадку, коли  $m - m_1$ , або  $n - n_1$  або  $k - k_1$ , об'ємні інтеграли від непарних комбінацій  $x^\alpha y^\beta z^\gamma$  рівні нулю, і відповідно виконується умова (2.26), доведення якої в загальному випадку складніше.

Підставляючи значення  $\omega_{m_1 n_1 k_1}$ , подане формулою Коші,

$$\omega_{m_1 n_1 k_1} = \frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{c_1} \int_{c_2} \int_{c_3} \frac{\psi(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)}{\alpha^{m_1+1} \beta^{n_1+1} \gamma^{k_1+1}} d\alpha d\beta d\gamma = \frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{c_1} \int_{c_2} \int_{c_3} \frac{\left[ 1 - \frac{2\beta x}{a^2} - \frac{2\beta y}{b^2} - \frac{2\gamma z}{c^2} + \left( \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} \right) \right]^{\frac{3}{2}}}{\alpha^{m_1+1} \beta^{n_1+1} \gamma^{k_1+1}} d\alpha d\beta d\gamma,$$

в вираз (2.26), і диференціюючи його  $N$  разів, одержимо після відповідних перетворень наступне:

$$\begin{aligned}
& \int_{\tau} W_{m_1 n_1 k_1} \omega_{m_1 n_1 k_1} d\tau = \\
& \frac{(2N+3)!!}{(2\pi i)^3 2^N m! n! k!} \int_{\tau} \left\{ \int_{c_1} \int_{c_2} \int_{c_3} \left[ \frac{\left[ 1 - \frac{2\beta x}{a^2} - \frac{2\beta y}{b^2} - \frac{2\gamma z}{c^2} + \left( \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} \right) \right]^{\frac{3}{2}-N}}}{\alpha^{m_1-m+1} \beta^{n_1-n+1} \gamma^{k_1-k+1}} d\alpha d\beta d\gamma \right\} (\rho^2 - 1)^N d\tau \\
& = \frac{(2N+3)!!}{(2\pi i)^3 2^N m! n! k!} \int_{\tau} \left\{ \int_{c_1} \int_{c_2} \int_{c_3} \left[ \frac{1 - r^2 + \frac{(\alpha-x)^2}{a} + \left( \frac{\beta-y}{b} \right)^2 + \left( \frac{\gamma-z}{c} \right)^2}{\alpha^{m_1-m+1} \beta^{n_1-n+1} \gamma^{k_1-k+1}} \right]^{-N-\frac{3}{2}} d\alpha d\beta d\gamma \right\} (\rho^2 - 1)^N d\tau,
\end{aligned}$$

а заміна змінних  $\alpha - x = \xi, \beta - y = \eta, \gamma - z = \zeta$  приводить:

$$\begin{aligned}
& \omega_{m_1 n_1 k_1} W_{m_1 n_1 k_1} d\tau = \\
& \int_{\tau} \frac{1}{(2\pi i)^3 2^N m! n! k!} \int_{\tau} \left\{ \int_{c_1} \int_{c_2} \int_{c_3} \left[ \frac{1 - r^2 + \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2}}{(\eta+y)^{n_1-n+1} (\xi+x)^{m_1-m+1} (\zeta+z)^{k_1-k+1}} \right]^{-N-\frac{3}{2}} d\xi d\eta d\zeta \right\} (\rho^2 - 1)^2 d\tau,
\end{aligned}$$

а це, згідно формули Коші, дає:

$$\int_{\tau} \omega_{m_1 n_1 k_1} W_{m_1 n_1 k_1} d\tau = \frac{1}{2^N m! n! k!} \int_{\tau} \frac{\partial^{N_1-N}}{\partial x^{m_1-m} \partial y^{n_1-n} \partial z^{k_1-k}} (1 - r^2 + r^2)^{\frac{3}{2}-N} d\tau,$$

звідки при  $N < N_1$  останній вираз рівний нулю, тобто встановлена основна властивість систем  $\{\omega_{m_1 n_1 k_1}\}, \{W_{m_1 n_1 k_1}\}$  – їх біортогональність:

$$\int_{\tau} W_{m_1 n_1 k_1} \omega_{m_1 n_1 k_1} d\tau = \begin{cases} 0, & \text{якщо } m \neq m_1, \text{ або } n \neq n_1, \text{ або } k \neq k_1 \\ \frac{3V_e (2N+3)N!}{m! n! k! a^{2m} b^{2n} c^{2k}}, & \text{якщо } m = m_1, \quad n = n_1, \quad k = k_1, \end{cases} \quad (2.29)$$

яка дає можливість розкласти функції, що задані в еліпсоїді, в ряди.

## 2.5. Квазіортогональність системи многочленів $W_{m_1 n_1 k_1}$

Встановимо ще одну властивість многочленів  $W_{m_1 n_1 k_1}$ , для чого обчислимо вираз  $\int_{\tau} W_{m_1 n_1 k_1} W_{m_1 n_1 k_1} d\tau$

Запишемо підінтегральні вирази з допомогою формули Родріга

$$\int_{\tau} W_{m_1 k_1} W_{m_1 n_1 k_1} d\tau = \frac{1}{2^{N+N_1} m! n! k! m_1! n_1! k_1!} \int_{\tau} \frac{\partial^N}{\partial x^m \partial y^n \partial z^k} (\rho^2 - 1)^N \frac{\partial^{N_1}}{\partial x^{m_1} \partial y^{n_1} \partial z^{k_1}} (\rho^2 - 1)^{N_1} d\tau \quad (2.30)$$

Розглянемо три випадки:

$$N > N_1, N = N_1, N < N_1,$$

Використовуючи формулу інтегрування частинами (2.23)  $N$  раз, отримуємо

$$\int_{\tau} W_{m_1 k_1} W_{m_1 n_1 k_1} d\tau = \frac{(a^{m+m_1} b^{n+n_1} c^{k+k_1})^{-1}}{2^{x+n_1} m! n! k! m_1! n_1! k_1!} \int_{\tau} (\rho^2 - 1)^N \frac{\partial^{N+N_1}}{\partial x^{m+m_1} \partial y^{n+n_1} \partial z^{k+k_1}} (\rho^2 - 1)^{N_1} d\tau = 0,$$

оскільки  $(\rho^2 - 1)^{N_1}$  – многочлен степені  $2N_1 < N + N_1$ .

Аналогічно доводиться властивість, коли  $N < N_1$ . Отже, якщо загальні степені  $N, N_1$  многочленів  $W_{m_1 k_1}, W_{m_1 n_1 k_1}$  не рівні, то вони ортогональні між собою.

Знайдемо вираз при  $N = N_1$ . При цьому будемо мати:

$$\int_{\tau} W_{m_1 k_1} W_{m_1 n_1 k_1} d\tau = \frac{(a^{m+m_1} b^{n+n_1} c^{k+k_1})^{-1}}{2^{2N} m! n! k! m_1! n_1! k_1!} \int_{\tau} (\rho^2 - 1)^N \frac{\partial^{2N}}{\partial x^{m+m_1} \partial y^{n+n_1} \partial z^{k+k_1}} \partial \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right)^N d\tau \quad (2.31)$$

Далі використаємо формулу:

$$\begin{aligned} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right)^N &= \sum_{l=0}^N (-1)^{N-l} \frac{N!}{l!(N-l)!} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^l = \\ &= N! \sum_{l=0}^N \frac{(-1)^{N-l}}{(N-l)!} \sum_{m_1+n_1+k_1=l} \left( \frac{x}{a} \right)^{2m_1} \left( \frac{y}{b} \right)^{2n_1} \left( \frac{z}{c} \right)^{2k_1} \frac{1}{m_1! n_1! k_1!} \end{aligned}$$

Таким чином, при диференціюванні в формулі (2.30) залишаються тільки члени, степінь яких є  $\frac{m+m_1}{2}, \frac{n+n_1}{2}, \frac{k+k_1}{2}$ .

Після відповідних перетворень одержимо:

$$\begin{aligned} \int_{\tau} W_{m_1 k_1} W_{m_1 n_1 k_1} d\tau &= \frac{4\pi N!}{2^{2N} m! n! k!} \sum_{v_1+n_1+k_1=N} \frac{(m+m_1)!(n+n_1)!(k+k_1)!(a^{m+m_1+1} b^{n+n_1+1} c^{k+k_1+1})^{-1}}{m_1! n_1! k_1! \left( \frac{m+m_1}{2} \right)! \left( \frac{n+n_1}{2} \right)! \left( \frac{k+k_1}{2} \right)!} \\ \int_{\tau} (\rho^2 - 1)^N \rho d\tau &= \frac{3V_e (N!)^2}{2^N (2N+3)!! m! n! k!} \sum_{v_1+n_1+k_1=N} \frac{(m+m_1)!(n+n_1)!(k+k_1)!(a^{m+m_1} b^{n+n_1} c^{k+k_1})^{-1}}{m_1! n_1! k_1! \left( \frac{m+m_1}{2} \right)! \left( \frac{n+n_1}{2} \right)! \left( \frac{k+k_1}{2} \right)!} \\ &= \frac{3V (N!)^2 (m+m_1-1)!!(n+n_1-1)!!(k+k_1-1)!! 2^N}{2^N m! n! k! (2N+3)!! m_1! n_1! k_1! a^{m+m_1} b^{n+n_1} c^{k+k_1}} \end{aligned}$$

Зокрема при  $m = m_1, n = n_1, k = k_1$ , отримаємо :

$$\int_{\tau} W_{mnk}^2 d\tau = \frac{3V_e (N!)^2 (2m-1)!!(2n-1)!!(2k-1)!!}{(m!)^2 (n!)^2 (k!)^2 (2N+3)!! a^{2m} b^{2n} c^{2k}}. \quad (2.32)$$

Дана формула буде використана в подальшому для оцінки збіжності рядів.

Таким чином, система многочленів  $W_{mnk}$  «квазіортогональна» і її використання для представлення в ряд недоцільне, бо для кожного  $N$  необхідно розв'язувати систему лінійних рівнянь відносно коефіцієнтів розкладу  $b_{mnk}$ . Тому в подальшому завдяки основній властивості систем  $\{W_{mnk}\}, \{\omega_{mnk}\}$  будемо використовувати їх для побудови рядів.

## 2.6. Аналітичні зображення многочленів $W_{mnk}, \omega_{mnk}$

### 2.6.1. Вирази для визначення многочленів $W_{mnk}$

Формула Родріга дає спосіб знаходження многочленів  $W_{mnk}, \omega_{mnk}$ , але при цьому потрібно здійснювати диференціювання, що ускладнює їх використання. Спочатку введемо замкнуті формули для  $W_{mnk}$ , для чого в (2.12) зробимо заміну [74,89]:

$$\xi - x = \xi_1, \eta - y = \eta_1, \zeta - z = \zeta_1$$

в результаті одержимо:

$$W_{mnk} = \frac{1}{2^N m!n!k!} \int_{c_1} \int_{c_2} \int_{c_3} \frac{\left( \frac{(\xi_1 + x)^2}{a^2} + \frac{(\eta_1 + y)^2}{b^2} + \frac{(\zeta_1 + z)^2}{c^2} \right)^N}{\xi_1^{m+1} \eta_1^{n+1} \zeta_1^{k+1}} d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1. \quad (2.32)$$

Розкладемо підінтегральний вираз (2.32), використовуючи декілька разів біном Ньютона та після перетворень отримаємо

$$W_{mnk} = \frac{N!}{2^N m!n!k!} \sum_{l=0}^N \frac{(-1)^l 2^l}{l!} \sum_{l_1+l_2+l_3=l} \frac{(2l_1-1)!!(2l_2-1)!!(2l_3-1)!!}{a^{2l_1} b^{2l_2} c^{2l_3}} \sum_{l_1=0}^{2l_1} \sum_{l_2=0}^{2l_2} \sum_{l_3=0}^{2l_3} x^{2l_1-l_1} y^{2l_2-l_2} z^{2l_3-l_3} \frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{c_1} \int_{c_2} \int_{c_3} \frac{\xi_1^{l_1-n-1} \eta_1^{l_2-m-1} \zeta_1^{l_3-k-1}}{l_1!(2l_1-l_1)! l_2!(2l_2-l_2)! l_3!(2l_3-l_3)!} d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1. \quad (2.33)$$

Континуальні інтеграли ненульові для  $l_1 = n, l_2 = m, l_3 = k$ , а тому одержуємо формулу;

$$W_{mnk} = \frac{1}{a^m b^n c^k} \frac{1}{2^N m!n!k!} \sum_{l=0}^N \frac{(-1)^l 2^l}{l!} \sum_{t_1+t_2+t_3=l}^N \frac{(2t_1-1)!!(2t_2-1)!!(2t_3-1)!!}{(2t_1-m)!(2t_2-n)!(2t_3-k)!} \left(\frac{x}{a}\right)^{2t_1-m} \left(\frac{y}{b}\right)^{2t_2-n} \left(\frac{z}{c}\right)^{2t_3-k}, \quad (2.34)$$

яка представляє аналог формули Родріга для многочленів трьох змінних.

## 2.6.2. Явні вирази многочленів $\omega_{mnk}$

При загальній степені  $N$  для многочленів  $\omega_{mnk}$  представимо їх у вигляді:

$$\omega_{mnk} = \sum_{l=0}^{N/2} \sum_{i+j+s=l} a_{ijs}^{mnk} \left(\frac{x}{a}\right)^{m-2i} \left(\frac{y}{b}\right)^{n-2j} \left(\frac{z}{c}\right)^{k-2s} \quad (2.35)$$

і підставимо в твірну функцію

$$\left(1 - \frac{2\alpha x}{a^2} - \frac{2\beta y}{b^2} - \frac{2\gamma z}{c^2} + \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}\right)^{-3/2} = \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^m \beta^n \gamma^k \sum_{e=0}^{N/2} \sum_{i+j+s=e} a_{ijs}^{mnk} \left(\frac{x}{a}\right)^{m-2i} \left(\frac{y}{b}\right)^{n-2j} \left(\frac{z}{c}\right)^{k-2s}. \quad (2.36)$$

Продифенціюємо (2.36) за змінними  $x, y, z$  відповідно  $m-2i, n-2j, k-2s$  раз

$$\frac{\frac{-3}{2} \left(\frac{-5}{2}\right) \dots \left(\frac{-3}{2} - 2l\right) (-2)^{N-l} \alpha^{m-2i} \beta^{n-2j} \gamma^{k-2s}}{(a^2)^{m-2i} (b^2)^{n-2j} (c^2)^{k-2s}} \psi^{\frac{-3}{2} + N-l} = \sum_{m+n+k=0} \sum_{i+j+s=0} a_{ijs}^{mnk} \frac{(m-2i)!(n-2j)!(k-2s)!}{a^{m-2i} b^{n-2j} c^{k-2s}} \alpha^m \beta^n \gamma^k.$$

Покладемо  $x = y = z = 0$ , в результаті чого одержимо:

$$\frac{(2N-4l+1)!!(-1)^{N-l}}{(a^2)^{m-2i} (b^2)^{n-2j} (c^2)^{k-2s}} \alpha^{m-2i} \beta^{n-2j} \gamma^{k-2s} \left(1 + \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}\right)^{\frac{-3}{2} + N-2l} = \sum_{m+n+k=0} \sum_{i+j+s=l} a_{ijs}^{mnk} (m-2i)!(n-2j)!(k-2s)! \frac{\alpha^m \beta^n \gamma^k}{a^{m-2i} b^{n-2j} c^{k-2s}}.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при степені  $\alpha^m \beta^n \gamma^k$ , отримаємо:

$$a_{ijs}^{mnk} \frac{(m-2i)!(n-2j)!(k-2s)!}{a^{m-2i} b^{n-2j} c^{k-2s}} = \frac{(2N-2l+1)!!(-1)^{N-l}}{i!j!s! a^{2m-4i} b^{2n-4j} c^{2k-4s} a^{2i} b^{2j} c^{2s}},$$

звідки

$$a_{ijs}^{mnk} = \frac{(-1)^{N-e} (2N-2l+1)!!}{a^m b^n c^k i!j!s!(m-2i)!(n-2j)!(k-2s)!}. \quad (2.37)$$

Остаточно вираз набуде вигляду:

$$\omega_{mnk} = \frac{1}{a^m b^n c^k} \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}} (-1)^{N-l} \frac{(2N-2l+1)!!}{l!2^l} \sum_{i+j+s=l} \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^{m-2i} \left(\frac{y}{b}\right)^{n-2j} \left(\frac{z}{c}\right)^{k-2s}}{i!j!s!(m-2i)!(n-2j)!(k-2s)!}. \quad (2.38)$$

Введемо оператор:

$$\Delta^l f = \left( \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^e = \sum_{i+j+s=e} \frac{l!}{i!j!s!} \frac{\partial^{2l}}{\partial x^{2i} \partial y^{2j} \partial z^{2s}} a^{2i} b^{2j} c^{2s} f \quad (2.39)$$

і застосуємо його до функції  $f = \left(\frac{x}{a}\right)^{2m} \left(\frac{y}{b}\right)^{2n} \left(\frac{z}{c}\right)^{2k}$ .

Будемо мати

$$\Delta^l \left[ \left(\frac{x}{a}\right)^m \left(\frac{y}{b}\right)^n \left(\frac{z}{c}\right)^k \right] = l! \sum_{i+j+e=l} \frac{(m!n!k!) \left(\frac{x}{a}\right)^{m-2i} \left(\frac{y}{b}\right)^{n-2j} \left(\frac{z}{c}\right)^{k-2s}}{i!j!s!(m-2i)!(n-2j)!a^{2i}b^{2j}c^{2s}}. \quad (2.40)$$

Звідки остаточно одержимо співвідношення для другої системи многочленів:

$$\omega_{mnk} = \frac{1}{a^m b^n c^k m!n!k!} \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}} \frac{(-1)^l \Delta^l \left[ \left(\frac{x}{a}\right)^m \left(\frac{y}{b}\right)^n \left(\frac{z}{c}\right)^k \right]}{l!2^l}. \quad (2.41)$$

## 2.7. До екстремумів многочленів $W_{mnk}$

Визначимо оцінку для многочленів  $W_{mnk}$ , яка потрібна для з'ясування збіжності біортогональних розкладів. За інтегральною формулою Коші маємо рівність :

$$W_{mnk} = \frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{c_1} \int_{c_2} \int_{c_3} \frac{\varphi(\alpha, \beta, \gamma, x, y, z)}{(\alpha-x)^{m+1} (\beta-y)^{n+1} (\gamma-z)^{k+1}} d\alpha d\beta d\gamma. \quad (2.42)$$

Згідно принципу максимуму аналітична підінтегральна функція може приймати максимальне значення на границі області. Твірна функція на поверхні еліпсоїда  $\Omega$ , визначається рівністю :

$$|\varphi(\alpha, \beta, \gamma, x, y, z)|_{\Omega} = \frac{1}{\left| 1 - \left( \frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2} \right) \right|}. \quad (2.43)$$

Дійсно, розкладемо (2.43) в біномінальний ряд:



$$\frac{1}{1 - \frac{\alpha x}{a^2} - \frac{\beta y}{b^2} - \frac{\gamma z}{c^2}} = \sum_{N=0}^{\infty} \left( \frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2} \right)^N = \sum_{N=0}^{\infty} N! \sum_{m+n+k=N} \frac{\alpha^m \beta^n \gamma^k}{m!n!k!} \left( \frac{x}{a} \right)^m \left( \frac{y}{b} \right)^n \left( \frac{z}{c} \right)^k,$$

і підставимо в формулу (2.43). Отримаємо після нескладних перетворень нерівність

$$|W_{mnk}| \leq |W_{mnk}|_{\Omega} = \left| \frac{N!}{m!n!k!} \left( \frac{x}{a} \right)^m \left( \frac{y}{b} \right)^n \left( \frac{z}{c} \right)^k \right|. \quad (2.44)$$

Перейдемо до узагальненої сферичної системи координат:

$$\begin{aligned} x &= a \sin \theta \cos \lambda \\ y &= b \sin \theta \sin \lambda \\ z &= c \cos \theta \end{aligned}, \quad \begin{aligned} 0 &\leq \theta \leq \pi \\ 0 &\leq \lambda \leq 2\pi \end{aligned}. \quad (2.45)$$

Тоді вираз (2.44) набуде вигляду:

$$W_{mnk}(\theta, \lambda) = \frac{N!}{m!n!k! a^m b^n c^k} \sin^{m+n} \theta \cos^k \theta \cos^m \lambda \sin^n \lambda \quad (2.46)$$

Шукаємо найбільше та найменше значення функції в області D,

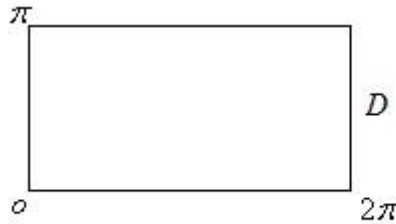


Рис. 2.2. Область зміни значень  $\theta, \lambda$

для чого визначаємо критичні точки виразу (2.46):

$$\begin{cases} \frac{\partial W_{mnk}}{\partial \theta} = [(m+n) \sin^{m+n-1} \theta \cos^{k+1} \theta - k \sin^{m+n+1} \theta \cos^{k-1} \theta] \sin^n \lambda \cos^m \lambda = 0, \\ \frac{\partial W_{mnk}}{\partial \lambda} = \sin^{m+n} \theta \cos^k \theta [-m \cos^{m-1} \lambda \sin^{n+1} \lambda + n \cos^{m+1} \lambda \sin^{n-1} \lambda] = 0 \end{cases}. \quad (2.46)$$

Система рівнянь розділяється на дві частини, перша з яких дає очевидний розв'язок:

$$\begin{aligned} \sin \lambda \cos \lambda = \frac{1}{2} \sin 2\lambda = 0, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \lambda_3 = \pi, \quad \lambda_4 = \frac{3\pi}{2}, \quad \lambda_5 = 2\pi, \\ \frac{1}{2} \sin 2\theta = 0, \quad \theta_1 = 0, \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \theta = \pi, \end{aligned}$$

значення якого – вершини прямокутника D, в яких

$$w_{mnk}(\theta_i, \lambda_j) = 0, \quad i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Друга частина системи має наступний вигляд :

$$\begin{cases} (m+n)\cos^2\theta - k\sin^2\theta = 0 \\ -m\sin^2\lambda + n\cos^2\lambda = 0 \end{cases}$$

і її розв'язок наступний:

$$\operatorname{tg}^2\theta = \frac{k}{m+n}, \quad \theta = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{k}{m+n}} \quad m\sin^2\lambda + n(1-\sin^2\lambda) = 0, \quad (2.47)$$

$$\sin^2\lambda = \frac{n}{m+n}, \quad \cos^2\lambda = \frac{m}{m+n}, \quad \lambda = \arcsin\left(\sqrt{\frac{n}{m+n}}\right), \quad (2.48)$$

звідки

$$\sin^2\theta = \frac{m+n}{m+n+k}, \quad \cos^2\theta = \frac{k}{m+n+k}, \quad (2.49)$$

тому підставляючи (2.48), (2.49) в (2.45) одержимо:

$$\begin{aligned} |w_{mnk}| &\leq \frac{N!}{m!n!k!a^m b^n c^k} \left(\frac{m+n}{m+n+k}\right)^{\frac{m+n}{2}} \left(\frac{k}{m+n+k}\right)^{\frac{k}{2}} \left(\frac{n}{m+n}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{m}{m+n}\right)^{\frac{m}{2}} \\ &= \frac{N!}{m!n!k!a^m b^n c^k} \frac{k^{\frac{k}{2}} n^{\frac{n}{2}} m^{\frac{m}{2}}}{N^{\frac{N}{2}}}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Використовуючи формулу Стірлінга [36]

$$\sqrt{2\pi}e^{-l}e^{\frac{l}{2}} < l! < \sqrt{2\pi}e^{-l+\frac{1}{12e}}e^{\frac{l}{2}}$$

для (2.44) одержимо наступну оцінку для многочленів  $W_{mnk}$  :

$$\begin{aligned} |W_{mnk}| &\leq \frac{\sqrt{2\pi}xN^{\frac{x}{2}}e^{-N+\frac{1}{12N}}}{\sqrt{2\pi}mm^{\frac{m}{2}}e^{\frac{m}{2}}\sqrt{2\pi}nn^{\frac{n}{2}}e^{\frac{-n}{2}}\sqrt{2\pi}ke^{\frac{-k}{2}}k^{\frac{k}{2}}a^m b^n c^k} \frac{k^{\frac{k}{2}}m^{\frac{m}{2}}n^{\frac{n}{2}}}{N^{\frac{N}{2}}} \\ &= \sqrt{\frac{N}{mnk}} \frac{1}{2\pi} e^{\frac{1}{12N}} \frac{1}{a^m b^n c^k}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

## 2.8. Про значення многочленів $W_{mnk}$ в початку системи відліку

В прикладних дослідженнях [112,114,115] виникає потреба у визначенні величини  $W_{mnk}$  в точці  $O(0,0,0)$  (в центрі). Скористаємось знову твірною функцією, яка в точці  $O(0,0,0)$  має вигляд

$$\psi(\alpha, \beta, \gamma, 0, 0, 0) = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}$$

та розкладемо її в біноміальний ряд:

$$\begin{aligned} \psi &= 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}\right)^2 \frac{1}{2!} \\ &+ \dots \frac{1(-1)^{l-1}}{2^l l!} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right) \dots \left(\frac{2l-1}{2}\right) \left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}\right)^l = \\ &1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l (2l-1)!!}{2^l l!} \left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}\right)^l = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l (2l-1)!!}{2^l} \sum_{m+n+k=l} \frac{\left(\frac{\alpha}{a}\right)^{2m} \left(\frac{\beta}{b}\right)^{2n} \left(\frac{\gamma}{c}\right)^{2k}}{m!n!k!} \end{aligned}$$

З останньої рівності видно, що

$$W_{2m2n2k}(0, 0, 0) = \begin{cases} \frac{(-1)^N (2N-1)!!}{2^N m!n!k! a^{2m} b^{2n} c^{2k}}, & \text{якщо всі індекси парні} \\ W_{mnk}(0, 0, 0) = 0, & \text{якщо хоча б один індекс непарний} \end{cases} \quad (2.52)$$

## 2.9. Дослідження біортогональних систем функцій

Об'єктом наших досліджень є функція розподілу  $\delta$  в середині еліпсоїдальної планети, яка з фізичних міркувань є кусково – неперервною. Для такого класу функцій представимо їх з допомогою двох біортогональних систем функцій  $\{\omega_{mnk}\}$ ,  $\{W_{mnk}\}$  [62-64].

Запишемо формально розклади  $\delta$  за двома системами:

$$\delta \sim \sum_{m+n+k=0}^{\infty} b_{mnk} W_{mnk}, \quad (2.53)$$

$$\delta \sim \sum_{m+n+k=0}^{\infty} c_{mnk} \omega_{mnk}. \quad (2.54)$$

Для знаходження коефіцієнтів возкладу  $b_{mnk}, c_{mnk}$  домножимо (2.53) і (2.54) на  $\omega_{mnk}$  і  $W_{mnk}$  відповідно, звідки отримаємо співвідношення:

$$\int_{\tau} \delta \omega_{mnk} d\tau \sim b_{mnk} \int \omega_{mnk} W_{mnk} d\tau, \quad (2.55)$$

$$\int \delta W_{mnk} d\tau \sim c_{mnk} \int \omega_{mnk} \omega_{mnk} d\tau, \quad (2.56)$$

звідки

$$\delta(x, y, z) = \sum_{k=1}^m \delta_k(x_k, y_k, z_k) + \delta^0(\rho) + \sum_{m+n+k=0}^N b_{mnk} W_{mnk}(x, y, z)$$

$$b_{mnk} \sim \int_{\tau} \delta \omega_{mnk} d\tau / l_{mnk} , \quad (2.57)$$

$$c_{mnk} \sim \int_{\tau} \delta \omega_{mnk} d\tau / l_{mnk} . \quad (2.58)$$

Покажемо, що набір коефіцієнтів  $b_{mnk}, c_{mnk}$  дає збіжність в середньому нг7функції  $\delta$ , для чого доведемо екстремальні властивості часткових сум:

$$\sum_{m+n+k=0}^N b_{mnk} W_{mnk} , \quad \sum_{m+n+k=0}^N c_{mnk} \omega_{mnk} , \quad (2.59)$$

тобто покажемо, що серед многочленів не вище  $N$ -ої степені за змінними  $x, y, z$  виконуються рівності:

$$\int_{\tau} \left[ \delta - \sum_{m+n+k=0}^N b_{mnk} W_{mnk} \right]^2 d\tau = \min_{\tau} \int_{\tau} \left[ \delta - \sum_{p+q+s=0}^N \alpha_{pqs} W_{pqs} \right]^2 d\tau , \quad (2.60)$$

і

$$\int_{\tau} \left[ \delta - \sum_{m+n+k=0}^N c_{mnk} \omega_{mnk} \right]^2 d\tau = \min_{\tau} \int_{\tau} \left[ \delta - \sum_{p+q+s=0}^N \beta_{pqs} \omega_{pqs} \right]^2 d\tau . \quad (2.61)$$

Для цього запишемо загальний многочлен  $N$ -ої степені

$$\rho_N(x, y, z) = \sum_{p+q+s=0}^N \alpha_{pqs} W_{pqs}(x, y, z) = \sum_{p+q+s=0}^N \beta_{pqs} \omega_{pqs}(x, y, z) \quad (2.62)$$

і дослідимо на екстремум вираз:

$$I_N = \int_{\tau} \left( \delta - \sum_{p+q+s=0}^N \beta_{pqs} \omega_{mnk} \right)^2 d\tau .$$

Далі продиференціювавши його:

$$\frac{\partial I_N}{\partial \beta_{pqs}} = 2 \int_{\tau} \left( \delta - \sum_{p+q+s=0}^N \beta_{pqs} \omega_{pqs} \right) \omega_{pqs} d\tau = 0, \quad 0 \leq p+q+s \leq N . \quad (2.63)$$

і заміняючи в (2.63) суму  $\sum_{p+q+s=0}^N \beta_{pqs} \omega_{pqs}$  на таку ж  $\sum_{p+q+s=0}^N \alpha_{pqs} W_{pqs}(x, y, z)$ , отримаємо

систему лінійних рівнянь відносно  $\alpha_{pqs}$ , а саме:

$$\int_{\tau} \delta \omega_{pqs} d\tau - \sum_{p_1+q_1+s_1=0}^N \alpha_{p_1q_1s_1} \int_{\tau} \omega_{pas} W_{p_1q_1s_1} d\tau = 0 \quad (0 \leq p_1+q_1+s_1 \leq N),$$

звідки

$$\alpha_{pqs} = \int_{\tau} \delta \omega_{pqs} / l_{pqs}, 0 \leq p + q + s \leq N, \quad (2.64)$$

тобто властивість (2.61) доведена. Аналогічно доводиться рівність (2.60).

З співвідношень (2.60) і (2.61) випливають наступні наслідки:

а) в силу єдності мінімального многочлена  $\rho_N(x, y, z)$ , вирази в (2.52) тотожні, тобто:

$$\sum_{m+n+k=0}^N b_{mnk} W_{mnk} = \sum_{m+n+k=0}^N c_{mnk} \omega_{mnk}. \quad (2.65)$$

б) оскільки сукупність функцій  $x^m, y^n, z^k$  є повною, то її ортогоналізація дозволяє будувати систему ортогональних многочленів  $\{v_{mnk}\}$  в еліпсоїді  $\tau$ , в зв'язку з чим рівність (2.57) може буде продовжена, а саме:

$$\sum_{m+n+k=0}^N b_{mnk} w_{mnk} = \sum_{m+n+k=0}^N c_{mnk} \omega_{mnk} = \sum_{m+n+k=0}^N a_{mnk} v_{mnk}, \quad (2.66)$$

де

$$\alpha_{mnk} = \int_{\tau} \delta v_{mnk} d\tau / \int_{\tau} v_{mnk}^2 d\tau.$$

Користуючись цією властивістю, встановимо нерівність Бесселя для біортогональних систем  $\{\omega_{mnk}\}, \{W_{mnk}\}$ , для чого перетворимо вираз :

$$\int_{\tau} \left( \delta - \sum_{m+n+k=0}^N b_{mnk} W_{mnk} \right)^2 d\tau = \int_{\tau} \delta^2 d\tau - 2 \sum_{m+n+k=0}^n b_{mnk} c_{mnk} l_{mnk} + \int_{\tau} \left( \sum_{m+n+k=0}^N b_{mnk} W_{mnk} \right)^2 d\tau = \int_{\tau} \delta^2 d\tau - 2 \sum_{m+n+k=0}^n b_{mnk} c_{mnk} l_{mnk} + \int_{\tau} \left( \sum_{m+n+k=0}^N b_{mnk} W_{mnk} \right) \left( \sum_{m+n+k=0}^N b_{mnk} \omega_{mnk} \right) d\tau = \int_{\tau} \delta^2 d\tau - \sum_{m+n+k=0}^n b_{mnk} c_{mnk} l_{mnk}$$

звідки отримуємо

$$\sum_{m+n+k=0}^N b_{mnk} c_{mnk} l_{mnk} \leq \int_{\tau} \delta^2 d\tau \quad (2.67)$$

Після граничного переходу ( $N \rightarrow \infty$ ) одержуємо нерівність Бесселя[35]

$$\sum_{m+n+k=0}^{\infty} b_{mnk} c_{mnk} l_{mnk} \leq \int_{\tau} \delta^2 d\tau. \quad (2.68)$$

Для ортогональних систем має місце рівність Парсеваля:

$$\sum_{m+n+k=0}^{\infty} b_{mnk} c_{mnk} l_{mnk} = \int_{\tau} \delta^2 d\tau, \quad (2.69)$$

яка впливає з співвідношень:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\tau} \left( \delta - \sum_{m+n+k=0}^N a_{mnk} v_{mnk} \right)^2 d\tau = \int_{\tau} \delta^2 d\tau - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m+n+k=0}^N a_{mnk}^2 \int_{\tau} v_{mnk}^2 d\tau ,$$

$$\sum_{m+n+k=0}^N a_{mnk}^2 \int_{\tau} v_{mnk}^2 d\tau = \sum_{m+n+k=0}^N b_{mnk} c_{mnk} l_{mnk} .$$

Неважко переконатись, що виконуються також наступні рівності:

$$\int_{\tau} \left( \sum_{m+n+k=0}^{\infty} b_{mnk} W_{mnk} \right)^2 d\tau = \int_{\tau} \left( \sum_{m+n+k=0}^{\infty} b_{mnk} \omega_{mnk} \right)^2 d\tau = \int_{\tau} \delta^2 d\tau , \quad (2.70)$$

з яких впливає збіжність в середньому рядів (2.53), (2.54) для кусково – неперервної функції  $\delta$  ( $\delta \in L^2_{\tau}$ ), тобто виконуються умови:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\tau} \left( \delta - \sum_{m+n+k=0}^N b_{mnk} W_{mnk} \right)^2 d\tau = 0 , \quad (2.71)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\tau} \left( \delta - \sum_{m+n+k=0}^{\infty} c_{mnk} \omega_{mnk} \right)^2 d\tau = 0 . \quad (2.72)$$

Поскільки в подальшому функція розподілу мас подаватиметься в основному рядами типу, що в (2.71), то дослідимо поведінку таких розкладів, зокрема дамо оцінку для коефіцієнтів  $b_{mnk}$ .

## 2.10. Збіжність біортогональних рядів

Розпишемо ліву частину (2.71) та отримаємо

$$\sum_{N=m+n+k=0}^{\infty} \sum_{N_1=m_1+n_1+k_1=0}^{\infty} b_{mnk} b_{m_1n_1k_1} \int_{\tau} W_{mnk} W_{m_1n_1k_1} d\tau = \int_{\tau} \delta^2 d\tau . \quad (2.73)$$

З необхідної умови збіжності впливає, що

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ N_1 \rightarrow \infty}} b_{mnk} b_{m_1n_1k_1} \int_{\tau} W_{mnk} W_{m_1n_1k_1} d\tau = 0 \quad (2.74)$$

або при  $m = m_1, n = n_1, k = k_1$  маємо:

$$b_{mnk}^2 \int_{\tau} W_{mnk}^2 d\tau \rightarrow 0 \quad N \rightarrow \infty$$

Використовуючи формулу (2.30) отримуємо:

$$|b_{mnk}| \frac{(N!)}{(m!)(n!)(k!)a^m b^n c^k} \sqrt{\frac{3V_e (2m-1)!!(2n-1)!!(2k-1)!!}{(2N+3)^{!!}}} \rightarrow 0, \quad (2.75)$$

або в дещо іншому вигляді

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |b_{mnk}| \frac{N!}{m!n!k!a^m b^n c^k} \sqrt{\frac{2m!2n!2k!}{(2N+3)!!2^N m!n!k!}} = 0. \quad (2.76)$$

Розглядаючи грубе наближення, наприклад

$$|b_{mnk}| \frac{N!}{m!n!k!a^m b^n c^k} \sqrt{\frac{2m!2n!2k!}{(2N+3)!!2^{N-1} m!n!k!}} < 1$$

отримаємо вираз:

$$|b_{mnk}| < \frac{m!n!k!a^m b^n c^k}{N!} \sqrt{\frac{m!n!k!2^N (2N+3)!!}{3V^0 2m!2n!2k!}}. \quad (2.77)$$

Для оцінки загального члена ряду (2.48) використаємо нерівності (2.77) і (2.55), в результаті чого одержимо

$$|b_{mnk} W_{mnk}| < \frac{m!n!k!}{N!} \sqrt{\frac{m!n!k!(2N+3)!2^N}{3V_e 2m!2n!2k!(n+1)!2^{N+3}}} \frac{k^{\frac{k}{2}} n^{\frac{n}{2}} m^{\frac{m}{2}}}{N^{\frac{N}{2}}} = \frac{k^{\frac{k}{2}} n^{\frac{n}{2}} m^{\frac{m}{2}}}{N^{\frac{N}{2}}} \sqrt{\frac{m!n!k!(2N+3)!}{6V 2m!2n!2k!(N+1)!}},$$

а до перетвореного виразу знову застосуємо ліву і праву частини формули Стірлінга [36]:

$$|b_{mnk} W_{mnk}| \leq \frac{k^{\frac{k}{2}} m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}}}{N^{\frac{N}{2}}} \left( \frac{m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}} k^{\frac{k}{2}} e^{-N+\frac{1}{12m}+\frac{1}{12n}+\frac{1}{12k}} \sqrt{(8\pi)^3 mnk} e^{-2N+3} (2N+3)^{2N+3} \sqrt{2\pi(2N+3)}}{(2m)^{2m} (2n)^{2n} (2k)^{2k} e^{-2N} \sqrt{8mnk} (2\pi)^3 e^{-(N+1)} (N+1)^{N+1} \sqrt{2\pi(N+1)}} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$|b_{mnk} W_{mnk}| \leq \frac{k^k n^n m^m}{k^k n^n m^m} \left( \frac{e^{\frac{1}{12m}+\frac{1}{12n}+\frac{1}{12k}-3} (52N+3)^{2N+3} \sqrt{\frac{2N+3}{N+1}}}{2^{2N} \sqrt{8} (N+1)^{N+1} \sqrt{\frac{2N+3}{N+1}}} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$|b_{mnk} W_{mnk}| \leq \left( \frac{1e^{\frac{1}{12m}+\frac{1}{12n}+\frac{1}{12k}-3} \left[ \left( 1 + \frac{3}{2N} \right)^{\frac{2N}{3}} \right]^3 (2N+3)^3 (2N)^{2N}}{2^{2N} N^{2N} (N+1) \left( 1 + \frac{1}{N} \right)^N} \sqrt{\frac{2N+3}{N+1}}} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{e^3}{e} \left( \frac{(2N+3)^3}{N+1} \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \infty.$$

Отже, для гарантування збіжності не достатньо обмеженості функції, а потрібні більш сильні умови. Математичні аспекти даної проблеми вивчалась рядом математиків, зокрема Кошмідером Л. досліджена рівномірна збіжність рядів [169], сумування за Чезаро розглядалось Ченом К. К. [158]. Поскілки поведінка функції розподілу мас невідома, тому більш доцільним є використання методів, які забезпечують практичну збіжність рядів. До таких насамперед доцільно віднести узагальнені способи сумування по Абелю і Чезаро [54,55,95,181].

Розглянемо суму  $\delta_N = \sum_{m+n+k=0}^N b_{mk} W_{mk}$  та опишемо наступні алгоритми.

Метод Абеля.

Нехай задана послідовність  $\{\delta_N\}$  Розглянемо таку суму:

$$S_N(\rho) = \delta_0 + \delta_1 \rho + \dots + \delta_N \rho^n + \dots = \sum_{n=0}^N \delta_n \rho^n \quad (2.78)$$

Якщо для кожного  $0 < \rho \leq 1$  для обмежених  $\{\delta_N\}$  існує границя суми

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(\rho) = S(\rho), \quad (2.79)$$

то для значень  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k < 1$  також має місце границя

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} S(\rho_k) = S, \quad (2.80)$$

яку вважатимемо значенням суми  $\{\delta_N\}$ . Очевидно, коли існує границя послідовності  $\{\delta_N\}$ , то вона існує для  $\{S_N(\rho)\}$ . Обернене твердження не завжди вірне.

Метод Чезаро .

Для послідовності  $\{\delta_k\}$  розглядаємо суми

$$R_m = \sum_{k=0}^m \delta_k$$

і, відповідно,

$$S_N = \frac{\sum_{n=0}^N R_n}{N},$$

яка є середньоарифметичним значенням величин  $R_m$ .



Якщо існує границя

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = S, \quad (2.81)$$

то така сума називається сумою за Чезаро.

Якщо існують границі (2.80), (2.81), то вони співпадають, в зв'язку з чим їх можна вважати узагальненою сумою заданої послідовності  $\{\delta_N\}$ . Зауважимо, що незважаючи на їх еквівалентність, простішим є використання другого методу знаходження суми за Чезаро. Розпишемо більш детально його:

$$\begin{aligned} S_N &= \frac{\delta_0 + \delta_0 + \delta_1 + \delta_0 + \dots + \delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_N}{N} = \\ &= \left( \delta_0 + \left(1 - \frac{1}{N}\right) \delta_1 + \dots + \frac{(N-k)}{N} \delta_k + \dots + \frac{1}{N} \delta_N \right) = \sum_{k=0}^N \frac{(N-k)}{N} \delta_{N-k} \end{aligned} \quad (2.82)$$

Приведена методика апробована для ряду числових експериментів. Так обчислення гравітаційного поля поблизу поверхні планети [53,55] дозволило отримувати їх стійкі значення і по-новому [52,54,181] трактувати поняття потенціалу. Для аномалій функції густини розподілу мас Землі також застосована така схема [66-68]. Ефективність такого підходу підтверджується розглядом ще одного випадку: застосуємо його до апроксимації кусково-неперервних функцій однієї змінної многочленами Лежандра і розглянемо конкретний приклад в якому розглядається одинична куля з розподілом мас  $\delta$ :

$$\delta = \begin{cases} 1, & 0 \leq \rho \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} < \rho \leq 1 \end{cases}.$$

Обчислимо точне ( $\delta_i$ ) та наближене ( $\delta_j$ ) значення функції за сумою многочленів Лежандра, обмежуючись кількістю  $N=24$ . Для покращення практичної збіжності використаємо сумування за Чезаро ( $\delta_{ch}$ ) та Абелю ( $\delta_{ab}$ ), що дозволяє отримувати більш гладкі представлення для кусково- неперервних функцій, якими передбачаються розподіли мас планет.

Таблиця 2.1.

## Точні та наближені і уточнені за Чезаром та Абелем значення функції

$\delta$	$\delta_l$	$\delta_t$	$\delta_{ch}$	$\delta_{ab}$
0.00	1.00044	1.00000	0.99306	0.98164
0.10	1.00218	1.00000	0.99293	0.98073
0.20	1.00369	1.00000	0.99214	0.97709
0.30	0.99887	1.00000	0.98928	0.96725
0.40	0.98276	1.00000	0.97869	0.93637
0.50	0.75250	0.50000	0.75319	0.75607
0.60	0.52724	0.50000	0.52440	0.56838
0.70	0.51451	0.50000	0.51250	0.53407
0.80	0.49676	0.50000	0.50793	0.52088
0.90	0.50677	0.50000	0.50526	0.51539
1.00	0.45486	0.50000	0.50367	0.50843

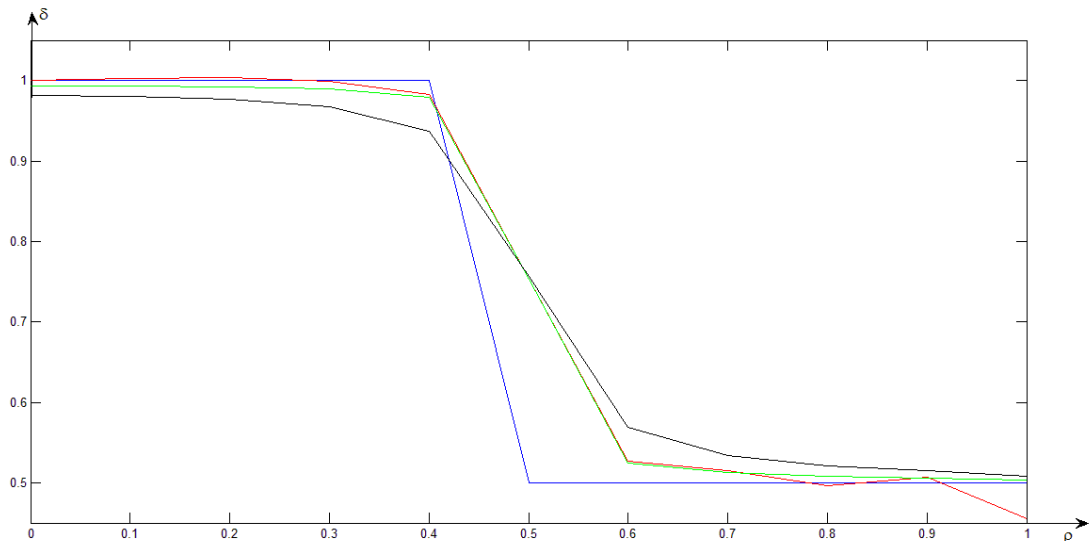


Рис. 2.3. Графіки значень функцій розподілів мас:

- а) точне ( $\delta_l$ ) - синій колір, б) наближене ( $\delta_l$ )-червоний, в) уточнене за Чезаро ( $\delta_{ch}$ )-зелений, г) уточнене за Абелем( $\delta_{ab}$ )-жовтий

Аналіз числових результатів табл.2.2 та графіків рисунка 2.3 підтверджує покращення збіжності так як графіки в випадках в) та г) більш гладкі і ближчі в основному до заданого (графік а), що особливо проявляється на кінцях проміжків.

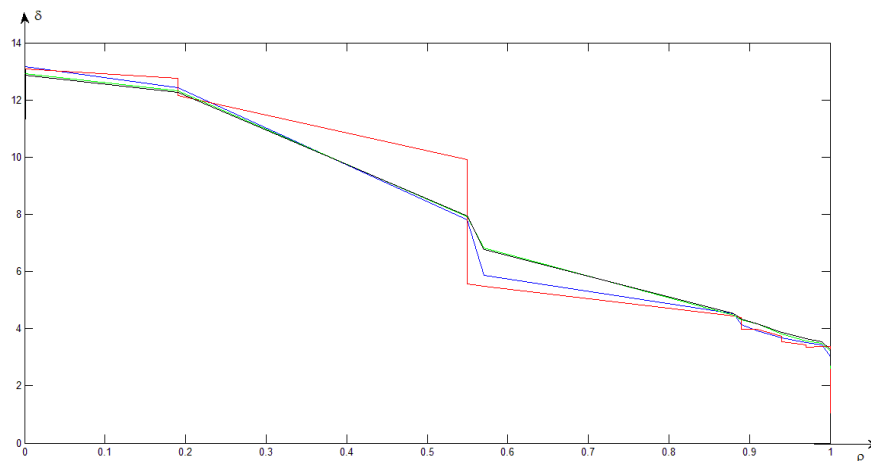


Рис.2.4 Графіки значень функцій розподілів мас:

а) модель PREM ( $\delta_t$ ) - синій колір, б) наближене ( $\delta_l$ )-червоний, в) уточнене за Чезаро ( $\delta_{ch}$ )-зелений, г) уточнене за Абелем( $\delta_{ab}$ )-жовтий

Застосована методика до відомої референцної моделі PREM [160] також дає більш правдоподібні наближення, які, однак, не такі ефективні, що може бути наслідком великої кількості розривів апроксимованої функції. Тому в кожному конкретному випадку необхідне окреме дослідження.

## ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 2

1. За допомогою твірних функцій визначені дві системи тривимірних многочленів в еліпсоїді  $\omega_{mk}, W_{mk}$ , ортогональних одна до одної (біортогональних).
2. Досліджені і доведені основні властивості систем  $\omega_{mk}, W_{mk}$ : встановлена їх “квазіортогональність”, виведені формули Родріга для трьох змінних, приведені рекурентні співвідношення для  $\omega_{mk}, W_{mk}$ , знайдені аналітичні зображення для виразів  $\omega_{mk}, W_{mk}$  представляють їх в явному вигляді. Для функцій  $W_{mk}$  встановлені нерівності, які визначають обмеження на їх значення.
3. Досліджені основні властивості рядів за двома системами многочленів: встановлені нерівність Бесселя та рівність Парсеваля для ортогональних рядів, з їх допомогою доведена їх біортогональність та доведена збіжність в середньому для кусково-неперервних функцій.
4. Математичний апарат адаптований до реалізації апроксимації тривимірних розподілів мас планети, які з великою вірогідністю можна вважати кусково-неперервними.
5. Досліджені умови рівномірної збіжності. Для збіжності в середньому, яка не гарантує поточної, запропоновані способи її покращення на основі методів Абеля та Чезаро. На конкретному прикладі (наближення одновимірного розподілу мас моделі PREM многочленами Лежандра) показана ефективність приведеної методики.

## РОЗДІЛ 3. ДОСЛІДЖЕННЯ ГРАВІТАЦІЙНОГО ПОЛЯ ПЛАНЕТ ЗА ДОПОМОГОЮ БІОРТОГОНАЛЬНИХ РЯДІВ

### 3.1. Класичне представлення потенціалу притягання планети

Потенціал притягання гравітаційного тіла  $\tau$  визначається наступним чином

$$V = f \int_{\tau} \frac{\delta(Q)}{r(O, P)} d\tau_Q, \quad (3.1)$$

де  $\tau$  – просторове тіло,  $\delta(Q)$  – функція розподілу мас,

$$r(Q, P) = \sqrt{\rho^2 - 2\rho R \cos\psi + R^2} - \text{відстань між точками } (P \text{ і } Q). \quad (3.2)$$

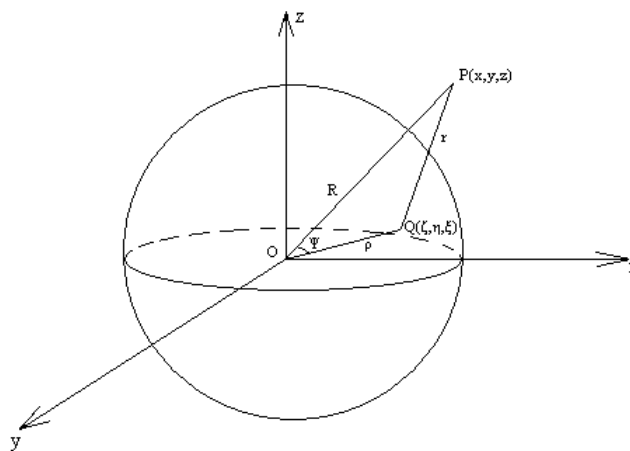


Рис. 3.1. Геометрична інтерпретація визначення радіус-вектора

Формула (3.1) не є конструктивною, тому що навіть при відомих функціях  $\delta$  і форми тіла  $\tau$  визначення значення  $V$  не завжди можливе. Для практичної реалізації величину  $\frac{1}{r}$  потрібно представити сумою добутків деяких функцій  $\varphi(P)$  та,  $\psi(Q)$ . Реалізацією такого підходу є розклад оберненого радіуса  $\frac{1}{r}$  по многочленах Лежандра [11,16]. Для цього визначимо діаметр геометричного тіла  $\tau$  :

$$d_e = \text{diam}\tau = \max \rho(Q), Q \in \tau \quad (3.3)$$

Далі запишемо

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R \sqrt{\left(\frac{\rho}{R}\right)^2 - 2\left(\frac{\rho}{R}\right) \cos\psi + 1}} \quad (3.4)$$

Нехай  $R > d_e$  значить  $\frac{\rho}{R} = t < 1$  і вираз (3.4) можна розкласти в збіжний ряд

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\rho}{R} \right)^n P_n(\cos \psi) \right], \quad (3.5)$$

де коефіцієнти розкладу є многочлени Лежандра, що визначаються так:

$$P_n = \frac{1}{2^n} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n} \quad (3.6)$$

Запишемо декілька членів (3.6) [43]:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Перехід від тілесного кута  $\psi$  до сферичних кутів для поліномів  $P_n(\cos \psi)$  здійснюємо за формулою [16]:

$$P_n(\cos \psi) = P_n(\cos \theta)P_n(\cos \theta') + 2 \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^k(\cos \theta)P_n^k(\cos \theta') \cos k(\lambda - \lambda'), \quad (3.8)$$

де  $\cos \psi = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\lambda - \lambda')$ ,

$$P_n^k(t) = (1-t^2)^{m/2} \frac{d^{n+m}(t^2-1)^n}{dt^{n+m}} - \text{приєднані многочлени Лежандра}, \quad (3.9)$$

перші з яких мають вигляд:

$$\begin{aligned} P_0^0 &= 1, \quad P_1^0 = P_1, \quad P_1^1 = (1-x^2)^{1/2}, \quad P_2^0 = P_2(x), \quad P_2^1 = 3x(1-x^2)^{1/2} \\ P_2^2(x) &= 3(1-x^2), \quad P_3^0(x) = P_3(x), \quad P_3^1(x) = \frac{3}{2}(5x^2-1)(1-x^2)^{1/2}, \\ P_3^2(x) &= 15x(1-x^2), \quad P_3^3(x) = 15(1-x^2)^{3/2}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

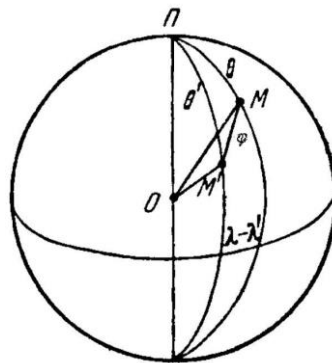


Рис. 3.2. Геометрична інтерпретація параметрів формули (3.8)

Підстановка (3.8) в (3.1) дає вираз

$$V = \frac{fM}{R} \int_{\tau} \delta \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\rho}{R} \right)^n \left[ P_n^0(\cos \theta) P_n^0(\cos \theta') + 2 \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^k(\cos \theta) P_n^k(\cos \theta') \right] \times (\cos k\lambda \cos k\lambda' + \sin k\lambda \sin k\lambda') \right\} d\tau. \quad (3.11)$$

Введемо позначення:

$$M = \int_{\tau} \delta d\tau,$$

$$C_{nk} = \frac{RR}{M} \frac{(n-k)!}{a_e^n (n+k)!} \int_{\tau} \delta \rho^n P_n^k(\cos \theta') \cos k\lambda' d\lambda', \quad (3.12)$$

$$S_{nk} = \frac{RR(n-k)!}{M a_e^n (n+k)!} \int_{\tau} \delta \rho^n P_n^k(\cos \theta') \sin k\lambda' d\lambda',$$

$$RR = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 2 & n \neq 0 \end{cases}.$$

Тоді зовнішній потенціал визначається:

$$V = \frac{fM}{R} \left\{ C_{00} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_e}{R} \right)^n \left[ P_n^0(\cos \theta) C_{n0} + \sum_{k=1}^n P_n^k(\cos \theta) (C_{nk} \cos k\lambda + S_{nk} \sin k\lambda) \right] \right\}, \quad (3.13)$$

де  $a_e = d_e$  - екваторіальний радіус еліпсоїдальної планети.

Системи функцій

$$\left\{ \frac{P_n^k \cos(\theta)}{R^n} \cos k\lambda, \frac{P_n^k(\cos \theta)}{R^n} \sin k\lambda \right\} \quad (3.14)$$

і

$$\left\{ \rho^n P_n^r(\cos \theta') \cos k\lambda, \rho^n P_n^k(\cos \theta') \sin k\lambda \right\} \quad (3.15)$$

є гармонічними, повними і ортогональними відповідно в областях  $R^3 \setminus \tau$  та  $\tau$ . Відповідно вони називаються зовнішніми  $(U_n^k, V_n^k)$  та внутрішніми  $(u_n^k, v_n^k)$  кульовими функціями. Їх призначення геодезії та геофізиці різне: перша широко система використовується для опису зовнішнього гравітаційного поля; друга- для вивчення внутрішньої будови планет.

Для більш ефективної реалізації (3.14) представляють в дещо зміненому вигляді [16]

$$V = \frac{fM}{R} (C_0^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n C_n^k U_n^k + S_n^k V_n^k), \quad (3.16)$$

де

$$C_n^k = \sqrt{\frac{(n+k)!}{RR(n-k)!(2n+1)}} C_{nk}, \quad (3.17)$$

$$S_n^k = \sqrt{\frac{(n+k)!}{RR(n-k)!(2n+1)}} S_{nk}, \quad (3.18)$$

$$V_n^k = \sqrt{\frac{RR(n-k)!}{(n+k)!(2n+1)}} \frac{P_n^k(\cos \theta)}{R^n} k\lambda, \quad (3.19)$$

$$U_n^k = \sqrt{\frac{RR(n-k)!}{(n+k)!(2n+1)}} \frac{P_n^k(\cos \theta) \cos k\lambda}{R^n}. \quad (3.20)$$

Потенціал також можна представити з допомогою комплексних змінних:

$$V = \frac{fM}{R} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n \operatorname{Re}(W_n^k C K_n^k)\right), \quad (3.21)$$

де

$$W_n^k = U_n^k + iV_n^k, \quad C K_n^k = C_n^k - iS_n^k. \quad (3.22)$$

Це дозволяє в багатьох випадках більш компактно проводити перетворення, тим більше, що засоби сучасного програмування дозволяють моделювати комплексні числа без розділення їх на дійсну та уявну частини.

### 3.2. Представлення кульових функцій в прямокутній планетарній системі координат

В задачах супутникової геодезії [1,159] з використанням GPS технологій, в методах побудови наближених моделей розподілу мас виникає необхідність представлення зображення гармонічних функцій як зовнішніх, так і внутрішніх в загальнопланетарній системі координат. При цьому співвідношення для внутрішніх многочленів подаються, в основному, через інтегральні характеристики (степеневі моменти). Слід підкреслити, що це питання поставлено давно. Так, Жонгловичем І.Д. [22,23] знайдені зв'язки між стоксовими постійними та степеневими моментами до  $n \leq 4$ . Для  $n \leq 6$  визначені коефіцієнти зв'язку степеневих моментів і стоксових постійних в роботах [58,60]. Для довільного степеня розкладу  $n$  в статті [65] приведені загальні формули зв'язку стоксових постійних і степеневих моментів густини  $I_{pqs}$ . Відмітимо, що ці формули громіздкі і незручні при їх програмній та приводять



до обчислювальних похибок [43,65]. Декартове зображення зовнішнього потенцілу, що використовується при прогнозуванні орбіт подано в праці [159], що дало можливість вираховувати похідні потенціалу в прямокутній системі [1]. Об'єднуючи дослідження двох представлень, приведемо ще один спосіб такого визначення [110].

Для цього згадаємо, що:

$$\cos \psi = \frac{\zeta x + \eta y + \xi z}{\rho R},$$

$$x = R \sin \theta \cos \lambda, \quad y = R \sin \theta \sin \lambda, \quad z = R \cos \theta,$$

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \lambda \leq 2\pi. \quad (3.23)$$

Обмежуючись декількома доданками, одержуємо:

$$P_0 = 1, \quad P_1 = \cos \psi = \frac{\zeta x + \eta y + \xi z}{\rho R},$$

$$\begin{aligned} P_2(\cos \psi) &= \frac{1}{2}(3 \cos^2 \psi - 1) = \frac{1}{2} \left( \frac{3(\zeta x + \eta y + \xi z)^2}{\rho^2 R^2} - 1 \right) = \frac{1}{2\rho^2 R^2} \\ & * \left[ 3(x^2 \zeta^2 + \eta^2 y^2 + \xi^2 z^2) + 2(\zeta \eta xy + \zeta \xi xz + \eta \xi yz) - (\zeta^2 + \eta^2 + \xi^2)(x^2 + y^2 + z^2) \right] = \\ & \frac{1}{2} \left\{ \frac{x^2(2\zeta^2 - \eta^2 - \xi^2) + y^2(2\eta^2 - \zeta^2 - \xi^2) + z^2(2\xi^2 - \zeta^2 - \eta^2) + 6(\zeta \eta xy + \zeta \xi xz + \eta \xi yz)}{\rho^2 R^2} \right\} \end{aligned}$$

Гравітаційне поле, що описується другим порядком матиме вигляд:

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{fM}{R} \times \\ & \left\{ 1 + \frac{1}{M} \frac{\rho}{R} \int_{\tau} \left( \frac{\zeta x + \eta y + \xi z}{\rho R} \right) + \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{MR^2} \times \right. \\ & \left. \int_{\tau} \left[ \frac{x^2(2\zeta^2 - \eta^2 - \xi^2) + y^2(2\eta^2 - \zeta^2 - \xi^2) + z^2(2\xi^2 - \zeta^2 - \eta^2) + 6(\zeta \eta xy + \zeta \xi xz + \eta \xi yz)}{\rho^2 R^2} \right] d\tau \right\} \\ & = \frac{fM}{R} \left\{ 1 + \frac{1}{MR} \left[ x \int_{\tau} \delta \zeta d\tau + y \int_{\tau} \delta \eta d\tau + \int_{\tau} \delta \xi d\tau \right] + V_2 \right\}, \quad (3.24) \end{aligned}$$

де

$$V_2 = \frac{1}{2R^5} \left[ \begin{aligned} & x^2 \int_{\tau} \delta(2\xi^2 - \eta^2 - \zeta^2) d\tau + y^2 \int_{\tau} \delta(2\eta^2 - \zeta^2 - \xi^2) d\tau + \\ & + z^2 \int_{\tau} \delta(2\zeta^2 - \xi^2 - \eta^2) d\tau + 6xy \int_{\tau} \zeta \eta \delta d\tau + 6xz \int_{\tau} \zeta \xi \delta d\tau + 6yz \int_{\tau} \eta \xi \delta d\tau \end{aligned} \right], \quad (3.25)$$

або в іншій формі:

$$V_2 = \frac{1}{2R^5} \left[ \begin{aligned} &(2z^2 - x^2 - y^2) \int_{\tau} \xi^2 \delta d\tau + (2y^2 - x^2 - y^2) \int_{\tau} \eta^2 \delta d\tau + \\ &+ (2z^2 - x^2 - y^2) \int_{\tau} \delta \zeta^2 d\tau + 6xy \int_{\tau} \xi \eta \delta d\tau + 6xz \int_{\tau} \zeta \xi \delta d\tau + 6yz \int_{\tau} \eta \xi \delta d\tau \end{aligned} \right]. \quad (3.26)$$

Останні два вирази показують, що вигляд зовнішніх і внутрішніх кульових функцій різниться множником  $\frac{1}{R^{2n}}$ . Тому вивід формул здійснюємо для функцій  $U_n^k, V_n^k$ , для  $u_n^k, v_n^k$  покладемо  $R=1$ .

Приступимо до виведення зв'язку, для чого згадаємо співвідношення між декартовими координатами та сферичними, які впливають з рівностей (3.23):

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R},$$

$$\cos \lambda = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \lambda = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (3.27)$$

Тоді

$$(\cos \gamma + i \sin \lambda)^k = \cos k\lambda + i \sin k\lambda = \left( \frac{x + iy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^k = \frac{(x + iy)^k}{(x^2 + y^2)^{k/2}}.$$

Приєднані многочлени Лежандра виражаються формулою [11]:

$$P_n^k(\cos \theta) = \frac{(n-k)!}{2^k} \sum_{m=0}^{(n-k)/2} \frac{(-1)^m \cos^{n-k-2m} \theta \sin^{2m+k} \theta}{2^{2m} m!(m+k)!(n-k-2m)!}. \quad (3.28)$$

Підставляючи (3.21) в (3.22), одержимо

$$P_n^k(\cos \theta) = \frac{(n-k)!}{2^k} \sum_{m=0}^{E(n-k)/2} \frac{(-1)^m z^{n-k-2m} (x^2 + y^2)^{m+k/2}}{R^{n-k-2n} R^{2m+k} 2^{2m} m!(m+k)!(n-k-2m)!}. \quad (3.29)$$

Тоді

$$W_{nk} = \frac{(n-k)!}{2^k} \frac{1}{R^{n+1}} P_n^k(\cos \theta) [\cos k\lambda + i \sin k\lambda] =$$

$$\frac{(n-k)!}{2^k} \frac{1}{R^{n+1}} \sum_{m=0}^{(n-k)/2} \frac{(-1)^m z^{n-k-2m}}{R^n} \frac{(x^2 + y^2)^m (x^2 + y^2)^{k/2}}{2^{2m} m!(m+k)(n-k-2m)!} \frac{(x + iy)^{k/2}}{(x^2 + y^2)^{k/2}}. \quad (3.30)$$

Абсолютно такі ж перетворення приводять до виразу

$$Ck'_{nk} = C'_{nk} + S'_{nk} =$$

$$\frac{(n-k)!}{2^k} \sum_{m=0}^{E(n-k)/2} \frac{(-1)^m}{2^{2m} m!(m+k)!(n-k-2m)!} \int_{\tau} \delta \xi^{n-k-2m} (\zeta^2 + \eta^2)^m (\zeta + i\eta)^k d\tau, \quad (3.31)$$

де  $C'_{nk}, S'_{nk}, U'_{nk}, V'_{nk}$  – величини, пов'язані з кульовими функціями, проте вони взяті тут без відповідних множників. Тому, повертаючись до наших позначень, отримуємо:

$$C_{nk} + iS_{nk} = \frac{RR}{Ma_e^n} \frac{(n-k)!}{2^k} \int_{\tau} \left\{ \sum_{m=0}^{E(n-k)/2} \frac{(-1)^m \xi^{n-k-2m} (\zeta^2 + \eta^2)^m}{2^{2m} m!(m+k)(n-k-2m)!} (\zeta + i\eta)^k \right\} \delta d\tau ,$$

тобто

$$C_{nk} + iS_{nk} = \frac{RR(n+k)!}{Ma_e^n 2^k} \sum_{m=0}^{E(n-k)/2} \frac{(-1)^m \int_{\psi} \xi^{n-k-2m} (\zeta^2 + \eta^2)^m d\tau}{2^{2m} m!(m+k)(n-k-2m)!} . \quad (3.32)$$

Для нормованих стоксових постійних вигляд буде наступний:

$$C_n^k + iS_n^k = \frac{RR}{Ma_e^n 2^k} \sqrt{\frac{(n+k)!}{(n-k)!(2n+1)}} \frac{(n-k)!}{2^k} \sum_{m=0}^{E(n-k)/2} \frac{(-1)^m \int_{\psi} \delta(\xi^{n-k-2m} (\zeta^2 + \eta^2)^m (\zeta + \eta y)^k) d\tau}{2^{2m} m!(m+k)(n-k-2m)!} ,$$

або

$$C_n^k + iS_n^k = \frac{1}{Ma_e^n 2^k} \frac{\sqrt{RR(n-k)!(n+k)!}}{(2n+1)} \frac{1}{2^k} \sum_{m=0}^{E(n-k)/2} \frac{(-1)^m \int_{\psi} \delta(\xi^{n-k-2m} (\zeta^2 + \eta^2)^m (\zeta + \eta y)^k) d\tau}{2^{2m} m!(m+k)(n-k-2m)!} .$$

Для зовнішніх кульових функцій також маємо два випадки:

а)  $W_{nk} = U_{nk} + iV_{nk}$  - ненормовані кульові функції,

$$W_{nk} = \frac{(n-k)!}{2^k} \frac{1}{R^{2n+1}} \sum_{m=0}^{E(n-k)/2} \frac{(-1)^m z^{n-k-2m} (x^2 + y^2)^m}{2^{2m} m!(m+k)(n-k-2m)!} (x + iy)^k ,$$

б)  $W_n^k = U_n^k + iV_n^k$ ,

$$W_n^k = \frac{\sqrt{RR(n+k)!(n-k)!}}{2n+1} \frac{1}{R^{2n+1}} \sum_{m=0}^{E(n-k)/2} \frac{(-1)^m z^{n-k-2m} (x^2 + y^2)^m}{2^{2m} m!(m+k)(n-k-2m)!} (x + iy)^k , \quad (3.33)$$

Перевірку правильності обчислень можна здійснити, використовуючи умову гармонічності поліномів [43,110], а саме:

$$\Delta(W_n^k) \equiv \Delta(W_{nk}) \equiv 0 . \quad (3.34)$$

Для многочленів :

$$W_n^k = \sum_{p+q+s} (\alpha_{pqs} + i\beta_{pqs}) x^p y^q z^s , \quad (3.35)$$

в якому опущені множини  $\frac{1}{R^{2n}}$ , (розглядається випадок внутрішніх кульових умова (3.34) дає:

$$\sum_{p+q+s=n} p(p-1)(\alpha_{p\tau qs} + i\beta_{p\tau qs})x^{p-2}y^qz^s + q(q-1)(\alpha_{pq\tau s} + i\beta_{pq\tau s})x^p y^{q-2}z^s + s(s-1)(\alpha_{pqs\tau} + i\beta_{pqs\tau})x^p y^q z^{s-2} \equiv 0$$

Його розгорнутий запис визначає систему рівнянь:

$$\varepsilon(p)(p+1)(p+2)(\alpha_{p+2qs} + i\beta_{p+2qs}) + \varepsilon(q)(q+1)(q+2)(\alpha_{pq+2s} + i\beta_{pq+2s}) + \varepsilon(s)(s+1)(s+2)(\alpha_{pqs+2} + i\beta_{pqs+2}) = 0,$$

де

$$0 \leq p \leq n-2, \quad 0 \leq q \leq n-2, \quad 0 \leq s \leq n-2,$$

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 2 \\ 0, & t < 2. \end{cases}$$

Для обчислення коефіцієнтів  $\alpha_{pqs}$ ,  $\beta_{pqs}$  проведений числовий експеримент і отримані коефіцієнти, які в роботі [110] приведені для  $n=11, 12$  (для  $n < 4$  вони наведені в [23], при  $6 < n < 10$  в [43,65] , а максимальні величини помилок обчислень приведені табл. 3.1 [110].

Таблиця.3.1

**Максимальні величини обчислення коефіцієнтів  $\alpha_{pqs}$ ,  $\beta_{pqs}$  при стоксових постійних  $N$ -го порядку.**

Стоксова постійна	Контроль	Стоксова постійна	Контроль	Стоксова постійна	Контроль
$C_{10,2}$	3.5E-018	$S_{5,3}$	6.8E-021	$S_{11,8}$	-6.6E-024
$C_{10,1}$	-8.3E-017	$S_{6,4}$	3.4E-021	$S_{11,7}$	1.1E-022
$S_{10,2}$	-1.7E-017	$C_{7,0}$	-2.8E-017	$C_{12,6}$	-1.1E-022
$S_{10,6}$	8.5E-018	$S_{7,4}$	1.4E-020	$C_{12,7}$	-1.1E-022
$S_{10,8}$	-6.6E-024	$C_{8,4}$	-6.8E-021	$S_{12,4}$	-1.1E-019
$S_{10,1}$	-8.3E-017	$C_{8,6}$	1.1E-022	$S_{12,6}$	1.7E-021
$C_{11,2}$	3.5E-018	$C_{8,1}$	-1.4E-017	$C_{9,5}$	1.7E-021
$C_{11,4}$	-1.1E-019	$C_{8,3}$	5.4E-020	$S_{9,6}$	8.5E-022

Продовження табл.3.1					
$C_{11,7}$	-1.1E-022	$S_{8,2}$	-8.7E-019	$S_{9,5}$	4.2E-022
$S_{11,7}$	-3.5E-017	$S_{8,1}$	-1.4E-017	$S_{12,7}$	1.1E-022
$S_{11,4}$	-5.4E-020	$C_{9,0}$	1.7E-016	$S_{12,5}$	1.4E-020
$S_{11,6}$	8.5E-022	$C_{9,6}$	1.1E-022		

Таким чином для  $n=11, 12$  коефіцієнти надійно визначаються за нашими формулами. Проте обчислення стоксових постійних більш високих порядків приводить до значного збільшення похибок. Тому результати обчислень з їх використанням необхідно контролювати.

### 3.3. Аналіз структури стоксових постійних планетарних тіл

Фіксація форми планети у вигляді еліпсоїдального тіла  $\tau$  і представлення функції розподілу мас функцією у вигляді (2), а також декартове представлення стоксових постійних в принципі дозволяють визначати їх. При цьому появляється можливість оцінки відхилення радіального розподілу  $\delta^0(\rho)$  від тривимірного, а фігури - від еліпсоїда, які відображаються в анізотропії гравітаційного поля планети. Так як їх вплив одночасний, то вивчення їх вкладу можна здійснити тільки шляхом моделювання.

#### 3.3.1. Радіальний розподіл мас еліпсоїда $\tau \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$

Використаємо узагальнену сферичну систему координат:

$$\begin{cases} \zeta = a\rho \sin \theta \cos \lambda, & 0 \leq \lambda \leq 2\pi \\ \eta = b\rho \sin \theta \sin \lambda, & 0 \leq \theta \leq \pi \\ \xi = c\rho \cos \theta & 0 \leq \rho \leq 1 \end{cases} \quad (3.36)$$

і підставимо (3.32). В результаті після послідовних перетворень одержимо:

$$C_{nk} + iS_{nk} = \frac{abc(n-k)!}{2^k a_e^n} \sum_{m=0}^{E(n-k)/2} \frac{(-1)^m c^{n-k-2m} \int \delta^0(\rho) \rho^{n+2} d\rho}{2^{2m} m!(m+k)!(n-k-2m)!} \int_0^\pi \cos^{n-k-2m} \theta \sin^{2m+k+1} \theta d\theta \times$$

$$\int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 \lambda + b^2 \sin^2 \lambda)^m (a \cos \lambda + ib \sin \lambda)^k d\lambda \quad ,$$

або

$$C_{nk} + iS_{nk} = \frac{(n-k)!}{2^k} \sum_{m=0}^{E(n-k)/2} \frac{(-1)^m (n-k-2m-1)!! (2m+k)!! \gamma^{n-k-2m}}{2^{2m} m!(m+k)!(n-k-2m)!(n+1)!!} \times \int_0^{2\pi} (\alpha^2 \cos^2 \lambda + \beta^2 \sin^2 \lambda)^m (\alpha \cos \lambda + i\beta \sin \lambda)^k d\lambda.$$

і остаточно:

$$C_{nk} + iS_{nk} = 2abc \frac{(n-k)!}{2^k (n+1)!!} \int_0^1 \delta^0(\rho) \rho^{n+2} d\rho \sum_{m=0}^{E(n-k)/2} \frac{(-1)^m (2m+k)!! \gamma^{n-k-2m}}{2^{2m} m!(m+k)!(n-k-2m)!} \int_0^{2\pi} (\alpha^2 \cos^2 \lambda + \beta^2 \sin^2 \lambda)^m (\alpha \cos \lambda + i\beta \sin \lambda)^k d\lambda,$$

де

$$\gamma = \frac{c}{a_e}, \quad \alpha = \frac{a}{a_e}, \quad \beta = \frac{b}{a_e}$$

Для еліпсоїда обертання ( $a=b$ ) при  $k \neq 0$  для інтегралу виконується умова:

$$\int_0^{2\pi} a^{2m+k} (\cos \lambda + i \sin \lambda)^k d\lambda = \int_0^{2\pi} a^{2m+k} e^{ik\lambda} d\lambda = 0.$$

Тому стоксові постійні, за винятком  $C_{2n0}$ , є нульовими, а її обчислюємо за формулою:

$$C_{2n0} = \frac{4abc(n)!}{M(n+1)!!} \int_0^1 \delta^0(\rho) \rho^{n+2} d\rho \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m 2m!! (\gamma^2)^{n-m} (\alpha)^m}{2^{2m} m! m! (n-2m)!!} = \frac{3Ve}{M} \frac{n!}{(n+1)!!} I_{2n+2} \quad (3.37)$$

$$\times \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m (\gamma^2)^{n-m} (\alpha)^m}{2^{2m} (m!) 2^{n/2-m} (n-m)!} = \frac{3Ve}{M 2^k} \frac{n!}{(n+1)!!} I_{2n+2} (\gamma^2 - \alpha^2)^n,$$

З останньої рівності можна визначити величини:

$$I_{2n+2} = \frac{((n+1) \delta_c C_{2n0})}{2(\gamma^2 - \alpha^2)^n}, \quad (3.38)$$

які можна трактувати як степеневі моменти радіального розподілу. Якщо розподіл є одновимірний, а форма тіла строго-двохосевий еліпсоїд, то густину можна було представити сумою многочленів Лежандра парних степеней, коефіцієнти розкладу яких – лінійні комбінації величин  $I_{2n}$

Продовжуючи функцію  $\delta(\rho)$  на проміжок  $[-1;1]$  парним чином, її можна записати:

$$\delta(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} d_{2n} P_{2n}(\rho), \quad (3.39)$$

де  $d_{2n} = (4n+1) \int_0^1 \delta(\rho) P_{2n}(\rho) d\rho$ .

Для фігури, представленої еліпсоїдом обертання і стоксових постійних за формулою (3.38), знаходимо моменти  $I_{2n}$  (за винятком  $I_0$ ), контроль за правильністю обчислень здійснюємо з використанням нерівності:

$$\frac{\delta_{min}}{(2n+1)\delta_c} \leq I_{2n} \leq \frac{\delta_{max}}{\delta_c(2n+1)}, \quad (3.40)$$

де

$\delta_{min}$ ,  $\delta_{max}$  - мінімальне та максимальне значення радіального розподілу.

Степеневий момент  $I_0$  можна знайти з відомого значення густини на поверхні

$$\frac{\delta_p}{\delta_c} = \sum_{n=0}^{\infty} d_{2n} P_{2n}(1) = \sum_{n=0}^{\infty} d_{2n}.$$

Таблиця 3.1.

**Дані для визначення радіального розподілу та його значення в центрі мас**

Планета	$\alpha 10^{-3}$	$C_{20} 10^{-3}$	$C_{40} 10^{-6}$	$\delta_p (g/cm^3)$	$\delta_c (g/cm^3)$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
Земля	3.3522	-1.082	1.1617	5.514	2.67	9.78	12.455	-8.819
Марс	5.23	-0.8746	0.61	3.94	2.7	5.8	39.43	94.44
Місяць	0.39	-0.9087	3.2151	3.34	3.08	3.8	-9.554	6.54e+10

Проілюструємо обчислення на прикладі Землі, Марса та Місяця, використовуючи при цьому формулу (3.39) для Землі при  $n=1,2$ , що не суперечить реальній картині. Для Марса та Місяця правдоподібно значення такого розподілу можливе тільки для  $n=1$ . Це можна пояснити тим, що планета Земля достатньо добре вивчена, а тому її параметри, як геометричні, так і динамічні, є добре узгодженими. Несумісність розкладу для більш високих

порядків для всіх планет можна пояснити відхиленням тіла від еліпсоїдальної форми, а також тривимірністю розподілу мас.

Продовжимо дослідження. При  $a \neq b$  вже не всі стоксові постійні нульові (при  $\kappa$ - парному, або коли  $\delta$ - функція широти ). Обчислимо значення виразу:

$$\int_0^{2\pi} \left[ a^2 \cos^2 \lambda + b^2 \sin^2 \lambda \right]^m (a \cos \lambda + ib \sin \lambda)^{2k} d\lambda,$$

розклавши підінтегральні функції в біноми:

$$(a \cos \lambda + ib \sin \lambda)^{2k} = (2k)! \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j (a \cos \lambda)^{2k-2j} (b \sin \lambda)^{2j}}{2j!(2k-2j)!} + i \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j (a \cos \lambda)^{2k-2j-1} (b \sin \lambda)^{2j+1}}{(2j+1)!(2k-2j-1)!},$$

та

$$(a^2 + (b^2 - a^2) \cos^2 \lambda)^m = m! \sum_{l=0}^m \frac{(a^2 - b^2)^l b^{2m-2l} \cos^{2l} \lambda}{l!(m-l)!}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} (2k)! m! \int_0^{2\pi} \sum_{i=0}^m \frac{(b^2 - a^2)^i a^{2(m-i)}}{i!(m-i)!} \sum_{j=0}^k \frac{a^{2j} b^{2(k-j)}}{2j!(2k-2j)!} \cos^{2l+2j} \lambda \sin^{2k-2j} \lambda d\lambda = \\ (2k)! m! \sum_{i=0}^m \frac{(b^2 - a^2)^i a^{2(m-i)}}{i!(m-i)!} \sum_{j=0}^k \frac{a^{2j} b^{2(k-j)}}{(2j)!(2k-2j)!} \frac{(2j+2i-1)!!(2k-2j-1)!!}{(2k+2i+1)!!} = (3.41) \\ (2k)! m! \sum_{i=0}^m \frac{(b^2 - a^2)^i a^{2(m-i)}}{i!(m-i)!} \sum_{j=0}^k \frac{a^{2j} b^{2(k-j)} (2j+2i-1)!! 2\pi}{2j! 2^{k-j} (k-j)!(2k+2i+1)!!} \end{aligned}$$

звідси для радіального розподілу мас(в тому числі і однорідного)

$$\begin{aligned} C_{2n2k}^* = \frac{(n-k)!}{2^k \delta_c a_e^{2n}} \sum_{m=0}^{E(n-k)/2} \frac{(-1)^m (2m+k)!!(2k)! c^{n-k-2m}}{2^{2m} (m+k)!(n-k-m)! 2^{n-k-m} (2n+1)!!} \\ \sum_{i=0}^m \frac{(b^2 - a^2)^i a^{2(m-i)}}{i!(m-i)!} \sum_{j=0}^k \frac{a^{2j} b^{2(k-j)} (2j+2i-1)!!}{2j! 2^{k-j} (k-j)!(2k+2i+1)!!} I_{2n+2} \end{aligned}$$

або остаточно:

$$\begin{aligned} C_{2n2k}^* = \frac{3V_e (n-k)!}{2^k \delta_c} \sum_{m=0}^{E(n-k)/2} \frac{(-1)^m (2m+k)!!(2k)! \gamma^{n-k-2m}}{2^{2m} (m+k)!(n-k-m)! 2^{n-k-m} (2n+1)!!} \\ \sum_{i=0}^m \frac{(\beta^2 - \alpha^2)^i \alpha^{2(m-i)}}{i!(m-i)!} \sum_{j=0}^k \frac{\alpha^{2j} \beta^{2(k-j)} (2j+2i-1)!!}{2j! 2^{k-j} (k-j)!(2k+2i+1)!!} I_{2n+2}. \end{aligned} \quad (3.42)$$



Таким чином в даному випадку стоксові постійні парних степеней навіть однорідної планети відмінні від нуля.

### 3.3.2. Випадок функції двох змінних $\delta = \delta(\rho, \theta)$ відносного радіуса та широти

Формула (3.32) для даного випадку прийме наступний вигляд:

$$C_{nk} + iS_{nk} = \frac{abc(n-k)!}{2^k a_e^n} \sum_{m=0}^{E(n-k)/2} \frac{(-1)^m c^{n-k-2m} \int_0^1 \int_0^\pi \delta(\rho, \theta) \cos^{n-k-2m} \theta \sin^{2m+k+1} \theta d\theta \rho^2 d\rho}{2^{2m} m!(m+k)!(n-k-2m)!} \quad (3.43)$$

$$\sum_{i=0}^m \frac{(b^2 - a^2)^i a^{2(m-i)}}{i!(m-i)!} \sum_{j=0}^k \frac{a^{2j} b^{2(k-j)} (2j+2i-1)!! 2\pi}{2j! 2^{k-j} (k-j)!(2k+2i+1)!!}$$

Якщо розподіл мас представляється добутком двох виразів  $\delta(\rho, \theta) = \delta_1(\rho) \delta_2(\theta)$ , то співвідношення (3.43) перетвориться

$$C_{nk} + iS_{nk} = \frac{3}{2} V_e (n-k)! \sum_{m=0}^{E(n-k)/2} \frac{(-1)^m c^{n-k-2m} \int_0^1 \delta_1(\rho) \rho^{n+2} d\rho \int_0^\pi \delta_2(\theta) \cos^{n-k-2m} \theta \sin^{2m+k+1} \theta d\theta \rho^2 d\rho}{2^{2m} m!(m+k)!(n-k-2m)!},$$

$$\sum_{i=0}^m \frac{(b^2 - a^2)^i a^{2(m-i)}}{i!(m-i)!} \sum_{j=0}^k \frac{a^{2j} b^{2(k-j)} (2j+2i-1)!!}{2j! 2^{k-j} (k-j)!(2k+2i+1)!!}$$

звідки випливає, що стоксові величини  $C_{n2k} \neq 0$ , а значить функції  $\delta_1(\rho), \delta_2(\theta)$  можна частково зобразити многочленами Лежандра, наприклад, таким чином:

$$\delta(\rho, \theta) = r_{00} + \rho \left[ \sum_{n=1}^{\infty} P_n(2\rho^2 - 1) \sum_{m=0}^{n-1} r_{nk} P_m(\cos \theta) + \sum_{n=1}^{\infty} P_n(2\rho^2 - 1) \sum_{m=0}^{n-1} r_{nk}^1 P_m(\cos \theta) \right]. \quad (3.44)$$

В цьому випадку перший доданок враховує стоксові постійні парних степеней  $C_{2n2k}$ , а другий - непарні  $C_{2n+12k}$ , коефіцієнти розкладу  $r_{nk}, r_{nk}^1$  за цими даними визначаються однозначно. Так як параметри трьохосевого еліпсоїда для планет визначаються ненадійно, то тут не проводились числові експерименти. Проте в випадку точного (або близького до нього) їх подання знайдені формули можуть виявитись корисними для апроксимації функції розподілу мас.

### 3.3.3. Випадок тривимірного розподілу мас

Розглянемо найбільш загальний випадок, коли густина зображується рядом

$$\delta(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{t=p+q+s=0}^{\infty} b_{pqs} W_{pqs}(\xi, \eta, \zeta). \quad (3.45)$$

Підставимо його в (3.32) :

$$C_{nk} + iS_{nk} = \frac{RR(n-k)!}{2^k a_e^n M} \sum_{m=0}^{E(n-k)/2} \frac{(-1)^m}{2^m m!(m+k)!(n-k-2m)!} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{b_{pqs}}{2^t p!q!s!} \quad (3.46)$$

$$\times \int_{\tau} \zeta^{-k-2m} (\xi^2 + \eta^2)^m (\xi + i\eta)^k \frac{\partial^x}{\partial \xi^p \partial \eta^q \partial \zeta^s} (\rho^2 - 1)^t d\tau.$$

Обчислимо другий множник

$$\int_{\tau} \zeta^{-k-2m} (\xi^2 + \eta^2)^m (\xi + i\eta)^k \frac{\partial^x}{\partial \xi^p \partial \eta^q \partial \zeta^s} (\rho^2 - 1)^t d\tau =$$

$$\sum_{r=0}^m \int_{\tau} \frac{\partial^t}{\partial \xi^p \partial \eta^q \partial \zeta^s} (\rho^2 - 1)^t \frac{\zeta^{-k-2m} m!}{r!(m-r)} \eta^{2r} \xi^{2m-2r} \sum_{j=0}^r \frac{k!}{j!(r-j)!} \xi^{k-j} \eta^j (i)^j d\tau =$$

$$\sum_{r=0}^m \sum_{j=0}^k \frac{m!k!}{r!(m-r)j!(r-j)!} \int_{\tau} \frac{\partial^t}{\partial \xi^p \partial \eta^q \partial \zeta^s} (\rho^2 - 1)^t \zeta^{n-k-2m} \eta^{2r+j} \xi^{2m+k-2r-j} d\tau =$$

$$\sum_{r=0}^m \sum_{j=0}^k \frac{m!k!(n-k-2m)!(2r+j)!(2m+k-2r-j)!(i)^j \int_{\tau} (\rho^2 - 1)^t \zeta^{n-k-2m-s} \eta^{2r+j-q} \xi^{2m+k-2r-j-p} d\tau}{r!(m-r)j!(r-j)!(n-k-2m-s)!(2r+j-q)!(2m+k-2r-j-p)!}.$$

Застосовуючи формулу для обчислення інтегралів з додатку (формула 5), одержимо

$$\sum_{r=0}^m \sum_{j=0}^k \frac{m!k!(n-k-2m)!(2r+j)!(2m+k-2r-j)!(i)^j 2^t t!}{r!(m-r)j!(r-j)!(n-k-2m-s)!(2r+j-q)!(2m+k-2r-j-p)!}$$

$$\frac{(n+k-2m-s-1)!!(2r+j-1)!!(r+2m-2r-j)!!(-1)^{j/2} c^{n-k-2m-s} b^{2r+j-q} a^{2m+k-2r-j-p}}{(2t+n-t+3)!!} = \quad (3.47)$$

$$\sum_{r=0}^m \sum_{j=0}^k \frac{m!k!(n-k-2m)!(2r+j)!(2m+k-2r-j)!(i)^j 2^t t!}{r!(m-r)j!(r-j)!(n-k-2m-s)!!(2r+j-q)!!(2m+k-2r-j-p)!!}$$

$$\frac{(-1)^{j/2} c^{n-k-2m-s} b^{2r+j-q} a^{2m+k-2r-j-p}}{(t+n+3)!!}.$$

Підставляючи вираз (3.47) в формулу (3.46) остаточно одержимо:

$$C_{nk} + iS_{nk} = 3V_e \frac{RR(n-k)!}{2^k} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{b_{pqs}}{2^t a^p b^q c^s p!q!s!} \sum_{m=0}^{E(n-k)/2} \frac{(-1)^m}{(m+k)!}$$

$$\sum_{r=0}^m \sum_{j=0}^k \frac{m!k!(n-k-2m)!(2r+j)!(2m+k-2r-j)!(i)^j 2^t t! (-1)^{j/2} \alpha^{n-k-2m} \beta^{2r+j} \gamma^{2m+k-2r-j}}{r!(m-r)j!(r-j)!(n-k-2m-s)!!(2r+j-q)!!(2m+k-2r-j-p)!!(t+n+3)!!}. \quad (3.48)$$

Розглянемо співвідношення більш детально . Насамперед при  $t > n$  всі члени суми пропадають (маємо похідні  $t$ -го порядку від многочленів  $n$ -го порядку) ,

при  $t=n$  коефіцієнти розкладу  $b_{pqs}$  записується в тій же лінійній комбінації, що і відповідних кульових функціях.

Дійсно, із співвідношення

$$C_{nk} + iS_{nk} = \sum_{p+q+s=N} (\alpha_{pqs} + i\beta_{pqs}) I_{pqs} \quad (4.49)$$

при  $p+q+s=t=m+n+k$  одержуємо

$$\begin{aligned} C_{nk} + iS_{nk} &= \frac{3}{a^n \delta_c} \sum_{p+q+s=n} (\alpha_{pqs} + i\beta_{pqs}) \int_{\tau} \xi^p \eta^q \zeta^s W_{mnk}(\xi, \mu, \zeta) d\tau \\ &= \frac{3}{a^n \delta_c} \sum_{p+q+s=N} (\alpha_{pqs} + i\beta_{pqs}) \int_{\tau} \xi^p \eta^q \zeta^s \frac{\partial^t}{\partial \xi^p \partial \eta^q \partial \zeta^s} (\rho^2 - 1)^t \frac{b_{pqs}}{2^t p! q! s!} d\tau \\ &= \frac{3}{a^n \delta_c} \sum_{p+q+s=n} (\alpha_{pqs} + i\beta_{pqs}) \frac{b_{pqs} p! q! s!}{2^t p! q! s!} \int_0^1 (\rho^2 - 1)^n \rho^2 d\rho \\ &= \frac{3}{a^n \delta_c} \sum_{p+q+s=N} (\alpha_{pqs} + i\beta_{pqs}) \frac{b_{pqs} N!}{(2N+3)!!} . \end{aligned}$$

Позначимо :

$$C_{nk}^{**} + iS_{nk}^{**} = \frac{3N!}{(2N+3)!! \delta_c} \sum_{p+q+s=n} (\alpha_{pqs} + i\beta_{pqs}) \frac{b_{pqs}}{a^n} , \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} C_{nk}^* + iS_{nk}^* &= \frac{3RR(n-k)!}{\delta_c 2^k} \sum_{m=0}^{(n-k)/2} \frac{(-1)^m \gamma^{n-k-2m}}{2^{2m} (m+k)! (n-k-2m-s)!} \sum_{t=0}^{n-2} \frac{b_{pqs} t!}{a^p b^q c^s p! q! s! (t+n+3)!!} \\ &\sum_{l=0} \frac{(-1)^{j/2} i^{\text{odd}(j)} (n-t+2)! \alpha^{2m+k-l} \beta^{l-s}}{i!(m-i)! j!(k-j)! l!(l-q)!! l!! (2m+k-l-p)!! (n-t+l)!!} . \end{aligned} \quad (3.51)$$

Тоді вираз (3.48) можна записати

$$\begin{aligned} C_{nk} + iS_{nk} &= \frac{3N!}{(2N+3)!!} \sum_{p+q+s=n} (\alpha_{pqs} + i\beta_{pqs}) \frac{b_{pqs}}{a^n} + C_{n-1k}^* + iS_{n-1k}^* = \\ &C_{nk}^{**} + iS_{nk}^{**} + C_{nk}^* + iS_{nk}^* \end{aligned} \quad (3.52)$$

При цьому величини  $C_{nk}^*, S_{nk}^*$ , назовемо модельними стоксовими постійними  $n$ -го порядку [99]. Визначимо структуру цих величин, для чого розпишемо детально деякі з них, наприклад,

$$\begin{aligned} C_{20} &= \frac{1}{Ma_1^2} \int_{\tau} \delta \left( \zeta^2 - \frac{1}{2} (\xi^2 + \eta^2) \right) d\tau = \\ &= \frac{1}{Ma_e^2} \sum_{t=0}^2 \frac{b_{pqs}}{2^t p! q! s!} \int_{\tau} \frac{\partial^t}{\partial \xi^p \partial \eta^q \partial \zeta^s} (\rho^2 - 1)^l \left( \zeta^2 - \frac{1}{2} (\xi^2 + \eta^2) \right) d\tau \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\delta_c a_c^2} \left\{ b_{000} \int_{\tau} \left[ \zeta^2 - \frac{1}{2} (\xi^2 + \eta^2) \right] d\tau + \frac{2!}{2^2 2!} \left( b_{002} - \frac{1}{2} (b_{200} + b_{020}) \right) \frac{2^2 2!}{5!! a^2} \right\}$$

$$C_{20} = \frac{2}{5a_e^2} \left( b_{002} - \frac{1}{2} (b_{200} + b_{020}) \right) + \frac{b_{000}}{\delta_c} \left( \gamma^2 - \frac{1}{2} (\alpha^2 + \beta^2) \right)$$

Так само вирахуємо  $C_{40}$ :

$$C_{40} = \frac{2}{Ma_e^4} \left\{ \int_{\tau} \delta \left( \zeta^4 - 3\zeta^2 (\xi^2 + \eta^2) + \frac{3}{8} (\xi^2 + \eta^2)^2 \right) d\tau + \right\}$$

$$\frac{1 \times 2^4 4! 4!}{2^4 4! (11)!!} \left[ b_{004} - 3(b_{022} + b_{202}) + \frac{3}{8} (b_{400} + b_{040} + 2b_{220}) \right] .$$

Звідки

$$C_{40} = \frac{3}{\delta_c} u_{40} b_{000} + \frac{3}{a^2 2\delta_c} u_{20} \left( b_{002} - \frac{1}{2} (b_{200} + b_{020}) \right) + 3u_{22} \left( \frac{b_{200} - b_{020}}{4a^2} \right) ,$$

де

$$u_{2n2k} = \int_{\tau} U_{2n2k} d\tau .$$

Таким чином, можна сформулювати гіпотезу про специфічність вирахованих величин  $C_{nk}^*, S_{nk}^*$ : вони є сумою коефіцієнтів  $b_{pqs}$  і геометричних характеристик  $\alpha, \beta, \gamma$ , кожна з яких є їх такою ж лінійною комбінацією як і гармонічних функціях, а саме:

$$C_{nk}^* + iS_{nk}^* = C_{nk} + iS_{nk} = \delta_c \sum_{\tau=0}^{n/2} \sum C_{n-2\tau 2j}^* u_{2\tau 2j} . \quad (3.53)$$

Загальні формули вивести важко, але і не потрібно в міру подальших міркувань: формула (3.52) справедлива для довільних значень  $b_{pqs}$ , яких більше ніж рівностей (3.52). Тому коефіцієнти  $b_{pqs}$  беремо нульовими, за винятком  $b_{k-0n-k}$ ,  $b_{k-1,1n-k}$ , тоді рівність (3.52) набуде вигляду:

$$C_{nk} - C_{nk}^* = \frac{RR(n-k)!}{2^k (n-k)! k!} b_{k0n-k} , \quad S_{nk} - S_{nk}^* = \frac{RR(n-k)! k}{2^k (n-k)!} b_{k-1,1n-k} ,$$

звідки

$$b_{k,0n-k} = \frac{\delta_c (C_{nk} - C_{nk}^*) (2n+3)!! 2^k}{3 n! RR} , \quad (3.54)$$

$$b_{k-1,1n-k} = \frac{\delta_c (S_{nk} - S_{nk}^*) (2n+3)!! 2^k}{3 kn! RR} . \quad (3.55)$$

Приведемо алгоритм дослідження стоксових постійних:

1. Задаємо параметри планетарного еліпсоїда і параметри його гравітаційного поля – стоксові постійні
2. Фіксуємо порядок апроксимації, після чого визначаємо коефіцієнти по формулах (3.54), (3.55)
3. Визначаємо модельні стоксові постійні  $C_{mk}^*, S_{mk}^*$   $m$ -их порядків для  $m < n$ , які є нульовими, коли  $m > n$ .
4. Порівняння величин  $C_{nk}, S_{nk}$  та  $C_{nk}^*, S_{nk}^*$ , дає оцінку наближення модельного розподілу мас з реальним .
5. Збільшуємо  $n$  на одиницю і знову повторюємо даний алгоритм до встановленого порядку апроксимації  $N_k$
6. Після визначення всіх коефіцієнтів  $b_{pqs}$  ( $p + q + s \leq N_k$ ) та повторної підстановки їх в (3.32) і часткового інтегрування за змінними  $\theta, \lambda$  для кожної із стоксових постійних отримуємо функції  $f_{nk}(\rho)$ , які можна до певної міри трактувати як усереднення густини по широті і довготі, а тому їх аналіз повинен давати якісну характеристику поведінки функції розподілу мас по глибині.

### **3.4. Використання біртогональних рядів для представлення потенціалу планети. Системи неортогональних гармонійних функцій.**

Використання гравітаційного поля планет, зокрема, Землі для вивчення їх внутрішньої будови вимагає нових підходів до його визначення. Дійсно, розклад за сферичними зображеннями, на сьогодні, досягає степені вище за тисячу [184], очевидно, несе масу нової інформації. Проте, таке представлення значно збільшує час і похибки обчислень, які можуть бути співвимірні з даними спостережень або навіть перевищувати їх. Крім того, збіжність в приповерхневих областях є проблематичною та навіть за можливої розбіжності таких представлень. Нижче пропонується система гармонійних функцій [101,124], яка враховує внутрішню структуру і є збіжною зокрема і на поверхні

еліпсоїда, а тому дозволяє вивчати детальніше тонкі особливості структури будови планет. Такі розклади є громіздкими, проте для менших степенів дають чіткішу картину, тим більше, що при переході через поверхню планети зберігається неперервність зображення, що дає можливість обчислювати один з варіантів внутрішнього потенціала, який узгоджений з зовнішнім, тобто, це є свого роду його аналітичне продовження.

Відомо, що потенціал планети  $V$  визначається розподілом мас  $\delta(x, y, z)$ , яка є кусково-неперервною функцією та для еліпсоїдальної планети може бути розвинена в ряд [63,64,98]

$$\delta(x, y, z) = \sum_{m+n+k=0}^{\infty} b_{mnk} W_{mnk}(x, y, z), \quad (3.56)$$

$$b_{mnk} = \int_{\tau} \omega_{mnk} \delta d\tau / \int_{\tau} \omega_{mnk} \cdot W_{mnk} d\tau. \quad (3.57)$$

де  $\{\omega_{mnk}\}, \{W_{mnk}\}$  - дві біортогональні системи многочленів,

Збіжність у середньому [101] для (3.56) гарантує рівномірну збіжність ряду [97]:

$$f \int_{\tau} \frac{\delta}{r} d\tau = f \sum_{m+n+k=0}^{\infty} b_{mnk} \int_{\tau} \frac{W_{mnk}}{r} d\tau = f \sum_{m+n+k=0}^{\infty} b_{mnk} u_{mnk}. \quad (3.58)$$

Дійсно, розглянемо наступний вираз:

$$f \left[ \int_{\tau} \frac{\delta}{r} d\tau - \sum_{m+n+k=0}^N b_{mnk} \int_{\tau} \frac{W_{mnk}}{r} d\tau \right] = f \left[ \int_{\tau} \frac{1}{r} \left( \delta - \sum_{m+n+k=0}^N b_{mnk} W_{mnk} \right) d\tau \right].$$

На основі нерівності Буняковського-Коші одержуємо наступну оцінку:

$$f \left[ \int_{\tau} \frac{1}{r} \left( \delta - \sum_{m+n+k=0}^N b_{mnk} W_{mnk} \right) d\tau \right]^2 \leq f \int_{\tau} \frac{1}{r^2} d\tau \int_{\tau} \left( \delta - \sum_{m+n+k=0}^N b_{mnk} W_{mnk} \right)^2 d\tau$$

Для виразу  $\int_{\tau} \frac{1}{r^2} d\tau$  має місце оцінка (функція неперервна і регулярна на нескінченості):

$$\int_{\tau} \frac{1}{r^2} d\tau \leq M.$$

Тому з співвідношення (2.71) випливає наше твердження. Довільну кусково-неперервну функцію в еліпсоїді  $\tau$  можна зобразити у вигляді (3.56), а її потенціал-виразом (3.58), оскільки потенціал планети визначається розподілом

мас, або в більш загальному вигляді для еліпсоїдальної планети його можна представити також співвідношенням (2.43).

Отже, систему виразів  $\left\{ \int_{\tau} \frac{W_{mnk}}{r} d\tau \right\}$  можна вважати повною, кожний з її

членів як об'ємний потенціал, для  $P \in R \setminus \tau$  задовольняє рівняння Лапласа

$$\Delta \left\{ \int_{\tau} \frac{W_{mnk}}{r} d\tau \right\} \equiv 0,$$

а тому представляє сукупність гармонічних функцій [124].

Перевага такого зображення потенціалу на відміну від ряду за кульовими функціями (для сфери вирази тотожні [107,145]) полягає в його гарантованій збіжності у всьому просторі, в тому числі і в середині небесного тіла.

Встановимо кількість лінійно незалежних функцій  $u_{mnk}$ ; для фіксованого  $N+2$  їх загальна кількість  $0.5 \cdot (N+3) \cdot (N+4)$ , частина з них зв'язані рівнянням Лапласа. Цю залежність можна встановити наступними міркуваннями: розглянемо вираз

$$\frac{\partial^N}{\partial x^m \partial y^n \partial z^k} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right)^{N+2},$$

потенціал якого є [103]

$$\int_{\tau} \frac{\frac{\partial^N}{\partial x^m \partial y^n \partial z^k} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right)^{N+2}}{r} d\tau.$$

Підстановка його в рівняння Лапласа дає рівності:

$$(k+1)(k+2) \int_{\tau} \frac{W_{m,n,k+2}}{r} d\tau + (m+1)(m+2) \int_{\tau} \frac{W_{m+2,n,k}}{r} d\tau + (n+1)(n+2) \int_{\tau} \frac{W_{m,n+2,k}}{r} d\tau \equiv 0,$$

$(m+n+k = N),$

кількість яких є такою:  $0.5 \cdot (N+1)(N+2)$ .

Тому число лінійно незалежних потенціалів визначається так:

$$\frac{(N+3)(N+4)}{2} - \frac{(N+1)(N+2)}{2} = 2(N+2)+1,$$

тобто, їх така ж кількість, що і сферичних функцій.

Візьмемо за основу систему функцій:

$$\{u_{2i,0,n-2i}\}, \{u_{2i+1,1,n-2i-2}\}, \{u_{2i+1,0,n-2i-1}\}, \{u_{2i,1,n-2i-1}\}, \quad (3.59)$$

а решта запишемо через рекурентні співвідношення:

$$\begin{aligned} u_{2i-2j,2j,n-2i} &= -\frac{(i-j+1)(2i-2j+1)}{j(2j-j)} u_{2i-2j+2,2j-2,n-2i} - \frac{(n-2i-2j+1)(n-2i-2j+2)}{2j(2j-1)} u_{2i-2j,2j-2,n-2i+2}, \\ u_{2i-2j-1,2j+1,n-2i} &= -\left[ \frac{(2i-2j+1)(i-j)}{(2j+1)j} u_{2i-2j+1,2j-1,n-2i} + \frac{(n-2i+2)(n-2i+1)}{2j(2j+1)} u_{2i-2j-1,2j-1,n-2i+2} \right], \\ u_{2i+1-2j,2j,n-2i-1} &= -\frac{(2i-2j+3)(i-j+2)}{j(2j-1)} u_{2i-2j+3,2j-2,n-2i-1} - \frac{(n-2i+1)(n-2i)}{2j(2j-1)} u_{2i-2j+1,2j-2,n-2i+1}, \\ u_{2i-2j,2j+1,n-2i-1} &= -\frac{(2i-j+1)(i-j+2)}{j(2j+1)} u_{2i-2j+2,2j-1,n-2i-1} - \frac{(n-2i+1)(n-2i)}{2j(2j+1)} u_{2i-2j,2j-1,n-2i+1}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Для обчислення функцій  $u_{mnk}$  використаємо рівність

$$u_{mnk} = \int_{\tau} \frac{W_{mnk}}{r} d\tau = \frac{1}{2^N m!n!k!} \int_{\tau} \frac{\partial^N}{\partial \xi^m \partial \eta^n \partial \zeta^k} \frac{(\rho^2 - 1)^N}{r} d\tau \quad (3.61)$$

та скористаємось тотожністю [73] на поверхні  $\tau$   $\delta = 0$ )

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \frac{\partial \delta}{r} d\tau \equiv - \int_{\tau} \frac{\partial \delta}{\partial \xi} \frac{1}{r} d\tau. \quad (3.62)$$

Застосувавши її  $N$ - разів до формули (3.60) одержимо

$$u_{mnk} = \int_{\tau} \frac{W_{mnk}}{r} d\tau = \frac{1}{2^N m!n!k!} \frac{\partial^N}{\partial x^m \partial y^n \partial z^k} \int_{\tau} \frac{(\rho^2 - 1)^N}{r} d\tau. \quad (3.63)$$

Потенціал підінтегральної функції [73,121] визначається за формулою

$$u = \frac{\pi abc (-1)^N}{N+1} \int_{0,\xi}^{\infty} \left( \frac{x^2}{(a^2+u)} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} - 1 \right)^{N+1} \frac{du}{Q(u)}, \quad (3.64)$$

диференціювання якої приходить до виразу:

$$u_{mnk} = \frac{3N! a^m b^n c^k V_e}{4(2^N) m!n!k!} \sum_{t=0}^{n+1} \frac{(-1)^t (2t_1-1)!!(2t_2-1)!!(2t_3-1)!!}{2^t (n+1-t)!} \left(\frac{x}{a}\right)^{2t_1-m} \left(\frac{y}{b}\right)^{2t_2-n} \left(\frac{z}{c}\right)^{2t_1-k} M_{t_1 t_2 t_3},$$

де

$$M_{t_1 t_2 t_3} = a^{2t_1+1} b^{2t_2+1} c^{2t_3+1} \int_{0,\zeta}^{\infty} \frac{du}{(a^2+u)^{t_1} (b^2+u)^{t_2} (c^2+u)^{t_3} Q(u)} \quad (3.65)$$

Схема обчислення величин (3.65) буде приведена нижче, а визначення коефіцієнтів розкладу  $b_{mnk}$  можна здійснити різними способами. Якщо відома функція розподілу  $\delta$ , то їх можна просто вирахувати. В інших випадках потрібно використовувати існуючу інформацію, наприклад, набір стоксових



постійних, з яких знаходиться лише частина  $b_{mk}$ , які отримуємо з співвідношень (3.54), (3.55). Вони визначають зовнішнє гравітаційне поле однозначно, при цьому несуть іншу інформацію, оскільки входять у стоксові постійні вищих порядків. У зв'язку з цим має зміст побудови гравітаційного поля системою наведених функцій, хоча б із теоретичних міркувань.

### 3.5. Еліпсоїдальна та декартова системи координат і зв'язок між ними

Нехай маємо планетарний еліпсоїд  $\tau$ , в якому  $a > b > c$ .

Розглянемо функцію [11,73]

$$F(u, x, y, z) = F(u, P) = \frac{x^2}{a^2 + u} + \frac{y^2}{b^2 + u} + \frac{z^2}{c^2 + u} - 1, \quad (3.66)$$

і знайдемо її нулі, звівши її до вигляду

$$\frac{x^2(b^2 + u)(c^2 + u) + y^2(a^2 + u)(c^2 + u) + z^2(a^2 + u)(b^2 + u) - Q(u)}{Q(u)} = 0, \quad (3.67)$$

де

$$Q(u) = (a^2 + u)(b^2 + u)(c^2 + u).$$

Рівняння (3.67) має три дійсних кореня. Це видно з наступного дослідження:

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow -c^2+0} F(u, P) &\rightarrow +\infty, & \lim_{u \rightarrow -c^2-0} F(u, P) &\rightarrow -\infty, \\ \lim_{u \rightarrow -b^2+0} F(u, P) &\rightarrow +\infty, & \lim_{u \rightarrow -b^2-0} F(u, P) &\rightarrow -\infty, \\ \lim_{u \rightarrow -a^2+0} F(u, P) &\rightarrow +\infty, & \lim_{u \rightarrow -a^2-0} F(u, P) &\rightarrow -\infty, \end{aligned} \quad (3.68)$$

а також з умови;

$$\lim_{u \rightarrow \pm\infty} F(u, P) = \lim_{u \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{a^2 + u} + \frac{y^2}{b^2 + u} + \frac{z^2}{c^2 + u} - 1 = -1.$$

Зобразимо схематично отримані результати рисунком,

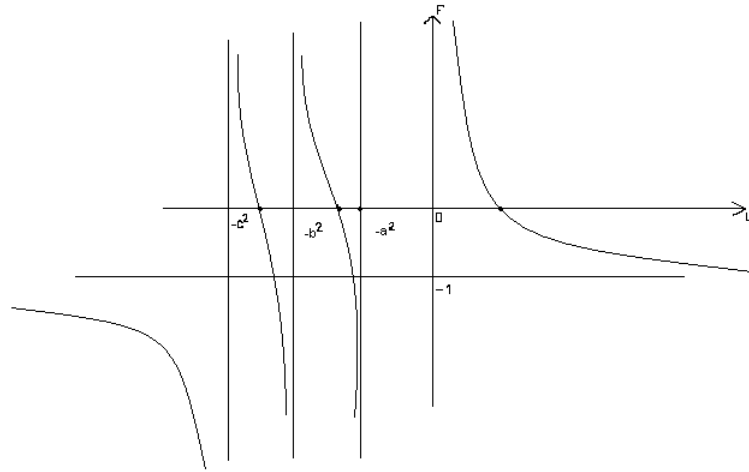


Рис. 3.3. Визначення коренів рівняння (3.67), які є координатами еліпсоїдальної системи координат

з якого можна зробити деякі висновки: для точок  $P \notin \tau$  ( $\rho^2 - 1 > 0$ ) значення функції

$$F(u, P) = \frac{x^2}{a^2 + u} + \frac{y^2}{b^2 + u} + \frac{z^2}{c^2 + u} - 1 > 0 \quad (\rho^2 - 1 > 0),$$

тому хоча б один з коренів  $\xi > \eta > \zeta$  є більший за нуль.

Сукупність величин  $\xi, \eta, \zeta$  утворюють ортогональну криволінійну систему координат, поверхні відліку якої (постійні значення  $\xi, \eta, \zeta$ ) є еліпсоїди, однополі і двополі гіперболоїди. Не зупиняючись на дослідженнях таких систем координат, встановимо зв'язок еліпсоїдальною та декартовою системою координат. Координати точки  $P(x, y, z)$  визначають еліпсоїдальні як розв'язки кубічного рівняння:

$$\begin{aligned} x^2(b^2 + u)(c^2 + u) + y^2(a^2 + u)(c^2 + u) + \\ z^2(a^2 + u)(b^2 + u) - (a^2 + u)(b^2 + u)(c^2 + u) = 0 \end{aligned} \quad (3.69)$$

або у розгорнутому вигляді в прямокутній системі координат

$$\begin{aligned} -u^3 + u^2(a^2 + b^2 + c^2 + x^2 + y^2 + z^2) + \\ u(-a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2 + x^2(c^2 + b^2) + y^2(c^2 + a^2) + z^2(b^2 + a^2)) + \\ x^2b^2c^2 + y^2a^2c^2 + z^2b^2a^2 - a^2b^2c^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.70)$$

та в узагальненій сферичній системі:

$$\begin{aligned}
& -u^3 + u^2 \left[ a^2 + b^2 + c^2 + \rho^2 \left( \sin^2 \theta (a^2 \cos^2 \lambda + b^2 \sin^2 \lambda) + c^2 \cos^2 \theta \right) \right] + \\
& -u \left[ -a^2 b^2 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + \rho^2 \left[ \sin^2 \theta \left( (b^2 + c^2) \cos^2 \lambda + (a^2 + c^2) \sin^2 \lambda \right) + (a^2 + b^2) \cos^2 \theta \right] \right] \\
& + \rho^2 \left( \sin^2 \theta (b^2 c^2 \cos^2 \lambda + a^2 c^2 \sin^2 \lambda) + b^2 a^2 \cos^2 \theta \right) - a^2 b^2 c^2 = 0 \quad .
\end{aligned}$$

Введемо позначення:

$$\beta^2 = \frac{b^2}{a^2}, \gamma^2 = \frac{c^2}{a^2}, u = \frac{u}{a^2} \quad (3.71)$$

і отримаємо кубічне рівняння відносно невідомої  $u$ :

$$\begin{aligned}
& -u^3 + u^2 \left[ 1 + \beta^2 + \gamma^2 + \rho^2 \left( \sin^2 \theta (\cos^2 \lambda + \beta^2 \sin^2 \lambda) + \gamma^2 \cos^2 \theta \right) \right] + \\
& u \left[ -\beta^2 - \gamma^2 - \beta^2 \gamma^2 + \rho^2 \left[ \sin^2 \theta \left( (\gamma^2 + \beta^2) \cos^2 \lambda + (1 + \gamma^2) \sin^2 \lambda \right) + (1 + \beta^2) \cos^2 \theta \right] \right] \\
& + \rho^2 \left( \sin^2 \theta (\beta^2 \gamma^2 \cos^2 \lambda + \gamma^2 \sin^2 \lambda) + \beta^2 \cos^2 \theta \right) - \beta^2 \gamma^2 = 0 \quad .
\end{aligned}$$

Хоч існують точні формули для визначення розв'язків, проте вони громіздкі, а тому простіше шукати корені наближеними методами, наприклад, методом половинного ділення, суть якого наступна:

1. Визначаємо інтервал зміни знаку функції, тобто виконання умови  $f \times f_1 < 0$  послідовним перебором її значень на деякому проміжку (починаємо з додатного  $u_0$ ).

2. Подальше уточнення здійснюємо одним з наближених методів, наприклад методом простої ітерації, або методом Ньютона з потрібною наперед заданою точністю.

У випадку двохвісного еліпсоїда ( $a = b > c$ ) функція  $F$  має наступний вигляд:

$$F(u, P) = \frac{x^2 + y^2}{a^2 + u} + \frac{z^2}{c^2 + u} - 1 = 0 \quad ,$$

звідки отримуємо квадратне рівняння

$$-u^2 + u(x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - c^2) + c^2(x^2 + y^2) + z^2 a^2 - a^2 c^2 = 0$$

або в попередніх позначеннях і в сферичній системі координат

$$-u^2 + u(\rho^2(\sin^2 \theta + \gamma^2 \cos^2 \theta) - 1 - \gamma^2) + \rho^2(\gamma^2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - \gamma^2 = 0 \quad ,$$

розв'язок якого наступний

$$u = \frac{1 + \gamma^2 - \rho^2 (\sin^2 \theta + \gamma^2 \cos^2 \theta)}{2} + \frac{\sqrt{[1 + \gamma^2 - \rho^2 (\sin^2 \theta + \gamma^2 \cos^2 \theta)]^2 + 4\rho^2 (\gamma^2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - \gamma^2}}{2}. \quad (3.72)$$

Для сферичного випадку ( $a = b = c$ ) еліпсоїдальна координата визначається просто, а саме  $u = r^2 - a^2$  або у відносних величинах  $\frac{u}{a} = \left(\frac{r}{a}\right)^2 - 1$ .

Еліпсоїдальна координата  $\xi$ , яка визначається для точок  $P$  поза еліпсоїдом  $\tau$ , є додатньою. Якщо  $P \in \tau$ , то вона приймається за нуль, тобто  $\xi = 0$ .

Співвідношення (3.65) визначає також обернений зв'язок між системами координат. Для цього в рівність

$$x^2(b^2 + u)(c^2 + u) + y^2(a^2 + u)(c^2 + u) + z^2(a^2 + u)(b^2 + u) = (a^2 + u)(b^2 + u)(c^2 + u)$$

підставляємо послідовно  $x = -a^2, y = -b^2, z = -c^2$ , в результаті чого одержуємо

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{(a^2 + \xi)(a^2 + \eta)(a^2 + \zeta)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}, \\ y^2 &= \frac{(b^2 + \xi)(b^2 + \eta)(b^2 + \zeta)}{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)}, \\ z^2 &= \frac{(c^2 + \xi)(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Останні формули дають неоднозначний зв'язок між декартовими та еліпсоїдними координатами. Оскільки для наших потреб потрібне тільки визначення координати  $\xi$ , то додаткових досліджень в цьому напрямку проводити немає необхідності.

### 3.6. Геометричні характеристики еліпсоїдальних планетарних тіл

При визначенні (як внутрішнього, так зовнішнього) потенціалу використовується величини [73,103,111]

$$M_{t_1 t_2 t_3} = a^{2t_1+1} b^{2t_2+1} c^{2t_3+1} \int_{0, \xi}^{\infty} \frac{du}{(a^2 + u)^{t_1} (b^2 + u)^{t_2} (c^2 + u)^{t_3} Q(u)}, \quad (3.74)$$

які в атомній фізиці [73] називають потенціальними факторами. Оскільки в них фігурують елементи, що визначаються геометрією фігури, то в подальшому назвемо їх геометричними характеристиками еліпсоїда.

Перейдемо до безрозмірних величин, ввівши заміну  $u = \frac{u}{a^2}$

$$\text{Тоді } M_{t_1 t_2 t_3} = abc \beta^{2t_1} \gamma^{2t_2} \int_{0, \zeta/a^2}^{\infty} \frac{du}{(1+u)^{t_1} (\beta^2 + u)^{t_2} (\gamma^2 + u)^{t_3} \sqrt{(1+u)(\beta^2 + u)(\gamma^2 + u)}}$$

або

$$M_{t_1 t_2 t_3} = \frac{3}{4} V_e \int_{0, \zeta/a^2}^{\infty} \frac{du}{(1+u)^{t_1} (\beta^2 + u)^{t_2} (\gamma^2 + u)^{t_3} Q(u)}. \quad (3.75)$$

Для двохосевого еліпсоїда ( $a = b, \beta = 1$ ) (3.75) набуде вигляду

$$M_{t_1 t_2 t_3} = \frac{3}{4} V_e \int_{0, \zeta/a^2}^{\infty} \frac{du}{(1+u)^{t_1+t_2+1} (\gamma^2 + u)^{t_3} \sqrt{\gamma^2 + u}} \quad (3.76)$$

або в інших позначеннях

$$M_{lk}^1 = \frac{3}{4} V_e \gamma^{2k} \int_{0, \zeta/a^2}^{\infty} \frac{du}{(1+u)^{l+1} (\gamma^2 + u)^k \sqrt{\gamma^2 + u}}. \quad (3.77)$$

Встановимо рекурентні співвідношення для величин  $M_{lk}^1$ , для чого зробимо заміну

$$\begin{aligned} \gamma^2 + u = z^2, \quad 2zdz = du, \quad u = \zeta / a^2, \quad z = \sqrt{\gamma^2 + \zeta / a^2}, z \geq \gamma, \\ u \rightarrow \infty, z \rightarrow \infty \end{aligned}$$

тоді одержимо

$$M_{lk}^1 = \frac{3}{4} V_e \gamma^{2k} \int_{\sqrt{\gamma^2 + \zeta^2/a^2}}^{\infty} \frac{2zdz}{(z^{2k+1})(z^2 + 1 - \gamma^2)^{l+1}} = \frac{3}{2} V_e \gamma^{2k} \int_{\sqrt{\gamma^2 + \zeta^2/a^2}}^{\infty} \frac{dz}{z^{2k} (z^2 + e^2)^l}, \quad (3.78)$$

де  $e^2 = 1 - \gamma^2$ .

Спочатку визначимо  $M_{l0}^1, M_{0k}^1$

$$M_{0k}^1 = \frac{3}{2} V_e \gamma^{2k} \int_{\sqrt{\gamma^2 + \zeta^2/a^2}}^{\infty} \frac{dz}{z^{2k}} = -\frac{\gamma^{2k}}{(2k-1)z^{2k-1}} \Big|_{\sqrt{\gamma^2 + \zeta/a}}^{\infty} = \frac{\gamma^{2k}}{(2k-1)(\gamma^2 + \zeta)^{k-1/2}}, \quad (3.79)$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

$$M_{l0}^1 = \int_{\sqrt{\gamma^2 + \zeta^2/a^2}}^{\infty} \frac{dz}{(z^2 + e^2)^l z} = -\frac{1}{2z(l-1)(z^2 + e^2)^{l-1}} \Big|_{\sqrt{\gamma^2 + \zeta^2/a^2}}^{\infty} + \frac{1}{2z(l-1)} \int_{\sqrt{\gamma^2 + \zeta^2/a^2}}^{\infty} \frac{dz}{z^2 (z^2 + e^2)^l}$$

$$M_{l0}^1 = \frac{1}{2z(l-1)(\gamma^2 + \zeta^2/a^2 + 1 - \gamma^2)^{l-1}} - \frac{1}{e^2} M_{l-1,1}^1.$$

В загальному випадку

$$M_{lk}^1 = \frac{\gamma^{2k}}{e^2} \int_{\sqrt{\gamma^2 + \zeta^2/a^2}}^{\infty} \frac{dz(z^2 - z^2 + e^2)}{z^{2k} (z^2 + e^2)^l} = \frac{\gamma^{2k}}{e^2} \left\{ \int_{\sqrt{\gamma^2 + \zeta^2/a^2}}^{\infty} \frac{dz}{z^{2k} (z^2 + e^2)^{l-1}} - \int_{\sqrt{\gamma^2 + \zeta^2/a^2}}^{\infty} \frac{dz}{z^{2k-2} (z^2 + e^2)^l} \right\}.$$

Отже,

$$M_{lk}^1 = \frac{1}{e^2} \{M_{l-1k}^1 - M_{lk-1}^1\}. \quad (3.80)$$

Алгоритм обчислення коефіцієнтів наступний:

1. Визначаємо  $M_{0k}$  до визначеного наперед заданого  $n$  (перший рядок).
2. Обчислюємо значення другого рядка  $M_{11}^1, M_{12}^1, \dots, M_{1n}^1$ .
3. Аналогічно визначаємо третій і т. д. рядки поки не знайдемо всю сукупність  $M_{lk}^1$

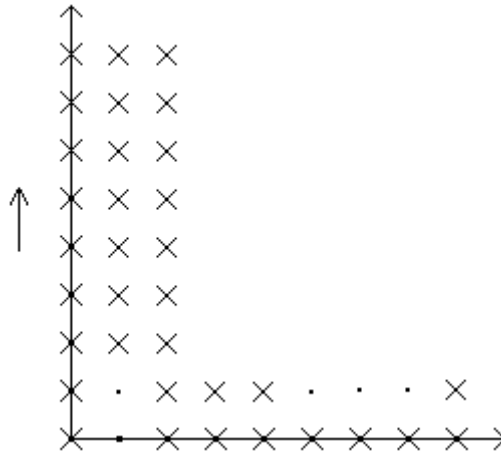


Рис. 3.4. Схема визначення потенціальних факторів  $M_{lk}^1$

Контролем визначення  $M_{lk}^1$  можуть служити значення, знайдені для кулі.

$$M_{lk}^1 = \int_{\sqrt{(1+\zeta/a^2)}}^{\infty} \frac{du}{(1+u)^{l+k+1}} = -\frac{1}{(l+k+0.5)(1+u)^{l+k+0.5}} \Big|_{\sqrt{(1+\zeta/a^2)}}^{\infty} = \frac{1}{(1+u)^{l+k+0.5} (l+k-0.5)}. \quad (3.81)$$

Безпосередні обчислення за даною схемою показують їх нестійкість. Тому скористаємось іншим способом знаходження цих величин. Для цього розкладемо функцію  $\frac{1}{(z^2 + e^2)^l}$  в біноміальний ряд, а саме:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z^2 + e^2)^l} &= \frac{1}{z^{2l}} \left(1 + \frac{e^2}{z^2}\right)^{-l} = \frac{1}{z^{2l}} \left\{ 1 - l \frac{e^2}{z^2} + \frac{-l(-l-1)}{2!} \left(\frac{e^2}{z^2}\right)^2 + \dots \right\} = \frac{1}{z^{2l}} \times \\ &\times \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(l+n-1)!(-1)^n}{(l-1)!n!} \left(\frac{e^2}{z^2}\right)^n \right\} = \frac{1}{z^{2l}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{2n} (l+n-1)!}{(l-1)!n! z^{2n+2l}} \end{aligned} \quad (3.82)$$

та підставимо в (3.78)

$$\begin{aligned} M_{lk}^1 &= \frac{3}{2} V_e \gamma^{2k} \int_{\sqrt{\gamma^2 + \zeta/a^2}}^{\infty} \left\{ \frac{1}{z^{2l+2k}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{2n} (l+n-1)!}{(l-1)!n! z^{2n+2l+2k}} \right\} dz = \frac{3}{2} V_e \gamma^{2k} \times \\ &\left\{ -\frac{1}{(2l+2k-1)z^{2l+2k-1}} \Big|_{\sqrt{\gamma^2 + \zeta/a^2}}^{\infty} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{2n} (l+n-1)!}{(l-1)!n!(2n+2l+2k-1)} \frac{1}{z^{2n+2l+2k}} \Big|_{\sqrt{\gamma^2 + \zeta/a^2}}^{\infty} \right\} \cdot, \end{aligned}$$

звідки

$$\begin{aligned} M_{lk}^1(\xi) &= \frac{3}{2} V_e \gamma^{2k} \left\{ \frac{1}{(2l+2k-1)(\gamma^2 + \zeta/a^2)^{\frac{2l+2k-1}{2}}} + \right. \\ &\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{2n} (l+n-1)!}{(l-1)!n!(2n+2l+2k-1)(\gamma^2 + \zeta/a^2)^{n+l+k-0.5}} \right\} \end{aligned} \quad (3.83)$$

а для внутрішнього потенціалу

$$M_{lk}^1(0) = \frac{3}{2} V_e \gamma^{2k} \left\{ \frac{1}{(2l+2k-1)\gamma^{2l+2k-1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{2n} (l+n-1)!}{(l-1)!n!(2n+2l+2k-1)j^{2n+2l+2k-1}} \right\}. \quad (3.84)$$

Ряд збіжний за умови

$$\left| \frac{e^2}{z^2} \right| < 1 \quad \frac{1-\gamma^2}{z^2} \leq 1-\gamma^2 = 1 - \frac{c^2}{a^2} < 1 (z \geq 1),$$

яка завжди виконується.

Обчислюємо  $M_{lk}^1$  за двома способами і результат наведемо в табл. 3.3, з якої видно, що при  $a \approx c$  визначення величин  $M_{lk}^1$  є нестійким, адже в цьому випадку величини (3.79) повинні бути близькими до  $2/(c^{2l+t-1} \cdot (2l+t-1))$ . Всі обчислення в таблиці проводились для  $c/a = 0.9966$ , що близьке до відношення великої та малої півосей загальноземного еліпсоїда.

Значення інтегралу (3.80) за формулами (3.78), (3.79) (нижнє число) та (3.83)

– верхнє число

t\L	1	2	3	4	5
0	2.002270	0.668029	0.400974	0.286472	0.222842
	2.002270	0.668029	0.400974	0.286472	0.222842
2	0.670765	0.402929	0.287993	0.224087	0.183396
	0.670765	0.402929	0.287993	0.224087	0.183396
4	0.404894	0.289523	0.225339	0.184456	0.156133
	0.404894	0.289523	0.225339	0.184457	0.156263
6	0.291061	0.226599	0.185522	0.157057	0.136167
	0.291061	0.226599	0.185522	0.156850	0.086486
8	0.227865	0.186595	0.157987	0.136988	0.120918
	0.227865	0.186595	0.158165	0.193766	15.803284
10	0.187674	0.158923	0.137814	0.121657	0.108892
	0.187674	0.158844	0.099962	13.818310	-4363.52047

Для виразів  $M_{t_1 t_2 t_3}$  можна також встановити рекурентні співвідношення, проте враховуючи попередні дослідження, мабуть не доцільно. Знайдемо  $M_{t_1 t_2 t_3}$  для тривісного еліпсоїда [105], користуючись попереднім прийомом (розкладом в ряди).

Заміна  $1+u = z^2$  в (3.75) дає наступне:

$$M_{t_1 t_2 t_3} = \beta^{2t_2} \gamma^{2t_3} \int \frac{2dz}{\sqrt{\zeta^2/a-1} z^{2t_3} (z^2 + \beta^2 - 1)^{2t_2 + \frac{1}{2}} (z^2 - 1 + \gamma^2)^{2t_2 + \frac{1}{2}}} \quad (3.84)$$

Розкладемо підінтегральні функції в ряди:

$$\frac{1}{(z^2 + \beta^2 - 1)^{2t_2}}, \quad \frac{1}{(z^2 - 1 + \gamma^2)^{2t_2}};$$



$$\begin{aligned} \frac{1}{(z^2 - e_1^2)^{2t_2 + \frac{1}{2}}} &= \frac{1}{z^{2t_2} (t^2 - \frac{e_1^2}{z^2})^{2t_2 + \frac{1}{2}}} = \frac{1}{z^{2t_2 + 1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2t_2 + 2n + 1)!! e_1^{2n}}{2^n n! (2t_2 - 1)!! z^{2t_2 + 2n + 1}} \\ &= \frac{b_0}{z^{2t_1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^{2n + 2t_1}} \end{aligned} \quad (3.85)$$

i

$$\frac{1}{(z^2 - e_2^2)^{2t_3 + 1}} = \frac{1}{z^{2t_3 + 1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2t_3 + n - 1)!! e_2^{2n}}{(2t_3 - 1)!! z^{2t_3 + 2n + 1}} = \frac{C_0}{z^{2t_3 + 1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{z^{2n + 2t_3 + 1}}, \quad (3.86)$$

тут

$$e_1^2 = 1 - \beta^2, e_2^2 = 1 - \gamma^2.$$

Ряди (3.85), (3.86) збігаються, бо умови збіжності виконуються:

$$\left| \frac{e}{z} \right| < 1, \left| \frac{e_1}{z} \right| < 1.$$

Вираз під інтегралом є добутком двох рядів, елементи якого визначаються за схемою:

$$\begin{aligned} a_0 &= c_0 b_0, & a_1 &= c_1 b_0 + b_1 c_0 = c_1 b_0 + b_1 c_0, \\ a_n &= \sum_{m=0}^n c_m b_{n-m}, \end{aligned} \quad (3.87)$$

а відповідний ряд має вигляд:

$$\frac{a_0}{z^{2t_1 + 2t_2 + 2t_3 + 3}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{z^{2t_1 + 2t_2 + 2t_3 + 2n + 3}}. \quad (3.88)$$

Після підстановки (3.88) в (3.84) одержимо

$$\begin{aligned} M_{t_1 t_2 t_3} &= 2\beta^{2t_2} \gamma^{2t_3} \int_{\sqrt{\zeta^2/a^2 - 1}}^{\infty} \left\{ \frac{1}{z^{2t_1 + 2t_2 + 2t_3 + 3}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{z^{2t_1 + 2t_2 + 2t_3 + 2n + 3}} \right\} dz; \\ M_{t_1 t_2 t_3} &= 2\gamma^{2t_3} \beta^{2t_2} \left\{ \frac{1}{(2t_1 + 2t_2 + 2t_3 - 1)(\gamma\zeta / a^2 - 1)^{t_1 + t_2 + t_3 - 0.5}} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(2t_1 + 2t_2 + 2t_3 + 2n - 1)(\gamma^2 + \zeta^2 / a^2)^{t_1 + t_2 + t_3 + n - 0.5}} \right\}. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Таким чином в нас є всі необхідні величини для знаходження потенціалу  $u_{mnk}$ .

Приведемо алгоритми обчислення потенціалу:

1. За формулами (3.54), (3.55) визначаємо коефіцієнти  $b_{k0n}, b_{k-11n}$

2. Якщо точка  $P \in R \setminus \tau$  (зовнішня), то визначаємо еліпсоїдальну координату  $\xi$  (для внутрішніх точок  $\xi=0$ ).
3. Обчислюємо геометричні характеристики  $M_{t_1 t_2 t_3}(\xi)$  за відповідними формулами (3.89) до заданого порядку  $N_k$ . Для внутрішнього потенціала цей пункт виконуємо тільки один раз.
4. Визначаємо значення функцій  $u_{mnk}$
5. Знаходимо зовнішній гравітаційний потенціал в заданій точці  $P$ .

### 3.7. Порівняння одного класу гармонічних та кульових функцій при представленні потенціалу планети

Дослідимо вигляд функцій  $u_{mnk}$  для кулі  $K$  радіуса  $R$  [145]. Еліпсоїдальна координата визначається рівнянням  $\frac{r^2}{R^2 + \xi} = 1$ :

$$\xi = \begin{cases} 0, & r \leq R \\ r^2 - R^2, & r > R \end{cases} \quad (3.90)$$

Запишемо співвідношення (3.61) з урахуванням (3.90). Отримаємо, що

$$u_{mnk} = \frac{3Vf(-1)^N}{4(N+1)2^N m!n!k!} \times \frac{\partial^N}{\partial x^m \partial y^n \partial z^k} \left( \int_{0, r^2 - R^2}^{\infty} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2 + u} \right)^{N+1} \frac{du}{Q(u)} \right) = \frac{3Vf(-1)^N N!}{4} \sum_{l=0}^{N+1} \frac{(-1)^l (x^2 + y^2 + z^2)^{2l}}{l!(N+1-l)!R^{2l}} M_l, \quad (3.91)$$

де

$$M_l = R^{2l} \int_{\xi}^{\infty} \frac{du}{Q(u)}. \quad (3.92)$$

Вираз (3.91) після заміни  $t^2 = R^2 + u$  прийме вигляд:

$$u_{mnk} = \frac{3Vf(-1)^N}{2(N+1)2^N m!n!k!} \frac{\partial^N}{\partial x^m \partial y^n \partial z^k} \left( \int_{r,R}^{\infty} \left( 1 - \frac{r^2}{t^2} \right)^{N+1} \frac{dz}{t^2} \right) = \frac{3Vf(-1)^N}{2(N+1)2^N m!n!k!} \sum_{l=0}^{N+1} \frac{(-1)^l}{l!(N+1-l)!(2l+1)} \frac{\partial^N}{\partial x^m \partial y^n \partial z^k} r^{2l} \frac{1}{t^{2l+1}} \Big|_{r,R}^{\infty} \quad (3.93)$$

Формула (3.93) визначає внутрішній ( $uu_{mnk}$ ) та зовнішній ( $uuu_{mnk}$ ) потенціали, які визначаються різними формулами. Для  $uu_{mnk}$  отримуємо:

$$uu_{mnk} = \frac{3VN!}{2R} \sum_{l=0}^{N+1} \frac{(-1)^l r^{2l}}{(N+1-l)!(2l+1)R^{2l}} \sum_{t_1+t_2+t_3=l} \frac{(2t_1-1)!!(2t_2-1)!!(2t_3-1)!!}{(2t_1-m)!(2t_2-n)!(2t_3-k)!} x^{2t_1-m} y^{2t_2-n} z^{2t_3-k} \quad (3.94)$$

Для зовнішнього потенціалу вираз (3.93) є наступним:

$$uuu_{mnk} = \frac{3VN!}{2r} \sum_{l=0}^{N+1} \frac{(-1)^l}{l!(N+1-l)!(2l+1)} \frac{1}{r}. \quad (3.95)$$

Використовуючи співвідношення

$$\sum_{l=0}^{N+1} \frac{(-1)^l}{l!(N+1-l)!(2l+1)} = \frac{1}{(N+1)!} \int_0^1 (1-t^2)^{N+1} dt = \frac{2^{N+1}}{(2N+3)!},$$

отримаємо

$$uuu_{mnk} = \frac{N!}{m!n!k!(2N+3)!} \frac{\partial^N}{\partial x^m \partial y^n \partial z^k} \left( \frac{1}{r} \right). \quad (3.96)$$

Для визначення похідних у виразі (3.96) скористаємось результатами, наведеними в монографії [11] та застосуємо їх до функції  $f = x^m y^n z^k$ . В результаті цього

$$\frac{\partial^N}{\partial x^m \partial y^n \partial z^k} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{(-1)^N (2N-1)!!}{r^{2N+1}} \times \left\{ x^m y^n z^k + \sum_{l=1}^{N/2} \frac{(2N-2l-1)!! r^{2l} \Delta^l (x^m y^n z^k)}{(2l)!! (2N-1)!!} \right\}, \quad (3.97)$$

де

$$\Delta^l f = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^l f.$$

Використовуючи формулу (2.39), запишемо

$$\frac{\partial^N \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial x^m \partial y^n \partial z^k} = \frac{(-1)^N (2N-1)!! m!n!k!}{r^{2N+1}} \times \left\{ \frac{x^m y^n z^k}{m!n!k!} + \sum_{l=1}^{N/2} \frac{(2N-2l-1)!! r^{2l}}{2^l (2N-1)!!} \sum_{i+j+s=l} \frac{x^{m-2i} y^{n-2j} z^{k-2s}}{i!j!s!(m-2i)!(n-2j)!(k-2s)!} \right\}, \quad (3.98)$$

І після її підстановки в (3.96) остаточно одержимо :

$$uuu_{mnk} = \frac{N!}{2^N (2N+3)!} \frac{1}{r^{2N+1}} \times \left\{ \frac{(2N-1)!! x^m y^n z^k}{m!n!k!} + \sum_{l=1}^{N/2} \frac{(2N-2l-1)!! r^{2l}}{2^l} \sum_{i+j+s=l} \frac{x^{m-2i} y^{n-2j} z^{k-2s}}{i!j!s!(m-2i)!(n-2j)!(k-2s)!} \right\} \quad (3.99)$$

Для ілюстрації ефективності такого підходу обчислимо значення функцій  $u_{12,2,2}$ ,  $uu_{12,2,2}$ ,  $uuu_{12,2,2}$  в одній з точок земної поверхні.

Значення функцій  $u_{12,2,2}$ ,  $uu_{12,2,2}$ ,  $uuu_{12,2,2}$  для різних радіусів при

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}, \lambda = 0.$$

$r$	$u_{mnk}$ потенціал	$uu_{mnk}$ внутрішній потенціал	$uuu_{mnk}$ зовнішній потенціал
1.000	$1.0912799065313 \cdot 10^{-4}$	$1.09127990653 \cdot 10^{-4}$	$1.0912799065 \cdot 10^{-4}$
1.200	$5.9025030744475 \cdot 10^{-4}$	$-33.49770262220 \cdot 10^{-4}$	$-0.9025030744 \cdot 10^{-4}$
0.900	$1.5647483623623 \cdot 10^{-4}$	$1.56474836236 \cdot 10^{-4}$	$-5.8891959896 \cdot 10^{-4}$
0.998	$1.1431900092650 \cdot 10^{-4}$	$1.14319000922 \cdot 10^{-4}$	$-1.1268017118 \cdot 10^{-4}$
1.002	$1.0563455490500 \cdot 10^{-4}$	$-1.08099723057 \cdot 10^{-4}$	$1.0563455490 \cdot 10^{-4}$

Значення функцій  $u_{mnk}$ , як видно з таблиці, достатньо добре представляють потенціал планети як всередині (3, 4 рядок – значення  $uu_{mnk}$ ), так і ззовні (2, 5 рядок). На сфері всі величини ( $u_{mnk}$ ,  $uu_{mnk}$ ,  $uuu_{mnk}$ ) співпадають. Формули для зовнішнього потенціалу ( $uuu_{mnk}$ ), застосовані у внутрішній області, дають неправильні результати. Те ж саме стосується внутрішнього потенціалу ( $uu_{mnk}$ ). Водночас, обчислення за допомогою функцій  $u_{mnk}$  не потребує уточнення вибору функцій. Це особливо важливо при розгляді  $u_{mnk}$  в еліпсоїдальному випадку, тим більше, що для еліпсоїдального тіла вигляд гармонічних функцій є складним, а тому опис гравітаційного поля за допомогою наведеної методики є якщо не єдиним, то у всякому випадку, корисним представленням потенціалу еліпсоїда. Реалізація виразу (3.58) потребує визначення коефіцієнтів  $b_{mnk}$ . Вичерпною інформацією про зовнішнє гравітаційне поле є набір стоксових постійних. Для кульової планети підстановка співвідношення (3.56) у вираз (3.32), приводить до системи рівнянь

$$C_{nk} + iS_{nk} = \frac{(n-k)!RR}{2^k} \frac{3Vn!}{(2n+3)!!} \times$$

$$\sum_{m=0}^{(n-k)/2} \frac{(-1)^m}{2^{2m} m!(m+k)(n-k-2m)!} \sum_{l=0}^{2m+k} \frac{b_{m+k-l, l, n-k-2m}}{l!(m-l)!} \sum_{t=0}^k \frac{(-1)^{\frac{t}{2}}}{t!(k-t)!((l-k)/2)!(m-(l-k)/2)!} \quad (3.100).$$

Кількість рівнянь (3.100) є  $2N+1$ , а кількість невідомих –  $(N+1)(N+2)/2$ . Тому для їх однозначного визначення частину з них приймаємо нульовими, решту визначаємо (для простоти беремо:  $b_{k,0,n-k}, b_{k-1,1,n-k}$ ). Тоді функції, що описують зовнішній потенціал є такими:

$$\{u_{k,0,n-k}, u_{k-1,1,n-k}\}. \quad (3.101)$$

Система рівнянь (3.100) в даному випадку прийме вигляд:

$$C_{nk} + iS_{nk} = \frac{(n-k)!RR}{2^k} \frac{3Vn!}{(2n+3)!!} \times \sum_{m=0}^{(n-k)/2} \frac{(-1)^m b_{2m+k,0,n-k-2m} + ikb_{2m+k-1,1,n-k-2m}}{2^{2m} m!(m+k)(n-k-2m)!}, (k \leq n) \quad (3.102)$$

Структура формули (3.100) дозволяє шукати розв'язок наступним чином:

$$b_{k,0,n-k} = \frac{(2n+3)!! 2^k k!}{3VnRR!} C_{nk} - k!(n-k)! \sum_{m=1}^{(n-k)/2} \frac{(-1)^m b_{2m+k,0,n-k-2m}}{2^{2m} m!(m+k)(n-k-2m)!}, k = n, n-1, \dots, 0, \quad (3.103)$$

$$b_{k-1,1,n-k} = \frac{(2n+3)!! 2^k (k-1)!}{3VnRR!} C_{nk} - k!(n-k)! \sum_{m=1}^{(n-k)/2} \frac{(-1)^m b_{2m+k-1,1,n-k-2m}}{2^{2m} m!(m+k)(n-k-2m)!}, k = n, n-1, \dots, 1. \quad (3.104)$$

Для порівняння обчислення потенціалу по різних формулах визначимо його значення в деяких точках земної поверхні. Отримані результати приведемо у вигляді таблиць.

Таблиця 3.5

**Значення аномальної частини потенціалу  $v_n$  (починаючи з  $v_2$ ) по формулах**

**(3.58), (3.65) для напрямку  $\vartheta = 0, \lambda = \frac{\pi}{2}$**

Потенціал $v \times \frac{fM}{r}$					
$\rho$	4	8	12	16	20
0.998	0.00108269	0.00108246	0.48508504	66.69074235	3436.51247237
0.999	0.00108061	0.00108037	0.12659505	17.68959747	936.64441313
1.000	0.00107848	0.00107824	0.00107792	0.00107776	0.00111549
1.100	0.00089173	0.00089162	0.00089150	0.00089145	0.00089632
1.200	0.00074958	0.00074953	0.00074947	0.00074946	0.00075083
1.300	0.00063889	0.00063886	0.00063884	0.00063883	0.00063920
1.400	0.00055102	0.00055100	0.00055099	0.00055099	0.00055111

Таблиця 3.6

Значення аномальної частини потенціалу  $v_n$  (починаючи з  $v_2$ ) по формулах

(3.58), (3.99) для напрямку  $\vartheta = 0, \lambda = \frac{\pi}{2}$

Потенціал $v \times \frac{fM}{r}$					
$\rho$	4	8	12	16	20
0.998	0.00108280	0.00108255	0.00108222	0.00108203	0.00108211
0.999	0.00108064	0.00108039	0.00108007	0.00107988	0.00107995
1.000	0.00107848	0.00107824	0.00107792	0.00107773	0.00107780
1.100	0.00089173	0.00089162	0.00089150	0.00089145	0.00089146
1.200	0.00074958	0.00074953	0.00074947	0.00074946	0.00074946
1.300	0.00063889	0.00063886	0.00063884	0.00063883	0.00063883
1.400	0.00055102	0.00055100	0.00055099	0.00055099	0.00055099

Таблиця 3.7

Значення аномальної частини потенціалу  $v_n$  (починаючи з  $v_2$ ) по формулах

(3.58), (3.65) для напрямку  $\vartheta = \frac{\pi}{2}, \lambda = 0$

Потенціал $v \times \frac{fM}{r}$					
$\rho$	4	8	12	16	20
0.998	0.00054452	0.00054518	1.86234739	19.96604646	56.35928013
0.999	0.00054344	0.00054409	1.84010503	19.67921885	55.40020404
1.000	0.00054235	0.00054301	1.81815022	19.39682767	54.45868115
1.100	0.00044853	0.00044903	0.57959475	4.93635005	10.91864912
1.200	0.00037710	0.00037746	0.20423424	1.43639395	2.63926022
1.300	0.00032146	0.00032173	0.07833706	0.46734725	0.74473005
1.400	0.00027729	0.00027748	0.03233750	0.16712181	0.23895046

Таблиця 3.8

Значення аномальної частини потенціалу  $v_n$  (починаючи з  $v_2$ ) по формулах

(3.58), (3.99) для напрямку  $\vartheta = \frac{\pi}{2}, \lambda = 0$

Потенціал $v \times \frac{fM}{r}$					
$\rho$	4	8	12	16	20
0.998	0.00054452	0.00054520	1.86229770	19.94765356	54.91573992
0.999	0.00054344	0.00054410	1.84010180	19.67804349	55.30649600
1.000	0.00054235	0.00054301	1.81815022	19.39682765	54.45865969
1.100	0.00044853	0.00044903	0.57959475	4.93635005	10.91864673
1.200	0.00037710	0.00037746	0.20423424	1.43639395	2.63925951
1.300	0.00032146	0.00032173	0.07833706	0.46734725	0.74472986
1.400	0.00027729	0.00027748	0.03233750	0.16712181	0.23895039

Таблиця 3.9

Значення аномальної частини потенціалу  $v_n$  (починаючи з  $v_2$ ) по

формулах (3.58), (3.65) для напрямку  $\vartheta = \frac{\pi}{4}, \lambda = \frac{\pi}{4}$

Потенціал $v \times \frac{fM}{r}$					
$\rho$	4	8	12	16	20
0.998	0.00027207	0.00027165	6.25393029	4.41557355	98.55398630
0.999	0.00027153	0.00027111	6.18096116	4.30113417	96.72707672
1.000	0.00027098	0.00027057	6.10891635	4.18915930	94.93554525
1.100	0.00022397	0.00022367	0.18558391	2.00124643	15.70654471
1.200	0.00018821	0.00018800	0.40068553	0.72364348	2.86479637
1.300	0.00016039	0.00016024	0.23691327	0.28424244	0.52981370
1.400	0.00013831	0.00013820	0.12048552	0.11977452	0.08106176

**Значення аномальної частини потенціалу  $V_n$  (починаючи з  $V_2$ ) по  
формулах (3.58), (3.99) для напрямку  $\vartheta = \frac{\pi}{4}, \lambda = \frac{\pi}{4}$**

Потенціал $v \times \frac{fM}{r}$					
$\rho$	4	8	12	16	20
0.998	0.00027202	0.00027159	4.50211276	220.36331778	7062.21746508
0.999	0.00027151	0.00027110	5.72749295	61.56665287	2003.29368215
1.000	0.00027098	0.00027057	6.10891635	4.18915938	94.93556695
1.100	0.00022397	0.00022367	0.18558390	2.00124643	15.70654682
1.200	0.00018821	0.00018800	0.40068553	0.72364348	2.86479752
1.300	0.00016039	0.00016024	0.23691327	0.28424244	0.52981402
1.400	0.00013831	0.00013820	0.12048552	0.11977452	0.08106190

Функції  $U_{mnk}$ , як видно з таблиць, достатньо добре представляють потенціал планети як всередині (3,4 рядок-значення  $UU_{mnk}$ ), так і зовні (2,5 рядок). На сфері всі величини ( $U_{mnk}$ ,  $UU_{mnk}$ ,  $UUU_{mnk}$ ) практично співпадають. Разом з тим, формули для зовнішнього потенціалу, застосовані у внутрішній області, дають невірні значення. Те ж саме стосується внутрішнього потенціалу. В той же самий час, обчислення з допомогою функцій  $U_{mnk}$  не потребує уточнення вибору функцій. Це особливо важливо при узагальненні  $U_{mnk}$  на еліпсоїдальний випадок, тим більше, що для еліпсоїдального тіла вигляд гармонічних функцій є складним. Тому опис гравітаційного поля з допомогою наведеної методики є якщо не єдиним, то у всякому випадку корисним представленням потенціалу еліпсоїда.

Разом з цим, аналіз таблиць 2-4 показує, що збільшення порядку апроксимації приводить до погіршення збіжності. Причиною такого процесу може бути спосіб визначення коефіцієнтів  $b_{mnk}$ , а значить і опису гравітаційного поля (комбінація гармонічних функцій не повністю охоплює загальний потенціал). В зв'язку з цим подамо ще один спосіб побудови системи гармонічних функцій.

Розглянемо вираз:



$$f_{nk}^1 + if_{nk}^2 = \frac{3Vn!}{(2n+3)!!} \times \sum_{p+q+s=n} (\alpha_{pqs} + i\beta_{pqs}) \frac{\partial^N}{\partial x^p \partial y^q \partial z^s} \left( \frac{1}{r} \right). \quad (3.105)$$

Співвідношення (3.105) є по суті кульовими функціями (зауваження на с. 123 в монографії [11] ):

$$\begin{aligned} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{r^{2n+1}} (y_{nk}^1(x, y, z) + iy_{nk}^2(x, y, z)) &= \frac{(-1)^n (2n-1)!!(n-k)!RR}{2^k r^{2n+1}} \times \\ &\sum_{m=0}^{(n-k)/2} \frac{(-1)^m z^{n-k-2m} (x^2 + y^2)^m}{2^{2m} m!(m+k)(n-k-2m)!} (x+iy)^k. \end{aligned} \quad (3.106)$$

Потенціал, що обчислюється з використанням формули (3.106), генерується наступним розподілом мас:

$$\delta(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \left( r_{nk}^1 + \sum_{p+q+s=n} \alpha_{pqs} \frac{\partial^n (1-\rho^2)^n}{\partial x^p \partial y^q \partial z^s} + r_{nk}^2 \sum_{p+q+s=n} \beta_{pqs} \frac{\partial^n (1-\rho^2)^n}{\partial x^p \partial y^q \partial z^s} \right). \quad (3.107)$$

Зв'язок між стоксовими постійними та коефіцієнтами розкладу визначається так:

$$C_{nk} + iS_{nk} = \sum_{p+q+s=n} \left( (\alpha_{pqs})^2 p!q!s!r_{nk}^1 + i(\beta_{pqs})^2 p!q!s!r_{nk}^2 \right)$$

Із співвідношення

$$\sum_{p+q+s=n} \left( (\alpha_{pqs})^2 p!q!s! \right) = \sum_{p+q+s=n} \left( (\beta_{pqs})^2 p!q!s! \right) = \frac{RR(2n-1)!!(n-k)!}{(n+k)!} \quad (3.108)$$

впливає тотожність між кульовими функціями та нашим представленням зовнішнього потенціала планети [107,136], тобто зображення потенціалу має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{fM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{2n}} \sum_{k=0}^n (C_{nk} y_{nk}^1(x, y, z) + S_{nk} y_{nk}^2(x, y, z)) = \\ \frac{fM}{r} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^{2n}} \sum_{k=0}^n P_n^k(\cos \theta) (C_{nk} \cos k\lambda + S_{nk} \sin k\lambda) \right). \end{aligned} \quad (3.109)$$

Отже, представлення потенціалу еліпсоїда з допомогою одного класу гармонічних функцій (об'ємних інтегралів) є еквівалентним розкладу по сукупності кульових функцій для сферичної планети. При цьому суттєвим є вибір способу такого зображення, поскільки від нього залежить збіжність розкладу.

### 3.8 До визначення еквіпотенціальних поверхнь планет з використанням біортогональних розкладів .

Потенціал тривимірної частини розподілу мас планети, що описується виразом,

$$\delta(x_1, x_2, x_3) = \sum_{m+n+k=0}^N b_{mnk} W_{mnk}(x_1, x_2, x_3), \quad (3.110)$$

наступний:

$$U = f \int_{\tau} \frac{\delta}{r} d\tau = \sum_{m+n+k=0}^N b_{mnk} U_{mnk}(x_1, x_2, x_3), \quad (3.111)$$

$$\text{де } U_{mnk}(x_1, x_2, x_3) = f \int_{\tau} \frac{W_{mnk}(\xi, \eta, \zeta)}{r(\xi, \eta, \zeta, x_1, x_2, x_3)} d\tau.$$

При відомих коефіцієнтах  $b_{mnk}$  та зафіксованим потенціалом  $U_0$  рівність

$$U_0 = \sum_{m+n+k=0}^N b_{mnk} U_{mnk}(x_1, x_2, x_3) \quad (3.112)$$

визначає поверхню, на якій він постійний (геоїд – для Землі, селеноїд – для Місяця, аероїд – для Марса). На відміну від класичного представлення потенціалу рядами кульових функцій [41], в якому збіжність при визначенні фігур не є доведеною, співвідношення (3.111) її гарантує. Це є наслідком збіжності в середньому розкладу (3.110) та рівномірної збіжності (3.111). Тому основною проблемою в запропонованому підході є визначення коефіцієнтів  $b_{mnk}$ , деякі з яких може бути визначені за даними про гравітаційне поле планети (Землі), наприклад, стоксовими постійними [122]. Проведені в роботі [145] дослідження виявили неповноту зображення (3.111) для деяких напрямків запропонованим в [145] способом, в зв'язку з чим виникає необхідність додаткових досліджень з урахуванням вигляду лінійних комбінацій  $U_{mnk}$ . Проте для  $N \leq 2$  коефіцієнти розкладу визначаються однозначно за формулами (4.7).

Для простоти обчислень візьмемо дані, прийняті в GRS – 80 [55], а саме:

$$U_0 = 62636860.85 \text{ м}^2 \text{ с}^{-2} \quad , \quad fM = (398600.50 \pm 0.05) \text{ км}^3 \text{ с}^{-2} \quad ,$$

а стоксові постійні за моделлю GEM-10.

Рівняння поверхні постійного потенціалу в даному випадку таке:

$$u_0 = b_{000}U_{000}(x_1, x_2, x_3) + b_{200}U_{200}(x_1, x_2, x_3) + b_{002}U_{002}(x_1, x_2, x_3) + b_{020}U_{020}(x_1, x_2, x_3) + b_{110}U_{110}(x_1, x_2, x_3) + b_{101}U_{101}(x_1, x_2, x_3) + b_{011}U_{011}(x_1, x_2, x_3), \quad (3.113)$$

де  $u_0 = \frac{U_0 R}{fM}$ .

Розпишемо детально кожен з елементів  $U_{mnk}$ , приймаючи фігуру планети за кулю радіуса  $R=6371$  км.

$$\begin{aligned} U_{000} &= \frac{2fM}{R} \left( \frac{1}{3} \rho^2 - 1 \right), \\ U_{200} &= -\frac{3fM}{8R^3} \left( \frac{1}{7} \rho^4 (1 + 4 \sin^2 \theta \cos^2 \lambda) - \frac{2}{5} \rho^2 (1 - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \lambda) + \frac{1}{3} \right), \\ U_{020} &= -\frac{3fM}{8R^3} \left( \frac{1}{7} \rho^4 (1 + 4 \sin^2 \theta \sin^2 \lambda) - \frac{2}{5} \rho^2 (1 - 2 \sin^2 \theta \sin^2 \lambda) + \frac{1}{3} \right), \\ U_{002} &= -\frac{3fM}{8R^3} \left( \frac{1}{7} \rho^4 (1 + 4 \cos^2 \theta) - \frac{2}{5} \rho^2 (1 - 2 \cos^2 \theta) + \frac{1}{3} \right), \\ U_{110} &= -\frac{3fM}{4R^3} \sin^2 \theta \cos 2\lambda \left( \frac{1}{7} \rho^4 - \frac{1}{5} \rho^2 \right), U_{101} = -\frac{3fM}{8R^3} \sin 2\theta \cos \lambda \left( \frac{1}{7} \rho^4 - \frac{1}{5} \rho^2 \right), \\ U_{011} &= -\frac{3fM}{8R^3} \sin 2\theta \sin \lambda \left( \frac{1}{7} \rho^4 - \frac{1}{5} \rho^2 \right) \end{aligned} \quad (3.114)$$

З рівняння(3.313) при фіксованих значеннях широти та довготи при позначеннях:

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{3}{56} \left[ b_{200} (1 - 4 \sin^2 \theta \cos^2 \lambda) + b_{020} (1 - 4 \sin^2 \theta \sin^2 \lambda) + b_{002} (1 - 4 \cos^2 \theta) \right. \\ &\quad \left. + b_{110} \sin^2 \theta \cos 2\lambda + b_{101} \sin 2\theta \cos \lambda + b_{011} \sin 2\theta \sin \lambda \right], \\ a_1 &= \frac{3}{20} \left[ b_{200} (1 + \sin^2 \theta \cos^2 \lambda) + b_{020} (1 + 2 \sin^2 \theta \sin^2 \lambda) + b_{002} (1 + 2 \cos^2 \theta) \right. \\ &\quad \left. + (b_{110} \sin^2 \theta \cos 2\lambda + b_{101} \sin 2\theta \cos \lambda + b_{011} \sin 2\theta \sin \lambda) \right] - \frac{1}{2}, \\ a_2 &= -\frac{(b_{200} + b_{020} + b_{002})}{8} - u_0 + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Обчислюється за формулою:

$$\rho^2 = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0}.$$

Визначення значення радіус-вектора за приведеною вище формулою не дає достовірних результатів, бо величина  $a_0$  невелика. Тому в подальшому

визначимо її з допомогою наближених методів, наприклад, методом половинного ділення.

Проведемо за приведеними формулами обчислення проведемо їх в таблиці 3.11

Таблиця 3.11

Значення відносних радіус-векторів геоїда, знайденого за внутрішнім потенціалом  $U_2$

	0 °	30 °	60 °	90 °	120 °	150°
0 °	0.9977	0.9977	0.9977	0.9977	0.9977	0.9977
30°	0.9980	0.9980	0.9980	0.9980	0.9980	0.9980
60°	0.9984	0.9984	0.9984	0.9984	0.9984	0.9984
90°	0.9988	0.9988	0.9988	0.9988	0.9988	0.9988
120°	0.9984	0.9984	0.9984	0.9984	0.9984	0.9984
150°	0.9980	0.9980	0.9980	0.9980	0.9980	0.9980

Аналогічно виведемо співвідношення для зовнішнього потенціалу  $V$ , елементи якого представляються так:

$$\begin{aligned}
 U_{000} &= \frac{fM}{r}, U_{200} = \frac{fM}{210r^3} (1 - 3 \sin^2 \theta \cos^2 \lambda), \\
 U_{020} &= \frac{fM}{210r^3} (1 - 3 \sin^2 \theta \sin^2 \lambda), U_{002} = \frac{fM}{210r^3} (1 - 3 \cos^2 \theta), \\
 U_{110} &= -\frac{6fM}{35r^3} \sin^2 \theta \cos 2\lambda, U_{101} = -\frac{6fM}{35r^3} \sin 2\theta \cos \lambda, U_{011} = -\frac{6fM}{35r^3} \sin 2\theta \sin \lambda.
 \end{aligned} \tag{3.115}$$

Рівняння знаходження радіус - вектора  $\rho$  по заданих величинах наступне:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{210\rho^3} \left[ (1 - 3 \sin^2 \theta \cos^2 \lambda) \frac{b_{200}}{R^2} + (1 - 3 \sin^2 \theta \sin^2 \lambda) \frac{b_{020}}{R^2} + (1 - 3 \cos^2 \theta) \frac{b_{002}}{R^2} \right. \\
 &\left. - \frac{6b_{110}}{R^2} \sin^2 \theta \cos 2\lambda - \frac{6b_{101}}{R^2} \sin 2\theta \cos \lambda - \frac{6b_{011}}{R^2} \sin 2\theta \sin \lambda \right] + \frac{1}{\rho} = u_0.
 \end{aligned}$$

Аналогічно попередньому, обчислюємо значення радіус-вектора наближеними методами, приведемо їх у вигляді таблиці 3.12

Таблиця 3.12

Значення відносних радіус-векторів геоїда, знайденого за зовнішнім потенціалом  $V_2$

	0°	30 °	60 °	90 °	120 °	150 °
0°	0.9991	0.9991	0.9991	0.9991	0.9991	0.9991
30°	0.9988	0.9988	0.9988	0.9988	0.9988	0.9988
60°	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986
90°	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986
120 °	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986
150 °	0.9988	0.9988	0.9988	0.9988	0.9988	0.9988

Порівняння двох таблиць дозволяє зробити висновок про співпадання значень відносних радіус –векторів, знайдених різними методами. Відхилення в третіх та четвертих знаках можна обґрунтувати як помилками обчислень, так врахуванням малої кількості членів розкладу. Тому для підвищення точності потрібно збільшити кількість членів розкладу та проводити обчислення з більшою кількістю знаків.

### **3.9 Некласичне представлення потенціалу планети всюди збіжними рядами**

Потенціал планети, зображений в інтегральній формі (2), є неперервною функцією в усьому просторі, тому можна ставити задачу апроксимації  $V$  деякою послідовністю функцій ( не обов'язково гармонійних). Відхід від гармонічності дозволяє будувати алгоритм обчислення  $V$ , як в середині планетарного тіла, так і поза ним за допомогою одних і тих же формул. Слід підкреслити, що такий підхід не є новим, наприклад, в [82,146] наголошується

на можливості такої побудови. Нижче наводиться дещо інший підхід до розв'язання цієї проблеми.

Основою для отримання зображень потенціалу є розділення радіус-вектора  $r(Q, P)$  (рис. 3.1) по складових  $r_1(Q)$ ,  $r_2(P)$ , що дозволяє здійснювати інтегрування.

Нехай  $a_e = \text{diam } \rho(Q)$  (для еліпсоїда це найбільша піввісь  $a_e$ ).

Зведемо  $r(Q, P)$ , на відміну від класичного підходу [126,127], до вигляду

$$r(Q, P) = \sqrt{\rho^2 - 2\rho R \cos \psi + R^2} = a_e \sqrt{\left(\frac{\rho}{a_e}\right)^2 - 2\frac{\rho}{a_e} \frac{R}{a_e} \cos \psi + \left(\frac{R}{a_e}\right)^2}. \quad (3.116)$$

Далі для простоти запису вважатимемо  $a_e = 1$ .

Вираз

$$\frac{1}{r(Q, P)} = \left(\sqrt{\rho^2 - 2\rho R \cos \psi - 1 + 1 + R^2}\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2}} \left(\sqrt{1 + \frac{\rho^2 - 2\rho R \cos \psi - 1}{1 + R^2}}\right)^{-1} \quad (3.117)$$

розкладемо в біноміальний ряд

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2}} \left\{ 1 + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(-1)^t (2t-1)!!}{(2t)!!} \left(\frac{\rho^2 - 2\rho R \cos \psi - 1}{1 + R^2}\right)^t \right\}, \quad (3.118)$$

збіжність якого гарантується нерівністю

$$\left| \frac{\rho^2 - 2\rho R \cos \psi - 1}{1 + R^2} \right| < 1. \quad (3.119)$$

З співвідношення  $2(1 - \rho^2) + (R - \rho)^2 + 2\rho R(1 + \cos \psi) > 0$

Отримуємо  $2 - 2\rho^2 + R^2 - 2\rho R + \rho^2 - 2\rho R + 2\rho R \cos \psi + 1 - 1 = 1 + R^2 - \rho^2 + 2\rho R \cos \psi + 1 \geq 0$ ,

або  $1 + R^2 > \rho^2 - 2\rho R \cos \psi - 1$ ,

звідки впливає перша частина нерівності

$$\frac{\rho^2 - 2\rho R \cos \psi - 1}{1 + R^2} < 1.$$

Другу частину виразу (3.119) можна одержати шляхом перетворень

$$(\rho - R)^2 + 2\rho R(1 - \cos \psi) = \rho^2 - 2\rho R + R^2 + 2\rho R - 2\rho R \cos \psi + 1 - 1 > 0,$$

звідки

$$\frac{\rho^2 - 2\rho R \cos \psi - 1}{1 + R^2} > -1.$$

Рівність у співвідношенні (3.119) можлива для  $\cos \psi = 0, \rho = R$ , тобто коли точки  $P, Q$  співпадають. Тому для  $\rho \neq R$  (зовнішній потенціал) ряд (3.118) збігається і його можна почлено інтегрувати

$$V(P) = \frac{fM}{\sqrt{1+R^2}} \int_{\tau} \left\{ 1 + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(-1)^t (2t-1)!!}{(2t)!!} \left( \frac{\rho^2 - 2\rho R \cos \psi - 1}{1+R^2} \right)^t \right\} \delta d\tau. \quad (3.120)$$

Покажемо, що і внутрішній потенціал зображається формулою (3.120).

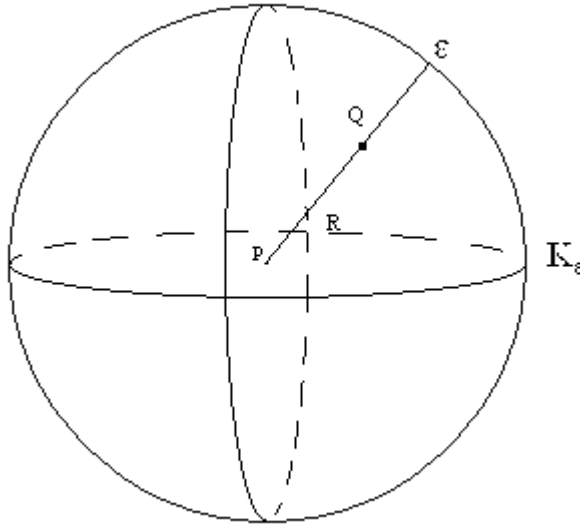


Рис. 3.5. “Сфера безпеки” при інтегруванні ряду (3.118)

Для цього оточимо точку  $P$  “сферою безпеки” радіуса  $\varepsilon$  і подамо  $V$  у вигляді

$$V(P) = V_1(P) + V_2(P) \quad ,$$

де

$$V_1(P) = \frac{fM}{\sqrt{1+R^2}} \left\{ 1 + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(-1)^t (2t-1)!!}{(2t)!!} \int_{K_\varepsilon} \delta \left( \frac{\rho^2 - 2\rho R \cos \psi - 1}{1+R^2} \right)^t d\tau \right\}.$$

$$V_2(P) = \int_{\tau/K_\varepsilon} \frac{\delta}{r} d\tau.$$

Маємо

$$\frac{\rho^2 - 2\rho R \cos \psi - 1 - R^2 + R^2}{1+R^2} = \left( \frac{\rho^2}{1+R^2} - 1 \right),$$

звідки

$$V_1(P) = \frac{fM}{1+R^2} \left\{ 1 + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(-1)^t (2t-1)!!}{(2t)!!} \int_{K_\varepsilon} \delta \left( \frac{\rho^2}{1+R^2} - 1 \right)^t d\tau \right\}.$$

Підінтегральний вираз – біноміальний ряд, сума якого є такою:

$$S(\varepsilon) = 1 + \frac{1}{M} \sum_{t=1}^{\infty} (-1)^t \frac{(2t-1)!!}{(2t)!!} \left( \frac{\rho^2}{1+R^2} - 1 \right)^t = \frac{1}{\left( 1 + \frac{\rho^2}{1+R^2} - 1 \right)^{1/2}} = \frac{\sqrt{1+R^2}}{\rho}.$$

Значить

$$V(P) = S(\varepsilon) \frac{f}{\sqrt{1+R^2}} = \frac{f}{\sqrt{1+R^2}} \int_{K_\varepsilon} \frac{\delta^2 \sqrt{1+R^2}}{\rho} d\tau = \frac{\varepsilon^2}{2} 3\tau,$$

$$\text{і } V_1(P) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f}{\sqrt{1+R^2}} S(\varepsilon) = 0,$$

тобто  $V(P) = V_2(P)$ , в чому і потрібно було переконатись.

Отже, за своєю суттю, зображення (3.92) характерне однаковою формою як зовнішнього, так і внутрішнього потенціалу у вигляді послідовності неперервних функцій [126], які не обов'язково є гармонічними. Перевіримо правильність міркувань на конкретному прикладі:

Розглянемо одиничну кулю  $K$  з постійною густиною. Відомо [15], що її потенціал є таким:

$$V(P) = \begin{cases} \frac{fM}{r}, & P \in K \\ \frac{3-r^2}{2} fM, & P \notin K \end{cases} \quad (3.121)$$

Визначимо величини, що входять в (3.120)

$$D_{t_1 t_2 t_3}^t = \int_{\tau} (\rho^2 - 1)^t \zeta^{t_1} \eta^{t_2} \xi^{t_3} d\tau = \frac{3V 2^t t! (t_1 - 1)! (t_2 - 1)! (t_3 - 1)!}{(2t + l + 3)!}.$$

Тому розклад має такий вигляд:

$$V = \frac{1}{\sqrt{1+R^2}} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\int (\rho^2 - 1) d\tau}{1+R^2} + \frac{3}{8} \frac{\int (\rho^2 - 1)^2 d\tau + \int \xi^2 d\tau x^2 + \int \eta^2 d\tau y^2 + \int \xi^2 d\tau z^2}{(1+R^2)^2} \right. \\ \left. + \frac{\int (\rho^2 - 1)^3 d\tau + 3 \int (\rho^2 - 1)(2\zeta x + 2\eta y + 2\xi z)^2 d\tau}{(1+R^2)^3} + \dots \right) \quad (3.122)$$



Запишемо декілька членів розкладу (3.122), для чого знайдемо величини

$D_{t_1 t_2 t_3}^i$

$$\begin{aligned}
 D_{000}^1 &= \int (\rho^2 - 1) d\tau = -\frac{6V}{5!!}, & D_{000}^2 &= \int (\rho^2 - 1)^2 d\tau = \frac{3V \cdot 2^2 \cdot 2!}{7!!}, \\
 D_{200}^0 &= D_{020}^0 = D_{002}^0 = \frac{3V}{5!!}, & D_{000}^3 &= \frac{3V \cdot 2^3 \cdot 3!}{9!!}, & D_{200}^1 &= \int (\rho^2 - 1) \zeta^2 d\tau = -\frac{6V}{7!!}, \\
 D_{000}^4 &= \frac{3V \cdot 2^4 \cdot 4!}{11!}, & D_{002}^2 &= \int (\rho^2 - 1) \zeta^2 d\tau = D_{200}^2 = D_{020}^2 = \frac{2^2 \cdot 2}{9!} 3V, \\
 D_{400}^0 &= D_{040}^0 = D_{004}^0 = \int \zeta^4 d\tau = \frac{3V}{35}, & D_{200}^0 &= D_{022}^0 = D_{202}^0 = \frac{1}{35} V, & D_{200}^1 &= D_{020}^1 = D_{002}^1.
 \end{aligned} \tag{3.123}$$

Тоді  $V = V_0 + V_1 + V_2 + V_3$ ,

де

$$\begin{aligned}
 V_0 &= \frac{1}{\sqrt{1+r^2}}, V_1 = \frac{1}{5(1+r^2)^{3/2}}, V_2 = \frac{3(7r^2+2)}{70(1+r^2)^{5/2}}, \\
 V_3 &= \frac{2+9r^2}{70(1+r^2)^{7/2}}, V_4 = \frac{(1/33+r^2/6+r^4/8)}{(1+r^2)^{9/2}}.
 \end{aligned} \tag{3.124}$$

Обчислимо значення потенціалу в деяких його точках. Результати обчислень, наведені в табл. 3.4, показують правильність наших припущень, а саме ряд (3.122) збігається як ззовні, в середині, так і на поверхні кулі, при цьому для збільшення точності необхідно брати більшу кількість його членів розкладу.

Таблиця 3.13.

**Значення потенціалу в різних точках.**

$r \setminus V$	Точне значення	$V_0$	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$\Sigma$
$\sqrt{3}$	0.577700	0.0650	0.02500	0.03079	0.0054	0.56118
$\sqrt{8}$	0.353553	0.3333	0.007407	0.01022	0.00806	0.35176
$\sqrt{0.5}$	1.250000	0.8165	0.108866	0.08654	0.08928	1.17790
1	1.000000	0.7071	0.070700	0.00781	0.02310	0.86905

Ще одним підтвердженням правильності наведеної методики є визначення  $V$  в центрі планети. Для цього формулу (3.122) подамо у вигляді:

$$V(0) = V_K + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(-1)^t (2t-1)!!}{(2t)!!} \int_{\tau} (\rho^2 - 1)^t d\tau, \quad (3.125)$$

де

$$\int_{\tau} (\rho^2 - 1)^t d\tau = \frac{3V_K 2^t t! (-1)^t}{(2t+3)!!} \text{ (додаток, формула 3) }, V_K - \text{об'єм кулі.}$$

Тому

$$\begin{aligned} V(0) &= V_K \left[ 1 + 3 \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(-1)^t (2t-1)!! (-1)^t t! 2^t}{(2t)!! (2t+3)!!} \right] = V_K \left[ 1 + 3 \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(2t+1)(2t+3)} \right] = \\ &= \left[ 1 + 3 \sum_{t=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(2t+1)} - \frac{1}{(2t+3)} \right) \right] = V_K \left( 1 + \frac{3}{2} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} \dots \right) \right) = V_K \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{2} V_K. \end{aligned}$$

звідки видно, що обчислене і точне значення  $V_T(0) = \frac{3}{2} V_K$  співпадають.

Виникає питання доцільності використання зображення (3.112), в якому фігурують негармонічні функції. Трактуючи ряд (3.122) як апроксимацію функції  $V \in R^3$  неперервними функціями [126], очевидно можна використати його для обчислень, наприклад, в прямих задачах гравіметрії. Оскільки коефіцієнти розкладу пов'язані з внутрішньою будовою, то мають геофізичний зміст, а тому їх можна використати для вивчення будови планети [127].

### 3.10. Про можливість визначення коефіцієнтів розкладу потенціалу всюди збіжними рядами та їх геофізичне тлумачення

В попередньому розділі отриманий розклад потенціалу сили ваги у вигляді

$$V(p) = \frac{f}{\sqrt{1+R^2}} \left\{ 1 + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(-1)^t (2t-1)!!}{(2t)!!} \int_{\tau} \delta \frac{(\rho^2 - 2\rho R \cos \psi - 1)^t}{(1+R^2)^t} d\tau \right\}, \quad (3.126)$$

Розпишемо вираз у дужках більш детально

$$\begin{aligned} (\rho^2 - 2\rho R \cos \psi - 1)^t &= t! \sum_{l=0}^t \frac{(-2)^l (\rho^2 - 1)^{t-l}}{l!(t-l)!} (\cos \psi \rho R)^l = t! \sum_{l=0}^t \frac{(-2)^l}{l!(t-l)!} \times \\ &l! \sum_{l_1+l_2+l_3=l} \frac{\xi^{l_1} \eta^{l_2} \zeta^3 (\rho^2 - 1)^{t-l} x_1^{l_1} x_2^{l_2} x_3^3}{l_1! l_2! l_3! (1+R^2)^l} \end{aligned} \quad (3.127)$$

Підставивши вираз (3.127) в (3.126), отримаємо

$$V(P) = \frac{fM}{\sqrt{1+R^2}} \left\{ 1 + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(-1)^t}{2^t} \sum_{l=0}^t \frac{(-2)^l}{(t-l)!} \sum_{l_1+l_2+l_3=l} D_{l_1 l_2 l_3}^t W_{l_1 l_2 l_3}^t(x_1 x_2 x_3) \right\}. \quad (3.128)$$

В цих формулах введені наступні позначення:

$$D_{l_1 l_2 l_3}^t = \frac{1}{M} \int_{\tau} \delta(\rho^2 - 1)^\ell \xi_1^{l_1} \zeta^{l_2} \varepsilon^{l_3} d\tau, \quad (3.129)$$

$$W_{l_1 l_2 l_3}^t = \frac{x_1^{l_1} x_2^{l_2} x_3^{l_3}}{(1+R^2)^t} = \frac{R^\ell}{(1+R^2)^t} \sin^{l_1+l_2} \theta \cos^{l_3} \theta \cos^{l_1} \lambda \sin^{l_2} \lambda. \quad (3.130)$$

$D_{l_1 l_2 l_3}^t$  - це величини, що залежать від внутрішньої будови та фігури планети, а тому в випадку стійкого їх визначення можуть бути додатковою інформацією при вивченні внутрішньої структури [127].

Функції  $W_{l_1 l_2 l_3}^t$  не є гармонічними поза тілом  $\tau$ , проте є регулярними, тобто:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} W_{l_1 l_2 l_3}^t(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad (3.131)$$

що впливає з формули (3.130) ( $l < 2t$ ).

Значення  $D_{l_1 l_2 l_3}^t$  можна шукати різними способами, наприклад заданням значень в деяких точках і визначенням коефіцієнтів з системи рівнянь, тобто

$$\begin{cases} V(P_1) = \frac{fM}{\sqrt{1+R_1^2}} \left\{ 1 + \sum_{t=1}^{T_N} \frac{(-1)^t}{2^t} \sum_{l=0}^t \frac{(-2)^l}{(t-l)!} \sum_{l_1+l_2+l_3=l} D_{l_1 l_2 l_3}^t W_{l_1 l_2 l_3}^t(P_1) \right\}, \\ V(P_{T_N}) = \frac{fM}{\sqrt{1+R_{T_N}^2}} \left\{ 1 + \sum_{t=1}^{T_N} \frac{(-1)^t}{2^t} \sum_{l=0}^t \frac{(-2)^l}{(t-l)!} \sum_{l_1+l_2+l_3=l} D_{l_1 l_2 l_3}^t W_{l_1 l_2 l_3}^t(P_{T_N}) \right\}. \end{cases} \quad (3.126)$$

Дослідимо можливість такої реалізації на прикладі кульової планети з постійною густиною ( $\delta = 1$ ), а потенціал якої відповідно заданий на осі  $oz$ .

Зовнішній потенціал в цьому випадку визначається так:

$$\frac{fM}{z} = \frac{fM}{\sqrt{1+z^2}} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(-1)^t (2t-1)!!}{(2t)!!} \frac{1}{M} \int_t \frac{(\rho^2 - 1 - 2\zeta z)^t}{(1+z^2)^t} d\tau$$

або

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \left\{ 1 + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(-1)^t (2t-1)!!}{(2t)!!} \sum_{l=1}^t \frac{\frac{1}{M} \int_{\tau} (\rho^2 - 1)^{t-l} \zeta^l d\tau (-2)^l z^l}{l!} \right\}. \quad (3.127)$$

Ввівши позначення  $y_{t\ell} = \frac{1}{M} \int_{\tau} (\rho^2 - 1)^{t-l} \xi^{\ell} d\tau \cdot \frac{(-1)^t (2t-1)!!}{2^t (t-l)!!!}$ , отримаємо розклад

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \left\{ 1 + \sum_{t=1}^{T_N} \frac{(-1)^t (2t-1)!!}{2^t (1+z^2)^t} \sum_{l=1}^t \frac{y_{t\ell} z^2}{(t-l)!!!} \right\}, \quad (3.128)$$

з якого при фіксованих  $T_N$  отримаємо систему рівнянь, яка при  $T_N=2$  і  $z=i$  набуде вигляду

$$\left\{ \frac{1}{i_j} = \frac{1}{\sqrt{1+i_j^2}} \left[ y_{00} + \frac{y_{10}}{(1+i_1^2)} + \frac{y_{20} + y_{22}z_i^2}{(1+i_j^2)^2} \right] \right\} 1 \leq j \leq 4. \quad (3.129)$$

Детермінант такої системи  $\Delta=0$ . Для знаходження розв'язку даної системи перетворимо її наступним чином

$$\left\{ \frac{1}{i_j} = \frac{1}{\sqrt{1+i_j^2}} \left[ x_0 + \frac{x_1}{1+i_1^2} + \frac{x_2}{(1+i_j^2)^2} \right] \right\}, \quad (3.129)$$

де

$$x_0 = y_{00}, \quad x_1 = \int_{\tau} \left\{ -\frac{1}{2}(\rho^2 - 1) + \frac{3}{2}\xi^2 \right\} \delta d\tau.$$

В такій постановці розв'язок системи рівнянь існує. Узагальнюючи такий підхід, приходимо до системи рівнянь наступного вигляду:

$$\left\{ \frac{1}{z_j} = \frac{1}{\sqrt{1+z_j^2}} \sum_{i=0}^{T_N} \frac{x_i}{(1+z_j^2)^i}, \quad j=1,2,3,\dots \right\},$$

де  $x_i$  - невідомі, вигляд яких збільшенні кількості рівнянь дещо міняється.

Визначимо теоретичні значення перших трьох невідомих:

$$x_0 = \frac{1}{M} \int_{\tau} \delta d\tau = 1;$$

$$x_1 = \frac{1}{M} \int_{\tau} \left\{ -\frac{1}{2}(\rho^2 - 1) + \frac{3}{2}\xi^2 \right\} \delta d\tau = 0,5;$$

$$x_2 = \frac{1}{M} \int_{\tau} \left\{ \frac{3}{8} [(\rho^2 - 1)^2 - 4\xi^2] - \frac{15}{4}(\rho^2 - 1)\xi^2 + \frac{35}{8}\xi^4 \right\} \delta d\tau = 0,371 .$$

Наведемо результати обчислень, послідовно збільшуючи порядок апроксимації, причому здійснимо обрахунки в двох варіантах:

- 1) ліва частина :  $V = \frac{\sqrt{1+z^2}}{2}$ ,
- 2) ліва частина :  $V = \left( \frac{\sqrt{1+z^2}}{2} - 1 \right) (1+z^2)$  .

Результати обчислень наведемо табл. 3.12 та 3.13

Таблиця 3.14.

**Коефіцієнти розкладу потенціалу з лівою частиною 1**

	Кількість рівнянь								
x	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.84580	1.0433	0.9903	1.00175	0.997297	1.000036	0.999995	1.0000005	0.99999995
1	0.11368	0.14921	0.6256	0.46634	0.50704	0.4987678	0.500184	0.4997603	0.5000003
2		1.1551	1.9112	0.61507	0.30191	0.35232	0.371644	0.375549	0.3749158
3			1.2703	0.47827	0.693543	0.183299	0.346165	0.305398	0.31384
4				1.3625	0.746685	0.87444	0.071944	0.330280	0.25982
5					1.45467	-1.0055	1.258142	-0.043291	0.3373755
6						1.544521	0.97151	1.148007	-0.816841
7							1.63148	-1.505918	1.37158729
8								1.715396	-1.7852982
9									1.8148018

Таблиця 3.15

**Коефіцієнти розкладу потенціалу з лівою частиною 2**

	Кількість рівнянь								
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0.8284	0.3658	0.53916	0.491136	0.501637	0.499745	0.500034	0.499996	0.500000
2		0.92515	0.058603	0.490818	0.343809	0.381646	0.373829	0.375176	0.374577
3			1.039986	-0.020876	0.53679	0.243553	0.328958	0.309294	0.313027
4				1.152574	0.464534	0.63274	0.150711	0.305594	0.266624
5					1.26008	0.715009	0.762633	0.053672	0.300622
6						1.362133	0.962027	0.918121	0.051965
7							1.459114	1.206186	1.093920
8								1.551526	1.447608
9									1.635795

Отримані результати підтверджують можливість використання представлення для геофізичних досліджень, оскільки отримані перші три члени практично співпадають з теоретичними. Очевидно, що практичне застосування такої методики вимагає додаткових досліджень, наприклад, застосування апроксимаційного підходу для наближення потенціалу.

### ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 3

1. Виведені формули, які визначають зовнішні та внутрішні кульові функції в загальнопланетарній системі координат, та запропонований спосіб їх перевірки. Вказана спільна частина та відмінність таких подань, та запропоновано представлення потенціалу в комплексному вигляді.
2. Досліджена структура стоксових постійних об'ємного тіла на основі представлення потенціалу в прямокутній системі координат. Запропонована їх класифікація по групах в залежності від вигляду розподілу мас в середині тіла (одновимірні, двох та тривимірні). Показана можливість визначення одновимірної функції розподілу мас двохвісого еліпсоїда). Встановлена важлива залежність лінійної комбінації коефіцієнтів  $b_{mnk}$  у стоксових постійних.
3. Запропонована система неортогональних гармонічних функцій  $u_{mnk}$ , яка дає представлення гравітаційного поля еліпсоїдальної планети всюди збіжними рядами при відомих коефіцієнтах  $b_{mnk}$ .
4. Виведені формули обчислення функцій  $u_{mnk}$  з використанням геометричних характеристик тривісого еліпсоїда (потенціальних факторів). Виконаний аналіз їх визначення за точними та наближеними співвідношеннями.
5. Показано співпадання комбінацій величин  $u_{mnk}$  з внутрішніми та зовнішніми кульовими функціями в випадку сферичної планети.
6. Подано зображення потенціалу у вигляді негармонічних всюди збіжних рядів, яке може бути використано при розв'язанні прямих задач гравіметрії.
7. На конкретному прикладі показана можливість обчислення коефіцієнтів розкладу таких зображень за відомим зовнішнім гравітаційним полем. Їх значення можна використати при інтерпретації внутрішньої структури планет та побудови модельних розподілів мас її надр.



## РОЗДІЛ 4. ПОБУДОВА ТРИВИМІРНИХ МОДЕЛЕЙ ГУСТИНИ РОЗПОДІЛУ МАС ЕЛІПСОЇДАЛЬНИХ ПЛАНЕТ

### 4.1. Загальні зауваження до побудови тривимірних моделей розподілу мас

В попередньому розділі показана доцільність представлення функції розподілу мас комбінаціями многочленів  $W_{mnk}$  і коефіцієнтів  $b_{mnk}$ . При цьому саме вибір цих поліномів дозволив проводити теоретичні дослідження елементів гравітаційного поля, наприклад, його стоксових постійних [100], а з допомогою біортогональних розкладів представляти по іншому потенціал планет, що дозволило з інших позицій інтерпретувати їх гравітаційні особливості, адже, коефіцієнти  $b_{mnk}$  нижчих порядків входять в стоксові постійні більш високих степенів, а тому автоматично при цьому враховуються і вищі гармоніки. Крім того, формула (3.55) має глибокий геофізичний зміст, адже його збіжність в середньоквадратичному гарантує розгляд всіх можливих сукупностей розподілів мас  $\delta$ , які з фізичної точки зору вважаються кусково – неперервними. Такий розклад  $\delta$  є найбільш загальним, оскільки його обмеження його в розумінні збіжності (наприклад рівномірної) не є доцільним, бо тоді буде розглядатись не вся сукупність розподілів, а лише її частина.

Всі тривимірні моделі, які будуються, повинні враховувати попередні дослідження [34], що відображаються в відомих сферично–симетричних моделях планет, особливо добре вивчених для Землі. Тому співвідношення (3.55) представляємо в подальшому [67,68,69]:

$$\delta(x, y, z) = \delta^0(\rho) + \sum_{m+n+k=0}^{\infty} b_{mnk} W_{mnk}(x, y, z), \quad (4.1)$$

а точніше в безрозмірному представленні:

$$\delta(x, y, z) + \delta_c \left( \frac{\delta^0(\rho)}{\delta_c} + \sum_{m+n+k=0}^{\infty} b_{mnk} W_{mnk}(x, y, z) \right), \quad (4.2)$$

де  $\delta^0(\rho)$  – одновимірна модель розподілу мас,  $\delta_c$  – середня густина,  $b_{mnk}$  – коефіцієнти розкладу.

Для визначення коефіцієнтів необхідні дані спостережень [125]. Зрозуміло, що безпосереднє визначення густини можливе тільки на поверхні планети або на невеликій її глибині. Тому, в принципі можна вважати відомою лише деяку узагальнену функцію розподілу мас на поверхні планети:

$$\delta(x, y, z)|_{\Omega} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n P_n^k(\cos \theta) [C_{nk}^{\delta} \cos \kappa \lambda + S_{nk}^{\delta} \sin \kappa \lambda], \quad (4.3)$$

яка визначається набором стоксових постійних

$$\{C_{nk}^{\delta}, S_{nk}^{\delta}\}. \quad (4.4)$$

Зовнішнє гравітаційне поле планети також описується сукупністю стоксових постійних  $\{C_{nk}, S_{nk}\}$ .

Вихідними даними можуть бути і аномалії сили тяжіння та значення відхилень важка (прямовисної лінії)  $\xi, \eta$  на поверхні Землі (планети), що додає ще три пари стоксових постійних:  $\{C_{nk}^{\xi}, S_{nk}^{\xi}\}, \{C_{nk}^{\eta}, S_{nk}^{\eta}\}, \{C_{nk}^{\Delta g}, S_{nk}^{\Delta g}\}$ .

Враховуючи розвиток сучасних технологій, в перспективі є можливим використання трансформант (других похідних) гравітаційного поля, кількість яких – шість. Отже, в загальному сумарне число комплектів стоксових постійних може сягати 16 – ти та більше.

Встановимо залежність [117,118] однозначного визначення коефіцієнтів  $b_{mnk}$ , від заданих  $k$  наборів  $\{C_{nk}^s, S_{nk}^s\}$  при фіксованому (для простоти вважаємо ступінь утримування однаковою –  $n$ ), а  $N=n$  – порядок визначення коефіцієнтів  $b_{mnk}$ , число яких:

$$N1 = \frac{(N+1)(N+2)(N+3)}{6}.$$

Якщо  $k$  – комплектів стоксових постійних до  $N$ -го порядку, то їх сумарна кількість буде:  $N2 = k(N+1)^2$ . Однозначне визначення коефіцієнтів розкладу  $b_{mnk}$  можливе при виконанні нерівності:

$$\frac{(N+1)(N+2)(N+3)}{6} \leq k(N+1),$$

або  $N^2 - N(6k-5) + 6 - 6k \leq 0$ ,

звідки

$$N \leq \frac{6k-5 + \sqrt{36k^2 - 36k + 1}}{2}. \quad (4.5)$$

Підставляючи послідовно  $k$  формулу (4.5), отримаємо залежність між кількістю коефіцієнтів розкладу від вихідної інформації (кількості наборів  $k$ )

Таблиця 0.1.

**Залежність однозначного визначення коефіцієнтів  $b_{mnk}$  для  $k$  наборів стоксових постійних, що представляють вихідну інформацію**

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N	1	7	14	19	25	31	37	43	49	55

З табл. 0.1 видно, що однозначне визначення коефіцієнтів при використанні даних гравітаційного поля можливе тільки для  $N=1$ , а для збільшення порядку апроксимації необхідні додаткові дані, наприклад, задання значення густини на поверхні планети. Для ілюстрації такої можливості приведемо числовий приклад:

Нехай заданий розподіл в одиничній кулі:

$$\delta = 12 - W_{200},$$

причому на поверхні:

$$\delta|_{\Omega} = 12 - x^2.$$

Для такого розподілу вирахуємо стоксові постійні:

$$C_{00} = 12V_k, \quad C_{10} = C_{01} = S_{11} = 0, \quad C_{20} = -\frac{1}{35}V_k, \quad C_{22} = \frac{1}{70}V_k, \quad C_{00}^{\delta} = 37V_k,$$

тут  $V_k$  – об'єм кулі.

Представляючи функцію густини рядом (4.1), коефіцієнти розкладу знаходимо з рівнянь:

$$C_{00} = b_{000}V_k = 12V_k, C_{10} = b_{100} = 0, C_{11} = b_{010} = 0, S_{01} = b_{010} = 0,$$

а також

$$\begin{cases} C_{20} = [b_{002} - \frac{1}{2}(b_{200} + b_{020})] \frac{1}{35} \\ C_{22} = \frac{1}{140} ((b_{200} - b_{020})) \\ C_{00}^{\delta} = \frac{6V_k}{35} + \frac{1}{35} (b_{200} + b_{020} + b_{002}) \end{cases} .$$

Використовуючи знайдені величини, розв'яжемо обернену задачу, тобто знайдемо коефіцієнти  $b_{200}$ ,  $b_{020}$ ,  $b_{002}$  ( $b_{110} = b_{110} = b_{110} = 0$ , бо  $S_{21} = C_{21} = S_{22} = 0$ ) з системи рівнянь:

$$\begin{cases} -\frac{1}{35} = \frac{1}{35} [b_{002} - \frac{1}{2}(b_{200} + b_{020})] \\ \frac{1}{70} = \frac{1}{70} (b_{200} - b_{020}) \\ 37 = 36 + b_{002} + b_{020} + b_{200} \end{cases}$$

Звідки  $b_{002} = 0$ ,  $b_{020} = 0$ ,  $b_{200} = -1$ .

Отже, отримали шуканий розподіл, що підтверджує необхідність використання інших джерел інформації [26,50,115,123], зокрема, значення густини на поверхні небесного тіла, для однозначного визначення функції .

#### 4.2. Побудова тривимірної моделі другого порядку

Використання поверхневої густини збільшує порядок апроксимації, але таке визначення є не зовсім коректним, так як реально вона не є постійною та неточно визначається на поверхні. Разом з тим є ще одна величина [149], отримана надійно з даних спостережень – динамічне стиснення  $H$ , яка дозволяє збільшити апроксимацію до  $N = 2$  [50,57] і визначається наступним чином:

$$H = - \frac{C_{20}}{\int_{\tau} (y_1^2 + y_2^2) \delta d\tau} . \quad (4.6)$$

В сукупності з стоксовими постійними до другого порядку включно вона породжує систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2b_{200} - (b_{200} + b_{002}) = 70C_{20}\delta_c - 7b_{000} \left[ (2\gamma^2 - (\alpha^2 + \beta^2)) \right], \\ b_{200} - b_{020} = \left[ (280C_{22}\delta_c - 7b_{000} (\alpha^2 - \beta^2)) \right], \\ b_{200} + b_{020} = \frac{-35C_{20}}{H} \delta_c - 7b_{000} (\alpha^2 + \beta^2), \\ b_{000} = C_{00}\delta_c, \\ b_{101} = \frac{35}{2} C_{21}\delta_c, \\ b_{011} = \frac{35}{2} S_{21}\delta_c, \\ b_{110} = 35S_{22}\delta_c, \end{cases}$$

розв'язок якої є наступний:

$$\begin{aligned} b_{000} &= \delta_c \\ b_{002} &= \frac{35}{2} \left( \frac{-C_{20}}{2H} + C_{20} \right) \delta_c - \frac{7}{2} \gamma^2 b_{000}, \\ b_{200} &= \frac{35}{2} \left( 4C_{22} - \frac{C_{20}}{2H} \right) \delta_c - \frac{7}{2} \alpha^2 b_{000}, \\ b_{020} &= \frac{35}{2} \left( -\frac{C_{20}}{2H} - 4C_{22} \right) \delta_c - \frac{7}{2} \beta^2 b_{000}, \\ b_{101} &= \frac{35}{2} C_{21} \delta_c, b_{011} = \frac{35}{2} S_{21} \delta_c, b_{110} = 35S_{22} \delta_c. \end{aligned} \tag{4.7}$$

тут і далі  $\delta_c$  – середня густина планети,

$$\alpha = \frac{a}{a_e}, \beta = \frac{b}{a_e}, \gamma = \frac{c}{a_e},$$

$a, b, c$  – півосі планетарного еліпсоїда,

$a_e$  – екваторіальний радіус (як правило  $a = a_e = b$ )

Визначимо такий розподіл для деяких планет, результат ілюструємо табл.

0.2.

Таблиця 0.2.

Коефіцієнти розкладу неперервного розподілу  $\delta_2$ , його значення в центрі мас та на поверхні планети

Планет а	стоксові			$b_{200}$	$b_{020}$	$b_{002}$	$\delta_0$	$\delta$
	$c_{20}10^{-7}$	$c_{22}10^{-5}$	H, 10-3					
Земля	1083.72	0.28124	3.273995	-0.6255	-0.6108	-0.6023	10.58	1.99
Місяць	203.236	1.44314	6.31	-0.6858	-0.6250	-0.6819	6.667	1.04
Марс	-8746	-8.50	5.07	-0.1601	-0.1259	-0.1260	4.7519	3.30

Приведені в табл. 0.2 результати показують дещо занижені значення густини, зокрема, в центрі планет, що пояснюється практикою апроксимації кусково-неперервних функцій і утримуванням невеликої кількості доданків. Для прискорення збіжності представимо  $\delta$  у вигляді:

$$\delta_2(x_1, x_2, x_3) = \delta^0(\rho) + \sum_{m+n+k=0}^2 W_{mnk}(x_1, x_2, x_3),$$

коефіцієнти розкладу в даному випадку визначаються:

$$\begin{aligned}
 b_{000} &= \delta_c \left( 1 - \frac{3}{\delta_c} \int_0^1 \delta^0(\rho) \rho^2 d\rho \right), \quad b_{110} = 35\delta_c S_{21}, \quad b_{101} = \frac{35}{2} \delta_c C_{21}, \quad b_{011} = \frac{35}{2} \delta_c S_{21}, \\
 b_{200} &= \frac{7}{2} \alpha^2 \delta_c \left[ 5 \left( \frac{-C_{20}}{2H} + C_{20} \right) - 1 - \frac{5}{\delta_c} \int_0^1 \delta^0(\rho) \rho^4 d\rho + \frac{3}{\delta_c} \int_0^1 \delta^0(\rho) \rho^2 d\rho \right], \\
 b_{020} &= \frac{7}{2} \beta^2 \delta_c \left[ 5 \left( \frac{-C_{20}}{2H} - 2C_{22} \right) - 1 - \frac{5}{\delta_c} \int_0^1 \delta^0(\rho) \rho^4 d\rho + \frac{3}{\delta_c} \int_0^1 \delta^0(\rho) \rho^2 d\rho \right], \quad (4.8) \\
 b_{200} &= \frac{7}{2} \gamma^2 \delta_c \left[ 5 \left( 1 - \frac{1}{2H} \right) C_{20} - 1 - \frac{5}{\delta_c} \int_0^1 \delta^0(\rho) \rho^4 d\rho + 3 \int_0^1 \delta^0(\rho) \rho^2 d\rho \right].
 \end{aligned}$$

Числові експерименти, проведені для Землі [55,67], підтверджують ефективність такого підходу, а тому формули (4.8) використовуються при дослідженні внутрішньої структури Землі та інших планет [66,69, 140,141,142].

### 4.3. Оцінка точності представлення густини многочленом другого порядку

#### 4.3.1. Визначення середньої густини небесних тіл Сонячної системи.

Середню густину планети зручно визначати у вигляді:

$$\delta_c = \frac{M}{V} = \frac{fM}{fV},$$

оскільки в системі фундаментальних астрономічних постійних задається геоцентрична постійна [81,181,183]. Кавендишева гравітаційна стала  $f$  визначається шляхом лабораторних експериментів [5,30,85-87] та приймається в наших розрахунках, як рекомендовано Комітетом даних для науки та техніки (CODATA-Internationally recommended values of the Fundamental Physics Constants), наступною:

$$f = 6.67428 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ с}^{-2} \text{ кг}^{-1} \left( \text{н} \cdot \text{м}^2 \text{ кг}^{-2} \right)$$

В залежності від способу задання форми тіла формула для його об'єму  $V$  запишеться:

$$V_k = \frac{4}{3} \pi R^3 \text{ - куля,}$$

$$V_e = \frac{4}{3} \pi abc \text{ - тривісний еліпсоїд,}$$

$$V_e = \frac{4}{3} \pi a_e^3 \frac{\alpha}{(\alpha-1)} \text{ - двохвісний еліпсоїд.}$$

Остання формула виражає об'єм через екваторіальний радіус та геометричне стиснення. Тому для цих випадків середня густина кулі, двохвісного та тривісного еліпсоїда визначаються відповідно:

$$\delta_c^k = \frac{3}{4\pi} \frac{(fM)}{fR^3}, \delta_c^e = \frac{3}{4\pi} \frac{(fM)}{fabc}, \delta_c^{a_e} = \frac{3}{4\pi} \frac{(fM)}{fa_e^3} \frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

Середньоквадратичні похибки обчислень за заданими формулами мають наступний вигляд:

$$m_{\delta_c^k}^2 = \left( \frac{3fM}{4\pi R^3 f} \right)^2 \left\{ \frac{m_{fM}^2}{(fM)^2} + \frac{m_f^2}{f^2} + 9 \frac{m_R^2}{R^2} \right\},$$

$$m_{\delta_c^e}^2 = \left( \frac{3fM}{4fabc} \right)^2 \left\{ \frac{m_{fM}^2}{(fM)^2} + \frac{m_f^2}{f^2} + \frac{m_a^2}{a^2} + \frac{m_b^2}{b^2} + \frac{m_c^2}{c^2} \right\},$$

$$m_{\delta_c^e}^2 = \frac{3}{4\pi} \frac{(fM)}{fa_e^3} \frac{\alpha}{(\alpha-1)} \left\{ \frac{m_{fM}^2}{(fM)^2} + \frac{m_f^2}{f^2} + 9 \frac{m_{a_e}^2}{a_e^2} + \frac{m_\alpha^2}{\alpha^2 (\alpha-1)^2} \right\}.$$

В залежності від способу представлення апроксимації фігури небесного тіла, визначимо формули для знаходження його середньої густини. Вважаємо при цьому, що для Землі найкращим наближенням є двохвісний еліпсоїд з параметрами, визначеними в “Стандартній Землі” [183], для супутника Місяць та деяких планет оптимальним є поверхня у формі кулі [10,20,21,85] для Марса–тривісний еліпсоїд [10,69]. Використовуючи дані, взятими з джерел [6,20, 21,29], обчислимо середні густини та їх середньоквадратичні похибки і приведемо їх в табл. 4. 3.

Таблиця 0.3.

**Значення параметрів для визначення середніх густин тіл Сонячної системи, її величина та похибки**

Небесне Тіло	Геоцентрична постійна $fM$	Середній Радіус $R$	$a_e$	$1:\alpha$	Середня Густина $\delta_c$
(розмірність)	$10^{10} \text{ см}^2 / \text{с}^2$	$10^5 \text{ см}$	$10^5 \text{ см}$	-	$\text{г} / \text{см}^3$
Сонце	$139258 \cdot 10^7$	$(6.96 \pm 001)10^7$	-	-	$1.39258 \pm 0.00437$
Земля	$398600.44 \pm 0.01$	6371	$6378.137 \pm 1$	$1:298.257 \pm 0.003$	$5.514816 \pm 0.00938$
Місяць	$490272 \pm 0.1$ 0	$1737.53 \pm 0.03$			$3.343924 \pm 0.000328$
Меркурій	$22032 \pm 1$	$2432 \pm 7$			$5.43000 \pm 0.003278$
Венера	$324859.6 \pm 0.5$	$6052 \pm 6$			$5.1704 \pm 0.0023$
Марс	$4282 \cdot 10^3 \pm 0.1$	$3402 \pm 3$			$3.8922 \pm 0.0026$



Продовження табл.0.3					
Юпітер	126687000 ± 500	70000 ± 100			1.32146 ± 0.00223
Сатурн	37938000 ± 200	587820 ± 240			0.72021929 ± 0.000447
Уран	5786700 ± 1500	25170 ± 240			1.2196856 ± 0.001229
Нептун	6878000 ± 11000	24500 ± 300			1.67332 ± 0.33168
Плутон	900 ± 30	1300			1.46564 ± 0.182574

Отримані результати в основному не суперечать даним, що наводяться в інших публікаціях [15,21 ,173], а розбіжності можна пояснити використанням різних даних.

#### 4.3.2. Формула оцінки точності знаходження густини другого порядку.

Функція густини подається наступним співвідношенням:

$$\delta(x, y, z) = \delta_c (b_{000} + b_{100}W_{100} + b_{010}W_{010} + b_{001}W_{001} + b_{200}W_{200} + b_{020}W_{020} + b_{002}W_{002} + b_{110}W_{110} + b_{101}W_{101} + b_{011}W_{011}) \quad (4.9)$$

Коефіцієнти  $b_{mnk}$  визначаються за стоксовими постійними  $C_{00}$ ,  $C_{nk}$  ( $n, k \leq 2$ ), середньою густиною  $\delta_c$  та динамічним стисненням  $H$ , які задаються з певною похибкою, яка при визначенні густини в різних точках інша (подібна оцінка одержана в [42]). Тому визначаємо максимальну похибку, використовуючи оцінку (2.50):

$$\begin{aligned} |W_{200}| \leq \frac{1}{a^2}, |W_{020}| = \frac{1}{b^2}, |W_{002}| < \frac{1}{c^2}, \\ |W_{110}| \leq \frac{\sqrt{2}}{ab}, |W_{101}| \leq \frac{\sqrt{2}}{ac}, |W_{011}| \leq \frac{\sqrt{2}}{bc}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Абсолютна похибка обчислення густини  $\delta_2$  визначається наступною формулою:

$$\begin{aligned} \Delta\delta_2 = |d\delta_2| &= \left| \frac{\partial\delta_2}{\partial\delta_c} \right| \Delta\delta_c + \left| \frac{\partial\delta_2}{\partial C_{20}} \right| \Delta C_{20} + \left| \frac{\partial\delta_2}{\partial C_{22}} \right| \Delta C_{22} + \\ &+ \left| \frac{\partial\delta_2}{\partial C_{21}} \right| \Delta C_{21} + \left| \frac{\partial\delta_2}{\partial S_{21}} \right| \Delta S_{21} + \left| \frac{\partial\delta_2}{\partial S_{22}} \right| \Delta S_{22} + \left| \frac{\partial\delta_c}{\partial H} \right| \Delta H \quad . \end{aligned} \quad (4.11)$$

Визначаємо часткові похідні:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\delta_2}{\partial\delta_c} &= 1 + \frac{35}{2} (C_{21}W_{101} + S_{21}W_{011} + 2S_{22}W_{110}) + \\ &+ \frac{7}{2} \left[ 5 \left( 2C_{22} - \frac{1}{2}C_{20} \right) - \alpha^2 \right] W_{200} + \left[ 5 \left( -2C_{22} - \frac{1}{2}C_{20} \right) - \beta^2 \right] W_{020} + \\ &+ \left[ 5 \left( C_{20} - \frac{1}{2}H \right) - \gamma^2 \right] W_{002}, \\ \frac{\partial\delta_2}{\partial C_{20}} &= -\frac{35}{2} \left( \frac{W_{200}}{2H} + \frac{W_{020}}{2H} - \left( 1 - \frac{1}{2H} \right) \right) W_{002}, \\ \frac{\partial\delta_2}{\partial C_{22}} &= \frac{7}{2} (10(W_{200} - W_{020})), \\ \frac{\partial\delta_2}{\partial H} &= \frac{7}{2} \left( \frac{5C_{20}}{2H^2} (W_{200} + W_{020}) - \frac{5C_{20}}{2H^2} W_{002} \right) = \frac{35C_{20}}{2H^2} \left( \frac{W_{200} + W_{020}}{2} - W_{002} \right), \\ \frac{\partial\delta_2}{\partial C_{21}} &= 35W_{101}, \quad \frac{\partial\delta_2}{\partial S_{21}} = 35W_{011}, \quad \frac{\partial\delta_2}{\partial S_{22}} = 70W_{110}. \end{aligned}$$

Спочатку визначимо похибку в деяких точках, наприклад, в центрі мас (0,0,0):

$$\begin{aligned} W_{200}(0,0,0) &= W_{020}(0,0,0) = W_{002}(0,0,0) = \frac{1}{2} \\ \frac{\partial\delta_2}{\partial C_{22}} &= 0, \quad \frac{\partial\delta_2}{\partial C_{20}} = -\frac{7}{2} \left( \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{2} + \frac{1}{2} \right) = -\frac{21}{4H}, \quad \frac{\partial\delta_2}{\partial H} = \frac{35}{2H^2} \left( 1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{35}{4H^2}, \\ \frac{\partial\delta_2}{\partial\delta_c} &= 1 + \frac{7}{2} \left( \frac{\delta C_{22} - \frac{C_{20}}{2H} - 1}{2} \right) + \frac{\left( 5 \left( -2C_{22} - \frac{C_{20}}{2H} - 1 \right) \right)}{2} + \frac{5 \left( C_{20} \left( 1 - \frac{1}{H} \right) - 1 \right)}{2} = \end{aligned}$$

$$= 1 + \frac{7}{2} \left( \frac{-10C_{20} - 3 + 5C_{20}}{H} \right).$$

Абсолютна похибка визначається:

$$\Delta\delta_2 = \frac{35}{4H^2} \Delta H + \left( 1 + \frac{7}{2} \left( 5C_{22} - \frac{C_{20}}{2H} \right) - 1 \right) \Delta\delta_c + \frac{21}{4H} \Delta C_{20}.$$

Якщо точка знаходиться на поверхні еліпсоїди, наприклад, в точці  $(a, 0, 0)$ , то одержимо:

$$W_{200} = 1, W_{020} = 0, W_{002} = 0$$

$$\frac{\partial\delta_2}{\partial\delta_c} = 1 + \frac{7}{2} \left[ 5 \left( 2C_{22} - \frac{C_{20}}{2H} \right) - 1 \right], \quad \frac{\partial\delta}{\partial C_{20}} = \frac{-7}{4H}, \quad \frac{\partial\delta}{\partial C_{22}} = 35, \quad \frac{\partial\delta}{\partial H} = \frac{35C_{20}}{4H^2}$$

Абсолютна похибка обчислюється:

$$\Delta\delta_2 = \left| \left( \frac{35}{2} \left( 2C_{22} - \frac{C_{20}}{2H} \right) - \frac{5}{2} \right) \Delta\delta_c + \frac{7}{2H} \Delta C_{20} + 35 \Delta C_{22} + \frac{35C_{20}}{H^2} \Delta H \right|.$$

Для отримання максимальної оцінки похибки використаємо співвідношення (4.10), та нерівність

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + \dots + a_n^2), \quad (4.12)$$

яка доводиться для  $n=2$  наступним чином:

$$((a_1 + a_2)^2 \leq a_1^2 + a_2^2 + 2|a_1 a_2|, \quad 2|a_1 a_2| \leq a_1^2 + a_2^2 \leq 2(a_1^2 + a_2^2),$$

Для довільного  $n$  нерівність доводиться методом математичної індукції.

Це дозволяє дати оцінку для похідних, враховуючи нерівності (4.10) для  $W_{mnk}$ :

$$\left| \frac{\partial\delta_2}{\partial\delta_c} \right|^2 \leq 1 + \frac{35}{4} \cdot 4 \cdot \left| 5 \left( 2C_{22} - \frac{C_{20}}{2H} \right)^2 - 1 \right| \cdot 4 + \left| 5 \left( -C_{22} - \frac{C_{20}}{2H} \right) - 1 \right| \cdot 2 + \left| 5 \left( 2C_{22} - \frac{C_{20}}{2H} \right)^2 - 1 \right| \cdot 2,$$

$$\frac{\partial\delta_2^2}{\partial\delta_{C_{20}}} = \frac{7}{2H} \cdot 3 \left| \frac{4+4}{4} + 4 \right| = \frac{49 \cdot 3}{4H^2} \cdot 6,$$

$$\frac{\partial\delta_2^2}{\partial\delta_{C_{22}}} = \frac{49}{4} \cdot 100(4+4) = \frac{49 \cdot 100}{4} \cdot 8 = 980011,$$

$$\frac{\partial\delta_2^2}{\partial H^2} = \frac{35^2 C_{20}^2}{4H^4} \left( \frac{4+4}{2} + 4 \right) = \frac{35^2 C_{20}^2}{4H^4} \cdot 6,$$

звідки одержимо максимальне значення похибки:

$$\Delta\delta_2 = \left( \frac{7\sqrt{18}}{2H} \Delta c_{20} + 70\sqrt{2} \Delta c_{22} + 35\Delta c_{21} + 35\Delta s_{21} + \frac{35}{2} \Delta s_{22} \frac{35C_{20}}{2H^2} \Delta H \right) \delta_c + \left| \frac{\partial \delta}{\partial \delta_c} \right| \Delta \delta_c, \quad (4.13)$$

або її середньоквадратичне наближення:

$$m_{\Delta\delta_2}^2 = \delta_c^2 \left( \frac{882}{4H^2} m_{\Delta c_{20}}^2 + 9800 m_{\Delta c_{22}}^2 + 1225 (m_{\Delta c_{21}}^2 + m_{\Delta s_{21}}^2 + 4m_{\Delta s_{22}}^2) + \frac{1225C_{20}^2}{4H^4} m_{\Delta H}^2 \right) + \left( \frac{\partial \delta}{\partial \delta_c} \right)^2 m_{\Delta \delta_c}^2. \quad (4.14)$$

#### 4.4. Наближений метод Мещерякова Г. О побудови тривимірного розподілу мас.

Вище був поданий алгоритм безпосереднього визначення густини  $\delta_2$ . Його також можна отримати, користуючись методом, запропонованим професором Мещеряковим Г. О., що ґрунтується на зведенні задачі до проблеми моментів [50,53]. За стоксовими постійними та динамічним стисненням  $H$  степеневі моменти до другого порядку включно визначаються так:

$$\begin{aligned} I_{000} &= \delta_c c_{00}, I_{001} = \delta_c c_{10}, I_{100} = \delta_c c_{11}, I_{010} = \delta_c s_{11}, \\ I_{200} &= \delta_c \left( \frac{-c_{20}}{2H} + c_{22} \right), I_{020} = \delta_c \left( \frac{-c_{20}}{2H} - c_{22} \right), I_{002} = \frac{-c_{20}}{H}, \\ I_{110} &= \delta_c s_{22}, I_{101} = \delta_c c_{21}, I_{011} = \frac{1}{2} \delta_c s_{21} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Тоді коефіцієнти розкладу відповідно запишуться:

$$\begin{aligned} b_{200} &= \frac{7}{2} \delta_c (5I_{200} - I_{000}), b_{020} = \frac{7}{2} \delta_c (5I_{020} - I_{000}), b_{002} = \frac{7}{2} \delta_c (5I_{002} - I_{000}), \\ b_{101} &= \frac{35}{2} \delta_c I_{101}, b_{110} = \frac{35}{2} \delta_c I_{110}, b_{011} = \frac{35}{2} \delta_c I_{011}, \\ b_{000} &= \delta_c I_{000}, b_{100} = \delta_c I_{100}, b_{010} = \delta_c I_{010}, b_{001} = \delta_c I_{001}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Подальше використання стоксових постійних вищих порядків можливе з допомогою наближеного методу побудови тривимірного розподілу мас, запропонованого професором Мещеряковим Г. О. [50,53], суть якого полягає в наступному:

Нехай маємо деякий розподіл мас  $\delta$  і стоксові постійні  $n$  – го порядку.  $C_{nk}, S_{nk}$  ( $k < n$ ). Далі виконуємо такі операції:

1. Обчислюємо степеневі моменти  $I_{pqs}^*$  та модельні стоксові постійні  $C_{nk}^*, S_{nk}^*$   $n$  – го порядку;

2. Степеневі моменти шуканої густини визначаємо за формулою

$$I_{pqs} = I_{pqs}^* + \Delta I_{pqs}; \quad (4.17)$$

3. Підставляємо (4.17) в вирази зв'язку стоксових постійних і степеневих моментів (3.49), в результаті одержимо систему рівнянь

$$A\Delta I = C - C^*, \quad (4.18)$$

тут

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{00n}^{n0} & \dots & \alpha_{0n0}^{n0} \\ \alpha_{00n}^{n1} & \dots & \alpha_{0n0}^{n1} \\ \beta_{00n}^{n1} & \dots & \beta_{0n0}^{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_{00n}^{nm} & \dots & \beta_{0n0}^{nm} \end{pmatrix}, \quad \Delta I = \begin{pmatrix} \Delta I_{00n} \\ \Delta I_{0n-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta I_{0n0} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_{n0} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ C \end{pmatrix}, \quad C^* = \begin{pmatrix} C_{n0}^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ C_{n0}^* \end{pmatrix}$$

Оскільки система рівнянь недовизначена, то розв'язуємо її під умовою

$$\sum_{p+q+s=n} \Delta I_{pqs}^2 = \min.$$

Розв'язок в такому випадку запишеться:

$$A^T A \Delta I = A^T (C - C^*)$$

або остаточно:

$$\Delta I = (A^T A)^{-1} A^T (C - C^*). \quad (4.19)$$

4. За обчисленими степеневими моментами  $I_{pqs}^*$  ( $p+q+s \leq n$ ) знаходимо величини:  $I_{pqs} = I_{pqs}^* + \Delta I_{pqs}$ , а за ними і коефіцієнти розкладу  $b_{mnk}$  за формулою (4.1), тобто отримуємо шуканий розподіл.

Таким чином, з вище сказаного впливає загальний наближений ітераційний метод побудови модельних розподілів, алгоритм якого наступний:

1. За початкове наближення беремо  $\delta_2(x_1, x_2, x_3)$ , використовуючи формули (4.8). за вище поданою методикою отримуємо –  $\delta_3(x_1, x_2, x_3)$ . При

цьому значення стоксових постійних до другого порядку включно не змінюються.

2. Повторно беручи за відому функцію  $\delta - \delta_3$  узгоджуємо цей розділ з стоксовими постійними четвертого порядку, одержуюючи  $\delta_4(x_1, x_2, x_3)$ .

3. Повторюємо цей ітераційний процес до встановленого  $N$ . В результаті отримуємо таку модельну функцію розподілу, що добре відповідає геофізичній інформації та задовольняє стоксовим постійним до  $N$ -го порядку.

Такий спосіб побудови модельного розподілу має свої особливості: обчислені стоксові постійні  $C_{nk}^*, S_{nk}^*$  не залежать від коефіцієнтів  $b_{mnk}$ , а лише від їх лінійної комбінації, яка повторює залежності для кульових функцій в декартовій системі координат, в зв'язку з чим вони є сумою стоксових постійних  $C_{nk}, S_{nk}$  ( $n, k < n$ ), що впливає з досліджень, приведених в розділі 2 (формула (3.53)). Друга особливість – це визначення коефіцієнтів

$b_{mnk}$  ( $m+n+k=N$ ). Дійсно нехай маємо  $\delta_{N-1}(x, y, z) = \sum_{m+n+k=0}^{N-1} b_{mnk} W_{mnk}(x, y, z)$

Це означає, що значення  $b_{mnk} = 0$  ( $m+n+k=N$ )

або

$$\sum_{m+n+k=0}^N d_{mnk}^{pqs} I_{pqs} = 0. \quad (4.20)$$

Подальше обчислення  $b_{mnk}$  з використанням знайдених моментів дає :

$$b_{mnk} = \sum_{p+q+s=0}^{N-1} d_{mnk}^{pqs} I_{pqs}^* + \sum_{p+q+s=N} d_{mnk}^{pqs} (I_{pqs}^* + \Delta I_{pqs}) = \sum_{p+q+s=0}^N d_{mnk}^{pqs} I_{pqs}^* + d_{mnk}^{mnk} \Delta I_{mnk}.$$

Тому  $b_{mnk} = \frac{d_{mnk}^{mnk}}{l_{mnk}} \Delta I_{mnk}$  і це значно спрощує алгоритм для обчислення

коефіцієнтів. Саме значення  $d_{mnk}^{mnk}$  можна отримати з твірної функції (1.2).

Дійсно, диференціюючи  $\Psi(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$  за змінними  $x, y, z$  відповідну кількість, раз одержимо за умови  $x = y = z = 0$ :

$$\alpha^m \beta^n \gamma^k \left( (-1)^N \frac{(2N+1)!!}{2N!!} 2^n \right) = \alpha^m \beta^n \gamma^k d_{mnk}^{mnk} m!n!k!$$

або

$$d_{mnk}^{mnk} = \frac{(2N+1)!!}{m!n!k!},$$

звідки

$$b_{mnk} = \frac{(2N+1)!!}{m!n!k!} \left( \frac{N!}{(2N+3)m!n!k!} \right) = \frac{(2N+3)!!}{N!} \Delta I_{mnk}. \quad (4.21)$$

Таке уточнення дозволяє здійснювати пошук коефіцієнтів без використання рекурентних співвідношень (2.5), що вочевидь спрощує алгоритм їх визначення.

#### 4.5. Приведення фундаментальних постійних до загальної планетарної системи відліку. Використання цих даних при побудові тривимірних функцій розподілу мас планет

Продовжимо подальші удосконалення класичного наближеного методу побудови розподілу мас. Стоксові постійні (геодезичні параметри) визначені в основному в загальнопланетарній системі відліку  $(0x_1, x_2, x_3)$ , а динамічне стиснення (астрономічний параметр) – в системі, осі якої є головними осями інерції  $(0y_1, y_2, y_3)$ , при цьому виникає проблема приведення цих величин в одну із систем. На сьогодні в методиці створення моделей густини стоксові постійні приводились в систему  $(0y_1, y_2, y_3)$  [40], хоча більш логічно робити навпаки, тобто – зводити всі величини в систему  $0x_1, x_2, x_3$  [104,113].

Отже, позначимо загальнопланетарну систему координат через  $0x_1, x_2, x_3$ , а систему, пов'язану з головними осями інерції  $0y_1, y_2, y_3$ . Вектори в цих системах координат (рис. 0.1) можна відобразити так:

$$Y = AX, \quad (4.22)$$

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

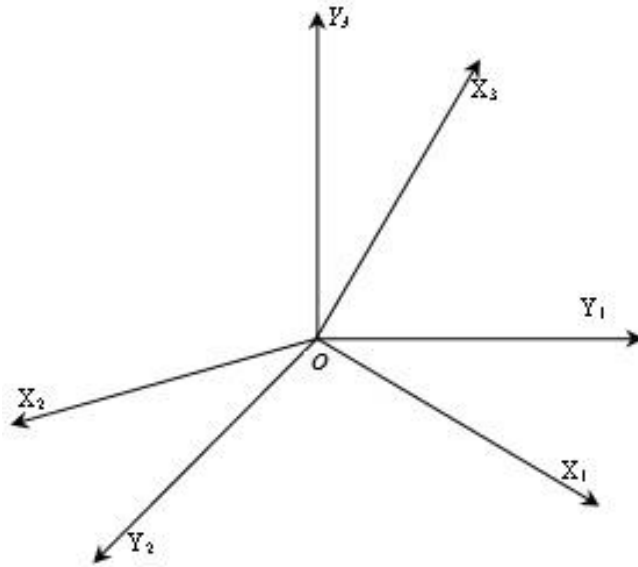


Рис. 0.1. Геометричний зміст формули (4.22)

Потенціал, що створюється доданком при  $n = 2$  такий:

$$V_2 = \frac{f}{R^3} \int_{\tau} P_2(\cos\psi) \delta d\tau$$

і в системі координат  $ox_1, x_2, x_3$ , згідно формули (3.25), має вигляд:

$$V_2 = \frac{f}{2R^3} \int_{\tau} \rho^2 \delta \left\{ \frac{3(\xi_1 x_1 + \eta x_2 + \zeta x_3)^2}{\rho^2 R^2} - 1 \right\} d\tau =$$

$$\frac{f}{2R^3} \int_{\tau} \left\{ \frac{3(\xi^2 x_1^2 + \eta^2 x_2^2 + \zeta^2 x_3^2) + 2(\xi x_1 + \eta x_2 + \zeta x_3) - (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}{R^2} \right\} d\tau =$$

$$\frac{f}{2R^5} \int_{\tau} \left\{ x_1^2 (2\xi^2 - \eta^2 - \zeta^2) + x_2^2 (2\eta^2 - \xi^2 - \zeta^2) + x_3^2 (2\zeta^2 - \xi^2 - \eta^2) + 6(\xi\eta x_1 x_2 + \xi\zeta x_1 x_3 + \eta\zeta x_2 x_3) \right\} d\tau$$

тобто є квадратичною функцією координат  $x_1, x_2, x_3$ , яка після введених позначень:

$$C_{20} = \frac{1}{MR^2} \int_{\tau} \delta \left[ \zeta^2 - \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) \right] d\tau, C_{22} = \frac{1}{4MR^2} \int_{\tau} (\xi^2 - \eta^2) \delta d\tau,$$

$$C_{21} = \frac{1}{MR^2} \int_{\tau} \xi\zeta \delta d\tau, S_{21} = \frac{1}{MR^2} \int_{\tau} \eta\zeta \delta d\tau, S_{22} = \frac{1}{2MR^2} \int_{\tau} \xi\eta \delta d\tau$$

має наступний вигляд:

$$V_2 = \frac{fM}{2R^5} \int_{\tau} \delta \left\{ x_1^2 \left[ \left( -\zeta^2 + \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) + \frac{3}{2}(\xi^2 - \eta^2) \right) \right] + x_2^2 \left[ \left( -\zeta^2 + \frac{\eta^2 + \zeta^2}{2} + \frac{3}{2}(\eta^2 - \xi^2) \right) \right] + \right.$$



$$+2x_3^2 \left[ \zeta^2 - \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) \right] + 6(\xi\eta x_1 x_2 + \zeta\xi\zeta x_1 x_3 + \zeta yz\eta\zeta) \} d\tau =$$

$$= \frac{fM}{2R^3} \{ x_1^2 (C_{20} + 6C_{22}) + x_2^2 (-C_{20} - 6C_{22}) + 2C_{20}x_3^2 + 6C_{21}x_1x_2 + 6S_{21}x_2x_3 + 12S_{22}x_1x_2 \} ,$$

а її матриця має вигляд:

$$D = \begin{pmatrix} -C_{20} + 6C_{22} & 6S_{22} & 3C_{21} \\ 6S_{22} & -C_{20} - 6C_{22} & 3S_{21} \\ 3C_{21} & +3S_{21} & 2C_{20} \end{pmatrix}, \quad (4.23)$$

власні значення якої добуємо з умови

$$\begin{vmatrix} -C_{20} + 6C_{22} - \lambda & 6S_{22} & 3C_{21} \\ 6S_{22} & -C_{20} - 6C_{22} - \lambda & 3C_{21} \\ 3C_{21} & 3S_{21} & 2C_{20} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (4.24)$$

Розкривши детермінант, одержимо:

$$\lambda^3 - a_2\lambda - a_3 = 0, \quad (4.25)$$

$$a_1 = SP(D) = -C_{20} - 6C_{22} - C_{20} - 6C_{22} + 2C_{20} = 0; \quad (4.26)$$

$$a_2 = 3C_{20}^2 + 9C_{21}^2 + 9S_{21}^2 + 36C_{22}^2 + 36S_{22}^2;$$

$$a_3 = \det(D).$$

Подібний розв'язок знаходимо в праці [178], де він представлений в замкнутому вигляді. Приведемо наближений алгоритм обчислень коренів, а саме: перший корінь  $\lambda_3$  шукаємо як розв'язок многочлена непарної степені одним з наближених методів, наприклад, методом Ньютона [17,36],

причому його пошук здійснюємо з врахуванням нерівності

$$|\lambda_3| < 2\sqrt{\frac{a_3}{3}}. \quad (4.27)$$

Далі вираз (4.20) зводимо до вигляду;

$$\lambda^3 - a_2\lambda - a_3 = (\lambda - \lambda_3)(\lambda^2 - \lambda\lambda_3 + \lambda_3^2 - a_2) = 0$$

Звідки отримуємо два інші корені:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\lambda_3 \pm \sqrt{\lambda_3^2 - (4\lambda_3^2 - 4a_2)}}{2} = \frac{-\lambda_3 \pm \sqrt{4a_2 - 3\lambda_3^2}}{2}. \quad (4.28)$$

Власні вектори перетворення одержуємо із систем рівнянь:

$$\begin{pmatrix} -C_{20} + 6C_{22} - \lambda_i & 6S_{22} & 3C_{21} \\ 6S_{22} & -C_{20} - 6C_{22} - \lambda_i & 3S_{21} \\ 3C_{21} & 3S_{21} & 2C_{20} - \lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1^i \\ t_2^i \\ t_3^i \end{pmatrix} = 0, i = 1, 2, 3,$$

координати яких дають матрицю переходу  $A$  з однієї системи в іншу:

$$A = \begin{pmatrix} t_1^1 & t_1^2 & t_1^3 \\ t_2^1 & t_2^2 & t_2^3 \\ t_3^1 & t_3^2 & t_3^3 \end{pmatrix}.$$

Їх шукаємо методом [17] за таким виразом:

$$z^i = \sum_{j=0}^n q_{j,i} V^{(n-j-1)},$$

де

$$q_{0i} = 1; q_{ji} = \lambda_i q_{j-1i} + a_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$V^{(0)} - \text{довільний вектор, зокрема, } V^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$a_j$  - коефіцієнти характеристичного рівняння (4.25),

$$V^{(i)} = D V^{(i-1)}, i=1, 2, 3.$$

Після перетворення матриця  $D'$  матиме вигляд:

$$D' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

при цьому

$$\frac{\lambda_3}{3} = C'_{20}; \quad \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{12} = C'_{22}.$$

Тоді обернений зв'язок виразу (4.22) в розгорнутій формі виглядатиме так:

$$\begin{aligned} y_1 &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3, \\ y_2 &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3, \\ y_3 &= b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3 \end{aligned} \quad (4.29)$$

і це дає співвідношення між величинами:

$$I_{pqs} = \frac{1}{Ma_e^n} \int x_1^p x_2^q x_3^s \delta d\tau, \quad I^1_{pqs} = \frac{1}{Ma_e^n} \int y_1^p y_2^q y_3^s \delta d\tau,$$

підстановка яких у формулу (4.6) дає

$$H = -\frac{C_{20}}{\int_{\tau} \delta \left\{ (b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3)^2 + (b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3) \right\} d\tau}.$$

Після відповідних перетворень одержуємо:

$$\begin{aligned} \frac{-C_{20}}{H} = & (b_{11}^2 + b_{21}^2)I_{200} + (b_{12}^2 + b_{22}^2)I_{200} + (b_{13}^2 + b_{23}^2)I_{002} + \\ & 2(b_{11}b_{12} + b_{21} + b_{22})I_{110} + 2(b_{11}b_{13} + b_{21}b_{23})I_{101} + 2(b_{12}b_{13} + b_{22}b_{23})I_{011}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Долучаємо до (4.30) інші співвідношення

$$\begin{cases} C_{20} = I_{002} - \frac{1}{2}(I_{200} + I_{020}); \\ C_{22} = \frac{1}{4}(I_{200} - I_{020}); \\ C_{21} = I_{101}; \\ 2S_{22} = I_{110}, \end{cases} \quad (4.31)$$

з яких визначаємо степеневі моменти другого порядку

$$\begin{aligned} I_{110} = 2S_{22}, I_{101} = C_{21}, I_{011} = S_{21}, \\ I_{020} = -\frac{\frac{C_{20}}{H} - d - 4C_{22}d_{200} - d_{020} - (C_{20} + 2C_{22})d_{002}}{d_{200} + d_{020} + d_{002}}, \\ I_{200} = 4C_{22} + I_{020}; I_{002} = C_{20} + 2C_{22} + I_{020}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

де

$$\begin{aligned} d_{200} = b_{11}^2 + b_{21}^2; d_{020} = b_{12}^2 + b_{22}^2; d_{002} = b_{13}^2 + b_{23}^2; \\ d = 2[(b_{11}b_{12} + b_{21}b_{22})I_{110} + (b_{11}b_{13} + b_{21}b_{23})I_{101} + 2(b_{12}b_{13} + b_{22}b_{23})I_{011}]. \end{aligned}$$

Після обчислення виразів (4.26) отримуємо коефіцієнти розкладу для густини до 2-го порядку включно [66]:

$$\begin{aligned} b_{200} = \frac{7}{2}a_1^2(5I_{200} - I_{000}), b_{020} = \frac{7}{2}a_2^2(5I_{020} - I_{000}), \\ b_{002} = \frac{7}{2}a_3^2(5I_{002} - I_{000}), \\ b_{110} = 15a_1a_2I_{110}, b_{101} = 15a_1a_3I_{101}, b_{011} = 15a_2a_3I_{011}, \\ I_{000} = \delta_c = b_{000}, \end{aligned} \quad (4.33)$$

$b_{100} = b_{010} = b_{001} = 0$  в силу вибору початку системи координат в центрі мас планети.

#### 4.6. Частковий випадок зв'язку систем координат та співвідношення в цій системі.

Розглянемо окремий випадок, коли одна з осей системи відліку співпадає з віссю обертання планет, а дві інші лежать в площині екватора [113]. Використання такої системи дозволяє безпосередньо прив'язувати положення точок, що досліджуються, з їх географічним розміщенням на карті без попередніх перетворень. При цьому вираз динамічного стиснення в цій системі координат практично не змінюється. Дійсно, нехай в системі координат  $oy_1y_2y_3$  динамічне стиснення визначається формулою (4.6), де

$$C_{20} = \frac{1}{Ma^2} \int_{\tau} \left[ y_3^2 - \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) \right] \delta d\tau . \quad (4.34)$$

Оскільки формули для стоксових постійних  $C_{n0}$  є інваріантними при повороті [40], тому в новій системі координат можна записати враховуючи, що  $x_3 = y_3 = z$ :

$$C'_{20} = \frac{1}{Ma^2} \int_{\tau} \delta \left[ x_3^2 - \frac{1}{2}(x_2^2 + x_1^2) \right] \delta d\tau ,$$

тому

$$C'_{20} - C_{20} = -\frac{1}{Ma^2} \int_{\tau} \delta \left( x_3^2 - \frac{x_2^2 + x_1^2}{2} \right) d\tau - \frac{1}{Ma^2} \int_{\tau} \delta \left( y_3^2 - \frac{y_2^2 + y_1^2}{2} \right) d\tau ,$$

звідки

$$\frac{1}{Ma^2} \int_{\tau} \delta (y_2^2 + y_1^2) d\tau = 2(C'_{20} - C_{20}) + \frac{1}{Ma^2} \int_{\tau} \delta (x_1^2 + x_2^2) d\tau . \quad (4.35)$$

Підставляючи (4.35) в вираз (4.6), одержимо :

$$H = -\frac{C_{20}}{2(C'_{20} - C_{20}) + I'_{200} + I'_{020}} ,$$

$$\text{де } I'_{200} = \frac{1}{Ma^2} \int_{\tau} \delta y_1' d\tau , \quad I'_{020} = \frac{1}{Ma^2} \int_{\tau} \delta y_2'^2 d\tau ,$$

або

$$I'_{200} + I'_{020} = -\frac{C_{20}}{H} - 2(C'_{20} - C_{20}) = -\frac{C_{20}}{H} .$$

Таким чином, система рівнянь ( $C'_{20} = C_{20}$ ), що визначає степеневі моменти, не змінюється. Тому розподіл, узгоджений з стоксовими постійними 2-го порядку залишається тим же. Отже, потреба приведення стоксових постійних вищих порядків в систему  $ou_1, u_2, u_3$  також відпадає, а використання  $C_{21}, S_{21}$  в попередніх дослідженнях [55,57,58] є обгрунтоване .

#### **4.7. Практика побудови тривимірних моделей розподілу надр деяких планет**

Використання наближеного методу Мещерякова Г. О. для побудови тривимірних моделей дозволило виявляти глобальні скупчення мас в середині еліпсоїдальної планети та прив'язувати їх до аномалій гравітаційних полів. Для подальшої деталізації результатів досліджень запропонований метод наближення [62] функцій розподілу мас з допомогою біортогональних рядів, що дозволило збільшити порядок апроксимації. Так, для Землі побудована тривимірна модель функції розподілу мас [56,60,66-68,98], узгоджена з стоксовими постійними до дванадцятого порядку включно та референцного розподілу мас PREM [161]. Вираховані з її допомогою відхилення від одновимірного розподілу, які можна трактувати як аномалії густини, дають можливість подальшого детального вивчення внутрішньої структури в середині Землі [60,66-68]. В результаті таких досліджень зроблено ряд важливих висновків про простирання  $\Delta\delta_{12}$  практично до центра планети, а також присутність областей як з додатніми, так і від'ємними значеннями. Використання наближення високих порядків пов'язано з рядом труднощів, зокрема, з великою кількістю обчислень, а також накопиченням похибок при їх виконанні. З метою усунення цих недоліків вище запропоновано ряд удосконалень, завдяки яким вдалось збільшити порядок апроксимації .

Застосуємо приведену методику до побудови тривимірних модельних розподілів густини надр, представлених лінійною комбінацією многочленів  $W_{mnk}$  до двадцятого порядку. Основною вихідною інформацією є моделі стоксових постійних, розробленими дослідниками та представленими табл. 0.4

**Моделі стоксових постійних деяких небесних тіл**

Планета	Назва моделі, автор	Порядок апроксимації
Земля	EGM 2008 (Pavlis N. K.)[184]	2160
Марс	GMM-2B (Lemoine F. G.)[170]	95
Венера	Konopliv A. S.[168]	180
Місяць	LP 165 (Konopliv A. S.)[167]	165

Для побудови модельних розподілів планет кусково-неперервні одновимірні розподіли мас беремо як функцію стрибків для деяких планет (табл. 05). Для Землі беремо більш репрезентативну одновимірну референцну модель PREM [161]. На основі розробленого алгоритму та програмної його реалізації знайдені коефіцієнти розкладу біортогональних рядів, які не приводимо тут, оскільки їх велика кількість. Далі, по них вираховані значення модельних розподілів мас, які, однак для зручності представляємо у вигляді відхилення від одновимірного розподілу, тобто:

$$\Delta\delta_{20}(x, y, z) = \delta_{20}(x, y, z) - \delta_{20}(\rho), \quad (4.36)$$

де

$$\delta_{20}(\rho) = \frac{1}{S_{\sigma}} \int \delta_{20}(x, y, z) d\sigma - \text{середня густина розподілу мас на еліпсоїді } \sigma.$$

**Вихідні параметри для моделювання тривимірного розподілу густини надр небесних тіл**

Планети	Земля	Венера	Марс	Місяць
Планетоцентрична гравітаційна стала $fM$ , $10^{13} \text{ см}^2 / \text{с}^2$	398600.44	324858.59	42828.37	4902.80
Стиснення $\alpha$	1:298.257	0	1:196.88	0

Полярний момент інерції $C / MR^2$	0.3299	0.331-0.341	0.365	0.393
Середня густина $\delta_c, g / cm^3$	5.5143	5.2419	3.9340	3.3464
Середній радіус планети $R * 1000, m$	6371	6050.9	3389.9	1737.6
Ядро радіусом $R_j * 1000, m$	3486	3250	1662	340/5.52
Мантія товщиною $H * 1000, m$	2840	2740	1678	1338/3.38
Кора товщиною $h * 1000$ та середньою густиною $\delta, g / cm^3$	45/2.7	60/2.9	50/3/0	60/2.92

Побудуємо карти ізодегс (ліній постійних значень) деяких небесних тіл на різних глибинах. Як видно з рисунків, наведених нижче, збільшення порядку апроксимації дає більш детальну картину розподілу аномалій  $\Delta\delta_{20}(\rho)$ , а тому такий підхід дозволяє вивчати динамічні процеси з використанням таких результатів. Не маючи можливості описати в повному обсязі кожен з моделей окремо, приведемо карти ізодегс кожної з планет на одній з глибин ( $100 - 10^5 \text{ см}$ ), аналіз яких підтверджує їх складну структуру і неповторність .

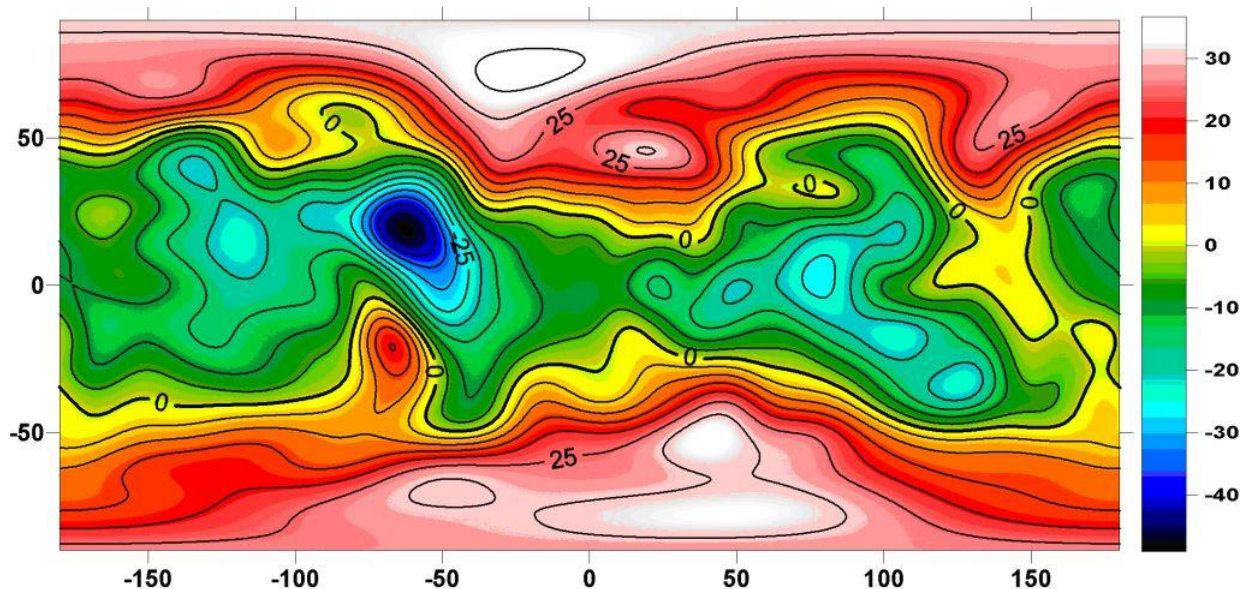


Рис. 0.2. Розподіл аномальної густини надр Землі, обумовлений гармонічними коефіцієнтами до 20-го порядку на глибині 100 км. Ізолінії проведені через  $5 \cdot 10^4$   $\text{г/см}^3$

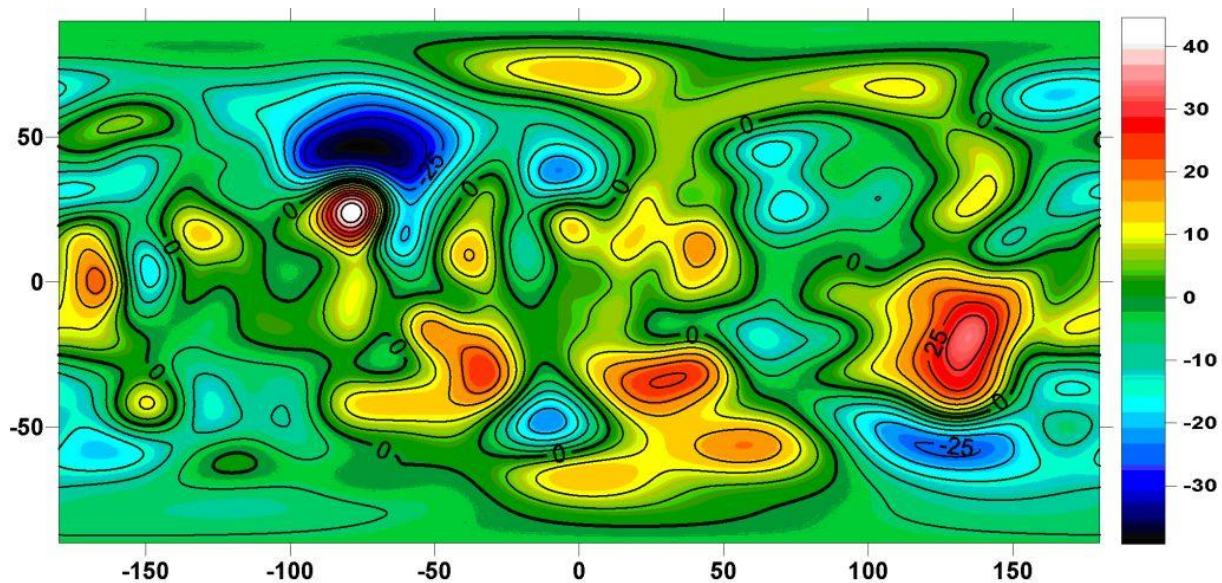


Рис. 0.3. Розподіл аномальної густини надр Венери, обумовлений гармонічними коефіцієнтами до 20-го порядку на глибині 100 км. Ізолінії проведені через  $5 \cdot 10^4$   $\text{г/см}^3$



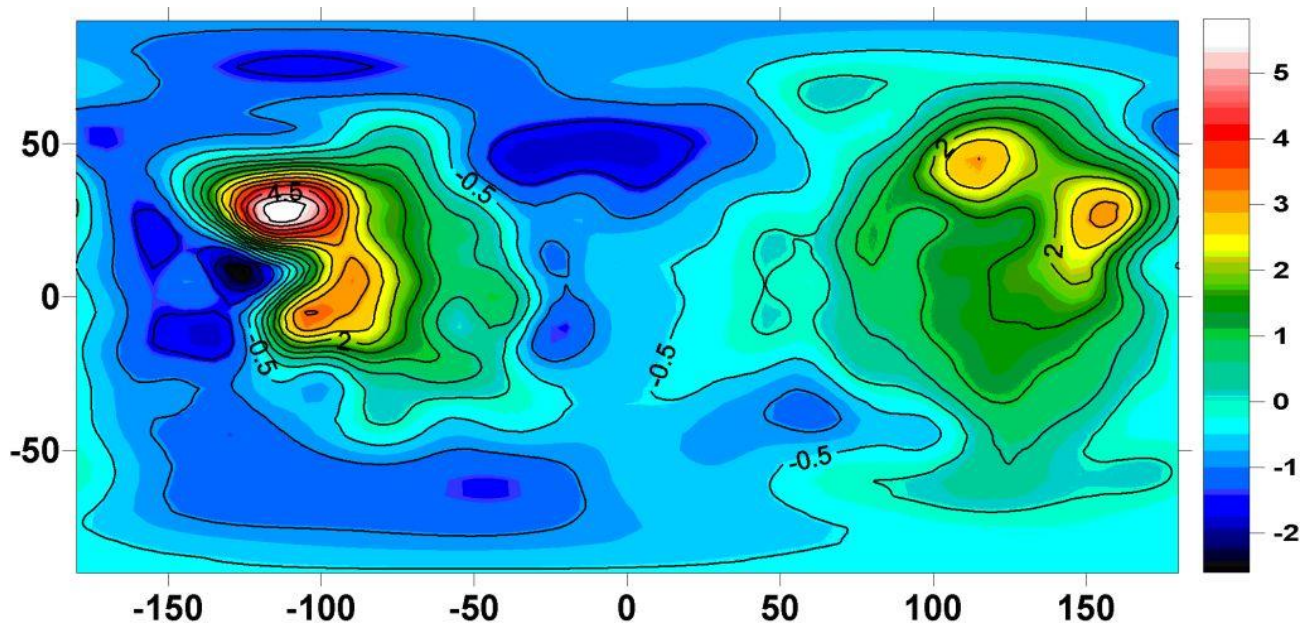


Рис. 0.4. Розподіл горизонтальних неоднорідностей густини в надрах Марса, обумовлений гармонічними коефіцієнтами до 20-го порядку на глибині 100км.

Ізолінії проведені через  $5 \cdot 10^{-3} \text{ г/см}^3$

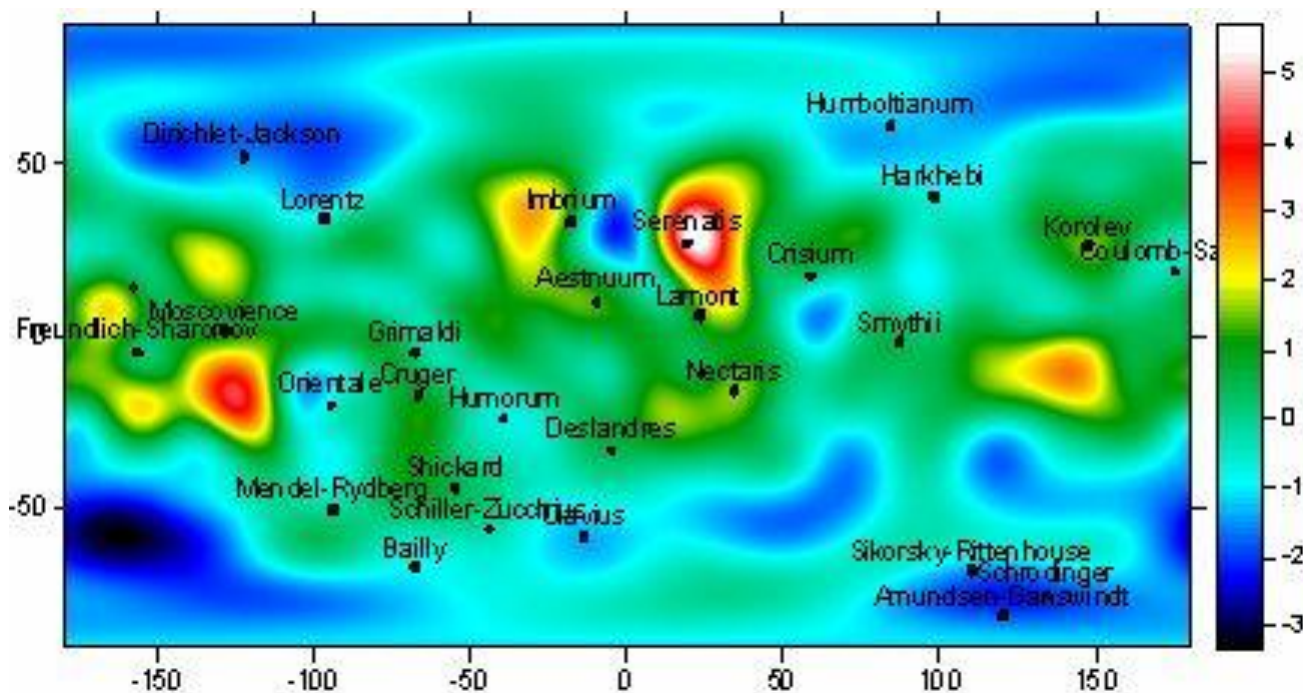


Рис. 0.5. Мозаїчна картина горизонтальних неоднорідностей густини з назвами морфологічних структур (масконів) на Місяці. Шкала кольорів подана через  $5 \cdot 10^{-3} \text{ г/см}^3$

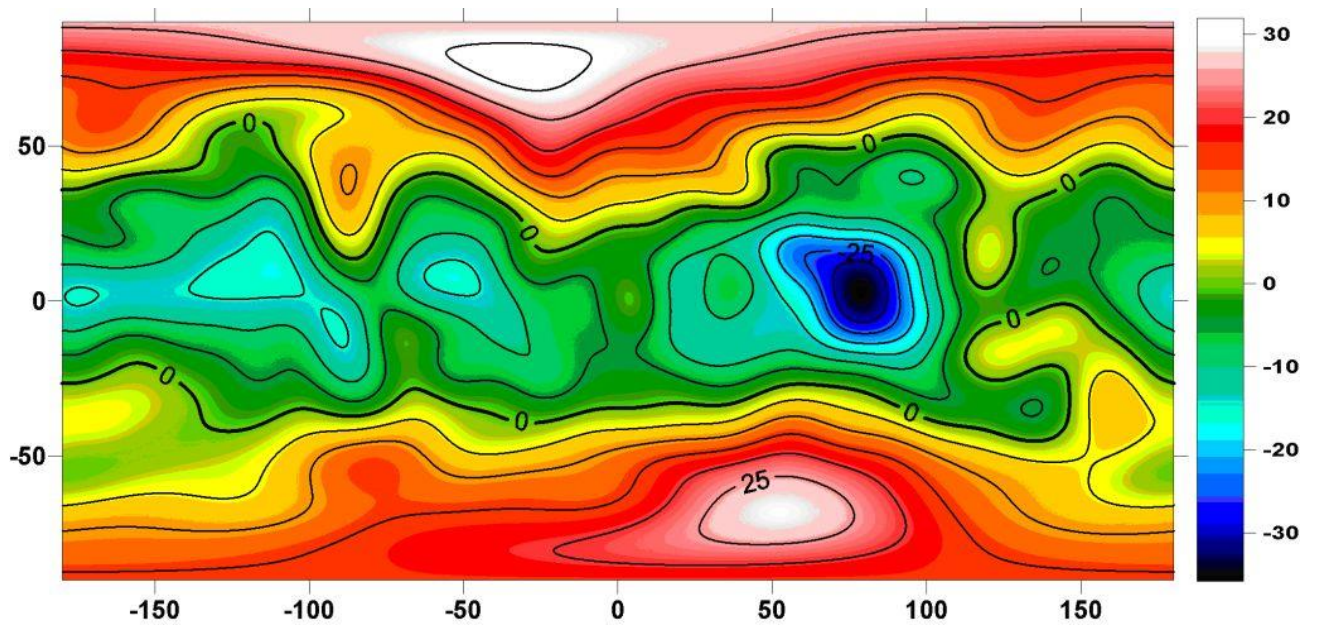


Рис. 0.6. Розподіл аномальної густини надр Землі, обумовлений гармонічними коефіцієнтами до 20-го порядку на глибині 1000 км. Ізолінії проведені через  $5 \cdot 10^{-4} \text{ г/см}^3$

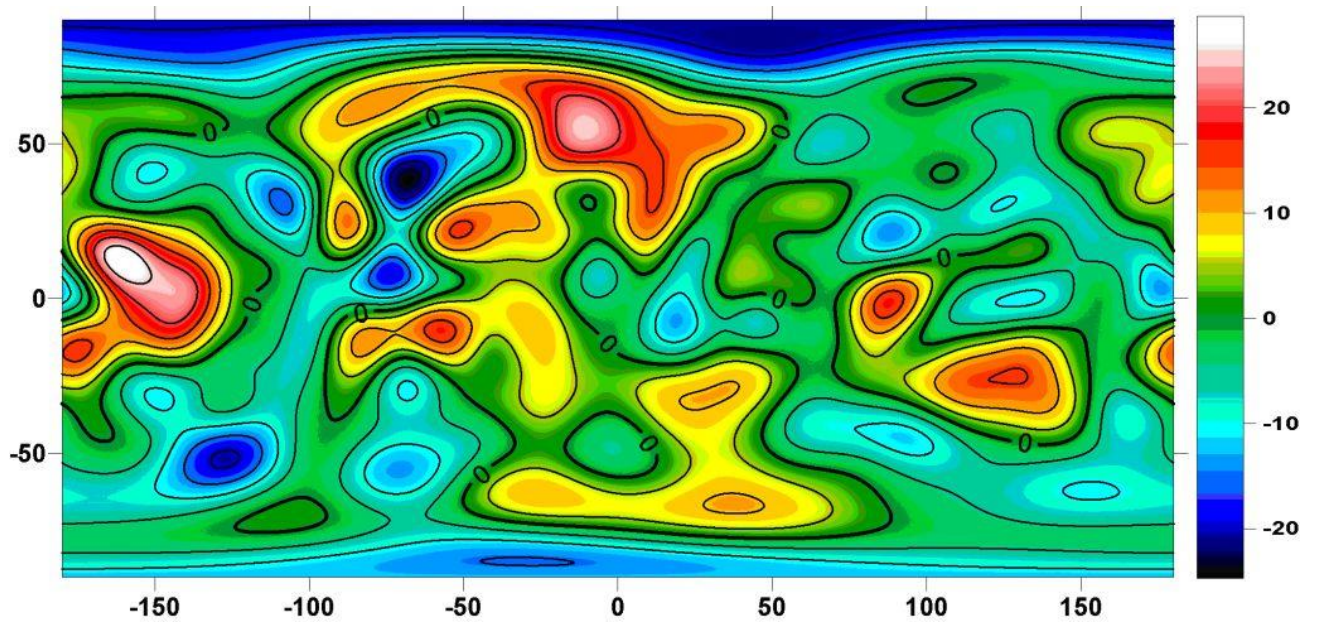


Рис. 0.7. Розподіл аномальної густини надр Венери, обумовлений гармонічними коефіцієнтами до 20-го порядку на глибині 1000 км. Ізолінії проведені через  $5 \cdot 10^{-4} \text{ г/см}^3$

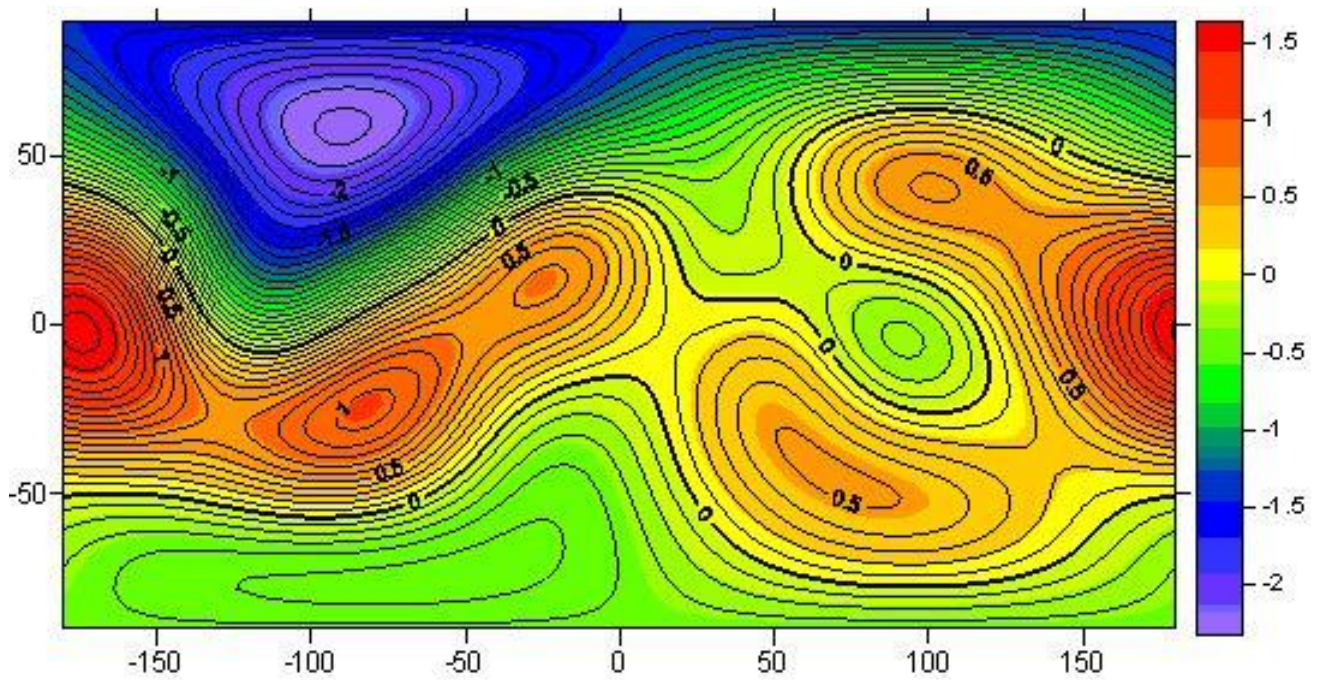


Рис. 0.8. Розподіл горизонтальних неоднорідностей густини в надрах Місяця, обумовлений гармонічними коефіцієнтами до 20-го порядку на глибині 1400км.

Ізолінії проведені через  $5 \cdot 10^{-3} \text{ г/см}^3$

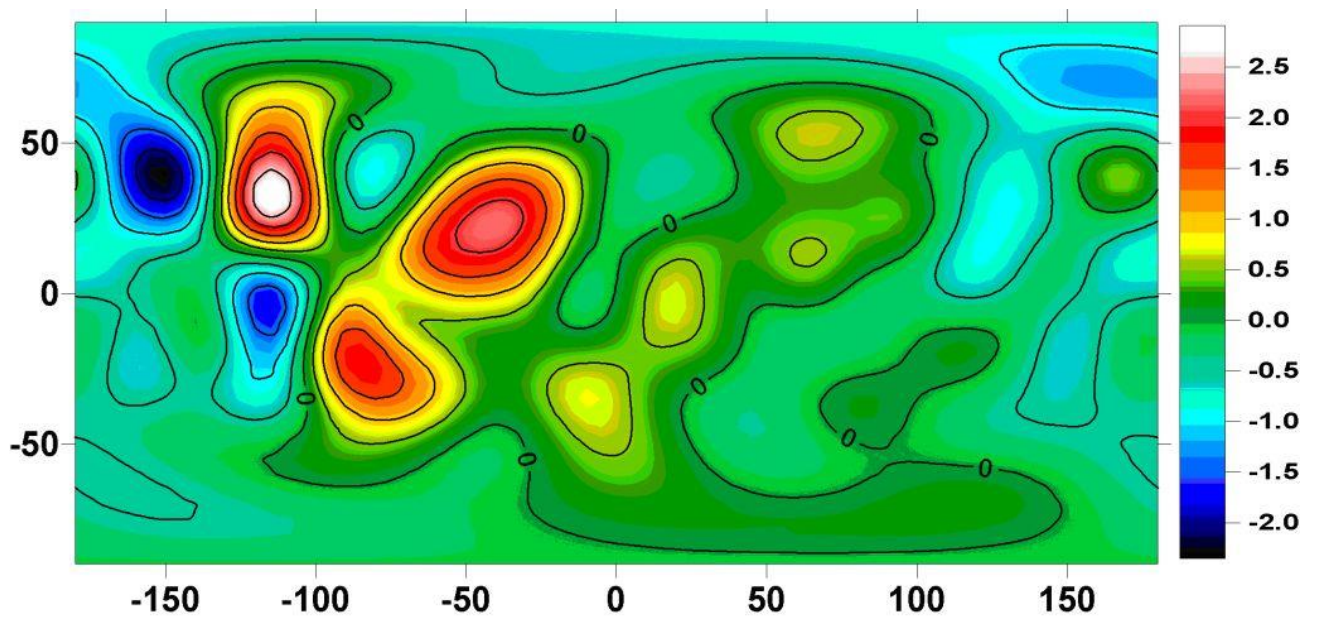


Рис. 0.9. Розподіл горизонтальних неоднорідностей густини в надрах Марса, обумовлений гармонічними коефіцієнтами до 20-го порядку на глибині 1700км.

Ізолінії проведені через  $5 \cdot 10^{-3} \text{ г/см}^3$

#### 4.8. Умови наближеного визначення тривимірних розподілів густини.

Однозначне визначення коефіцієнтів  $b_{mnk}$  за стоксовими постійними  $m+n+k > 2$  не є можливим, а тому шукаємо їх наближено. Однією з умов для їх однозначного обчислення може бути близькість шуканої моделі  $\delta_z$  до деякої відомої.  $\delta_v$  і, за Моріцом Г.[182], вона може бути записана:

$$\int_{\tau} (\delta_z - \delta_v)^2 d\tau \rightarrow \min. \quad (4.32)$$

За відому функцію беремо одну з радіальних моделей  $\delta^0(\rho)$  або ж її уточнення -  $\delta_2$ . Оскільки шукану функцію беремо у вигляді (4.1) і вона повинна задовільняти стоксовим постійним до  $n$ -го порядку, то задача зводиться до знаходження екстремуму функції Лагранжа:

$$F(b_{003}, \dots, b_{030}, \dots, b_{00n}, \dots, b_{0n0}, \lambda_{30}, \lambda_{31}, \gamma_{31}, \dots, \lambda_{nn}, \gamma_{nn}) = \int_{\tau} \left( \sum_{m+n+k=3}^N b_{mnk} W_{mnk} \right)^2 d\tau + \sum \sum \left[ \lambda_{nk} (c_{nk} - c_{nk}^*) + \gamma_{nk} (s_{nk} - s_{nk}^*) \right]$$

$$c_{nk}^* = c_{nk}^{**} + \sum_{p+q+s=n} \alpha_{pqs}^{nk} b_{pqs}$$

$$s_{nk}^* = s_{nk}^{**} + \sum_{p+q+s=n} \beta_{pqs}^{nk} b_{pqs},$$

а  $c_{nk}^{**}, s_{nk}^{**}$  - знайдені по коефіцієнтах  $b_{mnk}$  стоксові постійні, значення яких є постійними.

Умови мінімуму для функції Лагранжа в матричному вигляді можна записати:

$$\begin{cases} 2Bb + \alpha^T \lambda = 0 \\ \alpha b = c. \end{cases}$$

В даній системі введені позначення:

$$b = \begin{pmatrix} b_3 \\ b_4 \\ \cdot \\ b_N \end{pmatrix}, \lambda = \lambda \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \cdot \\ \lambda_N \end{pmatrix}, B_n = \begin{pmatrix} \int_{\tau} W_{00n} W_{00n} d\tau & \cdot & \cdot & \cdot & \int_{\tau} W_{0n0} W_{00n} d\tau \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \int_{\tau} W_{00n} W_{0n0} d\tau & \cdot & \cdot & \cdot & \int_{\tau} W_{0n0} W_{0n0} d\tau \end{pmatrix}$$

$$C_n = \begin{pmatrix} c_{n0} \\ c_{n1} \\ s_{n1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ C_{nn} \\ S_{nn} \end{pmatrix}, \quad A_n = \begin{pmatrix} \alpha_{00n}^{n0} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{0n0}^{n0} \\ \alpha_{00n}^{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{0n0}^{n1} \\ \gamma_{00n}^{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & \gamma_{00n}^{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{00n}^{2n+1} & \cdot & \cdot & \cdot & \gamma_{0n0}^{2n+1} \end{pmatrix}, \quad b_n = \begin{pmatrix} b_{00n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{0n0} \end{pmatrix},$$

Так як матриці блочні, то система розділяється на частини:

$$\begin{cases} 2B_k b_k + \alpha_k^T \lambda_k = 0 \\ \alpha_k b_k = C_k - C_k^* \end{cases}, \quad (4.33)$$

розв'язок кожної з них можна записати:

$$\begin{aligned} b_k &= B_k^{-1} \alpha_k^T \lambda_k; \\ C_k - C_k^* &= -\frac{1}{2} \alpha_k B_k^{-1} \alpha_k^T \lambda_k \\ \lambda_k &= -2(\alpha_k B_k^{-1} \alpha_k^T)^{-1} (C_k - C_k^*), \end{aligned}$$

або остаточно:

$$b_k = -2B_k^{-1} \alpha_k^T (\alpha_k B_k^{-1} \alpha_k^T)^{-1} (C_k - C_k^*). \quad (4.34)$$

Таким чином, наслідком властивостей біортогональних розкладів є наступний алгоритм:

1. Будуємо точний розв'язок модельного розподілу до другого порядку  $\delta_2$  за формулами (4.8).
2. Обчислюємо модельні стоксові постійні  $c_{n0}$ .
3. Шукані коефіцієнти  $b_{mnk}$  знаходимо, використовуючи співвідношення (4.34). При цьому обчислення проводимо в двох варіантах:
  - а) невідомі коефіцієнти присутні тільки в стоксових постійних  $n$ -го порядку,
  - б) невідомі коефіцієнти присутні у всіх стоксових постійних.

Таким чином, з використанням експериментальних даних можна побудувати точний розв'язок модельного розподілу  $\delta_2$  до другого порядку, який в подальшому використовуємо для наближеного  $\delta_N$ , за умови малого

відхилення від  $\delta_2$ , що задовольняє стоксовим постійним до  $N$ -го порядку включно. На основі знайденого  $\delta_N$  далі обчислюємо внутрішній і зовнішній (для перевірки) потенціал притягання, а також енергію гравітаційного поля. Це дозволяє повніше вивчати особливості внутрішньої структури планет, а також розширює можливості інтерпретації особливостей зовнішнього гравітаційного поля.

#### 4.9. До визначення густини розподілу мас в центрі мас планети

Будь яка інформація про розподіл маси в тілі планети є важливою, зокрема, для визначення густини в центрі мас, яка є однією з важливих планетарних характеристик [9,152,153,154]. Слід сказати, що в ряді розподілів густини (модель Роша, Дарвіна [9]) вона входить як константа. Встановлення цієї величини в основному здійснюється на основі певних гіпотез поведінки речовини при певних умовах (надвисоких тисків та температур, які є на відповідних глибинах), а також опосередковано шляхом аналізу поширення хвиль в тілі планети.

Спробуємо встановити співвідношення для цього значення в центрі мас (початку координат), значення якої згідно формули (4.1) є :

$$\delta(0,0,0) = \sum_{m+n+k=0}^{\infty} b_{mnk} W_{mnk}(0,0,0). \quad (4.35)$$

Для визначення  $W_{mnk}(0,0,0)$  твірну функцію  $\phi$  розвинемо за змінними  $\alpha, \beta, \gamma$ , в результаті чого отримаємо

$$W_{2m2n2k} = \frac{(-1) \cdot (2N-1)!!}{2^N A^{2m} B^{2n} C^{2k} m!n!k!}, \quad (4.36)$$

причому  $W_{mnk}(0,0,0) = 0$ , якщо  $m$ , або  $n$ , або  $k$  є непарними.

Отже, ряд (4.34) із врахуванням формули (4.35) прийме вигляд :

$$\delta(0) = \frac{1}{3V_e} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)^N (2N-1)!! (4N+3)}{2^N} a^{4m} b^{4n} c^{4k} \cdot \sum_{m+n+k=N} \frac{2m!2n!2k!}{m!n!k!} \int_{\tau} \delta\omega_{2m2n2k} dt$$

Враховуючи аналітичний вираз многочленів (формула (1.5))

$$\omega_{mnk} = \frac{1}{a^m b^n c^k} \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}} (-1)^l \frac{(2N-2l+1)!!}{2^l} - \frac{\Delta^l \left(\frac{x}{a}\right)^m \cdot \left(\frac{y}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{z}{c}\right)^k}{m!n!k!},$$

прийдемо до наступного:

$$\delta(0,0,0) = \frac{1}{3V_e} \sum_{N=0}^{\infty} (-1)^N \frac{(4N+3)}{2^N N!} \sum_{l=0}^N (-1)^l \frac{(4N-2l+1)!!}{2^l} \Delta^l \sum_{N=m+n+k} \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^{2m} \left(\frac{y}{b}\right)^{2n} \left(\frac{z}{c}\right)^{2k}}{m!n!k!}$$

або

$$\delta(0,0,0) = \frac{1}{3V_e} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)^N (4N+3)}{2^N (N!)} \sum_{l=0}^N \frac{(4N-2l+1)!!}{2^l l!} \Delta^l \left[ \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \right]^N.$$

Безпосередня дія оператора  $\Delta^l$  на рівність  $\rho^{2N} = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^N$  приводить до

виразу

$$\Delta^l [(\rho^2)]^N = \frac{(2N+1)!!}{(2N-2l+1)!} \rho^{2N-2l},$$

що дає значення функції густини в центрі мас

$$\delta(0) = \frac{1}{3V_e} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)^N (4N+3)(2N+1)!!}{2^N (N!)} \cdot \sum_{l=0}^N \frac{(-1)^l (4N-2l+1)!!}{2^l l! (2N-2l+1)!} \cdot \int_{\tau} \delta \rho^{2N-2l} dt. \quad (4.37)$$

Заміна в формулі (4.37)  $l$  на  $N-l$  приводить до остаточного вигляду шуканого співвідношення:

$$\delta(0,0,0) = \frac{1}{3V_e} \sum \frac{(4N+3)(2N+1)!!}{2^{2N} (N!)} \sum_{l=0}^N \frac{(-2)^l (2N-2l+1)!!}{(N-l)! (2l+1)!} \int_{\tau} \delta \rho^{2l} d\tau. \quad (4.38)$$

Таким чином, в центрі мас планети густина  $\delta_0$  записується через інтегральні характеристики  $I_{2l}$ , які можна трактувати як моменти густини вищих порядків. Нагадаємо, що вони при  $l=0$  і  $l=1$  мають фізичний зміст, а саме:

$$I_0 = \int_{\tau} \delta d\tau = M - \text{маса планети},$$

$$I_2 = \int_{\tau} \delta \rho^2 d\tau = \frac{1}{2}(A+B+C) - \text{середній момент інерції},$$

що визначаються на основі геодезичних та астрономічних даних про гравітаційне поле. Далі, утримуючи два або три члени в формулі (4.38) відповідно дає:

$$\delta_0^2 = \frac{\delta_c}{3} \left[ 3I_0 - \frac{21}{4}(5I_2 - 3I_0) \right], \quad (4.39)$$

$$\delta_0^3 = (I_0 + 6.2I_2 - 26.2I_4 + 54.1I_6 - 60.1I_8 + 12.8I_{10} + 293.3I_{12} - 473.7I_{14} + 215.3I_{16} - 23.5I_{18}) / V_e. \quad (4.40)$$

Виконаємо обчислення за формулою (4.40) для різних планет і наведемо результати в табл. 0.6, з якої видно, що значення  $\delta_0^2$  близьке до очікуваного.

Таблиця 0.6.

### Значення густини в центрі деяких планет

Назва	Земля	Місяць	Марс
$\delta_0^2 (г/см^3)$	10.58	3.52	5.81
Очікуване значення $(г/см^3)$	12–13	3–5	7–9

Швидкість збіжності або її розбіжність залежить від характеру досліджуваної функції, що ілюструється наведеними двома прикладами .

Для розподілу

$$\delta_z(\rho) = \begin{cases} 2, & 0 \leq \rho < 0,5 \\ 1, & 0,5 \leq \rho \leq 1 \end{cases}$$

визначимо степеневі моменти:

$$I_{2n} = \frac{1}{(2n+3)} [1 + (0,5)^{2n+3}].$$

Візьмемо також неперервний випадок, коли розподіл визначається за виразом  $\delta_n = 4 - \rho^2$ .

Утримавши три члени формули (4.37) (вираз (4.39)), одержимо значення для  $\delta_n^3(0) = 4$ , якщо  $1 \leq n$ , для неперервного випадку (точне значення) і для розривного –  $\delta_z^3(0) = 1.026$  (відносна похибка становить 2.6%).

Продовжуючи дослідження, візьмо референцну модель розподілу мас Землі  $\delta_{prem}$  (PREM [161]).

Обчислюємо відповідно  $\delta_z(0)$  і  $\delta_{prem}(0)$  за формулою (4.36) для різних  $N$ . Табл. 0.7 підтверджує висновок про нестійкість знайдених значень, тому, що вони спочатку коливаються навколо відомих, а після першого десятка ряд



починають розбігатись. В зв'язку з цим при практичних дослідженнях слід брати від 2 до 5 членів.

Таблиця 0.7.

**Значення густини в центрі мас (формула (4.38)) деяких розподілів при різних N**

N	Густина ( $g/cm^3$ )		
	$\delta_{\text{prem}}$	$\delta_z$	$\delta = 5.514$
1	10.53459	1.6172	5.5140
2	13.79867	2.2819	5.5140
3	15.53266	2.6303	5.5140
4	13.45276	2.3794	5.5140
5	10.60356	1.7765	5.5140
6	10.81371	1.3999	5.5140
7	13.57337	1.6112	5.5140
8	15.54328	2.2011	5.5140
9	15.45470	2.5898	5.5140
0	12.19146	2.3952	5.5154
1	11.06139	1.8106	5.5140
2	12.32253	1.4152	5.5140
3	15.29435	1.6006	5.5140
4	15.52791	2.1823	5.5140
5	15.24641	2.5820	5.5140
6	21.15436	2.4024	5.5140
7	69.75576	1.8225	5.5140
8	3.0E+02	1.4200	5.5142
9	1.3E+03	1.5976	5.5172
10	6.4E+03	2.01661	5.5071
11	3.5E+04	2.5956	5.5316
12	2.2E+05	2.0991	5.2082
13	1.4E+06	4.8621	8.5457
44	9.0E+06	7.5788	11.6477
15	5.4E+07	-71.4503	-67.4765

Розбіжність ряду (4.38) може бути обумовлена і похибками обчислень, про що свідчить випадок, коли  $\delta_c = 5.514$ , для якого ряд (4.38) розбігається, хоча аргіогі всі його члени при  $N > 1$  рівні нулю.

## 4.10. Побудова точних моделей розподілу мас з урахуванням поверхневої густини та стоксових постійних вищих порядків

### 4.10.1. Теоретичні основи методу побудови

Представимо похідні функції розподілу мас  $\delta$  в середині еліпсоїдальної планети  $\tau$  у вигляді [62,114]:

$$\frac{\partial \delta}{\partial x_i} = \frac{1}{a_i} \sum_{N=m+n+k=0}^3 b_{mnk}^i W_{mnk}(x_1, x_2, x_3), \quad (4.40)$$

(тут і далі  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, a_1 = a, a_2 = b, a_3 = c$ ),

де

$$b_{mnk}^i = \frac{\int_{\tau} \omega_{mnk} \frac{\partial \delta}{\partial x_i} d\tau}{I_{mnk}} = \sum_{p+q+s=0}^3 d_{pqs}^{mnk} I_{pqs}^i. \quad (4.41)$$

Степеневі моменти похідних  $\frac{\partial \delta}{\partial x_i}$  функції розподілу мас

$$I_{pqs}^i = \frac{1}{M} \int_{\tau} \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^p \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^q \left(\frac{x_3}{a_3}\right)^s \frac{\partial \delta}{\partial x_i} d\tau \quad (4.42)$$

можна визначити, скориставшись тотожністю [139]:

$$\int_{\tau} \varphi \frac{\partial \delta}{\partial x_i} d\tau = - \int_{\tau} \delta \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} d\tau + \iint_{\Omega} \varphi \delta \cos \alpha_i d\Omega, \quad (\cos \alpha_i \text{ визначені нижче}). \quad (4.43)$$

В результаті одержимо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} \iint_{\Omega} \delta \cos \alpha_i d\Omega &= \sigma_{000}^i, \\ I_{100}^i &= \frac{1}{M a_1} \int_{\tau} x_1 \frac{\partial \delta}{\partial x_i} d\tau = -\varepsilon(i-1) I_{000} + \frac{\sigma_{100}^i}{a_1}, \\ I_{010}^i &= -\varepsilon(i-2) I_{000} + \frac{\sigma_{010}^i}{a_2}, \\ I_{001}^i &= -\varepsilon(i-3) + \frac{I_{000}}{a_3} \sigma_{001}^i, \\ I_{200}^i &= -2 I_{100} \varepsilon(i-3) + \sigma_{200}^i, \\ I_{020}^i &= -2 J_{010} \varepsilon(i-2) + \sigma_{020}^i, \\ I_{002}^i &= -2 I_{001} \varepsilon(i-3) + \sigma_{002}^i, \\ I_{110}^i &= -(I_{100} \varepsilon(i-1) + I_{001} \varepsilon(i-2)) + \sigma_{110}^i, \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned}
I_{300}^i &= -3I_{200}\varepsilon(i-1) + \sigma_{300}^i, \\
I_{210}^i &= -(2I_{110}\varepsilon(i-1) + I_{200}\varepsilon(i-2)) + \sigma_{210}^i, \\
I_{201}^i &= -(2I_{110}\varepsilon(i-1) + I_{200}\varepsilon(i-3)) + \sigma_{201}^i, \\
I_{012}^i &= -(I_{002}\varepsilon(i-2) + 2I_{011}\varepsilon(i-1)) + \sigma_{012}^i, \\
I_{300}^i &= -3I_{200}\varepsilon(i-1) + \sigma_{300}^i, \\
I_{210}^i &= -(2I_{110}\varepsilon(i-1) + I_{200}\varepsilon(i-2)) + \sigma_{210}^i, \\
I_{201}^i &= -(2I_{110}\varepsilon(i-1) + I_{200}\varepsilon(i-3)) + \sigma_{201}^i, \\
I_{012}^i &= -(I_{002}\varepsilon(i-2) + 2I_{011}\varepsilon(i-1)) + \sigma_{012}^i, \\
I_{111}^i &= (I_{011}\varepsilon(i-1) + I_{101}\varepsilon(i-2) + I_{110}\varepsilon(i-3)) - \sigma_{111}^i, \\
I_{021}^i &= -(2I_{011}\varepsilon(i-2) + I_{020}\varepsilon(i-3)) + \sigma_{021}^i, \\
I_{003}^i &= -3I_{002}\varepsilon(i-3) + \sigma_{003}^i, \\
I_{120}^i &= -(I_{020}\varepsilon(i-1) + 2I_{110}\varepsilon(i-2)) + \sigma_{120}^i, \\
I_{030}^i &= -3I_{020}\varepsilon(i-2) + \sigma_{030}^i,
\end{aligned} \tag{4.45}$$

де  $I_{pqs}$  – степеневі моменти густини планети  $\delta$ , що визначаються в замкнутому вигляді для  $p+q+s \leq 2$  за формулами (2.23) при відомих стокових постійних до 2-ого порядку і динамічного стиснення  $H$ ,

$$\varepsilon(i-j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \frac{1}{a_i}, & i = j, \end{cases}$$

А  $\sigma_{pqs}^i = \frac{1}{M} \iint_{\Omega} \left(\frac{x}{a}\right)^p \left(\frac{y}{a}\right)^q \left(\frac{z}{a}\right)^s \delta \cos \alpha_i d\Omega$  – степеневі моменти густини на поверхні  $\Omega$ . При відомому значенні густини  $\delta$  на поверхні еліпсоїдальної планети величини  $\sigma_{pqs}^i$  можна визначити. Таким чином, по вхідній інформації (стокових постійних до  $n \leq 2$ ) і значенню густини на поверхні еліпсоїда планети можна знайти значення  $I_{pqs}^i$ .

Величини  $\sigma_{pqs}^i$  для еліпсоїда можна перетворити, виписавши низку формул.

Враховуючи, що

$$z = x_3 = \pm a_3 \sqrt{1 - \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2}, \tag{4.46}$$

$$\cos\alpha_i = \frac{z_{x_i}}{\sqrt{1+z_{x_1}^2+z_{x_2}^2}} \quad (i=1,2), \quad \cos\alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{1+z_{x_1}^2+z_{x_2}^2}}, \quad (4.47)$$

$$z_{x_1} = -\frac{a_3 x_1}{a_1^2 \sqrt{1-\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2-\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2}}, \quad z_{x_2} = -\frac{a_3 x_2}{a_2^2 \sqrt{1-\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2-\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2}}, \quad (4.48)$$

$$\sqrt{1+z_{x_1}^2+z_{x_2}^2} = \sqrt{1-\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2-\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 + \frac{a_3^2 x_1^2}{a_1^4} + \frac{a_3^2 x_2^2}{a_2^4}} / \sqrt{1-\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2-\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2}, \quad (4.49)$$

$$\text{або } \sqrt{1+z_{x_1}^2+z_{x_2}^2} = \frac{D(x_1, x_2)}{\sqrt{1-\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2-\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2}}, \quad (4.50)$$

де

$$D(x_1, x_2) = \sqrt{1-\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2-\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 + \frac{a_3^2 x_1^2}{a_1^4} + \frac{a_3^2 x_2^2}{a_2^4}}.$$

З співвідношень (4.46) – (4.50) отримуємо:

$$\cos\alpha_i = \pm \frac{a_3 x_i}{a_i^2 D(x_1, x_2)} \quad i = (1,2,3),$$

звідки

$$\sigma_{pqs}^i = \frac{2a_3}{a_i} \iint_{G(x_1, x_2)} \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{p+\varepsilon(i-1)} \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^{q+\varepsilon(i-2)} \left(\frac{x_3}{a_3}\right)^{s+\varepsilon(i-3)} \delta \frac{dx_1 dx_2}{D(x_1, x_2)}. \quad (4.51)$$

Аналогічні формули можна одержати проектуючи поверхню еліпсоїда на інші координатні площини. Подані величини можна також виразити поверхневими інтегралами:

$$\sigma_{p_1 q_1 s_1}^i = \iint_{\Omega} \left( \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{p_1} \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^{q_1} \left(\frac{x_3}{a_3}\right)^{s_1} \right) \delta d\Omega,$$

$$p_1 = p + \varepsilon(i-1), q_1 = q + \varepsilon(i-2), s_1 = s + \varepsilon(i-3),$$

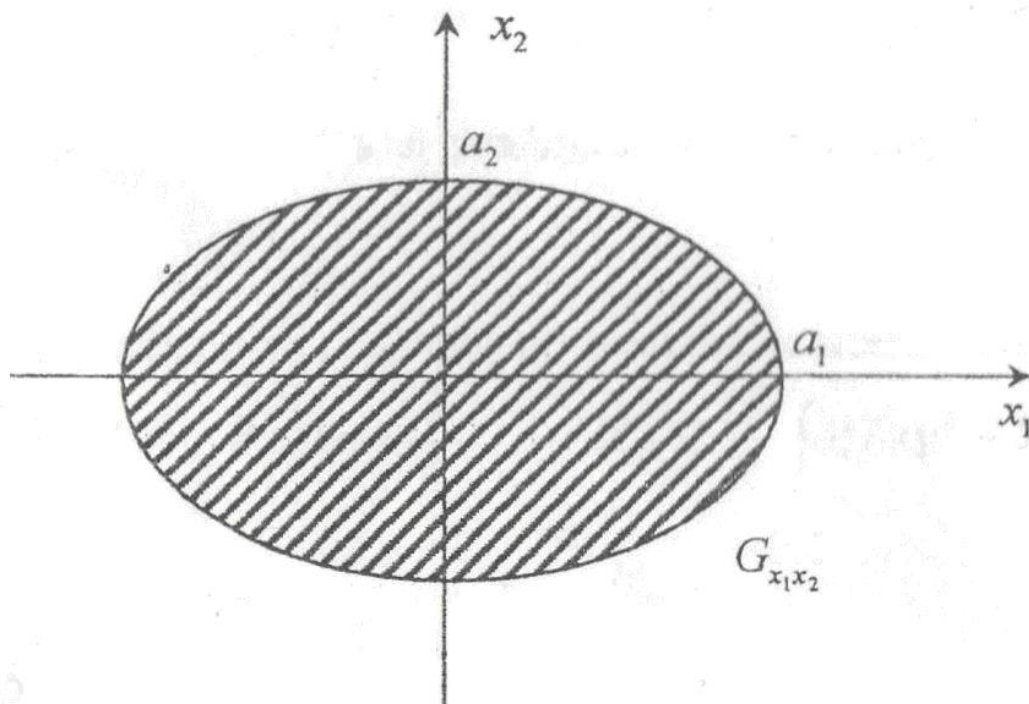


Рис. 0.10. Проекція поверхні еліпсоїда на площину  $x_1x_2$

$$\begin{aligned}
 b_{300}^i &= \frac{15}{2} \delta_c (7I_{300}^i - 3I_{100}^i), & b_{210}^i &= \frac{15}{2} \delta_c (7I_{210}^i - I_{010}^i), \\
 b_{201}^i &= \frac{15}{2} \delta_c (7I_{201}^i - I_{001}^i), & b_{120}^i &= \frac{15}{2} \delta_c (7I_{120}^i - I_{100}^i), \\
 b_{102}^i &= \frac{15}{2} \delta_c (7I_{102}^i - I_{100}^i), & b_{111}^i &= I_{111}^i \delta_c \\
 b_{021}^i &= \frac{15}{2} \delta_c (7I_{021}^i - I_{001}^i), & b_{012}^i &= \frac{15}{2} \delta_c (7I_{012}^i - 3I_{010}^i), \\
 b_{030}^i &= \frac{15}{2} \delta_c (7I_{030}^i - 3I_{010}^i), & b_{003}^i &= \frac{15}{2} \delta_c (7I_{003}^i - 3I_{001}^i), \\
 b_{200}^i &= \frac{7}{2} \delta_c (5I_{200}^i - I_{008}^i), & b_{020}^i &= \frac{7}{2} \delta_c (5I_{020}^i - I_{000}^i), \\
 b_{002}^i &= \frac{7}{2} \delta_c (5I_{002}^i - I_{000}^i), \\
 b_{101}^i &= \frac{35}{2} \delta_c I_{101}^i, & b_{011}^i &= \frac{35}{2} \delta_c I_{011}^i, & b_{110}^i &= \frac{35}{2} \delta_c I_{110}^i, \\
 b_{000}^i &= \delta_c I_{000}^i, & b_{100}^i &= \delta_c I_{100}^i, & b_{010}^i &= 5\delta_c I_{010}^i, & b_{001}^i &= 5\delta_c I_{001}^i.
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

Таким чином, похідні  $\frac{\partial \delta}{\partial x_i}$  можуть бути зображені сумою многочленів  $W_{mnk}$

до третього порядку включно. Запишемо умову для однозначного відновлення функції густини по її похідних, яку можна записати так:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \delta}{\partial x_1} & \frac{\partial \delta}{\partial x_2} & \frac{\partial \delta}{\partial x_3} \end{vmatrix} = 0 \quad (4.53)$$

або в розгорнутому вигляді:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \delta}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \delta}{\partial x_i} \right), \quad (i=1,2,3, j=1,2,3, i \neq j). \quad (4.54)$$

Для перевірки умов (4.54) використаємо аналітичні вирази для  $W_{mnk}$ , подані в розділі 2 (формули (2.3)). Для наочності візьмемо  $i=1$  та  $j=2$ .

Оскільки  $\frac{\partial \delta}{\partial x_i}$  є многочленами третьої степені, то прирівнюємо коефіцієнти

при однакових степенях:

$$\begin{aligned} b_{010}^1 - 3(b_{210}^1 + b_{012}^1 + b_{030}^1) &= b_{100}^2 - 3(b_{120}^1 + b_{102}^1 + b_{300}^1) \\ 2b_{110}^1 &= 3b_{200}^2 + b_{020}^2 + b_{002}^2 \\ b_{200}^1 + 3b_{020}^1 + b_{002}^1 &= 2b_{110}^2 \\ 2b_{011}^1 &= 2b_{101}^2 \\ \frac{3}{2}b_{030}^1 + \frac{9}{2}b_{210}^1 + \frac{3}{2}b_{012}^1 &= \frac{15}{2}b_{300}^2 + \frac{9}{2}b_{120}^2 + \frac{9}{2}b_{102}^2, \\ \frac{15}{2}b_{030}^1 + \frac{9}{2}b_{210}^1 + \frac{9}{2}b_{012}^1 &= \frac{3}{2}b_{300}^2 + \frac{9}{2}b_{120}^2 + \frac{3}{2}b_{102}^2, \\ \frac{3}{2}b_{030}^1 + \frac{3}{2}b_{210}^1 + \frac{9}{2}b_{012}^1 &= \frac{3}{2}b_{300}^2 + \frac{3}{2}b_{120}^2 + \frac{9}{2}b_{102}^2, \\ 3b_{300}^1 + 9b_{120}^1 + 3b_{102}^1 &= 3b_{030}^2 + 9b_{210}^2 + 3b_{012}^2, \\ 6b_{111}^1 &= \frac{3}{2}b_{303}^{11} + 3b_{120}^{11} + \frac{9}{2}b_{210}^{11}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Після громіздких перетворень (4.44), (4.45), (4.52) та їх підстановка в (4.52), (4.55) приводять до простої системи тотожностей, а саме:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{120} + \sigma_{300} + \sigma_{102} &= \sigma_{100}, \\
 \sigma_{210} + \sigma_{300} + \sigma_{012} &= \sigma_{010}, \\
 \sigma_{310} + \sigma_{130} + \sigma_{112} &= \sigma_{110}, \\
 \sigma_{400} + \sigma_{202} + 3\sigma_{220} + \sigma_{220} &= \sigma_{400} \sigma_{022} + 3\sigma_{210} + \sigma_{220}, \\
 \sigma_{013} + \sigma_{031} + \sigma_{211} &= \sigma_{011}, \\
 \sigma_{103} + \sigma_{301} + \sigma_{121} &= \sigma_{101}.
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

З урахуванням інших комбінацій  $i, j$  система співвідношень (4.56) може бути доповнена:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{200} + \sigma_{020} + \sigma_{002} &= \sigma_{000}, \\
 \sigma_{220} + \sigma_{040} + \sigma_{022} &= \sigma_{020}, \\
 \sigma_{300} + \sigma_{120} + \sigma_{102} &= \sigma_{100}, \\
 \sigma_{202} + \sigma_{022} + \sigma_{004} &= \sigma_{202}, \\
 \sigma_{210} + \sigma_{300} + \sigma_{003} &= \sigma_{010}, \\
 \sigma_{310} + \sigma_{130} + \sigma_{112} &= \sigma_{110}, \\
 \sigma_{201} + \sigma_{021} + \sigma_{003} &= \sigma_{001}, \\
 \sigma_{301} + \sigma_{121} + \sigma_{103} &= \sigma_{101}, \\
 \sigma_{400} + \sigma_{220} + \sigma_{202} &= \sigma_{200}, \\
 \sigma_{211} + \sigma_{031} + \sigma_{131} &= \sigma_{011}.
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

Тотожності (4.56), (4.57) легко перевіряються, наприклад:

$$\sigma_{200} + \sigma_{020} + \sigma_{002} = \int_{\Omega} \sigma \left( \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} \right) \frac{d\Omega}{D(x_1, x_2)} = \int_{\Omega} \sigma \frac{d\Omega}{D(x_1, x_2)} = \sigma_{000}$$

Таким чином відновлення функції за їх похідними можна записати формулою:

$$\delta(x_1, x_2, x_3) = \int_0^{x_1} \frac{\partial \delta}{\partial x_1} dx_1 + \int_0^{x_2} \frac{\partial \delta}{\partial x_2} (0, x_2, x_3) dx_2 + \int_0^{x_3} \frac{\partial \delta}{\partial x_3} (0, 0, x_3) dx_3, \tag{4.58}$$

де  $\delta_0$  – значення густини планети, що вважається відомим. Таким чином, при відомих стоксових постійних і динамічному стисненні  $H$ , а також заданому значенні густини на загальнопланетарному еліпсоїді можна побудувати функцію розподілу, представлену многочленами четвертої степені за змінними  $x_1, x_2, x_3$ . Для перевірки дієвості даної методики проілюструємо її на конкретному прикладі [106].

Приклад:

В одиничній кулі визначеної густини:

$$\sigma = 12 - W_{002} - W_{004},$$

де

$$W_{002} = \frac{1}{2^2 2!} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)^2 = \frac{1}{2} (3x_3^2 + x_1^2 + x_2^2 - 1),$$

$$W_{004} = \frac{1}{2^4 2!} \frac{\partial^4}{\partial x_3^4} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)^4 = \frac{1}{4} \left[ \frac{35}{2} + 15^2 (x_1^2 + x_2^2) - 3(x_1^2 + x_2^2) - 15z^2 + \frac{3}{8} \right]$$

На поверхні сфери  $\sigma = 12 - x_3^2 - x_3^4$ , тому що  $W_{pqs} = \frac{N!}{p!q!s!} x^p y^q z^s$ .

Для визначення  $I_{pqs}^i$  за формулами (4.44), (4.45) обчислимо степеневі моменти густини

$$I_{000}^i = \int \frac{\partial \delta}{\partial x_i} d\tau = \frac{12V_k}{M} = 12 / \delta_c$$

$$I_{100}^i = \frac{1}{Ma_1} \int x_1 \delta d\tau = 0, I_{010}^i = I_{001}^i = 0$$

$$I_{101}^i = \frac{1}{Ma_e^2} \int x_1 x_3 \delta d\tau = 0, I_{101}^i = 0, I_{101}^i = 0$$

$$I_{200}^i = \frac{1}{M} \int x_1^2 \delta d\tau = \frac{12}{5} \delta_c, I_{020}^i = \frac{12}{5} \delta_c, I_{002}^i = \left( \frac{12}{5} - \frac{2}{35} \right) \delta_c,$$

а величини, що входять в формули (4.44) є наступними:

$$\sigma_{300}^1 = \left( \frac{36}{5} - \frac{2}{35} \right) \delta_c, \sigma_{120}^1 = \left( \frac{12}{5} - \frac{4}{7!!} \right) \delta_c,$$

$$\sigma_{102}^1 = \left( \frac{12}{5} - \frac{2}{15} \right) \delta_c, \sigma_{100}^1 = \left( 12 - \frac{10}{35} \right) \delta_c,$$



для всіх інших  $\sigma_{pqs}^1 = 0$ .

Степеневі моменти для решти  $\frac{\partial \delta}{\partial x_i}$ :

$$I_{300}^1 = -\frac{4}{35} \delta_c, \quad I_{120}^1 = -\frac{4\delta_c}{7!!}, \quad I_{102}^1 = -\frac{8\delta_c}{7!!}, \quad I_{100}^1 = -\frac{10\delta_c}{35}, \quad I_{pqs}^1 = 0,$$

які співпадають зі знайденими безпосередньо по відомих функціях  $\frac{\partial \delta}{\partial x_i}$ .

Обчислимо коефіцієнти розкладу за знайденими моментами:

$$b_{300}^i = \frac{15}{2} \int_{\tau} (7x_1^3 - 3x_1) \frac{\partial \delta}{\partial x_1} d\tau = \frac{3}{7},$$

$$b_{120}^i = \frac{15}{2} \int_{\tau} (7x_1 x_2^2 - x_1) \frac{\partial \sigma}{\partial x_1} d\tau = \frac{1}{7},$$

$$b_{102}^i = \frac{-13}{7}, \quad b_{100}^i = \frac{-2.5}{7}.$$

Тоді

$$\frac{\partial \delta}{\partial x_1} = \left( \frac{3}{7} W_{300} - \frac{13}{7} W_{102} + \frac{1}{7} W_{120} - \frac{10}{7} W_{100} \right) \frac{1}{a_1}.$$

Аналогічно отримуємо співвідношення для похідною  $\frac{\partial \delta}{\partial x_2}$  (повна симетрія з

$\frac{\partial \delta}{\partial x_1}$ )

$$\sigma_{030}^2 = \left( \frac{36}{5} - \frac{2}{35} \right) \sigma_c, \quad \sigma_{210}^2 = \left( \frac{12}{5} - \frac{4}{7!!} \right) \sigma_c, \quad \sigma_{102}^2 = \left( \frac{12}{5} - \frac{2}{15} \right) \sigma_c,$$

$$\sigma_{010}^2 = \left( \frac{12}{5} - \frac{10}{35} \right) \sigma_c, \quad \sigma_{pqs}^2 = 0 \text{ - для решти.}$$

Степеневі моменти :

$$I_{030}^2 = -\frac{4}{35} \sigma_c, \quad I_{210}^2 = -\frac{4\sigma_c}{7!!}, \quad I_{102}^2 = -\frac{8\sigma_c}{7!!}, \quad I_{010}^2 = -\frac{10\sigma_c}{35}$$

$I_{pqs}^2 = 0$  для решти.

Аналогічно:

$$b_{030}^2 = \frac{3}{7}, \quad b_{012}^2 = \frac{-13}{7}, \quad b_{210}^2 = \frac{1}{7}, \quad b_{010}^2 = -\frac{2}{7}.$$

Тому

$$\frac{\partial \delta}{\partial x_2} = \left( \frac{3}{7} W_{030} - \frac{13}{7} W_{012} + \frac{1}{7} W_{210} - \frac{10}{7} W_{010} \right) \frac{1}{a_2},$$

а для похідної за третьою змінною:

$$\frac{\partial \delta}{\partial x_3} = -\frac{35}{7} W_{003} - \frac{13}{7} W_{102} + \frac{5}{7} W_{201} + \frac{5}{7} W_{021} - \frac{36}{7} W_{001}.$$

Маючи часткові похідні, використовуючи формулу (4.58), отримаємо вираз відновлювальної функції густини:

$$\begin{aligned} \delta(x_1, x_2, x_3) &= \frac{3}{7} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{5x^4}{4} + \frac{3x_1^2}{2} (x_2^2 + x_3^2) - 1 \right] \right\} - \frac{13}{7} \left[ \frac{3x_3^2}{2} + \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right] + \\ &+ \frac{1}{7} \frac{3}{2} \left[ \frac{3}{2} x_2^2 + \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_3^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right] - \frac{2}{7} \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{3}{7} \frac{1}{2} \left( \frac{5}{4} x_2^4 + \frac{3}{2} x_2^2 x_3^2 - \frac{3}{2} x_2^2 \right) - \frac{13}{7} \frac{3}{2} x_2^2 \left( \frac{3}{2} x_3^2 + \frac{x_2^2}{4} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{7} \frac{3}{2} x_2^2 \left[ \frac{x_x^x}{4} + \frac{x_2^x}{2} - \frac{1}{2} \right] - \frac{10}{7} \frac{x_2^2}{2a_2} - \frac{35}{7} - \frac{1}{2} \left( \frac{5}{4} x_3^4 - \frac{3}{2} \right) + \frac{5}{7} \frac{3}{2} \left( \frac{x_3}{4} - \frac{x_3^2}{3} \right) = \\ &= \frac{1}{14} \left\{ \frac{3}{2} x_1^2 \left[ \frac{5x_x^x}{4} + \frac{x_2^x}{2} - \frac{1}{2} \right] \right\} - (x_3^2) \frac{39}{2} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{3x^4}{4} + \frac{3x_1^2}{2} (x_2^2 + x_3^2) - 1 \right] \right\} - \\ &\frac{3x_2^2}{7} \left[ \frac{3x_3^2}{2} + \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right] + \frac{1}{7} \frac{3}{2} \left[ \frac{3}{2} x_2^2 + \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_3^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right] - \frac{2}{7} \frac{x_1^2}{a^2} + \\ &+ \frac{1}{7} \frac{3}{2} x_2^2 \left[ \frac{x_x^x}{4} + \frac{x_2^x}{2} - \frac{1}{2} \right] - \frac{10}{7} \frac{x_2^2}{2a_2} - \frac{35}{7} - \frac{1}{2} \left( \frac{5}{4} x_3^4 - \frac{3}{2} \right) + \frac{5}{7} \frac{3}{2} \left( \frac{x_3}{4} - \frac{x_3^2}{3} \right) = \\ &= \frac{1}{14} \frac{1}{2} \left( \frac{5}{4} x_3^4 - \frac{3}{2} \right) + \frac{5}{7} \frac{3}{2} \left( \frac{x_3}{4} - \frac{x_3^2}{3} \right) = \frac{1}{14} \frac{39}{2} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{3x^4}{4} + \frac{3x_1^2}{2} (x_2^2 + x_3^2) - 1 \right] \right\} \frac{3x_2^2}{7} \\ &\frac{39}{2} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{3x^4}{4} + \frac{3x_1^2}{2} (x_2^2 + x_3^2) - 1 \right] \right\} - \frac{3x_2^2}{7} \end{aligned}$$

$$\text{Але } \frac{9}{4} = \frac{15}{4} - \frac{3}{2} = \frac{9!}{4}, a \frac{1}{4} = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}.$$

Таким чином з точністю до константи відновлена функція  $\delta$ . Наведений приклад ілюструє можливість побудови моделей густини вищих порядків при відомому значенні на поверхні еліпсоїда. Таким чином, це повинно активізувати дослідження з метою побудови узагальнених функцій розподілу на поверхні загальнопланетарних еліпсоїдів з подальшим використанням їх при вивченні внутрішньої будови планет.

#### 4.10.2. Метод знаходження розподілу мас планети з урахуванням стоксових постійних до четвертого порядку .

В попередньому пункті встановлена можливість побудови функції щільності  $\delta$  еліпсоїдальної планети при відомих даних про гравітаційне поле до 2-го порядку і густині на поверхні планети. При цьому похідні такої функції визначаються у вигляді (4.40), а сама функція виразом (4.58), який для практичного застосування є непридатний, оскільки важко встановити аналітичний вигляд виразу  $\int_0^{x_i} W_{mnk} dx_i$ . Тому в подальшому підемо іншим шляхом [123,128]: густину представимо в традиційно вигляді лінійної комбінації поліномів  $W_{mnk}$ :

$$\delta(x_1, x_2, x_3) = \sum_{m+n+k=0}^4 b_{mnk} W_{mnk}(x_1, x_2, x_3). \quad (4.59)$$

Коефіцієнти  $b_{mnk}$  ( $m+n+k \leq 2$ ) обчислюються з системи рівнянь, яка отримується підстановкою формули (4.58) в стоксові постійні  $C_{nk}, S_{nk}$  ( $n \leq 2$ ) і динамічне стиснення  $H$  (аналогічно, як при визначенні степеневих моментів  $I_{pqs}$ ), результатом чого є співвідношення (4.7) для  $b_{mnk}$  ( $m+n+k \leq 2$ ).

Для визначення значень  $b_{mnk}$  ( $3 \leq m+n+k \leq 4$ ) підставимо їх в стоксові постійні 3-го і 4-го порядків, формули для яких можна отримати з [43, 65,110]:

$$\begin{aligned} C_{30} &= \frac{1}{Ma_e^3} \int_{\tau} \delta \left( z^3 - \frac{3}{2} z(x^2 + y^2) \right) d\tau, C_{31} = \frac{1}{Ma_e^3} \int_{\tau} \delta \left( z^2 x - \frac{1}{4} x(x^2 + y^2) \right) d\tau, \\ S_{31} &= \frac{1}{Ma^3} \int_{\tau} \delta \left( z^2 y - \frac{1}{2} y(x^2 + y^2) \right) d\tau, C_{32} = \frac{1}{Ma^3} \int_{\tau} \delta \frac{z(x^2 - y^2)}{4} d\tau, \\ S_{32} &= \frac{1}{Ma_e^3} \int \frac{\delta xyz}{2} d\tau, C_{33} = \frac{1}{8Ma_e^3} \int \delta x \left( y^2 - \frac{1}{3} x^2 \right) d\tau, S_{33} = \frac{1}{Ma_e^3} \int_{\tau} \delta \frac{y \left( x^2 - \frac{1}{3} y^2 \right)}{8} d\tau, \end{aligned} \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned}
C_{40} &= \frac{1}{Ma_e^4} \int_{\tau} \delta \left( z^4 - 3z^2(x^2 + y^2) + \frac{3}{8}(x^2 + y^2)^2 \right) d\tau, \\
S_{41} &= \frac{1}{Ma_e^4} \int_{\tau} \delta \left[ z^3 y - \frac{3}{4} xy(x^2 + y^2) \right] d\tau, C_{42} = \frac{1}{Ma_e^4} \int_{\tau} \left[ \frac{3z^2(x^2 - y^2)}{2} + \frac{1}{4}(y^4 - x^4) \right] \delta d\tau, \\
S_{42} &= \frac{1}{Ma_e^4} \int_{\tau} \left[ 3z^2 xy - \frac{1}{2} xy(x^2 + y^2) \right] \delta d\tau, C_{43} = \frac{1}{Ma_e^4} \int_{\tau} \frac{zx(x^2 - 3y^2)}{6} \delta d\tau, \\
S_{44} &= \frac{1}{Ma_e^4} \int_{\tau} \frac{1}{8} (xy(x^2 - y^2)) \delta d\tau, C_{41} = \frac{1}{Ma_e^4} \int_{\tau} \delta \left[ z^3 x - \frac{3}{4} xz(x^2 + y^2) \right] d\tau.
\end{aligned} \tag{4.61}$$

В результаті отримаємо низку залежностей для коефіцієнтів  $b_{mk}$  3-го порядку, які групуємо:

$$\begin{cases} 105\delta_c C_{30} - 27 \left( \gamma^2 - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) \right) b_{001} = 2b_{003} - 3(b_{201} + b_{021}), \\ 105\delta_c C_{32} - 27 \frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{4} b_{001} = \frac{1}{2}(b_{201} - b_{021}); \end{cases} \tag{4.62}$$

$$\begin{cases} 105\delta_c C_{31} - 27 \left( \gamma^2 - \frac{1}{2}(3\alpha^2 + \beta^2) \right) b_{100} = 2b_{102} - \frac{1}{2}(b_{300} + b_{120}), \\ 105\delta_c C_{33} - 27(\alpha^2 - \beta^2) b_{100} = \frac{b_{300}}{3} - b_{120}; \end{cases} \tag{4.63}$$

$$\begin{cases} 105\delta_c S_{31} - 27 \left( \gamma^2 - \frac{1}{2}(\alpha^2 + 3\beta^2) \right) b_{010} = b_{012} - \frac{1}{2}(b_{210} + b_{030}), \\ 105\delta_c S_{33} - 27 \left( \frac{\alpha^2 - \beta^2}{8} \right) b_{010} = b_{210} - \frac{1}{3}b_{030} \end{cases} \tag{4.64}$$

Один коефіцієнт визначається безпосередньо, а саме :

$$210\delta_c S_{32} = b_{111}$$

Для 4-го порядку виписуємо аналогічні рівняння, які також об'єднуємо:

$$\begin{cases} \left[ \frac{11\delta_c}{72} \left( \delta_c C_{41} - \frac{18}{9!!} b_{101} \left[ \gamma^2 - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) - \frac{1}{4}(\alpha^2 - \beta^2) \right] \right) \right] = b_{103} - \frac{3}{4}(b_{301} + b_{131}), \\ \left[ \frac{11!!}{72} \left( \delta_c C_{43} - \frac{18}{9!!6} (\alpha^2 - \beta^2) b_{101} \right) \right] = \frac{b_{301} - 3b_{121}}{6} \end{cases}, \tag{4.64}$$

$$\begin{cases} \left[ \frac{11!!}{72} \left\{ \delta_c S_{41} - \frac{18}{9!!} b_{011} \left[ \left( \gamma^2 - \frac{1}{2} \right) (\alpha^2 + \beta^2) + \frac{1}{4}(\alpha^2 - \beta^2) \right] \right\} \right] = b_{013} - \frac{3}{4}(b_{031} + b_{211}), \\ \left[ \frac{11!!}{72} \left\{ \delta_c S_{43} - \frac{18}{9!!6} (\alpha^2 - \beta^2) b_{011} \right\} \right] = \frac{b_{211} - 3b_{031}}{6}; \end{cases} \tag{4.65}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{11!!}{72} \left\{ \delta_c C_{40} - \frac{24}{7!!} \left[ \left( \gamma^2 - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) \right) \left( b_{002} - \frac{1}{2}(b_{200} + b_{020}) \right) + (\alpha^2 - \beta^2) \frac{b_{200} - b_{020}}{y} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{3}{35} \left[ \gamma^4 - \gamma^2(\alpha^2 + \beta^2) + \frac{1}{8}(3\alpha^4 + 3\beta^4 - 2\alpha^2\beta^2) \right] \right\} = b_{004} - 3(b_{202} + b_{022}) + \frac{3}{8}(b_{400} + b_{040} + 2b_{220}), \\ & \frac{11!!}{72} \left\{ 4\delta_c C_{42} - \frac{24}{9!!} \left[ (\alpha^2 - \beta^2) \left( b_{002} - \frac{1}{2}(b_{200} + b_{020}) \right) + (b_{200} - b_{020}) \left( \gamma^2 - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) \right) \right] \right\} \\ & + \frac{3}{70} + \left( \gamma^2(\alpha^2 - \beta^2) + \frac{1}{4}(\beta^4 - \alpha^4) \right) b_{000} \left. \right\} = \frac{3}{2}(b_{202} - b_{022}) + \frac{1}{4}(b_{040} - b_{400}), \quad (4.66) \\ & \frac{11!!32\delta_c}{72} - \frac{72}{9!!}(\alpha^2 - \beta^2)(b_{200} - b_{020}) + \frac{3}{35}(\alpha^2 - \beta^2)^2 b_{000} = b_{400} + b_{040} - 6b_{220}. \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{11!!}{72} \left( \delta_c S_{42} + \frac{18}{9!!} \left[ 3(\gamma^2 - (\alpha^2 + \beta^2)) \right] b_{110} \right) = 3b_{112} - \frac{1}{2}(b_{310} + b_{130}), \quad (4.67) \\ & \frac{11!!}{72} \left( \delta_c S_{44} + \frac{18}{9!!8} (\alpha^2 - \beta^2) b_{110} \right) = \frac{b_{310} - b_{130}}{8}. \end{aligned} \right.$$

Кожна з систем рівнянь (4.62) – (4.67) недовизначена. Для їх доповнення використаємо представлення похідних рівностями (4.40), коефіцієнти розкладу яких визначаються через степеневі моменти густини  $I_{pqs}$  ( $p+q+s \leq 2$ ) та інтегральні поверхневі характеристики  $\sigma_{pqs}$  (4.35) ( $p+q+s \leq 4$ )

Вважаючи їх невідомими і враховуючи додаткові умови вигляду

$$\sigma_{p+2qs} + \sigma_{pq+2s} + \sigma_{pqs+2} = \sigma_{pqs}, \quad (4.68)$$

у випадку лінійної незалежності отримуємо, що кількість невідомих відповідає кількості рівнянь. Дійсно, загальна кількість коефіцієнтів  $N$  рівнянь, що задовольняють стоксові постійні,  $t = (2N+1)$ , далі, коефіцієнти  $b_{mjk}$  можна виразити через  $d_{pqs}^i$  ( $p+q+s \leq N-1$ ), які в свою чергу визначаються як лінійна комбінація  $\sigma_{pqs}$  ( $p+q+s \leq N$ ). Невідомими є інтеграли для  $l = p+q+s = N$ , бо для  $l < N$  вони визначаються раніше. Загальна кількість  $\sigma_{pqs}$  обчислюються як

$\frac{N}{2}(N-1)$ , а тому

$$t+l = \frac{N(N-1)}{2} + (2N+1) = \frac{N^2 + 3N + 2}{2} = \frac{(N+1)(N+2)}{2} = d.$$

Тобто кількість невідомих і рівнянь однакова і при їх лінійній незалежності задача має єдиний розв'язок. Опишемо даний алгоритм, який є простим, але громіздким і вимагає значних зусиль при реалізації. Знайдемо зв'язок коефіцієнтів  $b_{nmk}$  і  $d_{pqs}^i$ , для чого випишемо многочлени  $W_{nmk}$ , використовуючи рекурентні співвідношення ( $m+n+k \leq 4$ ), причому наведемо лише вирази для  $N=4$ , бо інші наведені раніше формулами в розділі 2 :

$$W_{400} = \frac{1}{8a_1^4} \left[ 35 \left( \frac{x_1}{a_1} \right)^4 + 30 \left( \frac{x_1}{a_1} \right)^2 \left( \left( \frac{x_2}{a_2} \right)^2 + \left( \frac{x_3}{a_3} \right)^2 - 1 \right) + 3 \left( \left( \frac{x_2}{a_2} \right)^2 \left( \frac{x_3}{a_3} \right)^2 - 1 \right) + \left( \frac{x_3}{a_3} \right)^4 - 2 \left( \frac{x_3}{a_3} \right)^2 + 1 \right],$$

$$W_{310} = 2 \frac{x_1 x_2}{a_1^4 a_2^2} \left[ 5 \left( \frac{x_1}{a_1} \right)^2 + 3 \left( \frac{x_2}{a_2} \right)^2 + 3 \left( \frac{x_3}{a_3} \right)^2 - 3 \right], W_{301} = \frac{2x_1 x_3}{a_1^4 a_3^2} \left[ 5 \left( \frac{x_1}{a_1} \right)^2 + 3 \left( \left( \frac{x_2}{a_2} \right)^2 + 3 \left( \frac{x_3}{a_3} \right)^2 - 3 \right) \right],$$

$$W_{220} = \frac{3}{4a_1^2 a_2^2} \left[ 5 \left( \frac{x_1}{a_1} \right)^4 + 6 \left( \frac{x_1}{a_1} \right)^2 \left( 3 \left( \frac{x_2}{a_2} \right)^2 + \left( \frac{x_3}{a_3} \right)^2 - 1 \right) + 5 \left( \frac{x_2}{a_2} \right)^4 + 6 \left( \frac{x_2}{a_2} \right)^2 \left( \left( \frac{x_3}{a_3} \right)^2 - 1 \right) + \left( \left( \frac{x_3}{a_3} \right)^2 + 1 \right)^2 \right],$$

$$W_{202} = \frac{3}{4a_1^2 a_3^2} \times$$

$$\left[ 5 \left( \left( \frac{x_1}{a_1} \right)^4 + \left( \frac{x_3}{a_3} \right)^4 \right) \left( \frac{x_3}{a_3} \right)^4 + 18 \left( \frac{x_1}{a_1} \right)^2 \left( \frac{x_3}{a_3} \right)^2 + 6 \left( \frac{x_2}{a_2} \right)^2 \left( \left( \frac{x_1}{a_1} \right)^2 + \left( \frac{x_3}{a_3} \right)^2 \right) - 6 \left( \frac{x_1}{a_1} \right)^2 \left( \frac{x_3}{a_3} \right)^2 - 2 \left( \frac{x_2}{a_2} \right)^2 + 1 \right],$$

$$W_{211} = \frac{6x_2 x_3}{a_1^2 a_2^2 a_3^2} \left[ 3 \left( \frac{x_1}{a_1} \right)^2 + \left( \frac{x_2}{a_2} \right)^2 + \left( \frac{x_3}{a_3} \right)^2 - 1 \right], W_{121} = \frac{6x_1 x_3}{a_1^2 a_2^2 a_3^2} \left[ 3 \left( \frac{x_2}{a_2} \right)^2 + \left( \frac{x_1}{a_1} \right)^2 + \left( \frac{x_3}{a_3} \right)^2 - 1 \right],$$

$$W_{112} = \frac{6x_1 x_2}{a_1^2 a_2^2 a_3^2} \left[ 3 \left( \frac{x_3}{a_3} \right)^2 + \left( \frac{x_1}{a_1} \right)^2 + \left( \frac{x_2}{a_2} \right)^2 - 1 \right], W_{031} = \frac{2x_3 x_2}{a_3^2 a_2^4} \left[ 5 \left( \frac{x_2}{a_2} \right)^2 + 3 \left( \left( \frac{x_1}{a_1} \right)^2 + 3 \left( \frac{x_3}{a_3} \right)^2 - 3 \right) \right],$$

$$W_{013} = \frac{2x_2 x_3}{a_2^4 a_3^2} \left[ 5 \left( \frac{x_3}{a_3} \right)^2 + 3 \left( \left( \frac{x_1}{a_1} \right)^2 + 3 \left( \frac{x_2}{a_2} \right)^2 - 3 \right) \right],$$

$$W_{022} = \frac{3}{4a_1^2 a_2^2} \left[ 5 \left( \frac{x_1}{a_1} \right)^4 + 6 \left( \frac{x_1}{a_1} \right)^2 \left( 3 \left( \frac{x_2}{a_2} \right)^2 + \left( \frac{x_3}{a_3} \right)^2 - 1 \right) + 5 \left( \frac{x_2}{a_2} \right)^4 + 6 \left( \frac{x_2}{a_2} \right)^2 \left( \left( \frac{x_3}{a_3} \right)^2 - 1 \right) + \left( \left( \frac{x_3}{a_3} \right)^2 + 1 \right)^2 \right],$$

$$W_{004} = \frac{1}{8a_2^4} \left[ 35 \left( \frac{x_3}{a_3} \right)^4 + 30 \left( \frac{x_3}{a_3} \right)^2 \left( \left( \frac{x_1}{a_1} \right)^2 + \left( \frac{x_2}{a_2} \right)^2 - 1 \right) + 3 \left[ \left( \left( \frac{x_2}{a_2} \right)^2 + \left( \frac{x_1}{a_1} \right)^2 \right)^2 - 2 \left( \left( \frac{x_1}{a_1} \right)^2 + \left( \frac{x_2}{a_2} \right)^2 \right) + 1 \right] \right],$$

$$W_{004} = \frac{1}{8a_2^4} \times$$

$$\left[ 35 \left( \frac{x_2}{a_2} \right)^4 + 30 \left( \frac{x_2}{a_2} \right)^2 \left( \left( \frac{x_1}{a_1} \right)^2 + \left( \frac{x_3}{a_3} \right)^2 - 1 \right) + 3 \left[ \left( \left( \frac{x_1}{a_1} \right)^2 + \left( \frac{x_3}{a_3} \right)^2 \right)^2 - 2 \left( \left( \frac{x_1}{a_1} \right)^2 + \left( \frac{x_3}{a_3} \right)^2 \right) + 1 \right] \right],$$

$$W_{130} = \frac{2x_1x_2}{a_1^2a_2^4} \left[ 5 \left( \left( \frac{x_2}{a_2} \right)^2 + 3 \left( \left( \frac{x_1}{a_1} \right)^2 + 3 \left( \frac{x_3}{a_3} \right)^2 - 3 \right) \right) \right],$$

$$W_{103} = \frac{2x_1x_3}{a_1^2a_3^4} \left[ 5 \left( \left( \frac{x_3}{a_3} \right)^2 + 3 \left( \left( \frac{x_1}{a_1} \right)^2 + 3 \left( \frac{x_2}{a_2} \right)^2 - 3 \right) \right) \right].$$

Використовуючи тотожність

$$\frac{\partial \delta}{\partial x_i} = \sum_{p+q+s=0}^3 d'_{pqs} W_{pqs} = \sum_{m+n+k=0}^4 b_{mnk} \frac{\partial}{\partial x_i} (W_{mnk}) \quad (4.69)$$

та прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях отримаємо:

$$x_i^0 \quad d'_{000} - \frac{1}{2}(d'_{200} + d'_{020} + d'_{002}) = b_{100} - \frac{3}{2}(b_{300} + b_{120} + b_{102}),$$

$$x_1 \quad d'_{000} - \frac{3}{2}(d'_{300} + d'_{102} + d'_{120}) = 3b_{200} + b_{020} + b_{002} - \frac{1}{8}(b_{400} + b_{040} + b_{004}) +$$

$$-\frac{3}{4}(36b_{202} + 36b_{220} + 12b_{022}),$$

$$x_2 \quad d'_{010} - \frac{3}{2}(d'_{030} + d'_{210} + d'_{012}) = 2b_{110} - 6b_{310} - 6b_{130} - 6b_{112},$$

$$x_3 \quad d'_{001} - \frac{3}{2}(d'_{003} + d'_{201} + d'_{021}) = 2b_{101} - 6(b_{103} + b_{301}) - 6b_{121},$$

$$x_1^2 \quad \frac{3}{2}d'_{200} + \frac{1}{2}d'_{020} + \frac{1}{2}d'_{002} = \frac{3}{2}(5b_{300} + 3b_{120} + 3b_{102}), \quad (4.70)$$

$$x_2^2 \quad \frac{1}{2}(d'_{200} + 3d'_{020} + d'_{002}) = \frac{1}{2}(3b_{300} + 3b_{120} + 3b_{102}),$$

$$x_3^2 \quad \frac{1}{2}(d'_{200} + d'_{020} + 3d'_{002}) = \frac{1}{2}(3b_{300} + 3b_{120} + 9b_{102}),$$

$$x_1x_2 \quad 2d'_{110} = 9b_{210} + 3b_{012} + 9b_{030},$$

$$x_1x_3 \quad 2d'_{101} = 3b_{021} + 9b_{003} + 9b_{201},$$

$$x_2x_3 \quad 2d'_{011} = \frac{105}{2}b_{111},$$

$$x_1^3 \quad \frac{1}{2}(5d'_{300} + 3d'_{102} + 3d'_{120}) = \frac{1}{8} \left[ [140b_{400} + 12(b_{040} + b_{004})] + 15(b_{220} + b_{202}) + 3b_{022} \right],$$

$$\begin{aligned}
x_2^3 & \frac{1}{2}(5d'_{030} + 3d'_{210} + 3d'_{012}) = 6b_{310} + 10b_{130} + 6b_{112}, \\
x_3^3 & \frac{1}{5}(5d'_{003} + 3d'_{201} + 3d'_{021}) = 6(b_{301} + b_{121}) + 10b_{103}, \\
x_1^3 x_2 & \frac{1}{2}(9d'_{210} + 3d'_{030} + 3d'_{012}) = 30b_{310} + 18b_{130} + 18b_{112}, \\
x_1^2 x_3 & \frac{1}{2}(9d'_{201} + 3d'_{003} + 3d'_{021}) = 30b_{301} + 18b_{103} + 18b_{121}, \\
x_1 x_2^2 & \frac{1}{2}(9d'_{102} + 3d'_{300} + 3d'_{120}) = \frac{60}{8}(b_{400} + b_{040}) + \frac{12}{8}b_{040} + \frac{3}{4}(12b_{220} + 36b_{202} + b_{022}), \\
x_1 x_2^2 & \frac{1}{2}(3d'_{102} + 3d'_{300} + 9d'_{120}) = \frac{60}{8}(b_{400} + b_{040}) + \frac{12}{8}b_{004} + \frac{3}{4}(36b_{220} + 12b_{202} + b_{022}), \\
x_2 x_3^2 & \frac{1}{2}(9d'_{201} + 3d'_{030} + 9d'_{021}) = 6b_{301} + 6b_{103} + 18b_{121}, \\
x_2^2 x_3 & \frac{1}{2}(9d'_{012} + 3d'_{030} + 9d'_{210}) = 6b_{310} + 6b_{130} + 18b_{112}.
\end{aligned}$$

Система рівнянь (4.61) – (4.67), а також (4.68), дозволяє знайти коефіцієнти розкладу  $b_{mjk}$ , а її структура дозволяє розділити їх визначення на частини, а саме:

$$\left\{ \begin{aligned}
2b_{003} - 3(b_{201} + b_{021}) &= 105\delta_c C_{30} - 27\left(\gamma^2 - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)\right)b_{001}, \\
b_{001} - b_{021} &= 210\delta_c C_{30} - \frac{27}{2}(\alpha^2 - \beta^2)b_{001}, \\
(b_{003} + b_{201} + b_{021}) &= \frac{2}{3}\left(-d_{000}^3 + \frac{1}{2}(d_{200}^3 + d_{020}^3 + d_{002}^3)\right) + \frac{2}{3}b_{001}, \\
5b_{003} + 3(b_{021} + b_{201}) &= d_{200}^3 + d_{020}^3 + d_{002}^3, \\
3b_{003} + 3b_{021} + 3b_{201} &= d_{200}^3 + 2d_{020}^3 + d_{002}^3, \\
3b_{003} + 3b_{021} + 3b_{021} &= 3d_{200}^3 + d_{020}^3 + d_{002}^3;
\end{aligned} \right. \quad (4.71)$$



$$\left\{ \begin{array}{l}
105\delta_C C_{33} = \frac{b_{300} - b_{120}}{34} \\
2b_{102} - \frac{1}{3}(b_{300} + b_{120}) = 105\delta_C C_{31} - 27\left(\gamma^2 - \frac{1}{2}(3\alpha^2 + \beta^2)\right)b_{100} \\
\frac{b_{300}}{3} - b_{120} = 105\delta_C C_{33} - 27(\alpha^2 - \beta^2)b_{100} \\
5b_{300} + 3b_{120} + 3b_{102} = 3d'_{200} + d'_{020} + d'_{002} \\
3b_{300} + 9b_{120} + 3b_{102} = d'_{200} + 3d'_{020} + d'_{002} \\
3b_{300} + 3b_{120} + 9b_{102} = d'_{200} + d'_{020} + 3d'_{002} \\
\frac{2}{3}(b_{300} + b_{120} + b_{102}) = b_{100} - d'_{000} + \frac{1}{2}(d'_{200} + d'_{020} + d'_{002})
\end{array} \right. \quad (4.71)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
b_{102} - \frac{1}{2}(b_{210} + b_{030}) = 150S_{31} - 27\left(\gamma^2 - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)\right)b_{010} \\
\frac{1}{8}\left(b_{012} - \frac{1}{3}b_{030}\right) = 105S_{33} - \frac{27}{8}(\alpha^2 - \beta^2)b_{010} \\
\frac{3}{2}(b_{030} + b_{210} + b_{012}) = b_{010} - d_{000}^2 + \frac{1}{2}(d'_{200} + d'_{020} + d'_{002}) \\
5b_{030} + 3b_{210} + 3b_{012} = d_{200}^2 + 3d_{020}^2 + d_{002}^2 \\
3b_{030} + b_{210} + b_{012} = d_{200}^2 + d_{020}^2 + d_{002}^2 \\
3b_{030} + b_{210} + b_{012} = d_{200}^2 + 3d_{020}^2 + d_{002}^2
\end{array} \right. \quad (4.72)$$

Маємо три системи рівнянь, які доповнюємо умовами:

$$\begin{aligned}
\sigma_{300} + \sigma_{120} + \sigma_{102} &= \sigma_{100}, \\
\sigma_{030} + \sigma_{210} + \sigma_{012} &= \sigma_{010}, \\
\sigma_{003} + \sigma_{201} + \sigma_{021} &= \sigma_{001}.
\end{aligned} \quad (4.73)$$

Аналогічно групуємо системи для коефіцієнтів 4-го порядку:

$$\left\{ \begin{array}{l}
11!! \left[ b_{103} - \frac{3}{4}(b_{301} + b_{121}) \right] = \frac{11!!\delta_C}{72} \left( C_{41} - \frac{18}{9!!} b_{101} \left( \gamma^2 - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) \right) - \frac{1}{4}(\alpha^2 - \beta^2) \right) \\
\frac{11!!\delta_C}{72} \left[ \frac{b_{301} - 3b_{121}}{6} \right] = \frac{11!!}{72} \left( \delta_C C_{43} - \frac{18}{9!!} \frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{6} b_{101} \right) \\
10b_{103} + 6b_{301} + 6b_{121} = \frac{1}{2}(5d'_{003} + 9d_{201} + 3d_{021}) \\
18b_{103} + 30b_{301} + 18b_{121} = \frac{1}{2}(3d'_{003} + 3d_{201} + 9d_{021}) \\
9b_{103} + 6b_{301} + 18b_{121} = \frac{1}{2}(3d'_{003} + 3d_{201} + 3d_{021}) \\
2b_{101} - 6(b_{301} + b_{103} + b_{121}) = d'_{001} - \frac{1}{2}(d_{003} + d_{201} + d_{021})
\end{array} \right. \quad (4.74)$$

$$\left\{ \begin{aligned}
& b_{004} + \frac{3}{8}(b_{400} + b_{040}) + 3(b_{202} + b_{022}) + \frac{3}{4}b_{220} = \frac{11!!!}{72} \left\{ \delta_C C_{40} - \frac{72}{7!!!} \left( \gamma^2 - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) \right) \left( b_{002} - \frac{1}{2}(b_{200} + b_{020}) \right) \right\} + \\
& + \left( \alpha^2 + \beta^2 \right) \frac{b_{200} - b_{020}}{4} \left. \right\} + \frac{3}{5} \left( \gamma^4 + \gamma^2(\alpha^2 + \beta^2) + \frac{1}{8}(3\alpha^4 + 3\beta^4 - 2\alpha^2\beta^2) \right) \\
& \frac{3}{2}(b_{202} - b_{022}) + \frac{1}{4}(b_{040} - b_{400}) = \frac{11!!!}{72} \left\{ 4\delta_C C_{42} - \frac{54}{9!!!} \left[ (\alpha^2 - \beta^2) \left( b_{002} - \frac{1}{2}(b_{200} + b_{020}) \right) + (b_{200} - b_{020}) \left( \gamma^2 - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) \right) \right] \right\} \\
& + \frac{3}{10}(\alpha^2 - \beta^2)(b_{200} - b_{020}) \left. \right\} \\
& b_{400} + b_{040} - 6b_{220} = \frac{11!!!}{72} 32 \left\{ \delta_C C_{44} - 72(\alpha^2 - \beta^2)(b_{200} - b_{020}) + \frac{3}{35}(\alpha^2 - \beta^2)b_{000} \right\} \\
& 140b_{400} + 12(b_{040} + b_{004}) + 15(b_{220} + b_{202}) + 9b_{022} = 4(5d'_{300} + 3d'_{102} + 3d'_{210}) \\
& 15(b_{400} + b_{004}) + 3b_{040} + 3(12b_{220} + 36b_{202}) + 12b_{022} = 9d'_{102} + 3d'_{300} + 3d'_{120} \\
& 15(b_{400} + b_{004}) + 3b_{004} + 36(3b_{220} + (b_{202} + b_{022})) = 9d'_{201} + 3d'_{030} + 9d'_{021} \\
& 140b_{040} + 12(b_{400} + b_{004}) + 15(b_{220} + b_{022}) + b_{202} = 4(5d'^2_{030} + 3d'^2_{210} + d_{012}) \\
& 15(b_{040} + b_{400}) + 3b_{004} + 36(3b_{220} + b_{022} + b_{202}) = 9d'_{201} + 3d'_{030} + 9d'_{021}
\end{aligned} \right. \quad (4.76)$$

$$\left\{ \begin{aligned}
& 3b_{112} - \frac{1}{2}(b_{310} + b_{130}) = \frac{11!!!}{72} \left( \delta_C S_{42} - \frac{18}{9!!!} \left( 3\gamma^2 - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) \right) b_{110} \right) \\
& \frac{b_{130} + b_{130}}{2} = \frac{11!!!}{72} \left( \delta_C S_{44} - \frac{18}{8 \cdot 9!!!} (\alpha^2 - \beta^2) b_{110} \right) \\
& 10b_{130} + 6b_{310} + 6b_{112} = \left( d'_{003} + \frac{1}{2}(5d'_{030} + 3d'_{210} + 3d'_{012}) \right) \\
& 18b_{130} + 30b_{310} + 18b_{112} = \frac{1}{2}(3d'_{030} + 9d'_{210} + 3d'_{012}) \\
& 6b_{130} + 6b_{310} + 18b_{112} = \frac{1}{2}(3d'_{030} + 3d'_{210} + 9d'_{012}) \\
& 2b_{110} - 6b_{310} - 6b_{130} - 6b_{112} = d'_{010} - \frac{3}{2}(d'_{030} + d'_{210} + d'_{012})
\end{aligned} \right. \quad (4.76)$$

Отримання останньої системи впливає з тотожності:

$$\frac{\partial \delta}{\partial x_2} = \sum_{m+n+k=0}^4 b_{mnk} \frac{\partial}{\partial x_2} (W_{mnk}) = \sum_{p+q+s}^3 d_{pqs}^2 W_{pqs} \cdot$$

В результаті одержимо:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{013} - \frac{3}{4}(b_{031} + b_{211}) = \frac{11!!}{72} \left( \delta_C S_{41} - \frac{18}{9!!} b_{011} \left( \gamma^2 - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) \right) \right) + \frac{1}{4}(\alpha^2 - \beta^2) \\ \frac{3b_{211} - b_{031}}{6} = \frac{11!!}{72} \left( \delta_C S_{42} - \frac{3}{9!!} \left( 3\gamma^2 - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) \right) b_{110} \right) \\ 10b_{013} + 6b_{031} + 6b_{211} = \frac{1}{2}(5d_{003}^2 + 3d_{201}^2 + 3d_{021}^2) \\ 6b_{013} + 6b_{031} + 18b_{211} = \frac{1}{2}(3d_{003}^2 + 9d_{201}^2 + 3d_{021}^2) \\ 18b_{013} + 30b_{031} + 18b_{211} = \frac{1}{2}(3d_{003}^2 + 3d_{201}^2 + 9d_{021}^2) \\ 2b_{011} - 6(b_{301} + b_{031} + b_{211}) = d_{001}^2 - \frac{3}{2}(d_{003}^2 + d_{201}^2 + d_{021}^2) \end{array} \right. \quad (4.77)$$

Системи рівнянь (4.74) – (4.77) знову доповнюємо умовами:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{400} + \sigma_{220} + \sigma_{202} = \sigma_{200} \\ \sigma_{220} + \sigma_{040} + \sigma_{022} = \sigma_{020} \\ \sigma_{202} + \sigma_{004} + \sigma_{022} = \sigma_{002} \\ \sigma_{310} + \sigma_{130} + \sigma_{112} = \sigma_{110} \\ \sigma_{301} + \sigma_{121} + \sigma_{103} = \sigma_{101} \\ \sigma_{031} + \sigma_{211} + \sigma_{013} = \sigma_{011} \end{array} \right. \quad (4.78)$$

Всі вони є однотипні, тому алгоритми обчислень опишемо в матричному вигляді.

Нехай,

$b = (b_{pqs})$  – вектор невідомих коефіцієнтів,

$d = (d_{pqs})$  – вектор коефіцієнтів розкладу похідних  $\frac{\partial \delta}{\partial x_i}$ ,

$A$  – квадратна матриця зв'язку  $b$  і  $d$ ,

$A_1$  – матриця зв'язку  $b$  і  $d$ , що лишились,

$D^m$  – матриця зв'язку  $b$  і  $\sigma^m$

$\sigma^m$  – вектор величин  $\sigma_{pqs}^m$ ,

$C$  – вектор значень стоксових постійних,

$F$  – матриця зв'язку  $b$  і  $c$ .

Тоді система рівнянь в матричному вигляді запишеться:

$$d = Ab, C = Fb, d = \sum_{m=1}^n D^m \sigma^m,$$

а тому, якщо  $\det(A \neq 0)$ ,

$$b = A^{-1}d = \sum_{m=1}^n A^{-1}D^m \sigma^m . \quad (4.79)$$

Тому послідовно виконуючи матричні дії:

$$\begin{aligned} C &= \sum_{m=1}^n FA^{-1}D^m \sigma^m , \\ b &= A_1 d, \end{aligned} \quad (4.80)$$

одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \sum_{m=1}^n A^{-1}D^m \sigma^m = \sum_{m=1}^n A_1 D^m \sigma^m = 0, \\ \sigma^{l+2} = \sigma^e \\ \sum_{m=1}^n FA^{-1}D^m \sigma^m = C \end{cases} \quad (4.81)$$

Застосовуючи цей алгоритм до системи однотипних рівнянь , визначаємо послідовно вектор невідомих  $\sigma^m$ , а далі з рівності (4.80) і вектор  $b$ , що дає можливість знаходити розподіл густини мас за формулою (4.1) в довільній точці еліпсоїдальної планети.

#### **4.11. Знаходження оцінки для значення густини в центрі еліпсоїдальної планети**

Дослідження внутрішньої структури на основі даних спостережень є надзвичайно актуальною задачею . При цьому визначаючим є розміщення мас  $\delta$  в середині еліпсоїдальної планети і особливо в її центрі. Встановлення співвідношень між  $\delta_0$  і значенням на поверхні тіла дає можливість встановлювати допустимі величини для  $\delta_0$ , адже створення обґрунтованих моделей розподілу дає можливість вивчати внутрішню структуру планет, а узгоджені параметри використовувати в астрономії [39,190,191] для вивчення орбітальних рухів планет. Зв'язок між поверхневим значенням густини і  $\delta_0$ , дозволяє досліджувати вплив структури кора– мантія на загальнопланетарну внутрішню будову небесних тіл.

Визначенню інтервалів значень  $\delta_0$  присвячено ряд робіт [9,152-154], при цьому на основі певних допущень на перевірку густини отримуються обмеження як знизу, так і зверху. Відомі моделі густини Роша, Дарвіна [9] в сферично–симетричному випадку пов'язують значення на поверхні та в центрі планети. На відміну від них в роботі [102], крім нерівностей для  $\delta_0$ , які узгоджуються з цими дослідженнями, проводяться залежності між  $\delta_0$  і поверхневою густиною загальнопланетарного еліпсоїда [102-112].

Зобразимо похідні функції густини  $\delta(x_1, x_2, x_3)$  за біортогональними розкладами [62,63] вважаючи їх кусково – неперервними, тобто:

$$\frac{\partial \delta}{\partial x_i} = \frac{1}{a_i} \sum_{N=m+n+k=0}^{\infty} d_{mnk}^i W_{mnk}(x_1, x_2, x_3),$$

де

$$d_{mnk}^i = \int_{\tau} \frac{\partial \delta}{\partial x_i} \omega_{mnk} d\tau / l_{mnk},$$

$\{W_{mnk}\}, \{\omega_{mnk}\}$  – дві біортогональні системи многочленів в еліпсоїді  $\tau$ ,

причому

$$W_{mnk} = \frac{1}{2^N m!n!k!} \frac{\partial}{\partial x_1^m \partial x_2^n \partial x_3^k} (\rho^2 - 1)^N.$$

Функцію  $\delta$  можна відтворити за її похідними [102] за формулою (4.58), розгорнутий вигляд якої наступний:

$$\begin{aligned} \delta(x_1, x_2, x_3) = & \left[ \sum_{m+n+k=0}^{\infty} d_{m+1nk}^1 \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} d_{mn+1k}^2 + \right. \\ & \left. \frac{1}{a_3} d_{mnk+1}^3 \right] \frac{\partial^{N-1} (\rho^2 - 1)^N}{\partial x_1^m \partial x_2^n \partial x_3^k} \frac{1}{2^N m!n!k!} + \sum_{m+n+k=0}^{\infty} \left[ d_{onk}^1 \frac{x_1}{a_1} W_{onk}(x_1, x_2, x_3) \right. \\ & \left. + \frac{x_2}{a_2} d_{mok}^2 W_{mok}(0, x_2, x_3) + \frac{x_3}{a_3} d_{mm0}^3 W_{mm0}(0, 0, x_3) \right]. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Далі підставимо її у вираз стоксової постійної нульового порядку.

В результаті одержимо

$$C_{00} = \left[ \delta_0 + \frac{1}{10} (d_{100}^1 + d_{010}^2 + d_{001}^3) \right] \frac{V}{M}, \quad (4.83)$$

де коефіцієнти розкладу будуть наступними:

$$d_{100}^1 = 5\delta_c I_{100}^1; \quad d_{010}^2 = 5\delta_c I_{010}^2; \quad d_{001}^3 = 5\delta_c I_{001}^3.$$

У свою чергу моменти похідних виражаються так:

$$I_{100}^1 = \frac{1}{a_1}(-I_{000} + \sigma_{100}^1), \quad I_{010}^2 = \frac{1}{a_2}(-I_{000} + \sigma_{010}^2), \quad I_{001}^3 = \frac{1}{a_3}(-I_{000} + \sigma_{001}^3),$$

де  $I_{000} = \frac{1}{M} \int_{\tau} \delta d\tau = 1$  – нульовий степеневий момент густини,

$$\sigma_{100}^1 = \int_{\sigma} x_1 \cos \alpha d\sigma = \int_{\sigma} \left(\frac{x_1^2}{a_1}\right) G d\sigma = \sigma_{200} a_3,$$

$$\sigma_{010}^2 = \int_{\sigma} \left(\frac{x_2^2}{a_2}\right) G d\sigma = \sigma_{200} a_3, \quad \sigma_{001}^3 = \int_{\sigma} \left(\frac{x_3^2}{a_3}\right) d\sigma = \sigma_{020} a_3,$$

а

$$G = \sqrt{\left(1 + \frac{x_1^2}{a_1^2} \left(\frac{a_3^2}{a_1^2} - 1\right) + \frac{x_2^2}{a_2^2} \left(\frac{a_3^2}{a_2^2} - 1\right)\right)},$$

звідки

$$\frac{5}{2} I_{000} = \delta_0 + \frac{1}{2} a_3 (\sigma_{200} + \sigma_{020} + \sigma_{002}) = \delta_0 + \frac{1}{2} a_3 \int_{\sigma} \delta G d\sigma / \delta c,$$

Враховуючи, що  $I_{000} = 1$  одержимо

$$\delta_0 = \frac{5}{2} - \frac{a_3}{2\delta_c} \int_{\sigma} \delta G d\sigma \quad (4.84)$$

Таким чином, формула (4.84) пов'язує середнє значення густини  $\delta_c$  на поверхні  $\sigma$  і величиною  $\delta_0$  в центрі планети, а також дає можливість провести

оцінку її зміни, тобто побудувати таку нерівність:  $2.5 - 1.5 \frac{\delta_p}{\delta_c} \leq \delta_0 \leq 2.5$ ,

яка впливає з оцінки:

$$\frac{a_3}{2} \int_{\sigma} \delta G d\sigma \leq 0,5\delta_p S_e a_3 \leq 1,5\delta_p V_e, \quad (4.85)$$

де  $\delta_p$  – поверхневе значення густини,  $V_e$ ,  $S_e$  – об'єм і площа еліпсоїда.

Наведемо таблицю допустимих значень для густини  $\delta$  основних небесних тіл Сонячної системи, отриманих на основі даних, приведених в роботі [173].

**Допустимі значення для густини в центрі мас планет Сонячної системи  
(г/см<sup>3</sup>)**

Планета	$\delta_c$	$\delta_p$	$\delta_0^{\min}$	$\delta_0^{\max}$
Меркурій	5.440	3.30	8.6500	13.600
Венера	5.250	2.80	6.1250	13.125
Земля	5.514	2.67	9.7800	13.785
Місяць	3.340	3.08	3.7300	8.350
Марс	3.940	2.70	5.8000	9.850
Юпітер	1.334	0.35	2.8000	3.335
Сатурн	0.690	0.36	1.0850	1.625
Уран	1.260	0.30	2.7000	3.150
Нептун	1.670	0.30	3.7250	4.175
Плутон	1.550	0.35	3.5249	5.250

Із результатів, наведених у табл. 0.8, видно, що отримані співвідношення слід враховувати для побудови моделей розподілу мас, а двосторонні нерівності для  $\delta_0$  дають можливість суттєво уточнювати як сферично-симетричні моделі, так і тривимірні, і це дає можливість більш ефектно вивчати внутрішню будову планети.

#### **4.12. Новий підхід використання стоксових постійних для побудови функцій розподілів мас планет та її похідних**

##### **4.12.1. Нульове наближення**

Більш детальне використання даних про гравітаційне поле планети потребує створення нових математичних методів для їх обробки [114]. Це дає можливість будувати не тільки модельні розподіли густини  $\delta$  вище другого

порядку, а і похідні від неї, що в свою чергу дозволяє більш детально проводити дослідження внутрішньої структури небесних тіл.

Спосіб отримання похідних на основі експериментальних даних відкриває нові можливості для дослідження внутрішньої будови планет, зокрема, перевірити достовірність гіпотези про виконання умови  $\frac{d\delta}{dz} \geq 0$  ( $z$ –глибина) для розподілів мас планетарних тіл [20,21] , а функція розподілу мас  $\delta$ , отримана таким способом, в подальшому може бути використана як початкова ітерація в наближених методах для подальшого її уточнення.

В попередніх пунктах приведений метод наближеного визначення функції розподілу мас та її похідних з залученням стоксових постійних до четвертого порядку включно [144], реалізація в такий спосіб є надзвичайно трудною задачею. Для її реалізації співвідношення

$$C_{nk} = \frac{1}{Ma^n} \int_{\tau} \delta u_{nk} d\tau, \quad S_{nk} = \frac{1}{Ma^n} \int_{\tau} \delta v_{nk} d\tau, \quad (4.86)$$

де  $u_{nk}, v_{nk}$  – кульові функції, які перетворимо, скориставшись тотожністю (4.43)

$$\int_{\tau} \varphi \frac{\partial \delta}{\partial x_i} d\tau = - \int_{\tau} \delta \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} d\tau + \iint_{\sigma} \varphi \delta \cos \alpha_i d\sigma. \quad (4.87)$$

Одержимо наступне :

$$C_{nk} = \frac{1}{Ma_e^n} \left\{ - \int_{\tau} \frac{\partial \delta}{\partial x_i} U_{nk}^i d\tau + \iint_{\sigma} \delta U_{nk}^i d\sigma \right\}, \quad (4.88)$$

$$S_{nk} = \frac{1}{Ma_e^n} \left\{ - \int_{\tau} \frac{\partial \delta}{\partial x_i} V_{nk}^i d\tau + \iint_{\sigma} \delta V_{nk}^i d\sigma \right\}, \quad (4.89)$$

тут  $U_{nk}^i = \int_0^{x_i} u_{nk} dx_i, V_{nk}^i = \int_0^{x_i} v_{nk} dx_i$   $a_e^n$  – екваторіальний радіус. (4.90)

Вирази (4.90) та (4.89) пов'язані між собою співвідношенням:

$$\sigma_{pas} = \alpha^p \beta^a \gamma^s \sigma'_{pas}, \quad \text{де } \alpha = \frac{a_i}{a}, \beta = \frac{a_2}{a}, \gamma = \frac{a_3}{a}.$$



і для кулі величини  $\sigma_{pqs}$ ,  $\sigma'_{pqs}$  тотожні.

Отже, рівності (4.89), (4.90) є рівняннями з невідомими  $\sigma_{pas}$ , до яких ще можна долучити тотожності (4.70).

Приступимо до поетапної реалізації даної методики. За стоксовими постійними до другого порядку включно і динамічним стисненням  $H$  враховуємо степеневі моменти  $I_{pqs}$  ( $k+q+s \leq 2$ ) і, за їх допомогою визначаємо величини  $\sigma_{pqs}$  ( $k+q+s \leq 4$ ), враховуючи в розкладі (4.89) тільки один доданок ( $\delta = const$ ). Розпишемо цей алгоритм детально, починаючи з коефіцієнтів першого порядку:  $C_{10}, C_{11}, S_{11}$ . В результаті перетворень одержимо наступне:

$$\begin{aligned}\sigma_{001} &= \frac{10}{3}C_{10}, \quad \sigma_{003} = \frac{4}{3}C_{10}, \quad \sigma_{021} = \sigma_{201} = C_{10}, \\ \sigma_{100} &= \frac{10}{3}C_{11}, \quad \sigma_{300} = \frac{4}{3}C_{11}, \quad \sigma_{120} = \sigma_{102} = C_{11}, \\ \sigma_{010} &= \frac{10}{3}S_{11}, \quad \sigma_{030} = \frac{4}{3}S_{11}, \quad \sigma_{210} = \sigma_{120} = S_{11}.\end{aligned}\tag{4.91}$$

Враховуючи, що  $C_{10} = C_{11} = S_{11} = 0$  (початок системи координат в центрі мас), маємо:

$$\sigma_{001} = \sigma_{100} = \sigma_{001} = 0, \text{ а також } \sigma_{pqs} = 0 \text{ (} p+q+s=3\text{)}.$$

Перейдемо до визначення величин  $\sigma_{pqs}$  другого і четвертого порядків, послідовно використовуючи стоксові постійні  $C_{21}, S_{21}, S_{22}$ , а саме:

$$S_{21} = \frac{-3}{14}\sigma_{101} + \sigma_{103}, c_{21} = \frac{-3}{14}\sigma_{101} + \frac{\sigma_{301}}{2}, c_{21} = \sigma_{121}.$$

Після перетворень одержуємо

$$\sigma_{101} = 35c_{21}, \sigma_{103} = 17c_{21}, \sigma_{310} = 17c_{21}, \sigma_{121} = c_{21}.\tag{4.92}$$

Аналогічно, використання  $S_{21}$  дає:

$$\sigma_{011} = 35S_{21}, \sigma_{211} = S_{21}, \sigma_{031} = 17S_{21}, \sigma_{013} = 17S_{21}\tag{4.93}$$

і

$$\sigma_{110} = 70S_{22}, \sigma_{130} = 34S_{22}, \sigma_{310} = 34S_{22},\tag{4.94}$$

Для знаходження степеневих моментів парних степеней  $\sigma_{pqs}$  другого та четвертого порядків беремо стоксові постійні  $C_{20}, C_{22}$ :

$$C_{20} = \frac{1}{Ma^2} \int_{\tau} \delta \left( x_3^2 - \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2) \right) d\tau = \frac{1}{M} \int_{\tau} \delta U_{20}^i d\tau, \quad (4.95)$$

$$C_{22} = \frac{1}{Ma^2} \int_{\tau} \delta \frac{(x_1^2 - x_2^2)}{4} d\tau = \frac{1}{Ma^2} \int_{\tau} \delta U_{22}^i d\tau, \quad (4.96)$$

Розпишемо тотожності (4.88), (4.89) для величин (4.95), (4.96):

$$\begin{aligned} c_{20} &= \frac{1}{Ma^2} \left\{ - \int_{\tau} \frac{\partial \delta}{\partial x_i} \left[ \left( \frac{x_3^3}{3} - \frac{1}{2} x_3 (x_1^2 + x_2^2) \right) d\tau + \frac{\sigma_{004}}{3} + \frac{1}{2} (\sigma_{202} + \sigma_{022}) \right] \right\}, \\ c_{20} &= \frac{1}{Ma^2} \left\{ - \int_{\tau} \frac{\partial \delta}{\partial x_1} \left( x_1 x_3^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{x_1^3}{3} + x_1 x_2^2 \right) \right) d\tau + \sigma_{2002} - \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_{400}}{3} + \sigma_{220} \right) \right\}, \\ c_{20} &= \frac{1}{Ma^2} \left\{ - \int_{\tau} \frac{\partial \delta}{\partial x_2} \left( x_1 x_3^2 - \frac{1}{2} \left( x_1^2 x_2 + \frac{x_2^3}{3} \right) \right) d\tau + \sigma_{022} - \frac{1}{2} \left( \sigma_{220} + \frac{\sigma_{040}}{3} \right) \right\}, \quad (4.97) \\ c_{22} &= \frac{1}{Ma^2} \left\{ - \int_{\tau} \frac{\partial \delta}{\partial x_3} x_3 \left( \frac{x_1^2 - x_2^2}{4} \right) d\tau + \frac{1}{4} (\sigma_{202} - \sigma_{022}) \right\}, \\ c_{22} &= \frac{1}{Ma^2} \left\{ - \int_{\tau} \frac{\partial \delta}{\partial x_4} \frac{1}{4} \left( \frac{x_1^3}{3} - x_2^2 x_1 \right) d\tau + \frac{1}{4} \left( \frac{\sigma_{400}}{3} - \sigma_{220} \right) \right\}, \\ c_{22} &= \frac{1}{Ma^2} \left\{ - \int_{\tau} \frac{\partial \delta}{\partial x_2} \frac{1}{4} \left( x_1^2 x_2 - \frac{x_2^3}{3} \right) d\tau + \frac{1}{4} \left( \sigma_{220} - \frac{\sigma_{040}}{3} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Неважко переконатися, що для кулі для парних елементів виконується умова

$$\int_{\tau} \frac{\partial \delta}{\partial x_i} u_{nk}^i d\tau = - \int_{\tau} \frac{\partial \delta}{\partial x_i} v_{nk}^i d\tau = 0, \text{ а тому систему рівнянь (4.97) після простих}$$

спрощень в матричному вигляді можна записати так :

$$Ax = b, \quad (4.98)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 6C_{20} \\ 6C_{20} \\ 6C_{20} \\ 4C_{22} \\ 12C_{22} \\ 12C_{22} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} \sigma_{004} \\ \sigma_{202} \\ \sigma_{022} \\ \sigma_{400} \\ \sigma_{220} \\ \sigma_{040} \end{pmatrix}.$$

Оскільки система (4.98) має безліч розв'язків ( $\det(A)=0$ ), то приведемо її до вигляду :

$$DY = b_1 C_{20} + b_1 C_{20} + \sigma_{004} b_3, \quad (4.99)$$

де

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -24 \\ -12 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} \sigma_{004} \\ \sigma_{202} \\ \sigma_{022} \\ \sigma_{400} \\ \sigma_{220} \end{pmatrix}$$

Система (4.99) має єдиний розв'язок ( $\det(D) \neq 0$ ), який виражається через вільну невідому змінну  $\sigma_{040}$ . Для її знаходження використаємо тотожності:

$$\sigma_{400} + \sigma_{040} + \sigma_{004} = \sigma_{200},$$

$$\sigma_{220} + \sigma_{040} + \sigma_{022} = \sigma_{020},$$

$$\sigma_{202} + \sigma_{022} + \sigma_{004} = \sigma_{002},$$

які перетворимо наступним чином:

$$\sigma_{400} + \sigma_{040} + \sigma_{004} + 2(\sigma_{220} + \sigma_{022} + \sigma_{202}) = \sigma_{200} + \sigma_{020} + \sigma_{002} = \sigma_{000}. \quad (4.100)$$

Підставимо (4.100) в систему (4.99) та обчислимо  $\sigma_{040}$ , а далі всі  $\sigma_{pqs}$ .

За формулами (4.44) знаходимо  $I_{pqs}^i$ , а далі і самі коефіцієнти розкладу  $a_{pqs}^i$ . та відповідно отримуємо співвідношення для визначення густини за її похідними.

Використовуючи дані, взяті з роботи [185], а динамічне стиснення з [149], обчислимо для однієї з широт ( $\varphi = 60^\circ$ ) з кроком по довготі ( $\Delta\lambda = 60^\circ$ ) вздовж радіуса  $r$  ( $R = 6371 * \rho, 0 \leq \rho \leq 1, \Delta\rho = 0.1$ ) значення похідних, і результати подамо таблицею 0.9

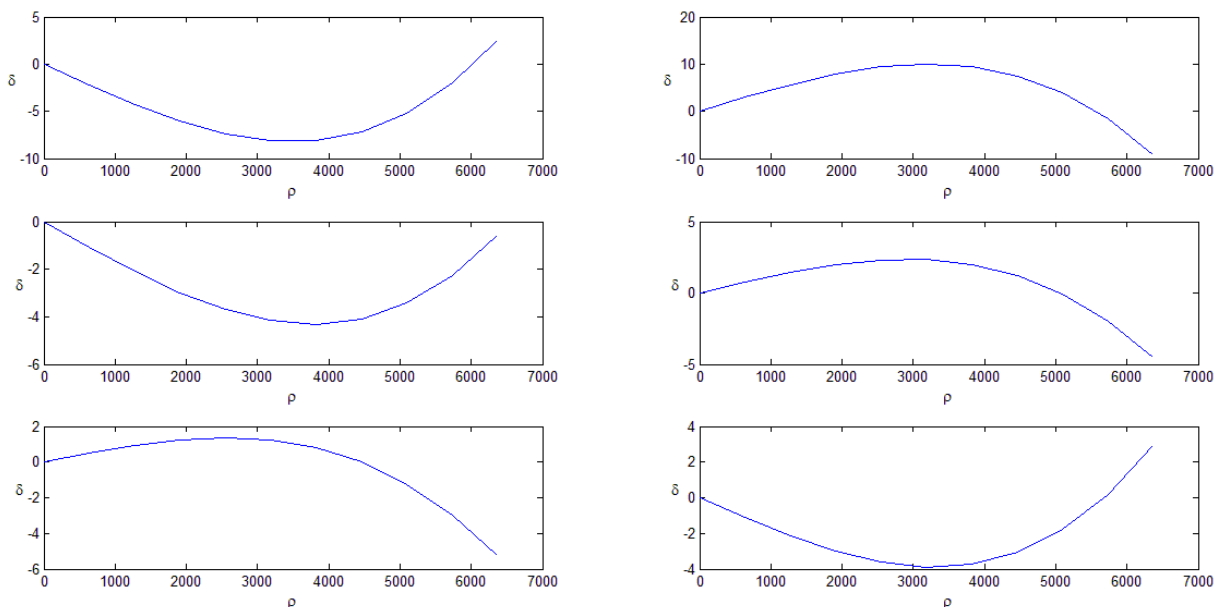


Рис. 0.11. Графіки зміни функцій похідних  $\frac{\partial\delta}{\partial x_1}$  (а),  $\frac{\partial\delta}{\partial x_2}$  (б),  $\frac{\partial\delta}{\partial x_3}$  (в) розподілу мас

по радіусу в двох точках земної поверхні :  $(\varphi = 60^\circ, \lambda = 0^\circ)$ ,  $(\varphi = 60^\circ, \lambda = 120^\circ)$

Для двох точок з географічними координатами  $\varphi = 60^\circ, \lambda = 0^\circ$  та  $\varphi = 60^\circ, \lambda = 120^\circ$  приведемо графіки на рис. 0.11 що відображають залежність похідних функції розподілу від відносного радіусу. З них видно, що характер їх поведінки може різний . В той час, коли  $\frac{\partial\delta}{\partial x_1}$  ,  $\frac{\partial\delta}{\partial x_2}$  майже ідентичні,  $\frac{\partial\delta}{\partial x_3}$  суттєво різниться від двох попередніх, і може в деяких точках як спадати, так і зростати, хоча вважається, що її значення мали б бути від'ємними, оскільки пов'язується з похідною по глибині, для якої виконується умова  $\frac{\partial\delta}{\partial x_3} < 0$  .

По даних з побудовані також карти ізоліній на глибинах 1274 та 3185 км, подані рис табл. 0.9. 0.12, 0.13.

Таблиця 0.9.

## Значення часткових похідних функції розподілу мас

Похідна	Радіус	Довгота					
		0°	60°	120°	180°	240°	300°
$\frac{\partial \delta}{\partial x_1}$	0	0	0	0	0	0	0
	637.1	-2.95	-2.22	0.74	2.95	2.22	-0.74
	1274.2	-5.66	-4.29	1.45	5.66	4.29	-1.45
	1911.3	-7.9	-6.06	2.11	7.9	6.06	-2.11
	2548.4	-9.44	-7.38	2.69	9.44	7.38	-2.69
	3185.5	-10.05	-8.1	3.17	10.05	8.1	-3.17
	3822.6	-9.49	-8.07	3.52	9.49	8.07	-3.52
	4459.7	-7.52	-7.15	3.72	7.52	7.15	-3.72
	5096.8	-3.91	-5.17	3.73	3.91	5.17	-3.73
	5733.9	1.56	-2	3.54	-1.56	2	-3.54
6371	9.15	2.51	3.11	-9.15	-2.51	-3.11	
$\frac{\partial \delta}{\partial x_2}$	0	0	0	0	0	0	0
	637.1	-0.77	-1.08	-0.31	0.77	1.08	0.31
	1274.2	-1.46	-2.1	-0.63	1.46	2.1	0.63
	1911.3	-2	-2.99	-0.95	2	2.99	0.95
	2548.4	-2.32	-3.7	-1.29	2.32	3.7	1.29
	3185.5	-2.35	-4.16	-1.64	2.35	4.16	1.64
	3822.6	-2.01	-4.31	-2	2.01	4.31	2
	4459.7	-1.23	-4.09	-2.38	1.23	4.09	2.38
	5096.8	0.06	-3.43	-2.79	-0.06	3.43	2.79
	5733.9	1.95	-2.28	-3.23	-1.95	2.28	3.23
6371	4.5	-0.57	-3.69	-4.5	0.57	3.69	
$\frac{\partial \delta}{\partial x_3}$	0	0	0	0	0	0	0
	637.1	1.03	0.49	-0.58	-1.12	-0.58	0.49
	1274.2	1.95	0.92	-1.13	-2.15	-1.13	0.92
	1911.3	2.65	1.23	-1.6	-3.02	-1.6	1.23
	2548.4	3.01	1.35	-1.97	-3.62	-1.97	1.35
	3185.5	2.94	1.23	-2.18	-3.89	-2.18	1.23
	3822.6	2.3	0.8	-2.22	-3.72	-2.22	0.8
	4459.7	1	-0.01	-2.03	-3.05	-2.03	-0.01
	5096.8	-1.07	-1.24	-1.59	-1.77	-1.59	-1.24
	5733.9	-4.03	-2.97	-0.86	0.2	-0.86	-2.97
6371	-7.99	-5.26	0.2	2.93	0.2	-5.26	

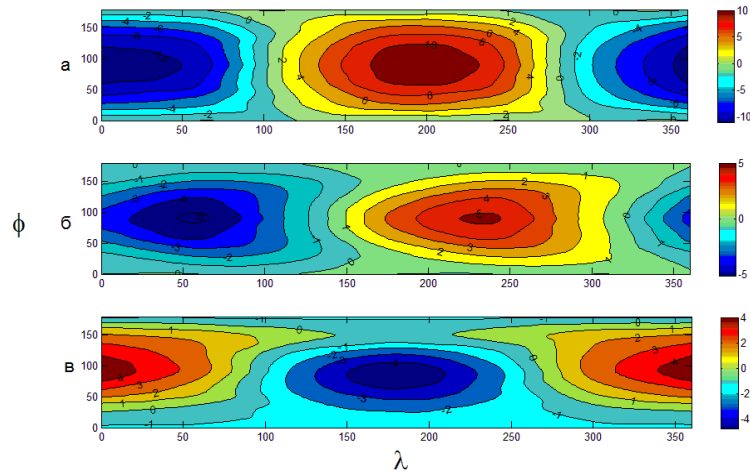


Рис. 0.12. Карта ізолій похідних  $\frac{\partial \delta}{\partial x_1}$  (а),  $\frac{\partial \delta}{\partial x_2}$  (б),  $\frac{\partial \delta}{\partial x_3}$  (в) функції розподілу мас на глибині 1274 км (ізолії проведені через кожні 5  $г/см^4$  )

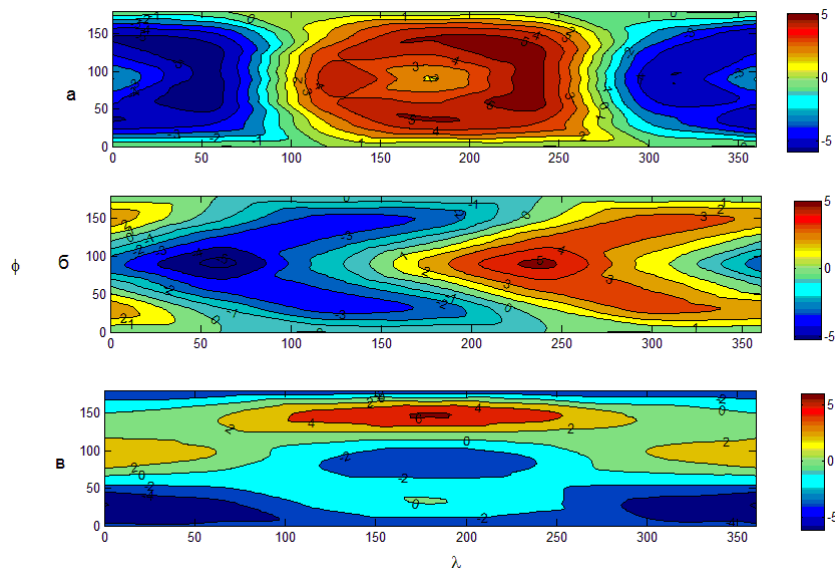


Рис. 0.13. Карта ізолій похідних  $\frac{\partial \delta}{\partial x_1}$  (а),  $\frac{\partial \delta}{\partial x_2}$  (б),  $\frac{\partial \delta}{\partial x_3}$  (в) функції розподілу мас на глибині 1274 км (ізолії проведені через кожні  $\delta 5 г/см^4$  )

Аналіз двох карт також підтверджує висновок про неоднорідність розміщення мас, яка відображається в поведінці похідних. В зв'язку з цим виникає необхідність подальшої розробки методики побудови більш точних моделей похідних функції розподілу мас.

#### 4.12.2. Перше наближення

Продовжимо дослідження, розпочаті в попередньому пункті. Для цього використовуємо величини  $I_{pqs}$  ( $p+q+s \leq 2$ ), а значення  $\sigma_{pqs}$  визначаємо з застосування стоксових постійних третього і четвертого порядку, обмежуючи в розкладі похідних третім порядком. Зауважимо, що збільшення порядку апроксимації не змінює значень стоксових постійних нижчих порядків, оскільки підстановка коефіцієнтів розкладу в  $C_{nk}$ ,  $S_{nk}$  ( $n \leq 2$ ) перетворює їх в тотожності, бо степеневі моменти  $I_{pqs}$  ( $p+q+s \leq 2$ ) виражені з них.

Структура стоксових постійних дозволяє розділити їх на групи з відповідними невідомими, а саме:

Група 1

$$\begin{cases} C_{30} = -\frac{1}{Ma^2} \int_{\tau} \left( x_3^3 - \frac{3}{2} x_3 (x_1^2 + x_2^2) \right) d\tau, \\ C_{32} = -\frac{1}{Ma^3} \int_{\tau} \delta u_{32} d\tau = -\frac{1}{Ma^3} \int_{\tau} \delta x_3 \frac{x_3 (x_1 - x_2)}{4} d\tau \end{cases}$$

Група 2

$$C_{31} = \frac{1}{Ma^3} \int_{\tau} \delta u_{31} d\tau = \frac{1}{Ma^3} \int_{\tau} \left[ x_3^2 x_1 - \frac{1}{4} x_1 (x_1^2 + x_2^2) \right] \delta d\tau,$$

$$C_{33} = \frac{1}{Ma^3} \int_{\tau} \delta u_{33} d\tau = \frac{1}{Ma^3} \int_{\tau} \delta \left( x_1 \left( \frac{1}{3} x_1^2 - x_2^2 \right) \right) d\tau;$$

Група 3

$$S_{31} = \frac{1}{Ma^3} \int_{\tau} \left[ x_3^2 x_2 - \frac{1}{4} x_2 (x_1^2 + x_2^2) \right] \delta d\tau,$$

$$C_{33} = \frac{1}{Ma^3} \int_{\tau} \left( \frac{x_2}{8} (x_1 (x_1^2 - \frac{1}{3} x_2^2)) \right) d\tau$$

Група 4

$$S_{32} = \frac{1}{Ma^3} \int_{\tau} \frac{\delta}{2} x_1 x_2 x_3 d\tau;$$

Група 5

$$C_{40} = \frac{1}{Ma^4} \int_{\tau} \delta \left[ x_3^2 - 3x_3^2(x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{8}(x^2 + y^2)^2 \right] d\tau,$$

$$C_{42} = \frac{1}{Ma^4} \int_{\tau} \delta \left( \frac{3}{2} x_3^2(x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{4}(x_2^4 - x_1^4) \right) d\tau,$$

$$C_{44} = \frac{1}{Ma^4} \int_{\tau} \frac{\delta}{16} (x_1^4 - x_2^4) d\tau;$$

Група 6

$$C_{41} = \frac{1}{Ma^4} \int_{\tau} \delta \left[ x_3^3 x_1 - \frac{3}{4} x_1 x_3 (x_1^2 + x_2^2) \right] d\tau,$$

$$C_{43} = \frac{1}{Ma^4} \int_{\tau} \delta \frac{x_3 x_1}{6} (x_1^2 - 3x_2^2) d\tau,$$

Група 7

$$S_{41} = \frac{1}{Ma^4} \int_{\tau} \delta \left[ x_3^3 x_2 - \frac{3}{4} x_3 x_2 (x_1^2 + x_2^2) \right] d\tau,$$

$$S_{43} = \frac{1}{Ma^4} \int_{\tau} \delta \left[ x_3 x_2 (3x_1^2 - x_2^2) \right];$$

Група 8

$$S_{42} = \frac{1}{Ma^4} \int_{\tau} \delta \left[ 3x_3^2 x_1 x_2 - \frac{1}{2} x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2) \right] d\tau,$$

$$S_{44} = \frac{1}{Ma^4} \int_{\tau} \frac{\delta}{8} \left[ x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2) \right] d\tau.$$

Отримані співвідношення дають системи однотипних рівнянь, матричний вигляд яких є наступним:

$$A_i \sigma_i^j + B_i \sigma_i^l = C_i,$$

які доповнюємо тотожностями вигляду:

$$\sigma_{p+2qs} + \sigma_{pq+2s} + \sigma_{pqs+2} = \sigma_{pqs}.$$

Розглянемо кожну з систем рівнянь:



$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \sigma_1^1 = \begin{pmatrix} \sigma_{005} \\ \sigma_{203} \\ \sigma_{023} \\ \sigma_{401} \\ \sigma_{221} \\ \sigma_{441} \end{pmatrix}, C_1 = \begin{pmatrix} C_{30} \\ C_{30} \\ C_{30} \\ C_{32} \\ C_{32} \\ C_{32} \end{pmatrix}, \sigma_1^2 = \begin{pmatrix} \sigma_{003} \\ \sigma_{201} \\ \sigma_{021} \\ \sigma_{001} \end{pmatrix}.$$

Відповідно тотожностями є:

$$\sigma_{005} + \sigma_{203} + \sigma_{023} = \sigma_{003}, \sigma_{401} + \sigma_{221} + \sigma_{203} = \sigma_{201}, \sigma_{221} + \sigma_{041} + \sigma_{023} = \sigma_{021}, \sigma_{003} + \sigma_{201} + \sigma_{021} = \sigma_{001},$$

а  $B_1$  – кофіцієнти при лінійних комбінаціях змінних  $\sigma_{003}, \sigma_{201}, \sigma_{021}, \sigma_{001}$  в стоксових постійних  $C_{30}, C_{32}$ .

Кількість невідомих:  $6+3+1=10$ ,

кількість рівнянь:  $6+4=10$ .

Група 2

$$A_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{16} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{24} & -\frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{90} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{1}{24} \end{pmatrix}, \sigma_2^1 = \begin{pmatrix} \sigma_{104} \\ \sigma_{302} \\ \sigma_{122} \\ \sigma_{500} \\ \sigma_{320} \\ \sigma_{140} \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} C_{31} \\ C_{31} \\ C_{31} \\ C_{33} \\ C_{33} \\ C_{33} \end{pmatrix}, \sigma_2^2 = \begin{pmatrix} \sigma_{300} \\ \sigma_{102} \\ \sigma_{120} \\ \sigma_{100} \end{pmatrix},$$

ТОТОЖНОСТІ:

$$\sigma_{104} + \sigma_{302} + \sigma_{122} = \sigma_{102}, \sigma_{302} + \sigma_{500} + \sigma_{320} = \sigma_{300}, \sigma_{320} + \sigma_{140} + \sigma_{122} = \sigma_{120},$$

$$\sigma_{300} + \sigma_{120} + \sigma_{102} = \sigma_{100},$$

$B_2$  – кофіцієнти при лінійних комбінаціях змінних  $\sigma_{102}, \sigma_{300}, \sigma_{120}, \sigma_{100}$  в стоксових постійних  $C_{31}, C_{33}$ .

Кількість невідомих:  $6+3+1=10$ , кількість рівнянь:  $6+3+1=10$ .

Група 3

$$A_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{16} \\ 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{1}{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{16} & -\frac{1}{32} \end{pmatrix}, \sigma_3^1 = \begin{pmatrix} \sigma_{014} \\ \sigma_{212} \\ \sigma_{032} \\ \sigma_{410} \\ \sigma_{230} \\ \sigma_{050} \end{pmatrix}, C_3 = \begin{pmatrix} S_{31} \\ S_{31} \\ S_{31} \\ S_{33} \\ S_{33} \\ S_{33} \end{pmatrix}, \sigma_3^2 = \begin{pmatrix} \sigma_{012} \\ \sigma_{210} \\ \sigma_{030} \\ \sigma_{010} \end{pmatrix},$$

ТОТОЖНОСТІ:

$$\sigma_{014} + \sigma_{212} + \sigma_{032} = \sigma_{012}, \quad \sigma_{032} + \sigma_{050} + \sigma_{230} = \sigma_{030}, \quad \sigma_{230} + \sigma_{212} + \sigma_{410} = \sigma_{210},$$

$$\sigma_{012} + \sigma_{030} + \sigma_{210} = \sigma_{010}$$

$B_3$  — кофіцієнти при лінійних комбінаціях змінних  $\sigma_{012}, \sigma_{210}, \sigma_{030}, \sigma_{010}$  в стоксових постійних  $S_{31}, S_{33}$ .

Кількість невідомих:  $6+3+1=10$ ,

кількість рівнянь:  $6+3+1=10$ .

В четвертій групі тільки одне рівняння, а тому розв'язок отримати одразу, а саме:

$$\sigma_{111} = -36S_{32}, \quad \sigma_{113} = \sigma_{311} = \sigma_{131} = -12S_{32}.$$

Перейдемо до опису систем рівнянь четвертого порядку:

Група 5

$$A_5 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -1 & -1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & 0 & \frac{1}{40} & \frac{1}{12} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & -1 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{12} & \frac{1}{40} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{20} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{20} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \sigma_5^1 = \begin{pmatrix} \sigma_{006} \\ \sigma_{204} \\ \sigma_{024} \\ \sigma_{402} \\ \sigma_{222} \\ \sigma_{240} \\ \sigma_{600} \\ \sigma_{420} \\ \sigma_{240} \\ \sigma_{060} \end{pmatrix}, \sigma_5^2 = \begin{pmatrix} \sigma_{004} \\ \sigma_{202} \\ \sigma_{022} \\ \sigma_{400} \\ \sigma_{220} \\ \sigma_{040} \\ \sigma_{002} \\ \sigma_{200} \\ \sigma_{020} \\ \sigma_{000} \end{pmatrix},$$

$$C_5 = \begin{pmatrix} C_{40} \\ C_{40} \\ C_{40} \\ C_{42} \\ C_{42} \\ C_{42} \\ C_{44} \\ C_{44} \\ C_{44} \end{pmatrix},$$

система тотожностей:

$$\begin{aligned} \sigma_{006} + \sigma_{204} + \sigma_{024} &= \sigma_{004}, \quad \sigma_{202} = \sigma_{402} + \sigma_{222} + \sigma_{204}, \quad \sigma_{022} = \sigma_{222} + \sigma_{042} + \sigma_{024}, \\ \sigma_{220} &= \sigma_{420} + \sigma_{240} + \sigma_{222}, \quad \sigma_{040} = \sigma_{240} + \sigma_{060} + \sigma_{042}, \quad \sigma_{400} = \sigma_{600} + \sigma_{420} + \sigma_{402}, \quad \sigma_{200} = \sigma_{400} + \sigma_{220} + \sigma_{202}, \\ \sigma_{020} &= \sigma_{220} + \sigma_{040} + \sigma_{022}, \quad \sigma_{002} = \sigma_{202} + \sigma_{022} + \sigma_{004}, \quad \sigma_{000} = \sigma_{200} + \sigma_{020} + \sigma_{002} \end{aligned}$$

Матриця  $B_5$  – коефіцієнти при лінійних комбінаціях змінних  $\sigma_{400}, \sigma_{220}, \sigma_{202}, \sigma_{040}, \sigma_{004}, \sigma_{200}, \sigma_{020}, \sigma_{002}, \sigma_{000}$  в стоксових постійних  $C_{40}, C_{42}, C_{44}$ .

Кількість невідомих:  $10+6+3=19$  ( $\sigma_{000}$  визначена вище),

Кількість рівнянь:  $9+6+3+1=19$ ,

Група 6

$$A_6 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 & -\frac{3}{16} & -\frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}, C_6 = \begin{pmatrix} C_{41} \\ C_{41} \\ C_{41} \\ C_{43} \\ C_{43} \\ C_{43} \end{pmatrix}, \sigma_6^1 = \begin{pmatrix} \sigma_{105} \\ \sigma_{303} \\ \sigma_{123} \\ \sigma_{501} \\ \sigma_{321} \\ \sigma_{141} \end{pmatrix}, \sigma_6^2 = \begin{pmatrix} \sigma_{103} \\ \sigma_{301} \\ \sigma_{121} \\ \sigma_{101} \end{pmatrix},$$

$B_6$  – коефіцієнти при лінійних комбінаціях змінних  $\sigma_{103}, \sigma_{301}, \sigma_{121}$  в стоксових постійних  $C_{41}, C_{43}$ .

Система тотожностей :

$$\sigma_{105} + \sigma_{303} + \sigma_{123} = \sigma_{103}, \quad \sigma_{301} + \sigma_{501} + \sigma_{321} = \sigma_{303}, \quad \sigma_{121} + \sigma_{321} + \sigma_{141} = \sigma_{123},$$

$$\sigma_{103} + \sigma_{301} + \sigma_{121} = \sigma_{101}$$

Кількість невідомих:  $6+3+1=10$ ,

кількість рівнянь:  $6+3+1=10$ .

Група 7

$$A_7 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & -\frac{3}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{8} & -\frac{3}{16} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}, \sigma_7^1 = \begin{pmatrix} \sigma_{015} \\ \sigma_{213} \\ \sigma_{033} \\ \sigma_{411} \\ \sigma_{231} \\ \sigma_{051} \end{pmatrix}, C_7 = \begin{pmatrix} S_{41} \\ S_{41} \\ S_{41} \\ S_{43} \\ S_{43} \\ S_{43} \end{pmatrix}, \sigma_7^2 = \begin{pmatrix} \sigma_{031} \\ \sigma_{201} \\ \sigma_{021} \\ \sigma_{011} \end{pmatrix}$$

Система тотожностей:

$$\sigma_{031} = \sigma_{051} + \sigma_{033} + \sigma_{231}, \quad \sigma_{013} = \sigma_{015} + \sigma_{213} + \sigma_{033}, \quad \sigma_{211} = \sigma_{411} + \sigma_{231} + \sigma_{213}, \quad \sigma_{031} + \sigma_{211} + \sigma_{013} = \sigma_{011}$$

$B_7$  – коефіцієнти при лінійних комбінаціях змінних  $\sigma_{031}, \sigma_{013}, \sigma_{211}, \sigma_{011}$  в стоксових постійних  $S_{41}, S_{43}$ .

Кількість невідомих:  $6+3+1=10$ ,

кількість рівнянь:  $6+3+1=10$ .

Група 8

$$A_8 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{32} & -\frac{1}{16} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16} & -\frac{1}{32} \end{pmatrix}, \sigma_8^1 = \begin{pmatrix} \sigma_{114} \\ \sigma_{312} \\ \sigma_{132} \\ \sigma_{510} \\ \sigma_{230} \\ \sigma_{150} \end{pmatrix}, C_8 = \begin{pmatrix} S_{42} \\ S_{42} \\ S_{42} \\ S_{44} \\ S_{44} \\ S_{44} \end{pmatrix},$$

Система тотожностей:

$$\sigma_{110} = \sigma_{112} + \sigma_{310} + \sigma_{130},$$

$$\sigma_{112} = \sigma_{114} + \sigma_{312} + \sigma_{132}, \sigma_{310} = \sigma_{510} + \sigma_{330} + \sigma_{312}, \sigma_{130} = \sigma_{330} + \sigma_{150} + \sigma_{132}.$$

$B_8$  – коефіцієнти при лінійних комбінаціях змінних  $\sigma_{310}, \sigma_{112}, \sigma_{130}, \sigma_{110}$  в стоксових постійних  $S_{42}, S_{44}$ .

Кількість невідомих:  $6+3+1=10$ ,

кількість рівнянь:  $6+3+1=10$ .

Висновки: В кожній з приведених систем кількість невідомих за винятком групи 5 співпадає з кількістю невідомих. Можна також відзначити, що розмірності матриць  $A_i$   $n \times n$  їх ранг  $\in n-1$ . Якщо кожна з систем рівнянь має єдиний розв'язок, то виникає можливість для визначення коефіцієнтів розкладу для похідних до п'ятого порядку включно при умові, якщо степеневі моменти  $I_{pqs}$  третього і четвертого порядків задовільняють стоксовим постійним третього і четвертого порядку ( тобто вибираємо один з можливих значень цих моментів), наприклад, вираховуємо їх з використанням моделі  $\delta_2$ . Очевидно, що такий спосіб знаходження є наближеним, проте тут враховуються додаткові умови вигляду (4.68) та використовується методика, яка відмінна від загальноприйнятої, а доцільність такого підходу підтверджена наведеним вище прикладом.

## ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 4

1. Досліджені умови однозначного визначення тривимірної функції розподілу мас еліпсоїдальної планети в залежності від вихідної інформації. Запропонована методика використання трансформант потенціалу для побудови більш точних моделей розподілу планетарних мас.
2. Запропонований метод наближеної побудови розподілу мас через коефіцієнти розкладу без зведення до проблеми моментів, а також подана оцінка точності таких побудов.
3. Досліджений і модернізований наближений метод створення тривимірних моделей з використанням даних про зовнішнє гравітаційне поле.
4. Інформація про планету приведена до загальнопланетарної системи координат. Це значно спрощує процес обчислень та значно зменшує помилки при їх виконанні.
5. Розроблений алгоритм точного та наближеного методу визначення коефіцієнтів розкладу з використанням степеневих моментів до другого порядку включно, визначена структура такого розв'язку.
6. Подані можливі межі значення густини в центрі небесного тіла, а також знайдений аналітичний вираз для нього. На його основі проведені обчислення для планет Сонячної системи.
7. Запропонований новий підхід до використання стоксових постійних вищих порядків при побудови моделей густини, досліджені умови єдності розв'язання такої задачі.
8. Наведений алгоритм використання стоксових постійних до другого порядку при умові, що наближена модель (функція розподілу) є постійною, знайдено похідні для такого розподілу визначаються безпосередньо без диференціювання самої функції.
9. Запропонована схема подальшого використання такого підходу: визначені матриці систем, досліджена можливість однозначного визначення коефіцієнтів розкладу.

## РОЗДІЛ 5. ВНУТРІШНІЙ ПОТЕНЦІАЛ І ГРАВІТАЦІЙНА ЕНЕРГІЯ СФЕРИЧНОЇ І ЕЛІПСОЇДАЛЬНОЇ ПЛАНЕТИ

### 5.1. Потенціал радіального розподілу мас еліпсоїдальної планети

На відміну від зовнішнього потенціалу, вивчення внутрішнього потенціалу [24,27] пов'язане з рядом труднощів, що пояснюється неможливістю спостерігати його та практичною недосконалістю його опису. Адже, на відміну від зовнішнього поля, при використанні внутрішнього потенціалу доводиться в залежності від точки розміщення змінювати область інтегрування [21], що не може не вплинути на якість використання таких алгоритмів. Тому в подальшому застосуємо методикою, яка успішно використовується в астрофізиці [143] та атомній фізиці [73] адаптуємо її до наших задач.

Скориставшись методикою, поданою в монографії [73], знаходження потенціалу в т.  $P(x, y, z)$  для одновимірного розподілу мас будемо мати наступне:

$$f(x^2) = \int_0^{x^2} \rho(\omega) d\omega, \quad (5.1)$$

де

$$\chi^2 = \frac{x^2}{a^2 + u} + \frac{y^2}{b^2 + u} + \frac{z^2}{c^2 + u}, \quad (5.2)$$

а

$$\phi(u) = \int_u^\infty \frac{dt}{Q(t)} = \int_u^\infty \frac{dt}{(a^2 + t)(b^2 + t)(c^2 + t)}. \quad (5.3)$$

Тоді потенціал визначається наступним чином:

$$V(P) = \pi abc \int_\xi^\infty (f(1) - f(x^2(u))) \frac{du}{Q(u)} = \frac{3}{4} V_e \int_\xi^\infty (f(1) - f(x^2(u))) \frac{du}{Q(u)}, \quad (5.4)$$

Тут  $\xi$  – еліпсоїдальна координата (для внутрішнього потенціалу  $\xi = 0$ ).

Встановимо аналітичні вирази потенціалів для деяких розподілів, які будуть використані в подальших дослідженнях:

$$\text{а) } \delta(\rho) = (1 - \rho^2)^n. \quad (5.5)$$

Відповідно отримуємо:

$$f(x^2) = \int_0^{x^2} (1-\omega)^n d\omega = -\frac{1}{n+1} (1-\omega)^{n+1} \Big|_0^{x^2} = -\frac{1}{n+1} \left[ (1-x^2)^{n+1} - 1 \right]$$

Потенціал в такому випадку знаходиться за формулою:

$$u(x, y, z) = \frac{1}{n+1} \int_{\xi}^{\infty} \left[ (1-\chi^2(u))^{n+1} \right] \frac{du}{Q(u)} =$$

$$\frac{1}{n+1} \pi abc \int_{\xi}^{\infty} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2+u} - \frac{y^2}{b^2+u} - \frac{z^2}{c^2+u} \right)^{n+1} \frac{du}{Q(u)}. \quad (5.6)$$

Для цілого  $n$  отримуємо:

$$u(P) = \frac{3}{4} \frac{V_e}{n+1} \sum_{l=0}^{n+1} \frac{(n+1)!(-1)^l}{l(n+1-l)!} \sum_{t_1+t_2+t_3=l} \left( \frac{x}{a} \right)^{2t_1} \left( \frac{y}{b} \right)^{2t_2} \left( \frac{z}{c} \right)^{2t_3} M_{t_1 t_2 t_3}(\xi), \quad (5.7)$$

$$M_{t_1 t_2 t_3}(\xi) = a^{2t_1} b^{2t_2} c^{2t_3} \int_{\xi}^{\infty} \frac{du}{(a^2+u)^{t_1+\frac{1}{2}} (b^2+u)^{t_2+\frac{1}{2}} (c^2+u)^{t_3+\frac{1}{2}}},$$

зокрема для внутрішнього потенціалу:

$$M_{t_1 t_2 t_3}(0) = \int_0^{\infty} \frac{a^{2t_1} b^{2t_2} c^{2t_3} du}{(a^2+u)^{t_1+\frac{1}{2}} (b^2+u)^{t_2+\frac{1}{2}} (c^2+u)^{t_3+\frac{1}{2}}}. \quad (5.8)$$

Після заміни

$$z^2 = \frac{1}{R^2+u}, u \rightarrow \infty, z=0, u = r^2 - R^2,$$

формула (5.6) для сферичного випадку ( $a=b=c=R$ ) набуде вигляду, якщо потенціал зовнішній:

$$V^3(P) = -\frac{2\pi abc}{n+1} \int_{\frac{1}{r}}^0 (1-r^2 z^2)^{n+1} dz = \frac{3}{2} V_e \frac{1}{n+1} \int_0^{\frac{1}{r}} (1-r^2 z^2)^{n+1} dz,$$

звідки

$$V^3 = \frac{3}{2} V_e n! \sum_{l=0}^{n+1} \frac{r^{2l} (-1)^l}{(r^2)^{2l+1} l(n+1-l)!(2l+1)},$$

або остаточно



$$V_3 = \frac{3}{2} \frac{V_e n!}{R \left(\frac{r}{R}\right)} \sum_{l=0}^{n+1} \frac{(-1)^l}{l!(l+1-l)!(2l+1)} = \frac{3}{2} \frac{V_e n!}{R \rho} \sum_{l=0}^{n+1} \frac{(-1)^l}{l!(l+1-l)!(2l+1)}, \quad (5.9)$$

де  $\rho = \frac{r}{R}$ .

Внутрішній потенціал визначається аналогічно:

$$V^b = \frac{3}{2} V_e n! \sum_{l=0}^{n+1} \frac{(-1)^l}{l!(n+1-l)!(2l+1)} \frac{r^{2l}}{R^{2l+1}} = \frac{3}{2} \frac{V_e n!}{R} \sum_{l=0}^{n+1} \frac{(-1)^l \rho^l}{l!(n+1-l)!(2l+1)}. \quad (5.10)$$

б)  $\delta = (\rho^2)^n$

Використовуючи попередню методику одержимо:

$$f(x^2) = \int_0^{x^2} (\rho^2)^n d\omega = \frac{1}{n+1} (x^2)^{n+1},$$

а потенціал такого розподілу:

$$\begin{aligned} u(P) &= \frac{3}{4} \frac{V_e}{n+1} \int_{\xi}^{\infty} [f(1) - f(x^2(u))] \frac{du}{Q(u)} = \\ &= \frac{3}{4} \frac{V_e}{(n+1)} \int_{\xi}^{\infty} \left[ 1 - \left( \frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} \right)^{n+1} \right] \frac{du}{Q(u)} = \\ &= \frac{3}{4} \frac{V_e}{(n+1)} \left\{ M_{000}(\xi) - (n+1)! \sum_{l=0}^{n+1} \frac{(-1)^l}{(n+1-l)!} \sum_{t_1+t_2+t_3=l} \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^{2t_1} \left(\frac{y}{b}\right)^{2t_2} \left(\frac{z}{c}\right)^{2t_3}}{t_1!t_2!t_3!} M_{t_1 t_2 t_3}(\xi) \right\} = \\ &= \frac{3}{4} \frac{V_e}{(n+1)} (M_{000}(\xi) - \rho^{2n+2} s_{2n+2}), \end{aligned} \quad (5.11)$$

де

$$s_{2n+2} = n! \sum_{l=0}^{n+1} \frac{(-1)^l}{l!(n+1-l)!} \sum_{t_1+t_2+t_3=l} \frac{\sin^{t_1+t_2} \theta \cos^{t_3} \theta \cos^{\eta} \sin^{t_2} \theta}{t_1!t_2!t_3!} M_{t_1 t_2 t_3}(\xi).$$

В сферичному випадку маємо:

$$\begin{aligned}
u(P) &= \frac{3}{4} \frac{V_e}{n+1} \int_{\xi}^{\infty} \left[ 1 - \left( \frac{r^2}{R^2 + u} \right)^{n+1} \right] \frac{du}{Q(u)} = \frac{3}{4} \frac{V_e}{n+1} \int_{\xi}^{\infty} \left( 1 - \left( \frac{r^2}{z^2} \right)^{n+1} \right) \frac{2dz}{z^2} = \\
&= \frac{3}{2} \frac{V_e}{n+1} \left( -\frac{1}{z} + \frac{r^{2n+2}}{2n+3 \cdot z^{2n+3}} \right) \Big|_{\sqrt{r^2}}^{\infty} = \\
&= \frac{3}{2} \frac{V_e}{R \left( \frac{r}{R} \right) (2n+3)} \left( \frac{2n+3-1}{n+1} \right) = \frac{3V_e}{R\rho} \frac{\delta_0}{2n+3}.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Таким чином для однорідної планети сферичної форми з густиною  $\delta_0$  зовнішній потенціал має вигляд:

$$\int_{\tau} \frac{\delta_0}{r} d\tau = \frac{4\pi abc}{3\rho} \delta_0 = \frac{M}{R\rho}$$

та може трактуватись як потенціал точки з масою  $M$ .

Вираз для внутрішнього потенціалу буде таким:

$$\begin{aligned}
V^b &= \frac{3}{4} \frac{V_e \delta_0}{n+1} \int_0^{\infty} \left[ 1 - \left( \frac{r^2}{R^2 + u} \right)^{n+1} \right] \frac{du}{Q(u)} = \frac{3}{2} \frac{V_e \delta_0}{n+1} \left( -\frac{1}{z} + \frac{r^{2n+2}}{2n+3 \cdot z^{2n+3}} \right) \Big|_{\frac{1}{R}}^{\infty} \\
&= \frac{3}{2} \frac{V_e \delta_0}{n+1} \left( \frac{1}{R} - \frac{r^{2n+2}}{2n+3 \cdot R^{2n+3}} \right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{V_e \delta_0}{R(n+1)} \left( 1 - \frac{1}{2n+3} \left( \frac{r}{R} \right)^{2n+2} \right)
\end{aligned} \tag{5.13}$$

і знову ж таки співпадає з формулою для внутрішнього потенціалу постійної густини ( $n=0$ ) та збігається з відомими випадками для кулі  $K$  постійної густини [15]:

$$V = \begin{cases} \frac{fM}{r}, P \notin K (r \geq 1); \\ \frac{f}{2} \frac{M}{R} (3 - r^2), P \in K (r \leq 1). \end{cases} \tag{5.14}$$

в)  $\delta = \rho^n$ , а тіло має форму кулі і  $n$  довільне.

Представимо в цьому випадку густину так:

$$\delta = (\rho^2)^{n/2}$$

Для неї функція (5.1) наступна:

$$f(\chi^2) = (\chi^2)^{\frac{n}{2}+1} \frac{2}{n+2},$$

а потенціал відповідно визначається:

$$V(P) = \frac{2\delta_0}{n+2} \frac{3V_k}{4} \int_{\xi}^{\infty} \left[ 1 - \left( \frac{r^2}{R^2 + u} \right)^{\frac{n+2}{2}} \right] \frac{du}{Q(u)} = -\frac{3V_k \delta_0}{2n+2} \int_{r,k}^{\infty} \left( \frac{1}{z^2} - \frac{r^{n+2}}{z^{n+4}} \right) dz =$$

$$\frac{3V_k \delta_0}{n+2} \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{n+3} \frac{r^{n+2}}{z^{n+3}} \right),$$

що дає:

$$V^z = \frac{3V_k f \delta_0}{n+2} \left( 1 - \frac{1}{n+3} \right) = \frac{3V_k f \delta_0}{n+3}, \quad (5.15)$$

$$V^b = \frac{3V_k \delta_0 f}{R(n+2)} \left( 1 - \frac{1}{n+3} \left( \frac{r}{R} \right)^{n+2} \right) = \frac{3V_k \delta_0 f}{R(n+2)} \left( 1 - \frac{1}{n+3} \rho^{n+2} \right). \quad (5.16)$$

При цьому ще раз наголосимо, що останні формули мають місце тільки для сферичної планети, так як в еліпсоїдальному випадку величина  $\frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u}$  не є радіус-вектором.

## 5.2. Методи апроксимації радіальних розподілів густини мас многочленами Лежандра та дослідження їх збіжності.

В попередньому пункті визначені потенціали розподілів, заданих з допомогою аналітичного виразу. Насправді функції розподілу приймаються кусково-неперервними, тобто задаються декількома формулами, кожна з яких визначається в деякій частині тіла, наприклад, для Землі добре визначені моделі РЕМ [160] або РРЕМ [161]. Оскільки функції  $\delta(\rho)$  є одновимірні і визначені на проміжку  $[0;1]$ , то логічно представити її такими виразами, для яких в подальшому можна знайти величини  $V, E$ . Одним з можливих варіантів такого наближення є використання многочленів Лежандра [130,132,134,137].

Розглянемо деякі можливі способи апроксимації:

### 1. Спосіб 1.

Функцію розподілу  $\delta(\rho)$  ( $0 \leq \rho \leq 1$ ) довизначаємо на проміжок  $[-1;1]$  парним чином

Тоді функцію  $\delta(\rho)$  можна записати:

$$\delta(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\rho), \quad (5.17)$$

де

$$C_n = \frac{\int_{-1}^1 \delta(\rho) P_n(\rho) d\rho}{\int_{-1}^1 P_n^2(\rho) d\rho}. \quad (5.18)$$

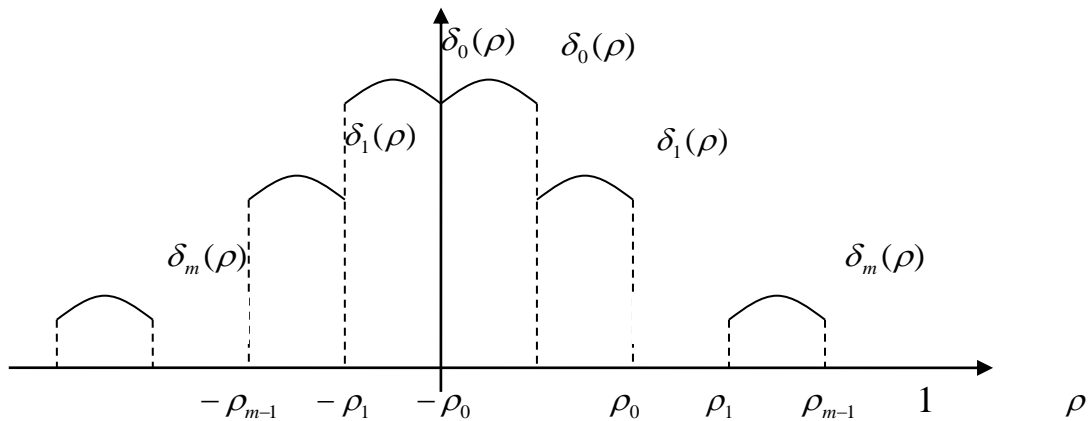


Рис.5.1 Схематичний графік функції  $\delta(\rho)$ , ( $|\rho| < 1$ )

Враховуючи парність функції та значення знаменника [18] одержимо:

$$C_{2n+1} = 0; C_{2n} = (4n+1) \int_0^1 \delta(\rho) P_{2n}(\rho) d\rho$$

Позначимо:

$$M_{2n} = \int_0^1 \delta(\rho) \rho^{2n} d\rho.$$

Тоді коефіцієнти визначаються:

$$C_{2n} = \sum_{l=0}^n d_{2l}^{2n} M_{2l},$$

а значення  $d_i^j$  обчислюються за рекурентними формулами:

$$\begin{aligned}
d_0^0 &= 1, \quad d_0^1 = 0, \quad d_1^1 = 1, \\
d_{n+1}^{n-1} &= \frac{2n+1}{n+1} d_n^n, \quad d_n^{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} d_{n-1}^n, \\
d_i^{n+1} &= \frac{2n+1}{n+1} d_{i-1}^{n+1} - \frac{n}{n+1} d_{i-1}^{n-1}, \quad d_0^{n+1} = -\frac{n}{n+1} d_0^{n-1}, \\
2 \leq i &\leq n-1, \quad 2 \leq n \leq N.
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Обчислення виразів  $P_{2n}(\rho)$  здійснюємо, використовуючи співвідношення для многочленів Лежандра [11,16]:

$$P_{n+1}(\rho) = \frac{2n+1}{n+1} \rho P_n(\rho) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(\rho),$$

$$P_0(\rho) = 1, \quad P_1(\rho) = \rho, \quad n = 1, 2, \dots, n_k.$$

Дослідимо ефективність даного алгоритму для двох конкретних прикладів:

1)  $\delta^1 = \sqrt{\rho}$  (неперервний випадок),

$$2) \delta^2 = \begin{cases} 1 & 0 \leq \rho \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \leq \rho \leq 1 \end{cases} \text{ (розривний випадок).}$$

Степеневі моменти для них визначаються:

$$M_{2k}^1 = \int_0^1 \rho^{2k} \rho^{1/2} d\rho = \frac{2}{4k+3},$$

$$\begin{aligned}
M_{2k}^2 &= \int_0^1 \delta_2 \rho^{2k} d\rho = \int_0^{\frac{1}{2}} \rho^{2k} d\rho + \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \rho^{2k} d\rho = \frac{1}{2k+1} \rho^{2k+1} \Big|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \frac{1}{2k+1} \rho^{2k+1} \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \\
&= \frac{1}{2k+1} \left\{ \left( \frac{1}{2} \right)^{2k+1} + \frac{1}{2} \left( 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^{2k+1} \right) \right\} = \frac{1}{2(2k+1)} \left\{ 1 + \left( \frac{1}{2} \right)^{2k+1} \right\}.
\end{aligned}$$

За знайденими  $M_{2k}^1, M_{2k}^2$  і формулами (5.16) вираховуємо коефіцієнти  $C_{2n}^1, C_{2n}^2$ , після чого знаходимо значення функцій  $\delta^1$  і  $\delta^2$ , а також їх наближення  $\delta_n^1$  і  $\delta_n^2$ , результати заносимо в таблицю 5.1, з якої видно, що в міру збільшення  $n$  апроксимація покращується, проте до певного  $n$ , а подальше його зростання приводить до погіршення наближень. Тому для кожної апроксимації існує своє оптимальне  $n$ . Його можна визначити з нерівності Бесселя (або рівності Парсеваля) для кусково-неперервних функцій [35,89], яка в даному випадку запишеться:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{2n}^2}{4n+1} \leq \int_0^1 \delta^2(\rho) d\rho.$$

Таблиця 5.1.

**Порівняння точних і наближених значень густини, отриманих другим способом**

$\delta = 1, 0 < \rho \leq \frac{1}{2}, \delta = 0, \frac{1}{2} < \rho \leq 1$							$\delta = \sqrt{\rho}$						
$\delta$							$n$ $\delta$						
$n$	10	20	30	40	50	60		10	20	30	40	50	60
0.0	0.995	1.023	1.019	1.003	0.991	-3.154	0.000	0.259	0.181	0.147	0.127	0.114	3.310
0.1	1.006	0.994	0.980	1.000	0.999	-2.780	0.316	0.296	0.281	0.305	0.323	0.327	2.953
0.2	1.022	0.976	1.022	0.994	1.010	-1.913	0.447	0.395	0.457	0.454	0.439	0.449	1.748
0.3	1.008	1.030	0.972	1.009	1.008	-1.144	0.548	0.525	0.556	0.543	0.551	0.545	0.546
0.4	0.927	1.009	1.048	1.012	0.986	-1.075	0.632	0.647	0.621	0.636	0.634	0.630	-0.053
0.5	0.772	0.752	0.746	0.755	0.751	-2.318	0.707	0.734	0.713	0.705	0.704	0.706	0.261
0.6	0.583	0.479	0.463	0.497	0.522	-3.940	0.775	0.783	0.776	0.774	0.774	0.774	1.866
0.7	0.448	0.492	0.507	0.482	0.513	-0.170	0.837	0.819	0.832	0.840	0.839	0.836	3.820
0.8	0.451	0.512	0.510	0.484	0.508	3.742	0.894	0.880	0.900	0.891	0.897	0.893	-1.176
0.9	0.554	0.502	0.505	0.502	0.493	6.516	0.949	0.969	0.947	0.945	0.948	0.950	3.629
1.0	0.366	0.569	0.520	0.434	0.541	44.29	1.000	0.947	1.026	0.983	1.013	0.990	19.714

**Числові результати використані для двох наведених прикладів, що підтверджують вибір критерію збіжності.**

$\delta$	$\int_0^1 \delta^2(\rho) d\rho$	$\sum_{l=0}^n \frac{C_l^2}{(4l+1)}$					
		40	45	50	52	54	60
$\delta = \begin{cases} 1, & 0 < \rho \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} < \rho \leq 1 \end{cases}$	0.625	0.6236	0.6235	0.6235	0.6237	0.6481	1.0061
$\delta = \sqrt{\rho}$	0.5	0.4992	0.4964	0.4999	0.5202	0.5087	1.7290

Результати, що внесені в табл. 5.2 узгоджуються з даними табл. 5.1, тобто вони приблизно однаково визначають оптимальне  $n$ .

## 2) Спосіб 2.

Скориставшись зміщеними многочленами Лежандра, які в нашому випадку шляхом заміни [18]:

$$\rho^2 = \frac{1}{2}(1+t) \quad t \in [-1;1]; \quad \rho \in [0;1]$$

представляють функцію  $\delta(\rho)$  у вигляді:

$$\delta(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(2\rho^2 - 1), \quad (5.20)$$

коефіцієнти  $C_n$  визначаються:

$$C_n = 2(2n+1) \int_0^1 \rho \delta(\rho) P_n(2\rho^2 - 1) d\rho = 2(2n+1) \sum_{l=0}^n d_n^l S_{2l},$$

$$S_l = \int_0^1 \delta \rho (2\rho^2 - 1)^l d\rho = \sum_{t=0}^l C_t^l 2^t (-1)^{-t} M_{tl},$$

$$M_{2t} = \int_0^1 \delta \rho^{2t+1} d\rho.$$

Аналогічно, як і першого способу, табулюємо функції  $\delta^1, \delta^2$  для різних  $n$  та по збіжності визначаємо оптимальне, яке також визначається з нерівності:

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n^2}{2n+1} \leq 4 \int_0^1 \delta^2(\rho) \rho d\rho$$

Таблиця 5.3.

## Порівняння точних і наближених значень густини, отриманих другим способом

$\delta = 1, 0 < \rho \leq \frac{1}{2}, \delta = 0, \frac{1}{2} < \rho \leq 1$								$\delta = \sqrt{\rho}$						
$\rho$	$n$ $\delta$	6	12	15	18	21	24	$n$ $\delta$	6	12	15	18	21	24
0.0	1.0	1.141	0.897	1.085	0.926	1.067	0.939	0.00	0.431	0.303	0.247	0.214	0.191	0.174
0.1	1.0	1.121	0.940	1.019	1.008	0.977	1.026	0.32	0.442	0.337	0.307	0.302	0.305	0.310
0.2	1.0	1.064	1.028	0.958	1.009	1.021	0.981	0.45	0.476	0.426	0.439	0.451	0.452	0.447
0.3	1.0	0.975	1.059	1.027	0.977	0.974	1.006	0.55	0.529	0.538	0.555	0.548	0.545	0.549
0.4	1.0	0.862	0.959	1.020	1.048	1.046	1.026	0.63	0.599	0.639	0.632	0.631	0.634	0.631
0.5	0.5	0.736	0.743	0.745	0.746	0.747	0.747	0.71	0.679	0.714	0.704	0.709	0.706	0.708
0.6	0.5	0.614	0.532	0.478	0.458	0.464	0.485	0.78	0.765	0.772	0.777	0.773	0.775	0.775
0.7	0.5	0.514	0.457	0.496	0.523	0.503	0.484	0.84	0.846	0.832	0.835	0.838	0.837	0.836
0.8	0.5	0.457	0.510	0.507	0.486	0.513	0.493	0.89	0.914	0.898	0.895	0.894	0.894	0.894
0.9	0.5	0.469	0.507	0.503	0.492	0.510	0.491	0.95	0.957	0.949	0.948	0.948	0.948	0.948
1.0	0.5	0.578	0.558	0.549	0.542	0.538	0.535	1.0	0.964	1.013	0.993	1.004	0.997	1.002



Таблиця 5.4.

Теоретична величина  $4 \int_0^1 \delta^2(\rho) \rho d\rho$  та її наближене значення  $2 \sum_{l=0}^n \frac{C_l^2}{(2l+1)}$

$\delta$	$4 \int_0^1 \delta^2(\rho) \rho d\rho$	$2 \sum_{l=0}^n \frac{C_l^2}{(2l+1)}$				
		15	18	21	24	27
$\delta = \begin{cases} 1 \\ 0.5 \end{cases}$	0.875	0.870613	0.87132	0.871823	0.87295	0.89150
$\delta = \sqrt{\rho}$	1.333333	1.333322	1.333327	1.333338	1.33536	1.39167

### 3) Спосіб 3.

Наведені вище випадки можуть застосовуватись як для еліпсоїдальної, так і для кульової планети, тому, що з їх допомогою наближено вираховується потенціал і енергія (це буде наведено нижче). В сферичному випадку можна навести ще одну можливу апроксимацію при відповідній заміні:

$$\rho = \frac{1}{2}(1+t), \quad t \in [-1; 1], \quad \rho \in [0; 1].$$

Тоді розклад набуде вигляду:

$$\delta(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(2\rho - 1), \quad (5.21)$$

$$C_n = (2n+1) \int_0^1 \delta(\rho) P_n(2\rho - 1) d\rho = (2n+1) \sum_{l=0}^n d_l^n r_l$$

$$r_l = \sum_{t=0}^l C_t^l (-1)^{l-t} 2^t M_t$$

$$M_t = \int_0^1 \delta(\rho) \rho^t dt$$

Умова оптимальності тут прийме вигляд :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^2}{2n+1} \leq \int_0^1 \delta^2(\rho) d\rho.$$

Знову обчислюємо значення і оформлюємо їх у вигляді таблиць 5.5 і 5.6.

**Числові результати використані для двох наведених прикладів, що підтверджують вибір критерію збіжності**

$\delta$	$\int_0^1 \delta^2(\rho) d\rho$	$\sum_{l=0}^n \frac{C_l^2}{(4l+1)}$					
	Точне значення	4	8	12	16	20	24
$\delta = \begin{cases} 1, & 0 < \rho \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} < \rho \leq 1 \end{cases}$	0.625	0.6162	0.6203	0.6218	0.6228	0.6232	0.6234
$\delta = \sqrt{\rho}$	0.5	0.4992	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999

Таким чином, у всіх трьох випадках спостерігається покращення збіжності до певного чисел  $n$ , які є різними для кожного способу, а точність апроксимації при цьому практично однакова. Тому застосування одного з них визначається специфікою вибраної задачі.

Таблиця 5.6.

**Порівняння точних і наближених значень густини, отриманих третім способом**

$\delta = 1, 0 < \rho \leq \frac{1}{2}, \delta = 0, \frac{1}{2} < \rho \leq 1$								$\delta = \sqrt{\rho}$					
$\rho$	$n$ $\delta$	6	12	15	18	21	24	6	12	15	18	21	24
0.0	1.0	0.906	0.932	0.944	0.951	0.956	1.023	0.101	0.056	0.039	0.029	0.024	0.124
0.1	1.0	1.032	0.999	0.989	1.014	0.988	0.989	0.305	0.319	0.315	0.317	0.316	0.282
0.2	1.0	1.054	0.980	1.002	1.008	0.988	0.993	0.449	0.446	0.448	0.447	0.447	0.413
0.3	1.0	0.996	1.045	0.991	0.977	1.009	0.994	0.554	0.548	0.547	0.548	0.548	0.510
0.4	1.0	0.886	0.982	1.035	1.045	1.026	0.997	0.635	0.634	0.633	0.633	0.632	0.628
0.5	0.5	0.750	0.750	0.750	0.750	0.750	0.772	0.705	0.706	0.707	0.707	0.707	0.747
0.6	0.5	0.614	0.518	0.465	0.455	0.474	0.511	0.770	0.774	0.775	0.775	0.775	0.793
0.7	0.5	0.504	0.455	0.509	0.523	0.491	0.469	0.835	0.838	0.837	0.836	0.837	0.806
0.8	0.5	0.446	0.520	0.498	0.492	0.512	0.462	0.897	0.894	0.894	0.895	0.894	0.848
0.9	0.5	0.467	0.501	0.511	0.486	0.512	0.471	0.952	0.948	0.949	0.949	0.949	0.911
1.0	0.5	0.594	0.568	0.556	0.549	0.544	0.681	0.990	0.997	0.999	0.999	1.000	1.260

### 5.3. Приклади визначення внутрішнього потенціалу та енергії сферичної планети

Визначаємо внутрішній потенціал для двох наведених вище функцій  $\delta^1, \delta^2$ :

$$u^1 = \int_{\tau} \frac{\delta^1}{r} d\tau = \int_{\tau} \frac{\sqrt{\rho}}{r} d\tau$$

і згідно формули (5.17) одержимо:

$$u^1 = \frac{3fV_k}{R\left(\frac{1}{2}+2\right)} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{2}+2}\right) = \frac{6}{5} fV_k \left(1 - \frac{2}{7} \rho^{\frac{5}{2}}\right).$$

Величина складається з двох частин:  $u_2^1, u_2^2$ , що породжується густинами

$$\delta_1^2 = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \leq \rho \leq 1 \end{cases}$$

і

$$\delta_2^2 = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \leq \rho \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & \frac{1}{2} \leq \rho \leq 1, \end{cases}$$

де

$$u_2^1 = \int_{\tau} \frac{\delta_1^2}{r} d\tau = \frac{1}{2} \int_{\tau} \frac{d\tau}{r} = \frac{1}{4} \frac{V_k f}{R} (3 - \rho^2),$$

$u_2^2$  - потенціал, що генерується кулею радіуса  $\frac{1}{2}$  з густиною  $\frac{1}{2}$ .

Згідно формули (5.15) і (5.16) він визначається:

$$u_2^2 = \frac{fV \cdot \delta_0}{R} = \frac{fV}{R} \cdot \frac{\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2}}{\rho}, \quad \rho > \frac{1}{2};$$

$$u_2^2 = f \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} R_1 \left(3 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \cdot 4\right), \quad \rho > \frac{1}{2}, \quad R_1 = \frac{R}{2}.$$

Об'єднуючи приведені формули, запишемо:

$$u_2^2 = \begin{cases} \frac{fV_k}{32R}(3-4\rho^2), & \rho \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{fV_k}{16R\rho}, & \rho > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Сумарний потенціал  $u$  вираховується:

$$u^2 = u_1 + u_2 = \begin{cases} \frac{fV_k}{R} \left( \frac{3}{4} - \frac{\rho^2}{4} + \frac{1}{16} \rho \right) = \frac{fV_k}{R} \frac{1}{4} \left( 3 - \rho^2 + \frac{1}{4} \rho \right) & \rho > \frac{1}{2} \\ \frac{fV_k}{R} \left( \frac{1}{16} (3-4\rho^2) + \frac{1}{4} (3-\rho^2) \right) = \frac{fV_k}{R} \frac{1}{16} (15-2\rho^2), & \rho \leq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Отже, для кулі одержані точні формули обчислення внутрішнього потенціалу. Далі, визначимо його наближено, користуючись одним з представлень функцій за сумою поліномів Лежандра, при цьому має місце збіжність в середньому:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left[ \delta - \sum_{m=0}^n C_{2m} \int_{\tau} \frac{P_{2m}(\rho)}{r} d\tau \right]^2 = 0$$

і це забезпечує рівномірну збіжність ряду:

$$u = \int_{\tau} \frac{\delta}{r} d\tau = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} \int_{\tau} \frac{P_{2n}(\rho)}{r} d\tau = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} u_{2n},$$

де

$$u_{2n} = \sum_{l=0}^n d_{2l}^{2n} \int_{\tau} \frac{\rho^{2n}}{r} d\tau.$$

Члени останньої суми вираховуємо, користуючись формулами (5.13) або (5.16). В першому випадку формули мають місце як для еліпсоїдальної, так і кульової планети, в другому-тільки для кульової. Обчислюємо за приведеним алгоритмом точне і наближені значення потенціалу для двох випадків і результати обчислень наводимо табл. 5.7.

Таблиця 5.7.

Точні та наближені значення потенціалів  $u^1, u^2$ 

$\rho = \frac{r}{R}$	Значення потенціалу, $u^1$		Значення потенціалу, $u^2$	
	наближене	точне	наближене	точне
0.0	1.1999962	1.2000000	0.9374550	0.9375000
0.1	0.9324380	0.9325000	0.9324380	0.9325000
0.2	0.9174538	0.9175000	0.9174538	0.9175000
0.3	0.8924094	0.8925000	0.8924094	0.8925000
0.4	0.8573636	0.8575000	1.1653604	1.1653053
0.5	0.8125198	0.8125000	1.1393799	1.1393908
0.6	0.7641075	0.7641667	1.1044214	1.1043926
0.7	0.7168836	0.7167857	1.0593957	1.0594411
0.8	0.6680610	0.6681250	1.0037646	1.0037371
0.9	0.6167158	0.6169444	0.9366391	0.9365371
1.0	0.5623506	0.5625000	0.8572074	0.8571429

Визначимо тепер потенціальну (гравітаційну) енергію за формулою:

$$E = -\frac{1}{2} \int_{\tau} u \delta \tau,$$

$$\begin{aligned}
 E_1 &= -\frac{1}{2} \frac{6}{5R} fV_k \int_{\tau} \left(1 - \frac{2}{7} \rho^{\frac{5}{2}}\right) \rho^{\frac{1}{2}} d\tau = -\frac{6}{10R} fV_k \cdot 4\pi abc \int_0^1 \left(\rho^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{7} \rho^5\right) d\rho = \\
 &= -\frac{6}{10R} fV_k \cdot 3V_k \left[ \frac{2}{7} \rho^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{7} \frac{1}{6} \rho^5 \right] \Big|_0^1 = -\frac{3}{7} \frac{f(V_k)^2}{R}.
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

Розглянемо розривний випадок:

$$\begin{aligned}
E &= -\frac{1}{2} \left[ \int_{\tau_1} \delta_1 d\tau_1 + \int_{\tau_2} u_2 \delta_2 d\tau_2 \right] = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \frac{fV_k}{4R} \int_{\tau_2} \left( 3 - \rho^2 + \frac{1}{4\rho} \right) d\tau_2 + \int_{\tau_1} \frac{fV_k}{16R} (15 - 8\rho^2) d\tau_1 \right\} = B \\
&= -\frac{1}{16} \frac{fV_k}{R} \left\{ 3V_k \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \rho^2 (15 - 8\rho^2) d\rho + 3V_k \int_{\frac{1}{2}}^1 \rho^2 \left( 3 - \rho^2 + \frac{1}{4\rho} \right) d\rho \right\} = \\
&= -\frac{3}{16} \frac{f(V_k)^2}{R} \left\{ \frac{1}{2} \left( 5\rho^3 - \frac{8}{5}\rho^5 \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}} + \left( \rho^3 - \frac{\rho^5}{5} + \frac{1}{8}\rho^2 \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 \right\} = \\
&= \frac{3}{16} \frac{f(V_k)^2}{R} \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} - \frac{8}{5 \cdot 26} + 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5 \cdot 25} - \frac{1}{32} \right\} = \frac{3}{16} \frac{f(V_k)^2}{R} \left( \frac{5}{16} - \frac{1}{40} + \frac{4}{5} - \frac{4}{5 \cdot 32} \right) = \\
&= \frac{3}{16} \frac{f(V_k)^2}{R} \left( \frac{5}{16} - \frac{1}{40} + \frac{4}{5} - \frac{1}{40} \right) = \frac{3}{16} \frac{f(V_k)^2}{R} \frac{25 - 2 - 2 + 64}{16 \cdot 5} = V \frac{f(V_k)^2}{R} \frac{3 \cdot 85}{16 \cdot 16 \cdot 5} = \frac{f(V_k)^2}{R} \frac{3 \cdot 17}{256} = \\
&\frac{51}{256} \frac{f(V_k)^2}{R} = 0.19921875 \frac{f(V_k)^2}{R} .
\end{aligned}$$

При цьому, наближене значення є наступним:

$$E = 0,19925 \frac{f(V_k)^2}{R} .$$

Визначимо тепер значення енергії, використовуючи представлення функції густини у вигляді ряду :

$$\delta = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} P_{2n}(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} \sum_{l=0}^n d_{2l}^{2n} \rho^{2l} .$$

Потенціал визначається:

$$u = \int_{\tau} \frac{\delta}{r} d\tau = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} u_{2n} ,$$

$$\text{де } u_{2n} = \int_{\tau} \frac{P_{2n}(\rho)}{r} d\tau = \sum_{l=0}^n d_{2l}^{2n} \int_{\tau} \frac{\rho^{2n}}{r} d\tau .$$

Використовуючи результати пункту 4.1 отримаємо для еліпсоїда при  $\xi = 0$ :

$$S_{2n} = f \int_{\tau} \frac{\rho^{2n}}{r} d\rho = \frac{3}{4} V_e f \left( \frac{M_{000}(0)}{n+1} - n! \sum_{l=0}^{n+1} \frac{(-1)^l}{l!(n+1-l)!} \sum_{t_1+t_2+t_3=l} \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^{2t_1} \left(\frac{y}{b}\right)^{2t_2} \left(\frac{z}{c}\right)^{2t_3}}{t_1!t_2!t_3!} M_{t_1 t_2 t_3}(0) \right) ,$$

що є можливим завдяки вибору розкладу  $\delta(\rho)$  за парними степенями, оскільки відповідно  $S_{2n}$ , а далі  $u_{2n}$ , а значить і потенціал вираховується як лінійна

комбінація потенціалів, які обчислюються в замкнутому вигляді. При  $n$ -непарному  $\int_{\tau} \frac{\rho^{2n+1}}{r} d\tau$  в скінченному вигляді не визначається, тому, що в

$$\left( \frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} \right)^{n+\frac{1}{2}} n + \frac{1}{2} \text{ не ціле.}$$

Для кулі при довільному  $n$  потенціал записується в замкнутому вигляді, тому приведемо формули обчислення потенціалу, використовуючи апроксимацію різними способами:

а). Для кулі

$$S_{2n} = \frac{3}{n+1} f \frac{V_k}{R} \left( 1 - \frac{1}{2n+3} \rho^{2n+2} \right),$$

а тому

$$u_{2n} = \sum_{l=0}^n d_{2l}^{2n} S_{2n} = 3 \frac{fV_k}{R} \sum_{l=0}^n d_{2l}^{2n} \frac{1}{l+1} \left( 1 - \frac{1}{2l+3} \rho^{2l+2} \right).$$

Енергія в такому випадку визначається:

$$\begin{aligned} E &= -\frac{1}{2} \int_{\tau} u \delta d\tau = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\tau} C_{2n} \int_{\tau} \frac{P_{2n}(\rho)}{r} d\tau \sum_{m=0}^{\infty} C_{2m} P_{2m}(\rho) d\tau = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{2n} C_{2m} \cdot E_{nm}, \\ E_{nm} &= \int_{\tau} u_{2n} P_{2m}(\rho) d\tau = 3 f V_k \sum_{l=0}^n \int_{\tau} \left( 1 - \frac{1}{l+3} \rho^{l+2} \right) \frac{d_{2l}^{2n}}{l+2} \times \sum_{t=0}^m d_{2t}^{2m} \rho^{2t} d\tau = \\ &= 9 f V_k \sum_{l=0}^n \sum_{t=0}^m \frac{d_{2l}^{2n}}{l+2} d_{2t}^{2m} \int_0^1 \left( \rho^{2t+2} - \frac{1}{l+3} \rho^{2t+l+2} \right) d\rho = \\ &= \frac{9f(V_k)^2}{4R^2} \sum_{l=0}^n \sum_{t=0}^m \frac{d_{2l}^{2n}}{l+2} d_{2t}^{2m} \left( \frac{1}{2t+3} - \frac{1}{(l+3)(2t+l+3)} \right); \end{aligned} \quad (5.23)$$

б) вираховуємо потенціал та енергію для другого способу

$$\delta = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} P_{2n}(2\rho^2 - 1) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} P_{2n}(2\rho^2 - 1),$$

$$P_{2n}(2\rho^2 - 1) = \sum_{m=0}^n d_{2m}^{2n} \sum_{l=0}^m 2^l \rho^{2l} (-1)^{n-l} \cdot \frac{n!}{l!(n-l)!}.$$

Аналогічно:

$$S'_{2n} = \sum_{l=0}^n \frac{2^l n! (-1)^{n-l}}{l!(n-l)!} \int_{\tau} \frac{\rho^{2l}}{r} d\tau = \sum_{l=0}^n \frac{2^l n! (-1)^{n-l}}{l!(n-l)!} S_{2n} = \sum_{l=0}^n \frac{2^l n! (-1)^{n-l}}{l!(n-l)!} \frac{3}{2} \frac{fV}{R} \left( 1 - \frac{l}{2n+3} \rho^{2n+2} \right),$$



$$E = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} \int_{\tau_1} \frac{P_{2n}(2\rho^2 - 1)}{r} d\tau_1 \sum_{m=0}^{\infty} C_{2m} P_{2m}(2\rho^2 - 1) d\tau = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{2n} C_m E'_{mm},$$

$$E'_{mm} = \sum_{l=0}^n d_{2l}^{2n} \sum_{r=0}^l \frac{2^r l! (-1)^{l-r}}{r! (l-r)!} \sum_{s=0}^l \frac{2^s t!}{s! (t-s)!} \left( \frac{1}{2r+3} - \frac{1}{(s+3)(2r+s+1)} \right) \frac{1}{2r+3}; \quad (5.24)$$

в) для еліпсоїдальної планети:

$$\delta = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} P_{2n}(\rho),$$

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} \int_{\tau} \frac{P_{2n}(\rho)}{r} d\tau = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} u_{2n}. \quad (5.25)$$

Розпишемо потенціал, а далі і енергію еліпсоїдальної планети:

$$\delta = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} P_{2n}(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} \sum_{l=0}^n d_{2l}^{2n} \rho^{2l}.$$

Враховуючи, що

$$\int_{\tau} \frac{\rho^{2l}}{r} d\tau = \frac{3}{4} \frac{V_e f}{4(l+1)} \int_0^{\infty} \left( 1 - \left( \frac{x^2}{a^2+u} - \frac{y^2}{b^2+u} - \frac{z^2}{c^2+u} \right)^{l+1} \right) \frac{du}{Q(u)}, \quad (5.26)$$

одержимо:

$$u_{2n} = \frac{3fV_e}{4} \left\{ \sum_{l=0}^n \frac{d_{2l}^{2n}}{l+1} \int_0^{\infty} \left( 1 - \left( \frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} \right)^{l+1} \right) \frac{du}{Q(u)} \right\} =$$

$$= \frac{3}{4} fV_e \sum_{l=0}^n \frac{d_{2l}^{2n}}{l+1} \sum_{t=0}^{l+1} \left( 1 - \sum_{t_1=t_2=t_3=t} \left( \frac{x^2}{a^2} \right)^{t_1} \left( \frac{y^2}{b^2} \right)^{t_2} \left( \frac{z^2}{c^2} \right)^{t_3} M_{t_1 t_2 t_3}(0) \right).$$

Енергія вираховується:

$$E = -\frac{1}{2} \int_{\tau} u \delta d\tau = -\frac{1}{2} \int_{\tau} \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} u_{2n} \sum_{m=0}^{\infty} C_{2m} P_{2m}(\rho) d\tau = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{2n} C_{2m} E_{2n2m}, \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned}
E_{2n2m} &= \frac{f}{\tau} \sum_{l=0}^n d_{2l}^{2n} \sum_{l=0}^m d_{2l}^{2m} \int_{\tau} \frac{\rho^{2l}}{r} d\tau \rho^{2l} d\tau = \\
&= \frac{3}{4} \frac{fV}{a_e} \sum_{l=0}^n \sum_{l=0}^m \frac{d_{2l}^{2n} d_{2l}^{2m}}{l+1} \int_{\tau} \int_0^{\infty} \left( 1 - \left( \frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} \right)^{l+1} \frac{du}{Q(u)} \cdot \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) \right) d\tau = \\
&= \frac{3}{4} \frac{fV_e}{a_e} \sum_{l=0}^n \sum_{l=0}^m \frac{d_{2l}^{2n} d_{2l}^{2m}}{l+1} \int_{\tau} \int_0^{\infty} \left( 1 - \rho^{2l+2} \left( \frac{a^2 \sin \theta \cos \lambda}{a^2+u} + \frac{b^2 \sin \theta \sin \lambda}{b^2+u} + \frac{c^2 \cos \theta}{c^2+u} \right)^{l+1} \right) \rho^{2l+2} \sin \theta d\theta d\lambda = \\
&= \frac{3}{4} \frac{fV_e}{a_e} \left( \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{2t+3} \right) \frac{du}{Q(u)} - \int_0^{\infty} \frac{1}{2l+2t+5} \sum_{r=0}^{l+1} \sin \theta^{2r+1} \cos \theta^{2e+2-r} \left( \frac{a^2}{a^2+u} \cos \lambda + \frac{b^2}{a^2+u} \right)^r d\lambda d\theta \right) = \\
&= \frac{3}{4} \frac{f(V_e)^2}{a_e} \left( M_{000} - \frac{1}{2l+2t+5} \sum_{r=0}^{l+1} 2 \frac{2r!(2l+2-r)!!}{(2l+2)!!} \int_0^{\infty} \left( \frac{c^2}{c^2+u} \right)^{2l+2-r} \times \right. \\
&\quad \left. \sum_{s=0}^r \frac{a^2}{a^2+u} \frac{b^2}{b^2+u} \cos^s \lambda \sin^{r-s} \lambda d\lambda + M_{2l+2-r,s,r-s} \frac{(s-1)!!(2-r-1)!!}{r!!} \right)
\end{aligned}$$

і таким чином визначаємо енергію еліпсоїдальної планети. Дана формула дозволяє визначити наближене значення енергії еліпсоїдальної планети.

#### 5.4. Дослідження методики вивчення апроксимації функції густини планети на прикладі моделі PREM.

Зовнішнє гравітаційне поле Землі має тривимірну структуру [119,125], яка є наслідком неоднорідності розподілу мас планети та відхиленням її фігури від кулі. Спробуємо дослідити вплив еліпсоїдальності на визначення значень  $V$  та  $E$ . Методика, яка приводиться в роботі [72], дозволяє отримувати як зовнішній потенціал, так і внутрішній, проте в випадку еліпсоїдального тіла для кусково-неперервних функцій формули стають дуже громіздкими, і, на відміну від кульової планети, отримання практичних співвідношень для величини  $E$  практично неможливе, хоча для неперервних функцій все ж така можливість існує. Тому логічно представити функцію  $\delta(\rho)$  у вигляді суми неперервних функцій, наприклад, рядами за поліномами Лежандра, для яких просто обчислюється спочатку потенціал, а далі і значення  $E$ .

Можна відзначити, що такі дослідження були проведені в монографії [72], де сферично-симетрична модель PREM трактувалась як одновимірний розподіл

еліпсоїдальної планети, на основі якого визначався внутрішній потенціал і сила тяжіння Землі.

Детальні дослідження за даною тематикою для кулі детально розглянуті Моріцом Г. в монографії [72], в якій на основі потенціалу сферично – симетричних моделей та наближення фігури планети еліпсоїдом з допомогою Лежандра поліномів першого та другого порядків, приводяться формули для еліпсоїдальної планети.

Це дає можливість обчислювати важливу характеристику – гравітаційну (потенціальну енергію) розподілів мас Землі в сферично – симетричному випадку. що було зроблено в роботах [174-177], де одночасно приводиться оцінка вкладу при переході від кулі до еліпсоїда.

Разом з цим інший підхід до визначення потенціалу та його енергії, який широко використовується в астрономії та астрофізиці [143] при дослідженні фігур рівноваги. Він же використаний для отримання алгоритмів знаходження внутрішнього потенціалу в працях [72,73,174].

Для еліпсоїдальної планети, зовнішній та внутрішній потенціал можна вираховувати використовуючи алгоритми, приведені, наприклад, в [72,73] проте такі обчислення є об'ємними і практично не реалізованими, а знаходження  $E_e^T$  (точного значення для еліпсоїда), практично неможливе, тому, що не має простих алгоритмів визначення внутрішнього потенціалу [101,117,118,186,195] та гравітаційної енергії еліпсоїдальних тіл, та їх подальша практична реалізація.

Нехай радіальний розподіл мас моделі PREM  $\delta(\rho)$  представлений кусково – неперервними функціями  $\delta_i(\rho)$  (див. табл. 5.8) в середині еліпсоїдальної

планети  $\tau \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right\} \leq 1$  або кулі  $K$  радіусом  $R$  ( $R=6371$  км):

$$\delta(\rho) = \begin{cases} \delta_0(\rho), & 0 \leq \rho < \rho_0, \\ \delta_1(\rho), & \rho_0 \leq \rho < \rho_1, \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \delta_m(\rho) & \rho_{m-1} \leq \rho \leq 1 \end{cases} \quad (5.28)$$

Таблиця 5.8.

**Коефіцієнти многочленів референційної моделі PREM**  $\delta_i(\rho) = \sum_{j=0}^n a_{ij} \rho^j$

i \	$\rho_{i-1}$	$\rho_i$	$a_{i0}$	$a_{i1}$	$a_{i2}$	$a_{i3}$
1	0	1221.5	13.0885	0	-8.8381	0
2	1221.5	3480.0	12.5815	-1.2638	-3.6426	-5.5281
3	3480.0	5701.0	7.9565	-6.4761	5.5283	-3.0807
4	5701.0	5771.0	5.3197	-1.4836	0.0000	0.0000
5	5771.0	5971.0	11.2494	-8.0298	0.0000	0.0000
6	5971.0	6151.0	7.1089	-3.8045	0.0000	0.0000
7	6151.0	6346.6	2.6910	0.6924	0.0000	0.0000
8	6346.6	6356.0	2.9000	0.0000	0.0000	0.0000
9	6356.0	6368.0	2.6000	0.0000	0.0000	0.0000
10	6368.0	6371.0	1.0200	0.0000	0.0000	0.0000

Розкладемо функцію  $\delta(\rho)$  за поліномами Лежандра парних степеней [18].

$$\delta(\rho) = \delta_c \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} P_{2n}(\rho),$$

де

$$\begin{aligned} C_n &= (4n+1) \int_0^1 \frac{\delta(\rho)}{\delta_c} P_{2n}(\rho) d\rho = \\ &= \delta_c \sum_{k=0}^n d_k^n \int_0^1 \frac{\delta(\rho)}{\delta_c} \rho^{2k} d\rho. \end{aligned}$$

Тут  $\delta_c = \frac{M}{V} = 5.514 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$  – середня густина Землі,

а

$\mu_{2l} = \int_0^1 \frac{\delta(\rho)}{\delta_c} \rho^{2k} d\rho$  – степеневі моменти густини.

Потенціал притягання  $V$  визначається рядом, який збігається рівномірно:

$$V = f \int_{\tau} \frac{\delta(\rho)}{r} d\tau = \delta_c f \sum_{n=0}^{\infty} C_n \int_{\tau} \frac{P_{2n}(\rho)}{r} d\tau = \delta_c f \sum_{n=0}^{\infty} C_n V_n(P). \quad (5.29)$$

Встановимо вигляд членів

$$V_i(P) = f \int_{\tau} \frac{P_{2n}(\rho)}{r} d\tau = f \sum_{k=0}^n d_k^n \int_{\tau} \frac{\rho^{2k}}{r} d\tau, \quad (5.30)$$

для чого обчислимо вираз

$$U_k(P) = \int_{\tau} \frac{\rho^{2k}}{r} d\tau. \quad (5.31)$$

Користуючись формулою (5.11), можна записати

$$U_k(P) = f \frac{\pi abc}{k+1} \int_{\xi(0)}^{\infty} \left[ 1 - \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^{k+1} \right] \frac{du}{Q(u)},$$

де  $\xi$  – еліпсоїдальна координата [75].

Для двохосевого еліпсоїда ( $a=b$ ) одержимо:

$$U_k(P) = \frac{3fV}{4(k+1)} \int_{\xi(0)}^{\infty} \left[ 1 - \rho^{2k+2} \left( \frac{a^2 \sin^2 \theta}{a^2 + u} + \frac{c^2 \cos^2 \theta}{c^2 + u} \right)^{k+1} \right] \frac{du}{Q(u)}.$$

або остаточно:

$$U_k(P) = \frac{3fV}{4(k+1)} (M_{00}(\xi) - (k+1)! \sum_{il=0}^{k+1} \frac{\sin^{2il} \theta \cdot \cos^{2k+2-2l} \theta}{il!(k+1-il)!} M_{il}(\xi)),$$

де

$$M_{il}(\xi) = a^{2l} c^{2l} \int_{\xi(0)}^{\infty} \frac{du}{(a^2 + u)^{l+1} (c^2 + \xi^{t+\frac{1}{2}})^{l+1}}.$$

Величину  $M_{il}(\xi)$  можна визначити при  $\xi=0$  наступним чином (формула (3.45)):

$$M_{il} = \frac{2}{a\alpha} \left\{ \frac{1}{2l+2t+1} + (2l+2)! \sum_{s=0}^{2l+2} \frac{(1-\alpha^2)^s}{s!(l+1-s)!} + \sum_{s=2l+2}^{\infty} \frac{(1-\alpha^2)^s (s-l-2)!}{s!} \right\},$$

а для сферично-симетричної моделі маємо:

$$M_t = \frac{2}{R(2l + 2t + 1)} .$$

Звідки отримуємо:

$$U_k(P) = \frac{3V_l}{2(k+1)R} \left( 1 - \frac{\rho^{2k+2}}{2k+3} \right).$$

Внутрішній потенціал радіальної кусково-неперервної кульової планети в довільній точці  $P$  визначається [121,131-135]:

$$V(P) = V_z(P) + V_g(P) + V_p(P), \quad (5.32)$$

$$V_z(P) = \left( \sum_{i=1}^{l-1} M_{G_i} - M_{\tau_l} \right) / \rho, \text{ (зовнішній відносно } P), \quad (5.33)$$

$M_{G_i}$  – маса  $i$ -го сферичного кільця радіусами  $\rho_i, \rho_{i-1}$ ,

$M_{\tau_l}$  – маса кулі з радіусом  $\rho_g$  з розподілом  $\delta_l(\rho)$ , а  $\tau_l$  – куля радіуса  $\rho_i$ ,

$G_i$  – прошарок, обмежений сферами радіуса  $\rho_i, \rho_{i-1}$ ,

$$V_g(P) = fM \sum_{i=1}^4 \frac{a_{l,i+2}}{i+2} \left( \rho_l^{i+2} - \rho_{l-1}^{i+2} - \frac{\rho^{i+2}}{i+3} \right) \text{-внутрішній потенціал прошарку } G_i, \quad (5.34)$$

$$V_p(P) = fM \sum_{j=l+1}^{n_k} \sum_{i=1}^4 \frac{a_{l,i+2}}{i+1} \left( \rho_j^{i+1} - \rho_{j-1}^{i+1} \right) \text{-постійний потенціал в попрожнині,} \quad (5.35)$$

якщо  $P \in G_l$ .

Обчислимо точне значення внутрішнього потенціалу кулі  $V_k^T$  за формулами (5.29) – (5.32), а далі апроксимаційну величину  $V_k^a$  з використанням Аналогічні обчислення зробимо для еліпсоїда та визначимо апроксимаційне значення потенціалу еліпсоїда  $V_e^a$ . Занесені в табл. 5.9 результати обчислень показують, що нехтувати еліпсоїдальністю не можна, бо змінюючись з широтою числа відрізняються в другому знаку від основної величини і є співвимірні з вкладом в потенціал обертової складової.

Таблиця 5.9

## Точне та апроксимаційне значення потенціалу кульової та еліпсоїдальної планети

$\rho$	Потенціал кульової планети $V^*$		Потенціал еліпсоїдальної планети $V_e^a$				
	$* \frac{fM}{R} = 0.62564825 \cdot 10^8 \frac{M^2}{c^2}$		$* \frac{fM}{a} = 0.6249482 \cdot 10^8 \frac{M^2}{c^2}$				
	Точне значення $V_k^T$	Апроксимоване Значення $V_k^a$	$0^\circ$	$45^\circ$	$90^\circ$	$135^\circ$	$180^\circ$
0.0	9.820697	9.820367	9.834310	9.834310	9.834310	9.834310	9.834310
0.1	9.755690	9.755057	9.768258	9.767923	9.767586	9.767923	9.768258
0.2	9.561246	9.560778	9.571844	9.570538	9.569234	9.570538	9.571844
0.3	9.250711	9.249989	9.257882	9.255833	9.252731	9.255833	9.257882
0.4	8.833008	8.831719	8.835678	8.832596	8.826859	8.832596	8.835678
0.5	8.314364	8.314509	8.313530	8.306856	8.298647	8.306856	8.313530
0.7	7.161257	7.162159	7.151571	7.141397	7.134145	7.141397	7.151571
0.8	6.604243	6.603746	6.586301	6.576352	6.567113	6.576352	6.586301
0.9	6.045622	6.043416	6.022191	6.012985	6.000358	6.012985	6.022191
1.0	5.486872	5.485424	5.459068	5.448399	5.436360	5.447652	5.459068

Продовжуючи дослідження , визначимо значення гравітаційної енергії сферичної планети  $E_k^T$  за формулами  $E_k^a$ ), а також апроксимаційне значення потенціальної енергії для еліпсоїда  $E_e^a$ , для чого скористаємось співвідношенням:

$$\begin{aligned} E &= -\frac{1}{2} \int_{\tau} \delta U d\tau = -\frac{\delta_c^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_n C_m \int_{\tau} P_{2n}(\rho) U_m(P) d\tau \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n C_n C_m E_{nm} \end{aligned} \quad (5.36)$$

Визначимо елементи  $E_{nm}$  спочатку для двохосевого еліпсоїда

$$E_{nm} = \frac{3}{4} \frac{fM}{(k+1)} \delta_c \sum_{m=0}^n d_k^m \int_{\tau} P_{2n}(\rho) \int_0^{\infty} \left( 1 - \rho^{2k} \left( \frac{a^2 \sin^2 \theta}{a^2 + u} + \frac{c^2 \cos^2 \theta}{c^2 + u} \right)^{k+1} \right) \frac{du}{Q(u)} = \quad (5.37)$$

$$= \frac{3(fM)^2}{4f(k+1)} \sum_{k=0}^m d_k^m (r_0 - t_n^k),$$

$$\begin{aligned} t_n^k &= \int_{\tau} \int_0^{\infty} P_{2n}(\rho) \rho^{2k+4} \left( \frac{a^2 \sin^2 \theta}{a^2 + u} + \frac{c^2 \cos^2 \theta}{c^2 + u} \right)^{k+1} \sin \theta \frac{du}{Q(u)} = \\ \frac{1}{2^m n! (2k+4-2n)!} \int_0^{\infty} (\rho^2 - 1)^{2n} \rho^{2k+4-2n} d\rho S_k &= \frac{(2k+4)(2k-2n+3)!!}{(2k+2n+5)!!} S_k \end{aligned} \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} S_k &= \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \left( \frac{a^2 \sin^2 \theta}{a^2 + u} + \frac{c^2 \cos^2 \theta}{c^2 + u} \right)^{k+1} \frac{du}{Q(u)} = \sum_{il=0}^{3N_{mk+1}} \frac{(k+1)!}{il!(k+1-il)!} \int_0^{\pi} \sin^{2il+1} \theta \cos^{2k+2-il} \theta \cdot d_0 \cdot M_{il} = \\ &= (k+1)! \sum_{il=0}^{k+1} \frac{2il!!(2k-2il-1)!!}{(2k+3)!!} M_{il}, \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$d_0 = \begin{cases} \frac{1}{3}, & n=0 \\ \frac{2}{15}, & n=1 \\ 0, & n>1. \end{cases}$$

У випадку кулі  $S_k = \frac{1}{2k+3}$  і формули (5.38) і (5.39) спрощуються, а саме:

$$E_{nm}' = \frac{9fV^2}{4fR} \sum_{k=0}^m d_k^m (r_0 - t_n^k), t_n^k = \frac{(2k+4)(2k+4-2n)!!}{(2k+3)(2k+2n+5)!!} \quad (5.40)$$



Визначемо тепер замкнуті формули для обчислення енергії кульової планети, використовуючи співвідношення (5.32)-(5.35). Послідовно виконуючи перетворення, одержимо:

$$E = -\frac{1}{2} \frac{fV}{R} \int_{\tau_7} u \delta d\tau = -\frac{1}{2} \frac{fV}{R} \sum_{m=1}^{n_k} \int_{\tau_m} u_m(P) \delta_m(P) d\tau_m =$$

$$\frac{9}{2} \frac{(fM)^2}{fR} \left[ \sum_{m=1}^{n_k} \sum_{j=1}^{m_k} \frac{a_{mj+2}}{j+2} \left( \sum_{l=1}^{m_k} \frac{a_{ml+2}}{l+2} \left[ (\rho_m^{j+2} - \rho_{m-1}^{j+2}) \sum_{i=m+1}^{n_k} \sum_{j=1}^{m_k} \frac{a_{ij+2}}{j+1} (\rho_i^{j+1} - \rho_{i-1}^{j+1}) + \right. \right. \right. \right. \quad (5.41)$$

$$\left. \left. \left. \frac{M_{m-1} - M_{\tau_m}}{j+1} (\rho_m^{j+1} - \rho_{m-1}^{j+1}) + (\rho_m^{l+2} - \rho_{m-1}^{l+2}) (\rho_m^{j+1} - \rho_{m-1}^{j+1}) + \frac{1}{l+j+2} (\rho_m^{i+j+2} - \rho_{m-1}^{l+j+2}) \right] \right) \right] \left. \right\}.$$

Таблиця 5.10.

### Точне та апроксимаційне значення енергії для кулі та еліпсоїда

Фігура	Апроксимаційне значення енергії $* \frac{(fM)^2}{af} = 0.3661079 \cdot 10^{31} \text{ ерг}$	Точне значення енергії $* \frac{(fM)^2}{af} = 0.3661079 \cdot 10^{31} \text{ ерг}$
Куля	$E_k^a = -2.00853056 / \delta_c^2$	$E_k^T = -2.00893406 / \delta_c^2$
Еліпсоїд	$E_e^a = -2.015587654 / \delta_c^2$	—

Обчислюючи за відповідними формулами точне значення  $E_k^T$  та наближені—  $E_k^a$  і  $E_e^a$ , результат заносимо в табл. 5.10.

Аналізуючи результати табл. 5.9, 5.10 можна стверджувати, що отримані апроксимаційні формули можуть використовуватись при знаходженні цих величин оскільки для сферично-симетричної кульової планети добре узгоджуються з точними. Хоча для еліпсоїдальної планети як зовнішній, так і внутрішній потенціал можна вираховувати використовуючи алгоритми, приведені, наприклад, в [73], проте такі обчислення є об'ємними і практично не реалізованими, а знаходження  $E_e^T$  (точне значення для еліпсоїда), практично не можливе, бо еліпсоїдальна координата  $\xi$ , є змінною межі інтегрування, в зв'язку з чим апроксимаційний підхід важливим при обчисленні значення енергії

еліпсоїдальної планети  $E_e^a$ . Відхилення еліпсоїда від кулі, як показує аналіз табл. 5.10, необхідно враховувати, особливо для витягнутих фігур, тому в подальшому за значення  $E_e$  приймаємо величину  $E_e^a$ .

### 5.5. Внутрішній потенціал та енергія неоднорідної еліпсоїдальної планети.

В розділі 4 отримана тривимірна модель густини в планетарному еліпсоїді до порядку  $N_k$ :

$$\delta(x; y; z) = \delta^0(\rho) + \sum_{m+n+k=0}^{N_k} b_{mnk} W_{mnk}(x; y; z).$$

Для одновимірного розподілу  $\delta^0(\rho)$  попередньо викладений алгоритм знаходження потенціалу, а далі і потенціалу та енергії еліпсоїдальної планети.

Тепер визначимо аномальну частину потенціалу [117]:

$$\sum_{m+n+k=0}^{N_k} b_{mnk} W_{mnk}(x; y; z),$$

для чого встановимо вигляд виразу:

$$\int_{\tau} \frac{W_{mnk}}{r(Q, P)} d\tau.$$

Потенціал розподілу  $(1 - \rho^2)^N$  визначається:

$$\int_{\tau} \frac{(1 - \rho^2)^N}{r} d\tau = \frac{3}{4} \frac{V_e}{N+1} \left( \int_0^{\infty} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2+u} - \frac{y^2}{b^2+u} - \frac{z^2}{c^2+u} \right)^{N+1} \frac{du}{Q(u)} \right),$$

Користуючись властивістю [74]

$$\frac{\partial^N}{\partial x^m \partial y^n \partial z^k} (u) = \int_{\tau} \frac{\partial^N}{\partial \zeta^m \partial \eta^n \partial \xi^k} (\rho) \frac{d\tau}{r},$$

для  $u = \int_{\tau} \frac{\delta}{r} d\tau$  при умові  $\delta \Big|_{\Omega} = 0$  можна записати:

$$\int_{\tau} \frac{\partial^N}{\partial \zeta^m \partial \eta^n \partial \xi^k} (\rho^2 - 1)^N \frac{d\tau}{r} = \frac{3}{4} \frac{V_e}{(N+1)} \frac{\partial^N}{\partial x^m \partial y^n \partial z^k} \left( \int_0^{\infty} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2+u} - \frac{y^2}{b^2+u} - \frac{z^2}{c^2+u} \right)^{N+1} \right),$$

а тоді:

$$\begin{aligned}
\int \frac{W_{mnk}}{r} d\tau &= \frac{3}{4} \frac{V_e}{(N+1)} \frac{1(-1)^N}{2^N m!n!k!} \frac{\partial^N}{\partial x^m \partial z^n \partial y^k} \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2+u} - \frac{y^2}{b^2+u} - \frac{z^2}{c^2+u}\right)^{N+1} \frac{du}{Q(u)} = \\
&= \frac{3V_e (-1)^N}{4(N+1)2^N m!n!k!} \sum_{l=0}^{N+1} \frac{(N+1)!(-1)^l}{(N+1-l)!(l)!} \partial^N \left(\frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u}\right)^l \frac{du}{Q(u)} = \\
&= \frac{3}{4} \frac{V_e (-1)^N N!}{2^N m!n!k!} \sum_{l=0}^{N+1} \frac{(-1)^l}{l!(N+1-l)!} \\
&\quad \frac{\partial^N}{\partial x^m \partial z^n \partial y^k} \sum_{t_1+t_2+t_3=l} \frac{l!}{t_1!t_2!t_3!} \frac{\partial^N}{\partial x^m \partial z^n \partial y^k} \frac{x^{2t_1} y^{2t_2} z^{2t_3}}{(a^2+u)^{t_1} (b^2+u)^{t_2} (c^2+u)^{t_3}} \frac{du}{Q(u)} = \\
\frac{3}{4} \frac{V_e (-1)^N N!}{2^N m!n!k!} \sum_{l=0}^{N+1} \frac{(-1)^l}{(N+1-l)!} \sum_{t_1+t_2+t_3=l} \frac{2t_1!2t_2!2t_3!}{t_1!t_2!t_3!} \frac{x^{2t_1-m} y^{2t_2-n} z^{2t_3-k}}{(2t_1-m)!(2t_2-n)!(2t_3-k)!} M_{t_1 t_2 t_3} & \quad (5.42)
\end{aligned}$$

Для двохосевого еліпсоїда будемо мати:

$$\begin{aligned}
u_{mnk} &= \frac{3}{4} \frac{V_e}{(N+1)} \frac{\partial^N}{\partial x^m \partial y^n \partial z^k} \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2+y^2}{a^2+u} - \frac{z^2}{c^2+u}\right)^{N+1} \frac{du}{Q(u)} = \\
&= \frac{3}{4} \frac{V_e N!}{2^N m!n!k!} \sum_{l=0}^{N+1} \frac{(-1)^l}{l!(N+1-l)!} \sum_{t=0}^l \frac{\partial^N}{\partial x^m \partial y^n \partial z^k} \left[ \frac{(x^2+y^2)^t}{(a^2+u)^t} \frac{z^{l-t}}{(c^2+u)^l} \frac{du}{Q(u)} \right],
\end{aligned}$$

або остаточно:

$$\begin{aligned}
u_{mnk} &= \frac{3}{4} \frac{N!}{2^N m!n!k!} \sum_{l=0}^{N+1} \frac{(-1)^l}{(N+1-l)!} \sum_{t=0}^l t!(l-t)! \times \\
&\quad \sum_{t_1=0}^t \frac{t!}{t_1!(t-t_1)!} \frac{\partial^N}{\partial x^m \partial y^n \partial z^k} \left( z^{2(l-t)} x^{2t_1} y^{2t-2t_1} \right) \int_0^\infty \frac{du}{(a^2+u)^t (c^2+u)^{l-t} Q(u)} = \\
\frac{3}{4} \frac{N!V}{2^N m!n!k!} \sum_{l=0}^{N+1} \frac{(-1)^l}{(N+1-l)!} \sum_{t=0}^l \frac{(2l-2t)!}{(l-t)!(2l-2t-k)!} z^{2l-2t-k} \sum_{t_1=0}^t \frac{2t_1!(2t-2t_1)!}{t_1!(2t-t_1)!} x^{2t_1-m} y^{2t-2t_1-n} \times \\
\times \int_0^\infty \frac{du}{Q(u)(a^2+u)^t (c^2+u)^{l-t}} &= \frac{3}{4} \frac{V}{2^N m!n!k!} \sum_{l=0}^{N+1} \frac{(-1)^l}{(N+1-l)!} \sum_{t=0}^l \frac{2^{l-t} (2l-2t-1)!!}{(2l-2t-k)!} \left(\frac{z}{c}\right)^{2l-2t-k} c^{2l-2t-k} \times \\
\times \sum_{t_1=0}^t 2^{t_1} (2t_1-1)!! \cdot 2^{t-t_1} (2t-2t_1-1)!! \left(\frac{x}{a}\right)^{2t_1-m} \left(\frac{y}{a}\right)^{2t-2t_1-n} a^{2t-m-n} \int_0^\infty \frac{du}{Q(a^2+u)^t (c^2+u)^{l-t}},
\end{aligned}$$

Розглянемо нарешті формули для кулі: тоді  $a = b = c = R$

$$\begin{aligned}
u_{mkn} &= \frac{3}{4} \frac{V_k}{(N+1)} \frac{\partial^N}{\partial x^m \partial y^n \partial z^k} \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{R^2 + u}\right)^{N+1} \frac{du}{Q(u)} = \\
&= \frac{3}{4} \frac{V_k}{(N+1)} \frac{(N+1)!}{m!n!k!} \sum_{l=0}^{N+1} \frac{(-1)^l}{l!(N+1-l)!} \frac{\partial^N}{\partial x^m \partial y^n \partial z^k} (x^2 + y^2 + z^2)^l \int_0^\infty \frac{du}{(R^2 + u)^l Q(u)} = \\
&= \frac{3}{4} \frac{V_k N!}{2^N m!n!k!} \sum_{l=0}^{N+1} \frac{(-1)^l}{(N+1-l)!} \sum_{t_1+t_2+t_3=l} \frac{\frac{\partial^N}{\partial x^{2t_1} \partial y^{2t_2} \partial z^{2t_3}} (x^{2t_1} y^{2t_2} z^{2t_3})}{t_1! t_2! t_3!} \int_0^\infty \frac{du}{Q(u) (R^2 + u)^l}, \\
u_{mkn} &= \frac{3}{4} \frac{V_k N!}{R^N 2^N m!n!k!} \sum_{l=0}^{N+1} \frac{(-1)^l 2^l}{(N+1-l)!} \times \\
&\sum_{t_1+t_2+t_3=l} \frac{\left(\frac{x}{R}\right)^{2t_1-m} \left(\frac{y}{R}\right)^{2t_2-n} \left(\frac{z}{R}\right)^{2t_3-k} (2t_1-1)!!(2t_2-1)!!(2t_3-1)!!}{(2t_1-m)!(2t_2-n)!(2t_3-k)!} M_l \\
M_l &= \int_0^\infty \frac{du}{(R^2 + u)^l Q(u)} = \int_R^\infty \frac{2s ds}{s^{2l+2}} = 2 \int_R^\infty \frac{ds}{s^{l+2}} = \frac{2}{2l+1} \frac{1}{R^{2l+1}}.
\end{aligned}$$

зокрема, внутрішній потенціал визначається:

$$\begin{aligned}
u_{mkn} &= \frac{3}{2} \frac{VN!}{2^N m!n!k! R^{N+1}} \sum_{l=0}^{N+1} \frac{(-1)^l 2^l}{(N+1-l)!(2l+1)} \sum_{t_1+t_2+t_3=l} \frac{(2t_1-1)!!(2t_2-1)!!(2t_3-1)!!}{(2t_1-m)!(2t_2-n)!(2t_3-k)!} \times \\
&\times \left(\frac{x}{R}\right)^{2t_1-m} \left(\frac{y}{R}\right)^{2t_2-n} \left(\frac{z}{R}\right)^{2t_3-k},
\end{aligned}$$

тобто:

$$u_{mkn} = \frac{3}{2} \frac{N!}{2^N m!n!k! R^N} \frac{fV}{R} \sum_{l=0}^{N+1} \frac{(-1)^l 2^l}{(N+1-l)!(2l+1)} \sum_{t_1+t_2+t_3=l} \frac{(2t_1-1)!!(2t_2-1)!!(2t_3-1)!!}{(2t_1-m)!(2t_2-n)!(2t_3-k)!} \left(\frac{x}{R}\right)^{2t_1-m} \left(\frac{y}{R}\right)^{2t_2-n} \left(\frac{z}{R}\right)^{2t_3-k}$$

Для зовнішнього потенціалу маємо:

$R^2 + u = S^2$  еліпсоїдальна координата  $\xi = r^2 - R^2$ , що впливає з рівності:

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{R^2 + \xi} = 1$$

i

$$u_{mkn} = \frac{3}{2} \frac{VN!}{2^N m!n!k! R^N} \sum_{l=0}^{N+1} \frac{(-1)^l 2^l}{(N+1-l)!(2l+1)} \times$$

Отже:

$$\sum_{t_1+t_2+t_3=l} \frac{(2t_1-1)!!(2t_2-1)!!(2t_3-1)!!}{(2t_1-m)!(2t_2-n)!(2t_3-k)!} \left(\frac{x}{R}\right)^{2t_1-m} \left(\frac{y}{R}\right)^{2t_2-n} \left(\frac{z}{R}\right)^{2t_3-k} \frac{M_l}{\left(\frac{r}{R}\right)^l R^{2l}}$$

$$u_{mnk} = \frac{3}{2} \frac{fV}{R^{N+1}} \frac{N!}{2^N m!n!k! \rho} \sum_{l=0}^{N+1} \frac{(-1)^l 2^l}{(N+1-l)!(2l+1)} \sum_{t_1+t_2+t_3=l} \frac{(2t_1-1)!!(2t_2-1)!!(2t_3-1)!! M_l}{(2t_1-m)!(2t_2-n)! \rho^{2l}}. \quad (5.43)$$

## 5.6. Гравітаційна енергія тривимірної еліпсоїдальної планети.

Визначимо формули для еліпсоїдального тіла з функцією розподілу в найбільш загальному вигляді, тобто:

$$\delta = \delta_c \left( \delta^0(\rho) + \sum_{m+n+k=0}^{\infty} b_{mnk} W_{mnk}(x, y, z) \right) = \delta^0 + \delta^1,$$

де  $\delta^0 = \delta^0(\rho)$  –одновимірний розподіл,

$$\delta^1 = \sum_{m+n+k=0}^{\infty} b_{mnk} W_{mnk}(x, y, z) \text{ тривимірна частина розподілу.}$$

Внутрішній потенціал такого розподілу визначається :

$$U = U_0 + U_1 = f \delta_c \int_{\tau} \frac{\delta^0(\rho)}{r} d\tau + f \delta_c \sum_{m+n+k=0}^{\infty} b_{mnk} \int_{\tau} \frac{W_{mnk}}{r} d\tau.$$

Відповідно енергія в такому випадку обчислюється так:

$$\begin{aligned} E &= -\frac{1}{2} \int_{\tau} \delta U d\tau = -\frac{1}{2} \delta_c^2 \int_{\tau} (\delta^0 + \delta^1)(U_0 + U_1) d\tau = \\ &= -\frac{1}{2} f \delta_c^2 \left( \int_{\tau} \delta^0 U_0 d\tau + \int_{\tau} \delta^0 U_1 d\tau + \int_{\tau} \delta^1 U_0 d\tau + \int_{\tau} \delta^1 U_1 d\tau \right) = \\ &= -\frac{1}{2} f (\delta_c)^2 (E_{00} + E_{01} + E_{10} + E_{11}). \end{aligned}$$

Визначимо кожен з компонент окремо ( $E_{00}$  визначена раніше).

Згадаємо, що радіальну частину можна представити так:

$$\delta^0(\rho) = \delta_c \left( \sum_{m=0}^{\infty} C_{2m} P_{2m}(\rho) = \delta_c \sum_{m=0}^{\infty} C_{2m} \sum_{l=0}^m d_{2l}^{2m} \rho^{2l} \right)$$

$$U_0 = \frac{f \delta_c}{r} \sum_{m=0}^{\infty} C_{2m} \sum_{l=0}^m d_{2l}^{2m} \frac{3V_e}{4(l+1)} \int_0^{\infty} \left( 1 - \left( \frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c-u} \right) \right)^{l+1} \frac{dU}{Q(U)},$$

а потенціал аномальної частини:

$$U_1 = f \delta_c \sum_{N'=m+n+k=0}^{\infty} b_{m'n'k'} \int_{\tau} \frac{W_{m'n'k'}}{r} d\tau = f \delta_c \sum_{N'=m+n+k=0}^{\infty} \frac{b_{m'n'k'}}{2^{N'} (m')!(n')!(k')!} \times$$

$$\frac{\partial^{N'}}{\partial x^m \partial y^n \partial z^k} \int_0^{\infty} \frac{1}{N'+1} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2+u} - \frac{y^2}{b^2+u} - \frac{z^2}{c+u} \right)^{N'+1} \frac{dU}{Q(U)} =$$

$$f \delta_c \sum_{N'=m+n+k=0}^{\infty} \frac{b_{m'n'k'} N'}{2^{N'} (m')!(n')!(k')!} \sum_{t=0}^{N'+1} \frac{1}{(N'+1-t)!} \frac{\partial^{N'}}{\partial x^m \partial y^n \partial z^k} \left( \frac{x^2}{a^2+u} - \frac{y^2}{b^2+u} - \frac{z^2}{c+u} \right)^t$$

Отже

$$E_{oo} = \sum_{m=0}^{\infty} C_{2m} P_{2m}(\rho) = \delta_c \sum_{m=0}^{\infty} C_{2m} \sum_{l=0}^m d_{2l}^{2l} \frac{(3V_e)^2}{4(l+1)} \left( M_0 - \sum_{t=0}^{l+1} \frac{(l+1)! \rho^{2t+4}}{t!(l+1-t)!} \sum_{t_1+t_2+t_3=t} \frac{M_{t_1 t_2 t_3}}{t_1! t_2! t_3! a^{2t_1} b^{2t_2} c^{2t_3}} \right) S_t$$

$$S_t = \frac{1}{3V_e} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^{2t_1+2t_2+1} \theta \cos^{2t_3} \theta \cos^{2t_1} \lambda \sin^{2t_2} \lambda d\lambda = \frac{(2t_1-1)!!(2t_2-1)!!(2t_3-1)!!}{(2t_1+1)!!}$$

Тому

$$E_{00} = -\frac{1}{2} \frac{9}{8} f(V_e)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{2n} C_{2m} \sum_{l=0}^m \frac{d_{2l}^{2m}}{l+1} \left( d_0 - \sum_{t=0}^{l+1} \frac{l!(2t+2)!}{t!(l+1-t)!} \frac{1}{(2t+2-2n)'} \right)$$

$$\frac{1}{(2t+2-2)(n')! 2^{2n} n!} \int_0^1 (\rho^2 - 1)^{2n} \rho^{2t+2-2n+2} =$$

$$= -\frac{9}{8} \frac{f(V_e)^2}{a_e} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{2n} C_{2m} \sum_{l=0}^m d_{2l}^{2m} (d_0 - l! \sum_{t=0}^{l+1} \frac{(2t+4)!(2t-2n+3)!!}{t!(l+1-t)!(2t+4-2n)!})$$

або остаточно

$$E_{00} = -\frac{9}{8} \frac{f(V_e)^2}{a_e} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{2n} C_{2m} \sum_{l=0}^m d_{2l}^{2m} \left( \frac{d_0}{l+1} - \sum_{t=0}^{l+1} \frac{(2t+4)!}{t!(l+1-t)!} \frac{1}{(2t-2n+4)!!} \right. \quad (5.44)$$

$$\left. \sum_{t_1+t_2+t_3=t} \frac{M_{t_1 t_2 t_3} (2t_1+1)!!(2t_2+1)!!(2t_3+1)!!}{t_1! t_2! t_3! (2t+1)!!} \right).$$

$$d_0 = \begin{cases} M_{000}, & n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases},$$

$$E_{01} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} \sum_{l=0}^m d_{2l}^{2n} \int_{\tau} P_{2n}(\rho) \sum_{N'=m+n+k=0}^{\infty} \frac{b_{m'n'k'}}{2^{N'} m'! n'! k'!} d\tau \times$$

$$\frac{1}{N'+1} \sum_{l=0}^{N'+1} \frac{(N'+1)! (-1)^l \partial^{N'}}{(N'+1-l)! \partial x^m \partial y^n \partial z^k} \left( \frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} \right) \frac{dU}{Q(U)} =$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} \sum_{N'=m+n+k=0}^{\infty} P_{2n}(\rho) \frac{b_{mnk} \dots N!!}{2^{N'} m'! n'! k'!} \sum_{l=0}^{N'+1} \frac{(-1)^l}{(N'+1-l)!} \sum_{t_1+t_2+t_3=l} \frac{(2t_1-1)!!(2t_2-1)!!(2t_3-1)!!}{(2t_1-m)!(2t_2-n)!(2t_3-k)!} M_{t_1 t_2 t_3} \times \\
& \quad x^{2t_1-m'} y^{2t_2-n'} z^{2t_3-k'} M_{t_1 t_2 t_3} = \\
& \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} \sum_{N'=m+n+k=0}^{\infty} \frac{b_{mnk} \dots (N')!}{2^{N'} (m')!(n')!(k')!} \sum_{l=0}^{N'+1} \frac{(-1)^l 2^l}{(N'+1-l)!} \sum_{t_1+t_2+t_3=l} \frac{(2t_1-1)!!(2t_2-1)!!(2t_3-1)!!}{(2t_1-m)!(2t_2-n)!(2t_3-k)!} M_{t_1 t_2 t_3} \quad (5.45) \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} \sum_{N'=m+n+k=0}^{\infty} \frac{b_{mnk} \dots (N')!}{a^m b^n c^k 2^{N'} (m')!(n')!(k')!} \sum_{l=0}^{N'+1} \frac{(-2)^l}{(N'+1-l)!} \sum_{t_1+t_2+t_3=l} \frac{(2t_1-1)!!(2t_2-1)!!(2t_3-1)!!}{(2t_1-m')!(2t_2-n')!(2t_3-k')!} M_{t_1 t_2 t_3} \\
& E_{10} = \int_{\tau} \delta^1 U_0 d\tau = \sum_{m+n+k=0} b_{mnk} \frac{\partial^{N'}}{\partial x^m \partial y^n \partial z^k} (\rho^2 - 1)^N \sum_{l=0}^m d_{2l}^{2m} \frac{1}{l+1} \int_0^{\infty} (1 - \rho^{2l+2}) \frac{dU}{Q(U)} = \\
& \sum_{m+n+k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_{mnk} C_{2m}}{2^{N'} (m')!(n')!(k')!} \sum_{l=0}^m \frac{d_{2l}^{2m}}{l+1} \int_{\tau} \frac{\partial^{N'}}{\partial x^m \partial y^n \partial z^k} \left[ d_0 - (l+1)! \sum_{t_1+t_2+t_3=l} \frac{x^{2t_1} y^{2t_2} z^{2t_3}}{t_1! t_2! t_3!} M_{t_1 t_2 t_3} \right] d\tau = \\
& = \sum_{m+n+k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_{mnk} C_{2m}}{2^{N'} (m')!(n')!(k')!} \sum_{l=0}^m d_{2l}^{2m} \left( \frac{d_0}{l+1} - 2^l l! \times \right. \\
& \quad \left. \sum_{t_1+t_2+t_3=l} \frac{(2t_1-1)!!(2t_2-1)!!(2t_3-1)!!(2t_1-m'-1)!!(2t_2-n'-1)!!(2t_3-k'-1)!!}{(2t_1-m')!(2t_2-n')!(2t_3-k')!(2l-N'+2N'+1)!!} M_{t_1 t_2 t_3} \right) \quad (5.46)
\end{aligned}$$

Накінєць

$$\begin{aligned}
E_{11} & = \int_{\tau} \delta^1 U_1 d\tau = \sum_{m+n+k=0}^{\infty} \sum_{m'+n'+k'=0}^{\infty} \frac{1}{2^{N+N'}} \frac{b_{mnk} b_{m'n'k'}}{m! n! k! m'! n'! k'!} \times \\
& \int_{\tau} \frac{\partial^{N'}}{\partial x^m \partial y^n \partial z^k} (\rho^2 - 1)^N \frac{3V}{4(N+1)} \frac{\partial^N}{\partial x^m \partial y^n \partial z^k} \int_0^{\infty} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2+u} - \frac{y^2}{b^2+u} - \frac{z^2}{c^2+u} \right)^N \frac{dU}{Q(U)} = \\
& \frac{3}{4} V_e f \sum_{m+n+k=0}^{\infty} \sum_{m'+n'+k'=0}^{\infty} N' k_{mnk}^{m'n'k'} b_{mnk} b_{m'n'k'} \sum_{l=0}^{N+1} \frac{(-1)^l}{(N+1-l)!} \sum_{t_1+t_2+t_3=l} \frac{2t_1! 2t_2! 2t_3!}{t_1! t_2! t_3!} M_{t_1 t_2 t_3} \times \\
& \quad \frac{(2t_1-m-m'-1)!!(2t_2-n-n'-1)!!(2t_3-k-k'-1)!! 3V}{(2t_1-m-m')!(2t_1-m-m')!(2t_1-m-m')!(2N'+2l-N'-N+1)!!}
\end{aligned}$$

Отже

$$\begin{aligned}
E_{11} & = \frac{9}{4} \frac{f(V_e)^2}{a_e} \sum_{m+n+k=0}^{\infty} \sum_{m'+n'+k'=0}^{\infty} \frac{(N')!}{2^{N+N'} m! n! k! (m')! (n')! (k')!} \frac{b_{mnk} b_{m'n'k'}}{a^{m+m'} b^{n+n'} c^{k+k'}} \sum_{l=0}^{N+1} \frac{(-2)^l}{(N+1-l)!} \\
& \quad \frac{(2t_1-1)!!(2t_2-1)!!(2t_3-1)!!}{(2t_1-m-m')!!(2t_2-n-n')!!(2t_3-k-k')!!} \quad (5.47)
\end{aligned}$$

## 5.7. Метод дослідження стану гідростатичної рівноваги тривимірної еліпсоїдальної планети.

Визначення умов [21,116,131,147], при яких планета перебуває в стані гідростатичної рівноваги, або ж відхилення від неї реального тіла дає можливість встановлювати механізм перерозподілу мас [21,72,73]. Це в свою чергу дає основу для дослідження і інтерпретації динамічних процесів в середині небесного тіла. Стан гідростатичної рівноваги дозволяє розв'язувати ряд задач фізики планет [176]. По–перше, з'являється можливість інтерпретації аномалій зовнішнього гравітаційного поля. Відхилення густини розподілу мас від гідростатично врівноваженого стану можливо більш повно трактувати як "аномалії мас", тим більше що розглядається тривимірний випадок. По–друге, визначення величини мінімальної енергії також дозволяє робити висновки про стан спокою або динамічних змін в середині тіла, а оцінки значень потенціалу та енергії в тектоносфері також розкривають механізми руху континентальних плит.

Для еліпсоїдальної планети в тривимірному випадку функція розподілу мас описується аналітичним виразом .

$$\delta(x, y, z) = \delta^0(\rho) + \sum_{N=0}^{\infty} b_{mnk} W_{mnk}(x, y, z), \quad (5.48)$$

причому кожен набір  $\{b_{mnk}\}$  визначає свій тривимірний розподіл  $\delta$ .

Для визначеної функції  $\delta^0(\rho)$  та фіксованої у вигляді еліпсоїда фігури перерозподіл густини здійснюється варіацією коефіцієнтів  $b_{mnk}$ , а умова рівноваги забезпечується мінімумом гравітаційної енергії  $E$ . Потенціал такого розподілу (1) визначається так [128]:

$$U(P) = U_0(P) + \sum_{m=n=k=0}^{\infty} b_{mnk} U_{mnk}(P), \quad (5.49)$$

де

$$U_0(P) = f \int_{\tau} \frac{\delta^0(\rho)}{r(P, Q)} d\tau_Q, \quad (5.50)$$

а



$$U_{mnk}(P) = f \int_{\tau} \frac{W_{mnk}(Q)}{r(P, Q)} d\tau_Q. \quad (5.51)$$

Гравітаційну енергію визначаємо наступним чином :

$$\begin{aligned} E &= -\frac{1}{2} \int_{\tau} U \delta d\tau = -\frac{1}{2} \int_{\tau} \left( U_0 + \sum_{m+n+k=0}^{\infty} b_{mnk} U_{mnk} \right) \left( \delta^0 + \sum_{m_1+n_1+k_1=0}^{\infty} b_{m_1n_1k_1} W_{m_1n_1k_1} \right) d\tau \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\tau} U_0 \delta^0 d\tau + \sum_{m+n+k=0}^{\infty} b_{mnk} \int_{\tau} \delta^0 W_{mnk} d\tau + \\ &\quad \sum_{m_1+n_1+k_1=0}^{\infty} b_{m_1n_1k_1} \int_{\tau} U_0 W_{m_1n_1k_1} d\tau + \sum_{m+n+k=0}^{\infty} \sum_{m_1+n_1+k_1=0}^{\infty} b_{mnk} b_{m_1n_1k_1} \int_{\tau} W_{m_1n_1k_1} W_{mnk} d\tau. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Мінімум величини  $E$  залежить від коефіцієнтів  $b_{mnk}$  і визначається умовою:

$$\left\{ \frac{\partial E}{\partial b_{mnk}} = 0 \quad 0 \leq m+n+k \leq N, \right. \quad (5.53)$$

або

$$\left\{ \frac{\partial E}{\partial b_{mnk}} = \int_{\tau} \delta^0(\rho) W_{mnk} d\tau + \int_{\tau} \delta_0 W_{mnk} + \sum b_{m_1n_1k_1} \int_{\tau} u_{mnk} W_{m_1n_1k_1} d\tau = 0. \right. \quad (5.54)$$

Система лінійних рівнянь в розгорнутому вигляді є наступною:

$$\begin{cases} \int_{\tau} \delta^0(\rho) U_{000} d\tau + \int_{\tau} U_0 W_{000} d\tau = \sum b_{m_1n_1k_1} \int_{\tau} W_{000} u_{mnk} d\tau \\ \int_{\tau} \delta^0 U_{100} d\tau + \int_{\tau} U_0 W_{100} d\tau = \sum b_{m_1n_1k_1} \int_{\tau} W_{100} u_{mnk} d\tau \\ \int_{\tau} \delta^0 U_{00N} d\tau + \int_{\tau} U_0 W_{00N} d\tau = \sum b_{m_1n_1k_1} \int_{\tau} W_{00N} u_{mnk} d\tau \end{cases} \quad (5.55)$$

розв'язок якої є коефіцієнти  $b_{mnk}$ . При цих величинах енергія  $E$  приймає найменше значення. Вони також  $b_{mnk}$  також визначають і стоксові постійні  $c_{nk}, s_{nk}$ , які є їх лінійною комбінацією (3.50):

$$c_{nk} + i s_{nk} = \sum_{p+q+s=0}^N (\alpha_{\rho qs} + i \beta_{\rho qs}) b_{\rho qs} \quad (5.56)$$

Тому умова оптимальності з урахуванням співвідношень (4.58) може бути сформульована як задача на умовний екстремум. При цьому складаємо функцію Лагранжа  $F(E, c_{nk}, s_{nk}) = E + \sum \lambda_{nk} (c_{nk} - \sum \alpha_{\rho qs}^{nk} b_{\rho qs}) + \sum \gamma_{nk} (s_{nk} - \sum \beta_{\rho qs}^{nk} b_{\rho qs})$ , з якої отримуємо систему рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\sum b_{m_1 n_1 k_1} \int_{\tau} W_{000} u_{m' n' k'} - \sum (\lambda_{nk} \alpha_{000}^{nk} + \gamma_{nk} \beta_{000}^{nk}) = \int_{\tau} \delta^0 u_{000} + \int_{\tau} u_0 W_{000} \\
\sum b_{m_1 n_1 k_1} \int_{\tau} W_{100} u_{m' n' k'} - \sum (\lambda_{nk} \alpha_{100}^{nk} + \gamma_{nk} \beta_{100}^{nk}) = \int_{\tau} \delta^0 u_{100} + \int_{\tau} u_0 W_{100} \\
\cdots \\
\sum b_{m_1 n_1 k_1} \int_{\tau} W_{00N} u_{m' n' k'} - \sum (\lambda_{nk} \alpha_{00N}^{nk} + \gamma_{nk} \beta_{00N}^{nk}) = \int_{\tau} \delta^0 u_{00N} + \int_{\tau} u_0 W_{00N} \\
\sum \alpha_{\rho as}^{nk} b_{\rho as} = c_{nk} \\
\sum \beta_{\rho as}^{nk} b_{\rho as} = s_{nk}
\end{array} \right. \quad (5.58)$$

Розв'язуючи систему рівнянь відносно величин  $\lambda_{mn}, \gamma_{nk}, b_{mnk}$  одержимо такий розподіл мас, що дає мінімум енергії  $E$  для конкретного гравітаційного поля. Розпишемо систему рівнянь в матричному вигляді, для чого введемо позначення:

$$B = \begin{pmatrix} b_{100} \\ b_{010} \\ b_{00N} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{00} \\ c_{10} \\ c_{nk} \\ s_{10} \\ s_{nn} \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{000} \\ \alpha_{100} \\ \alpha_{001} \\ \alpha_{00n} \\ \beta_{000} \\ \beta_{00n} \end{pmatrix}, \quad \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{00} \\ \lambda_{10} \\ \lambda_{nk} \\ \gamma_{10} \\ \gamma_{nn} \end{pmatrix}, \quad (5.59)$$

$$D = \begin{pmatrix} \int_{\tau} (\delta^0 U_{000} + U_0 W) d\tau \\ \int_{\tau} (\delta^0 U_{100} + U_0 W) d\tau \\ \int_{\tau} (\delta^0 U_{00N} + U_0 W_{00N}) d\tau \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} \int_{\tau} W_{000} U_{000} d\tau & \int_{\tau} W_{000} U_{00N} d\tau \\ \int_{\tau} W_{100} U_{000} d\tau & \int_{\tau} W_{100} U_{00N} d\tau \\ \int_{\tau} W_{00N} U_{000} d\tau & \int_{\tau} W_{00N} U_{00N} d\tau \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \alpha_{000}^{00} & \alpha_{000}^{0N} \\ \alpha_{100}^{00} & \alpha_{100}^{0N} \\ \alpha_{00N}^{00} & \alpha_{00N}^{0N} \end{pmatrix} \quad (5.60)$$

Тоді система рівнянь запишеться:

$$\begin{cases} TB - R\lambda = D, \\ \alpha B = C. \end{cases} \quad (5.61)$$

Розв'язуючи систему рівнянь, отримуємо розв'язок

$$\begin{aligned} TB &= D + R\lambda, \\ B &= T^{-1}(D + R\lambda), \\ \alpha T^{-1}(D + R\lambda) &= C, \end{aligned} \quad (5.62)$$

звідки

$$\alpha T^{-1} R \lambda = C - \alpha T^{-1} D, \text{ або } \lambda = (\alpha T^{-1} R)^{-1} (C - \alpha T^{-1} D).$$

Шуканий розв'язок, представлений вектором-стовпцем  $B$  запишеться:

$$B = T^{-1}(D + R(\alpha T^{-1}R)^{-1}(C - \alpha T^{-1}D)) \quad . \quad (5.63)$$

Одержаний алгоритм тепер дозволяє робити дослідження динамічних процесів в середині планети, а також вивчати гравітаційні поля гідростатично врівноважених планет та їх фігури.

### 5.8. Дослідження гідростатичного стану для тривимірного розподілу другого порядку еліпсоїдальної планети

Тривимірну функцію розподілу другого порядку можна зобразити у вигляді [63] :

$$\delta_2(x, y, z) = \delta^0(\rho) + b_{000} + b_{200}W_{200} + b_{020}W_{020} + b_{002}W_{002} + b_{110}W_{110} + b_{101}W_{101} + b_{011}W_{011}, \quad (5.64)$$

де  $\delta^0(\rho)$  одновимірний розподіл (сферично– симетрична модель PREM [161]),

а  $b_{mnk}$ -коефіцієнти розкладу по многочленах  $W_{mnk}$ , які до другого порядку визначаються за стоксовими постійними  $C_{nk}, S_{nk}$  ( $n \leq 2$ ):

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{000} = \delta_c \left( 1 - \frac{3}{\delta_c} \int_0^1 \delta_c(\rho) \rho^2 d\rho \right) = \delta_c \left( 1 - \frac{3}{\delta_c} I_2 \right), \\ \frac{b_{100}}{a_6} = 5C_{11}\delta_c = 0, \frac{b_{010}}{a_6} = 5S_{11}\delta_c = 5S_{11}\delta_c = 0, \frac{b_{001}}{a_6} = 5C_{10}\delta_c, \\ \frac{2b_{002}}{a_e^2} - \left( \frac{b_{020}}{a_e^2} + \frac{b_{020}}{a_e^2} \right) = \delta_c \left[ 35C_{20} - \left( \gamma^2 - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) \right) (7b_{000} - 35I_4) \right], \\ \frac{b_{200}}{a_6^2} - \frac{b_{020}}{a_6^2} = \delta_c \left[ 70C_{22} - (\alpha^2 - \beta^2)(14b_{000} + 70I_4) \right], \\ \frac{b_{110}}{a_e^2} = 70\delta_c S_{22}, \frac{b_{101}}{a_e^2} = 35\delta_c C_{21}, \frac{b_{001}}{a_e^2} = 35\delta_c S_{21}. \end{array} \right. \quad (5.65)$$

Тут введенні позначення :

$\delta_c$  – середня густина ,

$I_n = \int \frac{\delta_0(\rho) \rho^n}{\delta_c} d\rho$  – степеневі моменти густини  $\delta^0(\rho)$ ,

$$d_0 = \delta_c \left[ 70C_{22} - (\alpha^2 + \beta^2)(14b_{000} + 70I_4) \right],$$

$$d_1 = \delta_c \left[ 35C_{20} - \left( \gamma^2 - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) \right) (7b_{000} + 35I_4) \right]. \quad (5.66)$$

Тоді два останніх рівняння системи запишуться :

$$\frac{2b_{002}}{a_e^2} - \left( \frac{b_{020}}{a_e^2} + \frac{b_{200}}{a_e^2} \right) = d_1,$$

$$\frac{b_{200}}{a_e^2} - \frac{b_{020}}{a_e^2} = d_0,$$

звідки одержимо

$$\frac{b_{200}}{a_e^2} = d_0 + \frac{b_{020}}{a_e^2}, \quad (5.67)$$

$$\frac{b_{002}}{a_e^2} = \left( \frac{d_0 + d_1}{2} + \frac{b_{020}}{a_e^2} \right). \quad (5.68)$$

Підстановка (5.67) в (5.65) дає наступне:

$$\delta_2(P) = \delta_{\dot{a}}(P) + \frac{b_{020}}{a_e^2} \Delta(W_2(P)), \quad (5.69)$$

де

$$\delta_{\dot{a}} = \delta^0(\rho) + b_{000} + b_{110}W_{110} + b_{101}W_{101} + b_{011}W_{011} + d_0W_{200} + \frac{d_0 + d_1}{2}W_{002}, \quad (4.70)$$

$$\Delta W_2 = a^2W_{200} + b^2W_{020} + c^2W_{002} = \frac{1}{2}(\rho^2 - 3). \quad (4.71)$$

Відомі функції густини, потенціали яких визначаються:

$$V_2(\rho) = V_{\dot{a}}(\rho) + \frac{b_{002}}{a_e^2} \Delta V_2(\rho),$$

$$\Delta V_2(P) = f \int_{\tau} \frac{\Delta W_2}{r} d\tau = \frac{f}{2} \int_{\tau} \frac{5\rho^2 - 3}{r} d\tau,$$

$$V_a(P) = f \int_{\tau} \frac{\delta^0(\rho) + b_{000} + b_{110}W_{110} + b_{101}W_{101} + b_{011}W_{011} + d_0W_{200} - \frac{d_0 + d_1}{2}W_{002}}{r} d\tau, \quad (5.72)$$

або

$$V_a(P) = U^0(\rho) + b_{000}U_{000}(P) + b_{110}U_{110} + b_{101}U_{101} + b_{011}U_{011} + d_0U_{200} + \frac{d_0 + d_1}{2}U_{002}.$$

Енергія розподілу  $\delta_2$  з відповідним потенціалом  $V_2$  визначається:

$$E = \frac{1}{2} \int_{\tau} \delta U d\tau = -\frac{1}{2} \int_{\tau} (\delta_a + \Delta W_2 b_{020}) (V_a + b_{020} \Delta V_2) d\tau .$$

Мінімум енергії [133] визначається умовою  $\frac{\partial E}{\partial b_{020}} = 0$ , що виконується при  $\frac{a_e^2}{a_e^2}$

$$\frac{b_{020}}{a_e^2} = -\frac{\int_{\tau} [\delta_a \Delta V_2 + V_a \Delta W_2] d\tau}{\int_{\tau} \Delta W_2 \Delta V_2 d\tau} . \quad (5.73)$$

Визначимо елементи формули (4.72), які для зручності вносимо в таблицю 5.11.

Маємо

$$\Delta V_2 = f \int_{\tau} \frac{\Delta W_2}{r} d\tau = \frac{f}{2} \int_{\tau} \frac{5\rho^2 - 3}{r} d\tau = \frac{f}{2} (5U_2 + 3U_0), \quad (5.73)$$

де

$$U_l = \frac{1}{l+1} \frac{3V_e}{4} \int_{\xi(0)} (S_0 - \rho^{2l+2} S_{l+1}) \frac{dU}{Q(u)},$$

$$S_l = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left( \sin \theta \left( \frac{a^2 \cos^2 \theta}{a^2 + u} + \frac{b^2 \cos^2 \theta}{b^2 + u} + \frac{c^2 \cos^2 \theta}{c^2 + u} \right)^l \frac{dU}{Q(u)} \right) =$$

$$\sum_{t_1+t_2+t_3=0} \frac{l! \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin^{2t_1+2t_2} \theta \cos^{2t_3} \theta \cos^{2t_1} \theta \lambda \sin^{2t_2} \lambda d\lambda}{t_1! t_2! t_3!} M_{t_1 t_2 t_3},$$

$$M_{t_1 t_2 t_3} = a^{2t_1} b^{2t_2} c^{2t_3} \int_0^{\infty} \frac{du}{(a^2 + u)^{t_1+1/2} (b^2 + u)^{t_2+1/2} (c^2 + u)^{t_3+1/2}} . \quad (5.74)$$

Алгоритм обчислення значень  $M_{t_1 t_2 t_3}$   $M_{t_1 t_2 t_3}$  приведений в розділі 3 для тривісного еліпсоїда (формула (3.89)) та поданого також в [101], а для двохвісного – в [111], для кулі ці величини наступні:

$$S_l = \frac{2}{(2l+1)R} .$$

Продовжимо перетворення:

$$\Delta V_2 = \frac{3}{4} f V_e \left[ \frac{5}{2} (S_0 - S_2 \rho^4) - 3(S_0 - S_1 \rho^2) \right] = \frac{3}{4} f V_e \left[ -\frac{S_0}{2} + 3S_1 \rho^2 - 5\frac{S_2}{2} + \rho^4 \right],$$

$$\begin{aligned}\Delta E_2 &= \int_{\tau} \Delta V_2 \Delta W_2 d\tau = \int_{\tau} \frac{3}{4} \frac{fV_e}{2} \int_{\tau} \left( -\frac{S_0}{2} + 3S_1 \rho^2 - \frac{5S_2}{2} \rho^4 \right) (5\rho^2 - 3) d\tau = \\ &= \frac{3f3V_e^2}{8} \left\{ -\frac{S_0}{2} \int_0^1 (5\rho^4 - 3\rho^2) d\rho + 3S_1 \int_0^1 (5\rho^6 - 3\rho^4) d\rho - \right. \\ &= \frac{9fV_e^2}{8R} \left\{ -\frac{S_0}{2} (\rho^5 - \rho^3) \Big|_0^1 + 3S_1 \left( \frac{5}{7} \rho^7 - \frac{3}{5} \rho^5 \right) \Big|_0^1 - 5 \frac{S_2}{2} \left( \frac{5}{9} \rho^9 - \frac{3}{7} \rho^7 \right) \Big|_0^1 \right\} = \\ &= \frac{9fV_e^2}{8a} \left\{ 3S_1 \left( \frac{5}{7} - \frac{3}{5} \right) - 5 \frac{S_2}{2} \left( \frac{5}{9} - \frac{3}{7} \right) \right\} =\end{aligned}$$

$$\frac{9}{8} fV_e^2 \left\{ \frac{3S_1 4}{35} \right\} - \frac{5}{2} S_2 \frac{8}{63} = \frac{9}{2} fV^2 \left\{ \frac{3S_1}{35} - \frac{5}{63} S_2 \right\} = \frac{9}{14} fV^2 \left\{ \frac{3S_1}{35} - \frac{5}{63} S_2 \right\} = \frac{9}{14} fV^2 \left\{ \frac{3S_1}{5} - \frac{5}{9} S_2 \right\}.$$

Визначимо елементи чисельника, тобто:

$$\begin{aligned}\int_{\tau} V_e \Delta W_2 d\tau &= \\ \int_{\tau} \left( U^0(\rho) + b_{000} U_{000}(\rho) + b_{110} U_{110} + b_{101} U_{101} + b_{011} U_{011} + d_0 U_{200} + \frac{d_0 + d_1}{2} U_{002} \right) \frac{5\rho^2 - 3}{2} d\tau, \\ \int_{\tau} \delta_a \Delta V_2 d\tau &= \int_{\tau} \left( \delta^0(\rho) + b_{000} + b_{110} W_{110} + b_{101} W_{101} + d_0 W_{200} + \frac{d_0 + d_1}{2} W_{002} + b_{011} W_{011} + d_0 W_{200} + \frac{d_0 + d_1}{2} W_{002} \right) \times \\ &= \frac{3}{4} fV_e \left( -\frac{S_0}{2} + 3S_1 \rho^2 - 5 \frac{S_2}{2} \rho^4 \right) d\tau.\end{aligned}$$

Далі виконуються наступні рівності:

$$\int W_{110} \Delta V_2 d\tau = \int W_{101} \Delta V_2 d\tau = \int W_{011} \Delta V_2 d\tau = 0.$$

Переконаємось в виконанні однієї з них, наприклад:

$$\int W_{101} \Delta V_2 d\tau = \int \frac{xy}{a^2 b^2} \Delta V_2 d\tau = \frac{1}{a^2 b^2} \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} \sin \lambda \cos \lambda d\lambda \int_0^1 \left( -\frac{S_0}{2} + 3S_1 \rho^2 - 5 \frac{S_2}{2} \rho^4 \right) d\rho = 0,$$

бо інтеграли від непарних тригонометричних функцій рівні нулю.

Вальше визначаємо інші елементи:

$$\begin{aligned}\int_{\tau} \delta^0(\rho) \Delta V_2 d\tau &= \frac{9fV_e^2}{4} \left\{ -\frac{S_0}{2} \int_0^1 \delta^0(\rho) d\rho + 3S_1 \int_0^1 \rho^4 \delta^0(\rho) d\rho - 5 \frac{S_2}{2} \int_0^1 \rho^6 \delta^0(\rho) d\rho \right\} \\ &= \frac{9}{4} fV_e^2 \left( -\frac{S_0}{2} M_2 + 3S_1 M_4 - 5 \frac{S_2}{2} M_6 \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\tau} \Delta V_2 d\tau &= \frac{3fV_e}{4} \int_{\tau} \left( -\frac{S_0}{2} + 3S_1\rho^2 - 5\frac{S_2}{2}\rho^4 \right) d\tau = \frac{3fV_e}{4R} \left( -\frac{S_0}{2}V_e + 3S_1\frac{3V_e}{5} - \frac{5S_2}{2}\frac{3V_e}{7} \right) \\
&= \frac{3fV_e^2}{4R} \left( -\frac{S_0}{2} + S_1\frac{9}{5} - \frac{15S_2}{14} \right), \\
\int_{\tau} \Delta V_2 d\tau &= \frac{3fV_k^2}{4R} \left( -1 + \frac{6}{3} - \frac{3}{7} \right) + \frac{3fV_k^2}{4R} (-35 + 42 - 15) = -\frac{6fV_k^2}{35R}, \\
\int_{\tau} W_{200} \Delta V_2 d\tau &= \frac{3fV_e}{4} \cdot \frac{1}{2^2 2!} \int_{\tau} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\rho^2 - 1)^2 \left[ -\frac{S_0}{2} + 3S_1\rho^2 - 5\frac{S_2}{2}\rho^4 \right] d\tau = \\
&= \frac{3fV_e}{32} \left( \frac{6S_1}{a^2} \int_{\tau} (\rho^2 - 1)^2 d\tau - 10\frac{S_2}{a^2} \int_{\tau} (\rho^2 - 1)^2 (\rho^2 + 2x^2) d\tau \right) = \\
&= \frac{3fV_e}{32Ra^2} \left( \frac{6S_1 \cdot 2^2 \cdot 2!}{7!!} - \frac{5}{2} S_2 \frac{32 \cdot 5 \cdot 3}{9!!} \right) V = \frac{3fV^2}{32} 16 \left( \frac{3S_1}{35} - \frac{5S_2}{63} \right) = \frac{3fV_e^2}{2a^2} \left( \frac{3S_1}{35} - \frac{5S_2}{63} \right). \tag{5.75}
\end{aligned}$$

Аналогічно одержуємо

$$\int_{\tau} W_{002} \Delta V_2 d\tau = \frac{3fV_e^2}{2c^2} \left( \frac{3S_1}{35} - \frac{5S_2}{63} \right). \tag{5.76}$$

Визначимо інші члени першого доданку

$$\begin{aligned}
\int_{\tau} U^0(P) \Delta W_2 d\tau &= \frac{1}{2} \frac{3}{4} fV \int_{\tau} (S_0 - S_1^2) (5\rho^2 - 3) d\tau \\
&= \frac{3}{8} fV 3V \left( (S_0 (5\rho^4 - 3\rho^2)) - S_1 \left( \frac{5}{6} - \frac{3}{5} \right) \right) = \frac{9}{8} fV^2 (-S_1) \frac{4}{35} = -\frac{9fV^2}{70} S_1. \tag{5.77}
\end{aligned}$$

Перейдемо до визначення членів виду:

$$\int U_{mnk} \Delta W_2 d\tau, \tag{5.78}$$

для чого згадаємо, що

$$\begin{aligned}
U_{mnk} &= \frac{1}{2^N m!n!k!} \cdot (-1)^N \int_{\tau} \frac{\partial^N}{\partial x^m \partial y^n \partial z^k} \frac{(\rho^2 - 1)^N}{r} d\tau = \\
&= \frac{3(-1)^N \cdot V_e}{4(N+1)2^N m!n!k!} \frac{\partial}{\partial x^m \partial y^n \partial z^k} \int_0^{\infty} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2 + u} - \frac{y^2}{b^2 + u} - \frac{z^2}{c^2 + u} \right)^{N+1} \frac{du}{Q(u)}
\end{aligned}$$

Доведемо, що для деяких виразів (5.78) виконуються рівності:

$$\int_{\tau} U_{110} \Delta W_2 d\tau = \int_{\tau} U_{101} \Delta W_2 d\tau = \int_{\tau} U_{011} \Delta W_2 d\tau.$$

Для прикладу візьмемо:

$$\begin{aligned}
U_{101} &= \frac{1}{8 \cdot 3} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_0^\infty \left( 1 - \frac{x^2}{a^2 + u} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \right)^3 \frac{du}{Q(u)} = \frac{1}{8} \left( \frac{-6x}{a^2 + u} \right) \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \left( 1 - \frac{x^2}{a^2 + u} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \right)^2 \frac{du}{Q(u)} = \\
&= \frac{6}{8 \cdot 3} \int_0^\infty \left( 1 - \frac{x^2}{a^2 + u} - \frac{y \cdot (-4)}{b^2 + u} \right) \left( 1 - \frac{x^2}{a^2 + u} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \right) \frac{du}{Q(u)} = \\
&= 3xy (M_{110} - x^2 M_{210} - y^2 M_{120} - z^2 M_{111})
\end{aligned} \tag{4.79}$$

Змінні  $x, y$  в (5.78) входять в непарних степенях, а тому при інтегруванні одержуємо бажані рівності. Визначимо вирази вигляду

$$\int_{\tau} U_{200} \Delta W_2 d\tau \int_{\tau} U_{002} \Delta W_2 d\tau, \text{ для чого знайдемо вираз: } \int_{\tau} U_{002} \Delta W_2 d\tau$$

$$\begin{aligned}
U_{002} &= \frac{1}{8 \cdot 3} \frac{\partial}{\partial x^2} \int_0^\infty \left( 1 - \frac{x^2}{a^2 + u} - \frac{y^2}{b^2 + u} - \frac{z^2}{c^2 + u} \right)^3 \frac{1}{24} (-3 \cdot 2x) \int_0^\infty \left( 1 - \frac{x^2}{a^2 + u} - \frac{y^2}{b^2 + u} - \frac{z^2}{c^2 + u} \right)^2 \frac{du}{Q(a^2 + u)} \\
&= \frac{1}{24} \frac{\partial}{\partial x^2} \int_0^\infty (1 - 3r^2 + 3r^4 - r^6) \frac{du}{Q(u)},
\end{aligned}$$

де

$$r^2 = \frac{x^2}{a^2 + u} + \frac{y^2}{b^2 + u} + \frac{z^2}{c^2 + u},$$

$$s_l = \rho^2 \left( \sin^2 \theta \left( \frac{a^2 \cos^2 \lambda}{a^2 + u} + \frac{b^2 \cos^2 \lambda}{b^2 + u} \right) + \frac{c^2 \cos^2 \theta}{c^2 + u} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x^2} (r^2) = \frac{2}{a^2 + u},$$

$$\int_{\tau} \frac{\partial}{\partial x^2} (r^2) \frac{5\rho^2 - 3}{2} d\tau = \frac{2}{2} \int_0^\infty \frac{(5\rho^2 - 3)\rho^2}{a^2 + u} d\rho = \left( \frac{5\rho^5}{5} - \frac{3\rho^3}{3} \right) \Big|_0^1 M_{10} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x^2} (r^4) = \frac{4\rho^4}{a^2 + u} \left( \left( \frac{3a^2 \cos^2 \lambda}{a^2 + u} + \frac{b^2 \sin^2 \lambda}{b^2 + u} \right) \sin^2 \theta + \frac{c^2 \cos^2 \theta}{c^2 + u} \right) \left( \left( \frac{a^2 \cos^2 \lambda}{a^2 + u} + \frac{b^2 \sin^2 \lambda}{b^2 + u} \right) \sin^2 \theta + \frac{c^2 \cos^2 \theta}{c^2 + u} \right),$$

$$\frac{1}{2} \int_{\tau} \frac{\partial}{\partial x^2} (r^4) (5\rho^2 - 3) d\tau = \frac{14}{2} \int_0^1 (5\rho^2 - 3) \rho^4 d\rho \times$$

$$\left[ \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left( S_2 d\theta d\lambda + 2 \int_0^\pi \sin^3 \theta \int_0^{2\pi} \cos^2 \lambda \right) \right] \frac{du}{(a^2 + u)Q(u)} =$$

$$\frac{2\pi}{2} \left( \frac{5}{7} - \frac{3}{5} \right) \left[ \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \frac{S_2}{a^2 + u} + 2M_{200}V \right] \frac{du}{Q(u)} =$$

$$\frac{2 \cdot 4}{35} \int_0^\infty \left[ \left( \frac{a^2 \cos^2 \lambda}{a^2 + u} + \frac{b^2 \sin^2 \lambda}{b^2 + u} \right) \sin^2 \theta + \frac{a^2}{a^2 + u} \cos^2 \lambda \right] \frac{du}{Q(u)} =$$

$$\frac{8V}{35} (M_{200} + M_{110} + M_{101}) + 2M_{200} = \frac{8V}{35} (3M_{200} + M_{110} + M_{101}).$$



Далі маємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^2}(r^4) &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{2 \cdot 2x}{a^2 + u} r^2 = \frac{4}{a^2 + u} \left[ r^2 + \frac{2x^2}{a^2 + u} \right] = \\ &= \frac{4}{a^2 + u} \rho^2 \left( 1 + \frac{2 \sin^2 \theta \cos^2 \lambda}{a^2 + u} \right), \\ \frac{\partial}{\partial x^2}(r^6) &= \frac{6}{a^2 + u} \left[ r^4 + \frac{x \cdot 4x}{a^2 + u} r^2 \right] = \\ &= \frac{6r^2}{a^2 + u} \left( r^2 + \frac{4x^2}{a^2 + u} \right) = \\ &= \frac{6\rho^4}{a^2 + u} \left( \left( \frac{a^2 \cos^2 \lambda}{a^2 + u} + \frac{b^2 \sin^2 \lambda}{b^2 + u} \right) \sin^2 \theta + \frac{c^2 \cos^2 \theta}{c^2 + u} \right)^2 + \frac{4a^2 \sin^2 \theta \cos^2 \lambda}{a^2 + u} \rho^2, \\ \frac{1}{2} \int_{\tau} \frac{\partial}{\partial x^2}(r^4) (5\rho^2 - 3) d\tau &= \frac{14}{2} \int_0^1 (5\rho^2 - 3) \rho^4 d\rho = \left[ \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left( S_2 d\theta d\lambda + 2 \int_0^{\pi} \sin^3 \theta \int_0^{2\pi} \cos^2 \lambda \right) \right]^{a^2} \frac{du}{(a^2 + u)Q} \\ &= \frac{2\pi}{2} \left( \frac{5}{7} - \frac{3}{5} \right) \left[ \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{S_2}{a^2 + u} + 2M_{200}V \right] = \frac{2 \cdot 4}{35} \int_0^{\infty} \left[ \left( \frac{a^2 \cos^2 \lambda}{a^2 + u} + \frac{b^2 \sin^2 \lambda}{b^2 + u} \right) \sin^2 \theta + \frac{a^2}{a^2 + u} \cos^2 \lambda \right] \frac{du}{Q(u)} \\ &= \frac{8V}{35} (M_{200} + M_{110} + M_{101}) + 2M_{200} = \frac{8V}{35} (3M_{200} + M_{110} + M_{101}). \\ \frac{\partial}{\partial x^2}(r^6) &= \frac{6\rho^6}{a^2 + u} \left( \left( \frac{5a^2 \cos^2 \lambda}{a^2 + u} + \frac{b^2 \sin^2 \lambda}{b^2 + u} \right) \sin^2 \theta + \frac{c^2 \cos^2 \theta}{c^2 + u} \right) \\ &= \left( \left( \frac{a^2 \cos^2 \lambda}{a^2 + u} + \frac{b^2 \sin^2 \lambda}{b^2 + u} \right) \sin^2 \theta + \frac{c^2 \cos^2 \theta}{c^2 + u} \right), \\ \int_{\tau} \frac{\partial}{\partial x^2}(r^6) \frac{(5\rho^2 - 3)}{2} d\rho &= \frac{8}{21} V \left\{ \frac{1}{5} [(3M_{300} + 2M_{210} + 3M_{120}) + 3M_{102} + 2(M_{201} + M_{111})] + 2M_{200} \right\} \end{aligned}$$

Для двохвісного еліпсоїда формули приймають дещо простіший вигляд:

$$\begin{aligned} \int_{\tau} \frac{\partial}{\partial x^2}(r^4) (5\rho^2 - 3) d\tau &= \frac{4}{2} \int_0^1 (5\rho^2 - 3) \rho^4 \int_0^{\pi} \left[ \frac{a^2 \sin^2 \theta}{a^2 + u} + \frac{c^2 \cos^2 \theta}{c^2 + u} \right] + 2 \sin^2 \theta \cos^2 \lambda \\ &= 2 \left( \frac{5}{7} - \frac{3}{5} \right) [M_{200} 2V + M_{101} V + 2M_{200} V] = \frac{8V}{35} (4M_{20} + M_{11}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\tau} \frac{\partial}{\partial x^2} (r^6) (5\rho^2 - 3) d\tau \\
&= \frac{6}{2} \int_0^1 (5\rho^2 - 3) \rho^6 \left\{ \left[ \frac{a^2 \sin^2 \theta}{a^2 + u} + \frac{c^2 \cos^2 \theta}{c^2 + u} \right]^2 + \frac{4 \sin^4 \theta \cos^2 \lambda}{a^2 + u} \left( \frac{a^2 \sin^2 \theta}{a^2 + u} + \frac{c^2 \cos^2 \theta}{c^2 + u} \right) \right\} \\
&= 3 \left( \frac{5}{9} - \frac{3}{7} \right) \left[ \left( M_{300} \frac{16}{15} + 2M_{21} \frac{4}{15} + M_{12} \frac{2}{5} \right) 2\pi + 4\pi \left( M_{300} \frac{16}{15} + M_{21} \frac{4}{15} \right) \right] \\
&= \frac{3 \cdot 8}{63} 4\pi \left( M_{300} \frac{4}{15} + M_{21} \frac{2}{15} + M_{12} \frac{1}{5} \right) + \frac{16}{15} M_{30} + M_{21} \frac{4}{15} = \frac{8V}{7 \cdot 15} (20M_{30} + 6M_{21} + 3M_{12}).
\end{aligned}$$

Тому

$$\begin{aligned}
\int_{\tau} U_{200} W_2 d\tau &= \frac{1}{24} \left( \frac{3 \cdot 2 \cdot 4}{35} (4M_{20} + M_{11}) V - \frac{8V}{7 \cdot 15} (20M_{30} + 6M_{21} + 3M_{12}) \right) = \\
&= \frac{1}{24} \frac{8V}{35} \left( 3(4M_{20} + M_{11}) - \frac{1}{3} (20M_{30} + 6M_{21} + 3M_{12}) \right) = \\
&= \frac{V}{105} \left( 3(4M_{20} + M_{11}) - \frac{1}{3} (20M_{30} + 6M_{21} + 3M_{12}) \right).
\end{aligned}$$

Зробимо основні обчислення для кулі  $K$  радіусом  $R$ , для чого випишемо елементи формули (5.72) :

$$r^2 = \rho^2 R^2,$$

$$M_l^k = \int_{\xi}^{\infty} \left( \frac{R^2}{R^2 + u} \right)^l \frac{dU}{Q(u)} = R^{2l} \int_{\xi}^{\infty} \frac{2z dz}{z^{2e} z^3} = 2R^{2l} \int_{\xi}^{\infty} \frac{dz}{z^{2l+2}} = -\frac{2R^{2e}}{2l+1} \frac{1}{z^{l+1}} \Big|_R^{\infty} = \frac{2}{2l+1} \frac{R^{2e}}{R^{2e+1}} = \frac{2}{(2l+1)R},$$

$$S_{\xi} = \frac{2}{2\xi+1},$$

зокрема,  $S_0 = \frac{2}{R}, S_1 = \frac{2}{3R}, S_2 = \frac{2}{5R},$

$$\Delta V_2^k = \frac{3}{4R} fV_k \left[ -\frac{2}{2} + 2\rho^2 - \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 2} \rho^4 \right] = \frac{3}{2R} fV_k \left[ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \rho^4 + \rho^2 \right],$$

$$\Delta E_2 = \frac{9fV_k^2}{14R} \left( \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 3} - \frac{5 \cdot 2}{9 \cdot 5} \right) = \frac{9fV_k^2}{14R} \left( \frac{2}{5} - \frac{2}{9} \right) = \frac{9fV_k^2}{14R} \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 9} = \frac{4fV_k^2}{35R},$$

$$\int_{\tau} \Delta V_2 d\tau = \frac{3fV_k^2}{4R} \left( -1 + \frac{6}{3} - \frac{3}{7} \right) + \frac{3fV_k^2}{4R} (-35 + 42 - 15) = -\frac{6fV_k^2}{35R},$$

$$\frac{1}{2} \int_{\tau} \frac{\partial}{\partial x^2} (r^4) (5\rho^2 - 3) d\tau = \frac{4}{2} \frac{4}{35} \int_0^{\infty} \left( \frac{R^4}{(R^2 + u)^2} + \frac{2 \sin^2 \theta \cos^2 \lambda R^4}{(R^2 + u)^2} \right) \frac{du}{Q(u)} =$$

$$\frac{16}{2 \cdot 35} \left( \frac{R^4}{5z^5} \right) \Big|_0^{\infty} \left[ 3V + 2\pi \cdot \frac{4}{3} abc \right] = \frac{8}{35} \frac{5V}{5R} = \frac{8V}{35R},$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\tau} (5\rho^2 - 3) d\tau \left[ \frac{6\rho^2 R^2}{R^2 + u} \left( \frac{\rho^2 R^2}{R^2 + u} \right)^2 \right] + \frac{4 \sin^2 \theta \cos^2 \lambda}{R^2 + u} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (\rho^4) (5\rho^2 - 3) dp \int_0^{\infty} \left( \frac{R^4}{(R^2 + u)^2} [3V + 2V] \right) d\theta = \frac{16}{2} \left( \frac{R^6}{R^7} 7V \right) = \frac{8}{21R}, \end{aligned}$$

Тому

$$\begin{aligned} \int_{\tau} U_{200} W_2 d\tau &= \frac{1Vf}{24R} \left( \frac{3 \cdot 8}{3 \cdot 5} - \frac{8}{24} \right) = \frac{8Vf}{24 \cdot 7} \left( \frac{3}{5} - \frac{1}{3} \right) \frac{4Vf}{105}, \\ \int_{\tau} \Delta U_2 W_{200} d\tau &= \frac{13V^2 f}{24R} \int_{\tau} \left( -\frac{S_0}{2} + 3S_1 \rho^2 - 5\frac{S_2}{2} \rho^4 \right) \frac{1}{8} \frac{\partial}{\partial x^2} (\rho^2 - 1)^2 d\rho, \\ \int_{\tau} \Delta U_2 W_{200} d\tau &= \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{fV^2}{R} \int_{\tau} \left( -\frac{S_0}{2} + 3S_1 \rho^2 - 5\frac{S_2}{2} \rho^4 \right) \frac{1}{8} \frac{\partial}{\partial x^2} (\rho^2 - 1)^2 d\rho = \\ &= \frac{3}{32} fV^2 \left[ 3S_1 \frac{1 \cdot 2}{a^2} \int_0^1 (\rho^2 - 1)^2 d\rho - \frac{5S_2}{2} \right] = \\ &= \frac{3}{32} fV^2 \left[ \frac{6S_1}{a^2} \frac{3V \cdot 2^2 \cdot 2}{7!!} - \frac{5S_2}{2a^2} 4 \int_0^1 \rho^4 (\rho^2 - 1)^2 d\rho \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (1 + 2 \sin^2 \theta \cos^2 \lambda) d\theta \right] = \\ &= \frac{3}{32} fV^2 \left( \frac{163}{a^2 7!!} - \frac{10S_2}{2a^2} \frac{2^2 \cdot 2 \cdot 3!!}{9!!} \left( 3V + 2\pi \frac{4}{3} \right) \right) \int_{\tau} \Delta U_2 W_{200} d\tau = \\ &= \frac{3}{32} 16 \frac{fV^2}{a^2} \left( \frac{S_1}{7 \cdot 5} - \frac{5VS_2 \cdot 5 \cdot 3!!}{9!!} \right) = \frac{3}{2} fV^2 \left( \frac{3S_1}{35} - \frac{5}{63} S_2 \right) = \frac{3}{14} fV^2 \left( \frac{S_1}{5} - \frac{5}{9} S_2 \right). \end{aligned}$$

Перевірка правильності виведення формул, для чого вирази для еліпсоїдальної планети порівнюємо з такими для кулі, які вираховані безпосередньо та отримані з загальних:

$$\begin{aligned} & \frac{3}{4} fV \int_{\tau} \left( -\frac{1}{2} + \rho^2 - \frac{\rho^4}{2} \right) (\rho^4 (2 \cos^2 \theta + 1) - 1) \rho^2 d\tau = \\ &= \frac{3}{4} fV \left[ \left( -\frac{1}{10} + \frac{1}{7} - \frac{1}{18} \right) 5V - 3V \left( -\frac{1}{6} + \frac{1}{5} - \frac{1}{14} \right) \right] = \\ &= \frac{3}{4} fV^2 \left[ 5 \left( \frac{-63 + 70 - 15}{2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 9} \right) - 3 \left( \frac{-3 \cdot 5 + 42 - 15}{2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3} \right) \right] = \\ &= \frac{3}{4} fV^2 \left[ \frac{5 \cdot (-8)}{2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 9} - \frac{3 \cdot (-8)}{2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3} \right] = \frac{3 \cdot 8}{4 \cdot 2 \cdot 7} fV^2 \left[ -\frac{1}{9} + \frac{1}{5} \right] = \frac{3}{7} fV^2 \left[ \frac{-5}{4} \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{7} fV^2 \left[ \frac{4}{45} \right] = \frac{4}{105} fV^2,$$

$$\int_{\tau} \delta^0(\rho) \Delta V_2 d\tau = \frac{9fV_k^2}{4R} (-M_2 + 2M_4 - M_6),$$

$$\begin{aligned} \int_{\tau} \Delta U_2 d\tau &= \frac{3fV^2}{2} \left( -\frac{1}{2} + \rho^2 - \frac{\rho^4}{2} \right) \rho^2 d\tau = \frac{9fV^2}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{5} - \frac{1}{14} = \frac{9fV^2}{2} \left( \frac{-3 \cdot 5 + 42 - 15}{2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3} \right) \\ &= \frac{9fV^2}{2} \left( \frac{-8}{2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3} \right) = \frac{-2 \cdot 3 fV^2}{35} = \frac{-6fV}{35}, \end{aligned}$$

Залишилося визначити  $\frac{1}{2} \int_{\tau} U^0(\rho)(5\rho^2 - 3) d\tau$ .

Оскільки потенціал кусково-неперервного радіального розподілу  $\delta^0(\rho)$  не визначається в замкнутому вигляді для еліпсоїда, то використаємо його представлення через поліноми Лежандра:

$$\begin{aligned} U^0(\rho) &= f \sum_{n=0}^{\infty} C_n \int_{\tau} \frac{P_{2n}(\rho)}{r} d\tau = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sum_{l=0}^n d_{2l}^{2n} \int_{\tau} \frac{\rho^{2l}}{r} d\tau = \sum_{h=0}^{\infty} C_n \sum_{l=0}^n d_{2l}^{2n} U_{2l}(\rho) \\ \frac{1}{2} \int_{\tau} U_{2l}(\rho)(5\rho^2 - 3) d\tau &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4(l+1)} V_e (S_0 - \rho^{2e+2} S_{e+1})(5\rho^2 - 3) d\tau = \\ &= \frac{3fV_e}{8(l+1)} \left\{ S_0 3V_e \left( \frac{5}{5} \rho^5 - \frac{3}{3} \rho^3 \right) \Big|_0^1 - S_{l+1} \left( \frac{5\rho^{2l+7}}{2l+7} - \frac{3\rho^{2l+5}}{2l+5} \right) \right\} = \\ &= -\frac{3fV^2}{8(l+1)} S_{l+1} \left( \frac{5}{2l+7} - \frac{3}{2l+5} \right) \end{aligned}$$

і тоді

$$\frac{1}{2} \int_{\tau} U^0(\rho)(5\rho^2 - 3) d\tau = f \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sum_{l=0}^n \frac{d_{2l}^{2n}}{(l+1)} S_{l+1} \left( \frac{5}{2l+7} - \frac{3}{2l+5} \right) \frac{3}{8} fV.$$

Для кулі

$$\frac{1}{2} \int_{\tau} U^0(\rho)(5\rho^2 - 3) d\tau = \sum_{l=0}^n d_l^n \frac{9fV^2}{4R} \cdot \frac{1}{2l+3} \left( \frac{5}{2l+7} - \frac{3}{2l+5} \right) \frac{1}{l+1}.$$

За заданою моделлю, а також за наближеними формулами зробимо обчислення

$$\delta = \delta_c \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_{2n}(\rho) = \delta_c \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sum_{l=0}^n d_{2l}^{2n} \rho^{2l},$$

$$\int_{\tau} \frac{\rho^{2l}}{r} d\tau = \frac{3fV}{4(l+1)} \left( 2 - \frac{2\rho^{2l+2}}{2l+3} \right) = \frac{3fV}{2} \left( 1 - \frac{\rho^{2l+2}}{2l+3} \right),$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \frac{\rho^{2l}}{r} (5\rho^2 - 3) d\tau &= \frac{1}{2} \frac{3fV \cdot 3V}{2} \left[ \left( \frac{5}{5} \rho^5 - \frac{3}{3} \rho^3 \right) - \frac{1}{2l+3} \left( \int 5\rho^{2l+6} - 3\rho^{2l+4} \right) \right] = \\ &= -\frac{9fV^2}{2} \cdot \frac{1}{(l+1)} \cdot \frac{1}{2l+3} \left( \frac{5}{2l+7} - \frac{3}{2l+5} \right) = \frac{10l+25-6l-4}{(2l+7)(2l+5)(l+1)} = \\ &= -\frac{9 \cdot (4l+4)}{4(l+1)(2l+3)(2l+5)(2l+7)} = -\frac{9}{(2l+3)(2l+5)(2l+7)}, \end{aligned}$$

$$\Delta V_2^k = \frac{3}{4R} fV_k \left[ -\frac{2}{2} + 2\rho^2 - \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 2} \rho^4 \right] = \frac{3}{2R} fV_k \left[ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \rho^4 + \rho^2 \right]$$

$$\begin{aligned} \Delta E_2 &= \int_{\tau} \Delta V_2 \Delta W_2 d\tau = \int_{\tau} \frac{3}{4} \frac{fV_e}{2} \int_{\tau} \left( -\frac{S_0}{2} + 3S_1 \rho^2 - \frac{5S_2}{2} \rho^4 \right) (5\rho^2 - 3) d\tau = \\ &= \frac{3f3V_k^2}{8} \left\{ -\frac{S_0}{2} \int_0^1 (5\rho^4 - 3\rho^2) d\rho + 3S_1 \int_0^1 (5\rho^6 - 3\rho^4) d\rho - \right. \\ &\quad \left. 5 \frac{S_2}{2} \int_0^1 (5\rho^8 - 3\rho^6) d\rho + 3S_1 \int_0^1 (5\rho^6 - 3\rho^4) d\rho - 5 \frac{S_2}{2} \int_0^1 (5\rho^8 - 3\rho^6) d\rho \right\} \\ &= \frac{9fV_e^2}{8R} \left\{ -\frac{S_0}{2} (\rho^5 - \rho^3) \Big|_0^1 + 3S_1 \left( \frac{5}{7} \rho^7 - \frac{3}{5} \rho^5 \right) \Big|_0^1 - 5 \frac{S_2}{2} \left( \frac{5}{9} \rho^9 - \frac{3}{7} \rho^7 \right) \Big|_0^1 \right\} \\ &= \frac{9fV_e^2}{8a} \left\{ 3S_1 \left( \frac{5}{7} - \frac{3}{5} \right) - 5 \frac{S_2}{2} \left( \frac{5}{9} - \frac{3}{7} \right) \right\} = \end{aligned}$$

$$\frac{9}{8} fV_e^2 \left\{ \frac{3S_1 \cdot 4}{35} \right\} - \frac{5}{2} S_2 \frac{8}{63} = \frac{9}{2} fV^2 \left\{ \frac{3S_1}{35} - \frac{5}{63} S_2 \right\} = \frac{9}{14} fV^2 \left\{ \frac{3S_1}{35} - \frac{5}{63} S_2 \right\} = \frac{9}{14} fV^2 \left\{ \frac{3S_1}{5} - \frac{5}{9} S_2 \right\}.$$

Для перевірки зробимо безпосередні обчислення для кулі:

$$\Delta E_2 = \frac{9fV_k^2}{14R} \left( \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 3} - \frac{5 \cdot 2}{9 \cdot 5} \right) = \frac{9fV_k^2}{14R} \left( \frac{2}{5} - \frac{2}{9} \right) = \frac{9fV_k^2}{14R} \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 9} = \frac{4fV_k^2}{35R},$$

$$\int_{\tau} \Delta V_2 d\tau = \frac{3fV_k^2}{4R} \left( -1 + \frac{6}{3} - \frac{3}{7} \right) + \frac{3fV_k^2}{4R} (-35 + 42 - 15) = -\frac{6fV_k^2}{35R},$$

$$\int_{\tau} W_{200} \Delta V_2 d\tau = \frac{3fV^2 \cdot 64 \cdot 3}{a^2 \cdot 32a^2 \cdot 9} = \frac{2fV^2}{105a^2} = \frac{4fV^2}{105a^2}, \quad \int_{\tau} W_{200} \Delta V_2 d\tau = \frac{3fV^2 \cdot 64 \cdot 3}{a^2 \cdot 32a^2 \cdot 9} = \frac{2fV^2}{105a^2} = \frac{4fV^2}{105a^2},$$

$$\int_{\tau} U^0(\rho) \Delta W_2 d\tau = -\frac{9fV^2 \cdot 2}{70 \cdot 3} = -\frac{9fV^2}{35}, \quad \int_{\tau} \delta^0(\rho) \Delta V_2 d\tau = \frac{9fV_k^2}{4R} (-M_2 + 2M_4 - M_6),$$

$$\int_{\tau} \Delta V_2 d\tau = \frac{3fV_k^2}{4R} \left( -1 + \frac{6}{3} - \frac{3}{7} \right) + \frac{3fV_k^2}{4R} (-35 + 42 - 15) = -\frac{6fV_k^2}{35R},$$

$$\int_{\tau} W_{200} \Delta V_2 d\tau = \frac{3fV^2 64 \cdot 3}{a^2 32a^2 9} = \frac{2fV^2}{105a^2} = \frac{4fV^2}{105a^2}, \int_{\tau} W_{002} \Delta V_2 d\tau = \frac{4fV^2}{105c^2}.$$

Для перевірки правильності отримання результатів дані величини обчислимо для кулі іншим шляхом:

$$\begin{aligned} \int_{\tau} W_{002} \Delta U_2 d\tau &= \frac{3}{2} fV \left( -\frac{1}{2} + \rho^2 - \frac{\rho^4}{2} \right) \frac{1}{2} (\rho^2 (1 + 2 \cos^2 \theta) - 1) d\tau \\ &= \frac{3}{4} fV_k^2 \left[ 5 \int_0^1 \left( -\frac{1}{2} + \rho^2 - \frac{\rho^4}{2} \right) d\rho - \int_0^1 \left( -\frac{1}{2} + \rho^2 - \frac{\rho^4}{2} \right) \rho^2 d\rho \right] = \\ &= \frac{3}{2R} fV_k^2 \left\{ 5 \left( -\frac{1}{10} + \frac{1}{7} - \frac{1}{18} \right) \right\} \left\{ -3 \left( -\frac{3}{6} + \frac{1}{5} - \frac{1}{14} \right) \right\} = \frac{3}{2R} fV_k \cdot 5V_k \left( -\frac{1}{63} + \frac{4}{35} \right) = \frac{4}{105R} fV_k^2 \\ \int_{\tau} U^0(\rho) \Delta W_2 d\tau &= -\frac{9fV^2 2}{70 \cdot 3} = -\frac{9fV^2}{35}. \end{aligned}$$

Для кулі з радіусом  $r^2 = \rho^2 R^2$  одержуємо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\tau} \frac{\partial}{\partial x^2} (r^4) (5\rho^2 - 3) d\tau &= \frac{4}{2} \frac{4}{35} \int_0^{\infty} \left( \frac{R^4}{(R^2 + u)^2} + \frac{2 \sin^2 \theta \cos^2 \lambda R^4}{(R^2 + u)^2} \right) \frac{du}{Q(u)} \\ &= \frac{16}{2 \cdot 35} \left( \frac{R^4}{5z^5} \right) \Big|_0^{\infty} \left[ 3V + 2\pi \cdot \frac{4}{3} abc \right] = \frac{8}{35} \frac{5V}{5R} = \frac{8V}{35R}. \\ \frac{1}{2} \int_{\tau} (5\rho^2 - 3) d\tau &= \frac{6\rho^2 R^2}{R^2 + u} \left( \frac{\rho^2 R^2}{R^2 + u} \right)^2 + \frac{4 \sin^2 \theta \cos^2 \lambda}{R^2 + u} = \\ \frac{1}{2} \int_0^1 (\rho^4) (5\rho^2 - 3) d\rho &= \int_0^{\infty} \left( \frac{R^4}{(R^2 + u)^2} [3V\pi] \right) d\theta = \frac{16}{2} \left( \frac{R^6}{R^7} 7V \right) = \frac{8}{21R}. \end{aligned}$$

Тому

$$\begin{aligned} \int_{\tau} U_{200} W_2 d\tau &= \frac{1Vf}{24R} \left( \frac{3 \cdot 8}{3 \cdot 5} - \frac{8}{24} \right) = \frac{8Vf}{24 \cdot 7} \left( \frac{3}{5} - \frac{1}{3} \right) \frac{4Vf}{105}, \\ \int_{\tau} \Delta U_2 W_{200} d\tau &= \frac{13V^2 f}{24R} \int_{\tau} \left( -\frac{S_0}{2} + 3S_1 \rho^2 - 5\frac{S_2}{2} \rho^4 \right) \frac{1}{8} \frac{\partial}{\partial x^2} (\rho^2 - 1)^2 d\rho. \end{aligned}$$

$$\text{Для кулі } \frac{1}{2} \int_{\tau} U^0(\rho) (5\rho^2 - 3) d\tau = f \sum_{e=0}^n d_n^e = \frac{9fV^2}{4R} \cdot \frac{1}{2l+3} \left( \frac{5}{2l+7} - \frac{3}{2l+5} \right) \frac{1}{l+1}$$

За заданою моделлю, а також за наближеними формулами робимо обчислення

Визначаємо:

$$\frac{1}{2} \int_{\tau} U^0(\rho) (5\rho^2 - 3) d\tau = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{nk} \int (U_z^i(\rho) + U_p^i(\rho) + U_b^i(\rho)) (5\rho^2 - 3) d\tau =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{nk} \left( \sum_{i=0}^l (M_{G_i} - M_{\tau_e}) \right) \left( \frac{5\rho_{l-1}^5}{4} - \frac{3\rho_{l-1}^3}{2} \right) + \sum_{i=l+1}^{nk} U_p^l(\rho) (\rho_{i+1}^5 - \rho_{i+1}^3) + (\rho_l^t - \rho_l^{t-1}) + \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\tau} U_b^l(\rho) (5\rho^2 - 3) d\tau \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \frac{a_{l,i+2}}{i+2} \left( \rho_l^{i+2} - \frac{\rho_l^{i+2}}{i+3} \right) (5\rho^2 - 3) d\tau = \\
&\frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \frac{a_{l,i+2}}{i+2} \left[ (\rho_l^{i+2} - \rho_{l-1}^{i+2}) \Big|_{\rho_{e-1}}^{\rho_e} - \frac{1}{l+3} \left( \frac{5\rho^{i+5}}{i+7} - \frac{3\rho^{i+5}}{i+5} \right) 3V \Big|_{\rho_{e-1}}^{\rho_e} \right] = \frac{1}{2} \int_{G_e} U_b^e(\rho) (5\rho^2 - 3) d\tau \\
&\quad = \frac{3}{2} fV \sum_{i=1}^4 \frac{a_{l,i+2}}{i+2} \left[ (\rho_l^{i+2} - \rho_{l-1}^{i+2}) (\rho_l^5 - \rho_{l-1}^5 - (\rho_l^3 - \rho_{l-1}^3)) \right] - \\
&\quad \quad - \frac{1}{l+3} \left[ \frac{5}{i+7} (\rho_l^{i+7} - \rho_{l-1}^{i+7}) - \frac{3}{i+5} (\rho_l^{i+5} - \rho_{l-1}^{i+5}) \right] \\
&\frac{1}{2} \int \frac{\rho^{2l}}{r} (5\rho^2 - 3) d\tau = \frac{1}{2} \frac{3fV \cdot 3V}{2} \left[ \left( \frac{5}{5} \rho^5 - \frac{3}{3} \rho^3 \right) - \frac{1}{2l+3} \left( \int 5\rho^{2l+6} - 3\rho^{2l+4} \right) \right] = \\
&= -\frac{9fV^2}{2} \cdot \frac{1}{(l+1)} \cdot \frac{1}{2l+3} \left( \frac{5}{2l+7} - \frac{3}{2l+5} \right) = \frac{10l+25-6l-4}{(2l+7)(2l+5)(l+1)} = \\
&= -\frac{9 \cdot (4l+4)}{4(l+1)(2l+3)(2l+5)(2l+7)} = -\frac{9}{(2l+3)(2l+5)(2l+7)}.
\end{aligned}$$

Таблиця 5.11.

## Перелік обчислених формул, необхідних для визначення мінімуму енергії

Формула	Тривісний еліпсоїд	Двохвісний еліпсоїд	Куля
1	2	3	4
$d_0$	-	-	-0.03787
$\frac{d_0 + d_1}{2}$	-	-	-0.01902
$\Delta W_2$	$\frac{1}{2}(5\rho^2 - 3)$	$\frac{1}{2}(5\rho^2 - 3)$	$\frac{1}{2}(5\rho^2 - 3)$
$\Delta U_2$	$-\frac{S_0}{2} + 3S_1\rho^2 - 5\frac{S_2}{2}\rho^4$	$-\frac{S_0}{2} + 3S_1\rho^2 - 5\frac{S_2}{2}\rho^4$	$-\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\rho^4 - \rho^2\right)\frac{3}{4}fV$
$\int_{\tau} \Delta U_2 \Delta W_2 d\tau$	$\frac{9}{14} \frac{fV^2}{R} \left( \frac{3S_1}{5} - \frac{5S_2}{9} \right)$	$\frac{9}{14} \frac{fV^2}{R} \left( \frac{3S_1}{5} - \frac{5S_2}{9} \right)$	$\frac{2}{35} \frac{fV^2}{R}$
$\int_{\tau} \Delta U_2 d\tau$	$\frac{3}{4} \frac{fV^2}{R} \left( -\frac{S_0}{2} + \frac{9S_1}{5} - \frac{15S_2}{14} \right)$	$\frac{3}{4} \frac{fV^2}{R} \left( -\frac{S_0}{2} + \frac{9S_1}{5} - \frac{15S_2}{14} \right)$	$\frac{-6}{35} \frac{fV^2}{R}$
$\int_{\tau} \Delta W_2 \Delta U_2 d\tau$	$\frac{3}{2} \frac{fV^2}{a^3} \left( \frac{3S_1}{35} - \frac{5S_2}{63} \right)$	$\frac{3}{2} \frac{fV^2}{a^3} \left( \frac{3S_1}{35} - \frac{5S_2}{63} \right)$	$\frac{4}{105} \frac{fV^2}{R^3}$
$\int_{\tau} W_{200} \Delta U_2 d\tau$	$\frac{3}{2} \frac{fV^2}{a^3} \left( \frac{3S_1}{35} - \frac{5S_2}{63} \right)$	$\frac{3}{2} \frac{fV^2}{a^3} \left( \frac{3S_1}{35} - \frac{5S_2}{63} \right)$	$\frac{4}{105} \frac{fV^2}{R^3}$
$\int_{\tau} \Delta U_0 \Delta W_2 d\tau$	$\frac{-9}{70} \frac{fV^2}{a} S_1$	$\frac{-9}{70} \frac{fV^2}{a} S_1$	$\frac{-3}{35} \frac{fV^2}{R}$
$\int_{\tau} \Delta U_2 W_{200} d\tau$	$\frac{3}{14} fV^2 \left( \frac{3S_1}{35} - \frac{5S_2}{63} \right)$	$\frac{3}{14} fV^2 \left( \frac{3S_1}{35} - \frac{5S_2}{63} \right)$	$\frac{4}{105} fV^2$



<i>Продовження табл. 5.11.</i>			
1	2	3	4
$b_{200}$	-	-	0.5113412
$b_{020}$			0.512275
$b_{002}$			0.5132102
$b_{000}$			0.02964
$b'_{000}$	-	-	1
$b'_{200}$	-	-	1.116224
$b'_{020}$	-	-	1.1554094
$b'_{002}$	-	-	1.135074

Використовуючи наші дослідження за формулами (5.72), (5.66) , (5.67), знаходимо коефіцієнти розкладу  $b_{mk}$ , що відповідають моделі PREM, а також для однорідної моделі з густиною  $\delta_0 = const = 5.514 \frac{г}{см^3} - b'_{mk}$ . Далі приведемо обчислення для двох випадків і результати наведемо в табл. 5.12, 5.13.

Таблиця 5.12.

**Розподіл мас, гідростатично врівноваженої Землі, що відповідає моделі PREM.**

$\rho = \frac{r}{R}$	$0^\circ$	$60^\circ$	$120^\circ$	$180^\circ$
0.000	9.01490	9.01490	9.01490	9.01490
0.100	8.99716	8.99714	8.99711	8.99709
0.200	8.94398	8.94392	8.94379	8.94373
0.300	8.85539	8.85524	8.85495	8.85481
0.400	8.73137	8.73111	8.73059	8.73033
0.500	8.57192	8.57152	8.57071	8.70310
0.600	8.37705	8.37647	8.37531	8.37473
0.700	8.14675	8.14596	8.14439	8.14360
0.800	7.88103	7.88000	7.87794	7.87691
0.900	7.57989	7.57859	7.57598	7.57467
1.000	7.24332	7.24171	7.23849	7.23688

Таблиця 5.13.

**Розподіл мас гідростатично врівноваженої Землі, що відповідає однорідній планеті.**

$\rho = \frac{r}{R}$	$0^\circ$	$60^\circ$	$120^\circ$	$180^\circ$
0.000	9.21383	9.21383	9.21383	9.21383
0.100	9.28206	9.28220	9.28246	9.28259
0.200	9.48648	9.48701	9.48806	9.48859
0.300	9.82709	9.82827	9.83064	9.83183
0.400	10.30388	10.30599	10.31020	10.31231
0.500	10.91686	10.92015	10.92674	10.93003
0.600	11.66602	11.67076	11.68025	11.68499
0.700	12.55138	12.55783	12.57074	12.57719
0.800	13.57292	13.58135	13.59821	13.60664
0.900	14.73064	14.74131	14.76265	14.77332
1.000	16.02456	16.03773	16.06407	16.07724

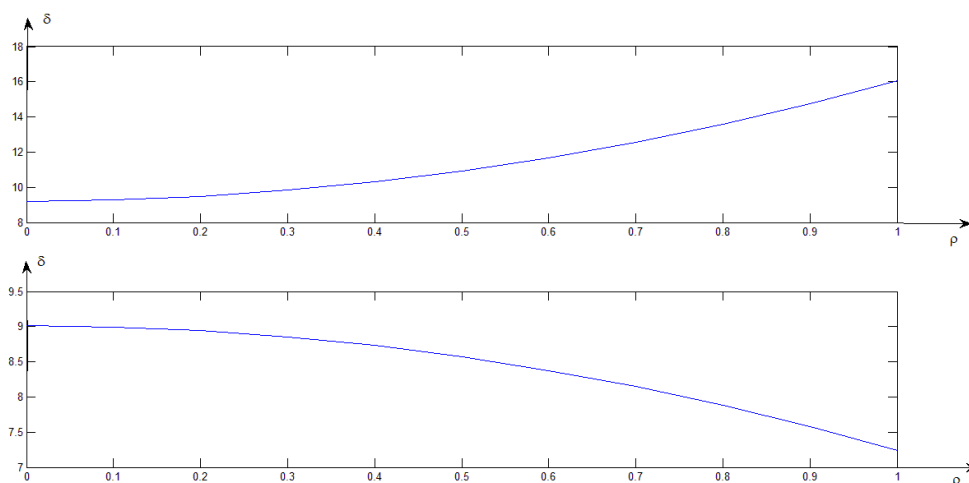


Рис. 5.2. Графіки розподілів мас, гідростатично врівноваженої Землі з розподілом за моделлю PREM (а) та однорідної (б) в точці з координатами

$$\varphi = 0^0, \lambda = 0^0$$

Результати обчислень узгоджуються з висновками, зробленими в монографії [72] про ненадійність знайдених розподілів, а також про прагнення впливання мас до поверхні планети. Оскільки визначені функції розміщення мас не відповідають реально існуючим, то можна з великою вірогідністю стверджувати, що стан Землі далеко не відповідає стану гідростатичної рівноваги хоча б для випадку представлення розподілу масу вигляді многочлена другого порядку.

## ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 5

1. Подані формули для визначення потенціалу еліпсоїдальної планети для деяких спеціальних розподілів.
2. Показана необхідність апроксимації кусково-неперервних функцій відносного радіуса парними степенями та запропоновано їх наближення поліномами Лежандра .
3. Приведені способи представлення з допомогою цих многочленів, вивчені критерії їх збіжності та визначена оптимальна кількість членів наближення.
4. Способи подання деяких розподілів та їх потенціалів використані для опису потенціалу; приведені приклади такого визначення. Апробована методика обчислення енергії наближеними методами та зроблене порівняння з результатами обчислень по точних формулах для сферичної планети.
5. Запропонований метод апробований для визначення основних характеристик на прикладі референтної моделі PREM для Землі. На основі досліджень зроблений висновок про ефективність поданої методики, яка підтверджується порівнянням точного та наближених методів для кулі і може використовуватись для подальшого використання при визначенні величин для еліпсоїдальної планети.
6. Розроблена методика обчислення основних інтегральних характеристик тривимірної еліпсоїдальної планети дає механізм дослідження гідростатичного (негідростатичного) стану планети.
7. Реалізований принцип мінімуму енергії з допомогою наведених методів дає алгоритм для таких числових експериментів. На їх основі проведено вивчення гідростатичного стану розподілу другого порядку. Значне відхилення одержаного розподілу мас від радіального підтверджує значний перерозподіл мас в сторону збільшення значення при наближенні до поверхні планети.

## ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі наведено теоретичні дослідження апроксимації тривимірних функцій всередині еліпсоїдального тіла та практичне їх застосування при вивченні гравітаційних полів і внутрішньої структури планет. Вирішена важлива наукова проблема зв'язку тривимірних розподілів мас надр еліпсоїдальних планет з їх потенціалами.

Основні наукові та практичні результати роботи полягають в наступному:

1. Удосконалена методика апроксимації кусково-неперервних функцій в еліпсоїді на основі двох біортогональних систем многочленів. Встановлені властивості цих систем, що дають можливість використати їх для побудови тривимірних розподілів густини мас всередині планети.

2. Уперше введено систему неортогональних функцій, гармонічних поза небесним тілом, фігурою якого є тривісний еліпсоїд. Потенціал планети з допомогою описується всюди збіжними рядами, які у випадку сферичної планети, збігаються з рядами за зовнішніми кульовими функціями.

3. Уперше отримано представлення потенціалу планети сумою негармонічних функцій. Показана можливість його застосування для розв'язання прямих і дослідженні обернених задач гравіметрії.

4. Уперше знайдено формальне представлення для значення функції густини в центрі мас еліпсоїдальної планети. Визначені межі зміни для небесних тіл Сонячної системи, які необхідно враховувати при побудові модельних розподілів мас надр планет.

5. Уточнені аналітичні вирази кульових функцій (зовнішніх та внутрішніх) в прямокутній системі координат, що дає можливість використовувати їх в задачах супутникової та фізичної геодезії, а також при дослідженні внутрішньої неоднорідної структури планет.

6. Уперше подана методика зведення даних спостережень в загальнопланетарну систему відліку, що значно зменшує кількість обчислень у процесі побудови тривимірних моделей. Розгляд часткового випадку

обґрунтовує можливість використання стокових постійних без їх попереднього перетворення.

7. Удосконалено наближений метод побудови тривимірних розподілів густини мас з метою спрощення алгоритму та запропонований новий підхід до їх визначення. Застосування поверхневих інтегралів для зображення стокових постійних (до четвертого порядку включно) дало можливість визначати однозначно функцію розподілу густини мас та її похідних.

8. Уперше виведені формули обчислення потенціалу еліпсоїда для деяких розподілів мас, які використані для обчислення потенціалу кульової та еліпсоїдальної планети і гравітаційної енергії.

9. Запропоновано метод наближення кусково-неперервних одновимірних функцій розподілу густини надр еліпсоїдальної та сферичної планети з використанням многочленів Лежандра різними способами, досліджені умови збіжності, а також обґрунтований вибір оптимальної кількості доданків у сумі.

10. Уперше запропоновані формули обчислення наближеного значення енергії кулі і еліпсоїда та показана їх узгодженість з виведеними точними виразами для енергії кульової планети. Розроблена методика застосована для вивчення інтегральних характеристик планети Земля, функція розподілу мас якої визначається як референсна модель PREM.

11. Аналітичні вирази знаходження потенціалу та енергії тривимірної еліпсоїдальної планети використані для дослідження стану гідростатичної (негідростатичної) рівноваги на прикладі Землі, густина розподілу мас якої – многочлен другого степеня за змінними  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Виконані обчислення та їх аналіз дозволяють зробити висновок про суттєве відхилення стану планети Земля від гідростатичної рівноваги.

## Література

1. Абрикосов О.А. О вычислении производных потенциала притяжения Земли для целей спутниковой геодезии / О.А. Абрикосов. // Научно-теоретический журнал «Кинематика и физика небесных тел».. – 1986. – 2/14, том 2.– С. 51–58.
2. Александрова А.А. Плазменные неоднородности в магнитогидродинамической интерпретации / А.А. Александрова, Ю.Н Александров. // Вопросы атомной науки и техники. – 2004. – №4. – С. 18–23.
3. Антонов В.А. Введение в теорию ньютоновского потенциала / В.А. Антонов, Е. И. Тимошкова, К. В. Холшевников., (Гл. ред. физ. – мат. лит)-1988. – 272 с.
4. Арнольд К. Методы спутниковой геодезии / К. Арнольд., М.: Недра 1973. – 234 с.
5. Астафьев В.В. Определение гравитационной постоянной / В.В. Астафьев. // Доклады АН УССР. – 1982. – С. 3–4
6. Астрономічний календар 2012 – Київ: НАНУ, ГАО, 2011. – 305 с.
7. Бальмино Д. Представление потенциала Земли с помощью совокупности точечных масс, находящихся внутри Земли / Д. Бальмино // Использование искусственных спутников для геодезии. М.: Мир, 1975. – С. 175– 183.
8. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейн. - Т. II. М.: Наука, 1974. – 294 с.
9. Буллен К. Е. Плотность Земли / К. Е. Буллен, М.: Мир, 1978. – 437 с.
10. Бурша М. Трехосность Земли, Луны и Марса / М. Бурша // Изучение Земли как планеты методами астрономии, геодезии и геофизики: Тр. I Орловской конференции. – Київ: Наукова думка, 1982. – С. 17– 19.
11. Гобсон Е.В. Теория сферических и эллипсоидальных функций / Е. В. Гобсон. – М.: Изд-во иностр. лит., 1953. – 476 с.
12. Голикова А.В. Использование коэффициентов внешнего гравитационного поля для выявления в ее теле горизонтальных неоднородностей / А.В. Голикова // Геодезия, картография и аэрофотосъемка – 1973. – №17. – С. 8–11.
13. Голикова А.В. Новая механическая модель Земли. Доклады и научные сообщения / А.В. Голикова. // “Вища школа”. – 1973. – №1. – С. 126–130.
14. Гравирозведка: Справочник геофизика, -М: Недра 1981. – 397 с.

15. Грушинский Н.П. Основы гравиметрии / Н.П. Грушинский.,– М.: Наука, 1983. – 352 с. – (Гл. ред. физ. – мат. лит).
16. Грушинский Н.П. Теория фигуры Земли / Н. П. Грушинский. – М.: Наука, 1983. – 550 с. – (Гл. ред. физ. – мат. лит)
17. Демидович Б.П. Основы вычислительной математики / Б.П. Демидович, И.А. Марон. – М.: Из-во ф.м. лит,1969. – 658 с.
18. Демидович Б.П. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения / Б.П. Демидович, И. А. Марон, Э.З. Шувалова. М.: Из-во Наука,1967. – 368 с.
19. Дубошин Г.Н. Небесная механика: основные задачи и методы / Г. Н. Дубошин. –М.: Наука, 1968. – 799 с.
20. Жарков В.Н. Внутреннее строение Земли и планет / В. Н. Жарков. – М.: Наука, 1983. – 416 с. – (Глав. ред. физ.-мат. лит.).
21. Жарков В.Н. Физика планетарных недр / В. Н. Жарков, В. П. Трубицин. –М: Наука,1980. – 448 с. – (Глав. ред. физ.-мат. лит.).
22. Жонголович И.Д. Внешнее гравитационное поле Земли и фундаментальные постоянные, связанные с ним. – Тр. Ин-та теорет. Астрономии / И.Д. Жонголович. // М.: Л. Изд-во АН СССР. – 1952. – №3. – С. 126.
23. Жонголович Н.Л. Потенциал земного притяжения / Н. Л. Жонголович. // Бюл. ИТА. – 1957. – №8. – С. 505–523.
24. Загребин Д.В. Введение в теоретическую гравиметрию / Д. В. Загребин. Ленингр. Отд: Изд-во Наука,1976. – 292 с.
25. Зазуляк П.М. Внешнее гравитационное поле Луны и трехмерное распределение плотности ее недр / П.М.Зазуляк, Г.А. Мещеряков, М.М. Фыс // В кн.: Селенодезия и динамика Луны. Наукова думка – Киев. – 1990. – С. 39-42.
26. Заяць О.С. Про використання даних космічних апаратів при вивченні гравітаційного поля і внутрішньої будови Місяця. // Новітні досягнення геодезії, геоінформатики та землевпорядкування. Європейський досвід.” Збірник наукових праць міжн. науково–практичної конференції / О.С. Заяць. – 2005. – №1. – С. 195–197.
27. Заяць О.С. Моделювання внутрішнього потенціалу для неоднорідного Місяця // Новітні досягнення геодезії, геоінформатики та землевпорядкування. Європейський досвід.” Збірник наукових праць міжн. науково–практичної конференції / О.С. Заяць, М.М. Фис, П.М. Зазуляк. – 2006. – №2. – С. 86.
28. Идельсон Н.И. Теория потенциала и ее применения к вопросам геофизики / Н. И. Идельсон. .-М.: ГТТИ, 1932. – 348 с.



29. Каменский К.К. Исследование глобальных особенностей уровенной и гипсометрической поверхностей Венеры. / К. К. Каменский // Изучение Земли как планеты методами астрономии, геодезии и геофизики: Тр. II Орловской конференции / К.К. Каменский. – Киев: Наукова думка, 1982. – С 80– 83.
30. Камке Д. Физические основы единиц измерения / Д. Камке, К. Крамер. - М.: Мир, 1980. – 208 с.
31. Картвелишвили К.М. Нормальный потенциал и сила тяжести в пространстве и на поверхности уровенного эллипсоида. Геофизический сборник / К.М. Картвелишвили. – №82. – С. 9–23.
32. Картвелишвили К.М. Планетарная плотностная модель и нормальное гравитационное поле Земли / К. М. Картвелишвили.- М : Наука,1982. – 93 с.
33. Клеро А. Теория фигуры Земли, основанная на началах гидростатики / А. Клеро. – М. – Л.: Изд-во АН СССР,1947. – 358 с.
34. Козленко В.Г. Построение плотностной модели Земли по гравиметрическим данным / В. Г. Козленко, В. И. Старостенко, Г. А. Мещеряков, Ю. П. Дейнека. // Геофиз. журн. – 1979. – №3. – С. 3–21.
35. Колмогоров А.М. Элементи теорії функцій і функціонального аналізу / А.М. Колмогоров, С. В. Фомін., 1974. – 456 с.
36. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров. / Г. Корн, Т. Корн.- М.: Наука, 1973. – 831 с.
37. Марченко А.Н. Аппроксимация глобального, регионального и локального гравитационного поля Земли системой потенциалов нецентральных мультиполей. Тр. II Орловской конференции. “Изучение Земли как планеты методами астрономии, геодезии и геофизики” / А. Н. Марченко. – Киев: Наукова думка, 1982. С. 56– 59.
38. Марченко А.Н. Гильбертовы пространства функций, гармонических вне сферы Бьерхамера, глобальная функция аномального поля / А. Н. Марченко. – Киев: М.: Наука, 1983. – 22 с. – (Рукопись деп. В УкрНИИНТИ, № 292 Ук-Д83).
39. Марченко А.Н. О некоторых фундаментальных постоянных, определяющих динамическую и геометрическую фигуры Земли и планет / А. Н. Марченко // Изучение Земли как планеты методами астрономии, геодезии и геофизики: Тр. I Орловской конференции. – Киев: Наукова думка, 1982. – С. 11– 19.
40. Марченко А.Н. Преобразование стоксовых постоянных при вращении координатной системы / А.Н. Марченко. // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. – 1977. – №25. – С. 46–55.

41. Марченко О.М. Дослідження гравітаційного поля, топографії океану та рухів земної кори в регіоні Антарктиди: монографія / [О.М. Марченко, К.Р. Третьяк, А.Я. Кульчицький, та ін.]. – Львів.: Видавництво Львівської політехніки, 2012. – 308 с.
42. Марченко О.М. Оцінка впливу невизначеності основних фундаментальних сталих на точність розподілу густини еліпсоїдальної Землі / О.М. Марченко, Н.П. Ярема // Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва. Львів, 2003. – С. 77–84.
43. Машимов М.М. Теоретическая геодезия: Справочное пособие // под. ред. В.П. Савиных и В.Р. Яценко. / М.М. Машимов. -М.: Недра, 1991. – 268 с.
44. Медведев П.П. Исследование гравитационного поля и фигуры Земли новыми методами космической геодезии. / П.П. Медведев // Итоги науки и техники. Геодезия и аэросъемка. - М.: ВИНТИ, 1980. – С. 16 – 111.
45. Мещеряков Г.А. О корректности одной обратной задачи теории потенциала / Г. А. Мещеряков. // Известия АН СССР. Физика Земли. – 1969. – №8. – С. 54–59.
46. Мещеряков Г.А. Об единственности решения одной обратной задачи теории потенциала / Г.А. Мещеряков. // Сиб. Мат. Журн. – 1970. – 11, С.1184-1187. №5.
47. Мещеряков Г.А. Динамическая фигура Луны и распределение плотности лунных недр / Г.А. Мещеряков. // Астрон. Журнал. – 1973. – №1. – С. 186–199.
48. Мещеряков Г.А. О среднем значении внутреннего потенциала Земли / Г.А. Мещеряков. // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. – 1974. – №19. – С. 61–62.
49. Мещеряков Г.А. Об одном варианте приближенного представления внешнего гравитационного потенциала планеты / Г. А. Мещеряков. // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. – 1975. – №21. – С. 23–30.
50. Мещеряков Г.А. Использование стоксовых постоянных Земли для уточнения её механической модели / Г.А. Мещеряков. // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. – 1975. – №21. – С. 23–30.
51. Мещеряков Г.О. Про одну теорему єдиності розв'язку оберненої задачі теорії потенціалу / Г.О. Мещеряков. // Доповіді АН УРСР, Сер. А. – 1977. – №6. – С. 494– 495.
52. Мещеряков Г.А. Новая интерпретация представления внешнего гравитационного потенциала планеты рядом шаровых функций / Г.А. Мещеряков. // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. – 1978. – №28. – С. 68–75.

53. Мещеряков Г.А. Обратные задачи теории потенциала (лекция на Межд. зимней школе “Теоретические и экспериментальные вопросы планетарной геодинамики”, 29. IX–9. X. 1983). / Г.А. Мещеряков. – Киев, 1983. – 32 с.
54. Мещеряков Г. А. О дефиниции потенциала притяжения планеты на ее поверхности и в ближайшей окрестности. / Г.А. Мещеряков // Труды II Орловской конференции ” Изучения Земли как планеты методами геофизики, геодезии и астрономии / Г.А. Мещеряков. – Полтава, 1986. – С. 85–88.
55. Мещеряков Г. А. Задачи теории потенциала и обобщенная Земля / Г.А. Мещеряков. – М.: Наука, 1991. – 216 с. – (Гл. ред. Физ– мат. лит).
56. Мещеряков Г.А. Нетрадиционная нормальная Земля / Г.А. Мещеряков, Н.Ф. Агеев, М.М. Фыс // Труды II Орловской конференции «Изучение Земли как планеты методами геофизики, геодезии и астрономии». – Киев. – 1988. – С. 31–33.
57. Мещеряков Г.А. О степенных моментах плотности земных недр / Г.А. Мещеряков, А.В. Голикова. // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. – 1976. – №24. – С. 68–77.
58. Мещеряков Г.А. О некоторых новых моделях Земли / Г.А. Мещеряков, А.В. Голикова, Ю.П. Дейнека. // Геофизический сборник АН УССР. – 1974. – №60. – С. 72–80.
59. Мещеряков Г.А. Об эллипсоидальном распределении плотности земных недр / Г.А. Мещеряков, Ю.П. Дейнека. // Геофизический сборник АН УССР. – 1978. – №86. – С. 46–53.
60. Мещеряков Г.А. О представлении функции внутри общеземного эллипсоида частичной суммой обобщенного ряда Фурье / Г.А. Мещеряков, Ю.П. Дейнека, И.Н. Шопяк. // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. – 1977. – №26. – С. 55–62.
61. Мещеряков Г.А. Вариант механической модели нижней мантии / Г.А. Мещеряков, П.М. Зазуляк, О.В. Кулько, М.М. Фыс, П.И. Штабалюк // Труды III Орловской конференции «Изучение Земли как планеты методами астрономии, геофизики и геодезии», Наукова думка. – Киев. – 1994. – С. 172–177.
62. Мещеряков Г.А. О биортогональных системах внутри эллипсоида / Г.А. Мещеряков, М.М. Фыс // Теоретические и прикладные проблемы вычислительной математики. – Москва, 1981. – С. 120.
63. Мещеряков Г.А. Определение плотности Земных недр рядами по биортогональным системам многочленов / Г.А. Мещеряков, М.М. Фыс Теория и методы интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. 1981. –С. 329–334.

64. Мещеряков Г.А. Об использовании многочленов биортогональных в эллипсоиде, при вычислении плотности земных недр / Г.А. Мещеряков, М.М. Фыс // Тезисы докладов конференции «Новые подходы к решению дифференциальных уравнений» – Дрогобыч, 1987. – С. 32.
65. Мещеряков Г.А. О связи степенных моментов плотности земных недр со стоковыми постоянными / Г.А. Мещеряков, М.М. Фыс. // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. – 1979. – №30. – С. 100–113.
66. Мещеряков Г.А. Трехмерная и референсная плотностные модели Земли / Г.А. Мещеряков, М.М. Фыс // Геофизический журнал. – Киев.–1986, т.8, №4.– С. 68-75.
67. Мещеряков Г.А. Трехмерная плотностная модель Земли. 1 / Г.А. Мещеряков, М.М. Фыс // Геофизический журнал. – Киев.–1990, т. 12, №4.– С. 50–57.
68. Мещеряков Г.А. Трехмерная плотностная модель Земли. 2 / Г.А. Мещеряков, М.М. Фыс // Геофизический журнал. – Киев.–1990, т. 12, №5. – С. 11-20.
69. Мещеряков Г.А. Гравитационное поле, фигура и внутреннее строение Марса / Г.А. Мещеряков, А.Л. Церклевич. – Киев: Наук. Думка. – 240 с.
70. Молоденский М.С. Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли. – Тр. ЦНИИГАиК / М.С. Молоденский, В.Ф. Еремеев, М. И. Юркина. – 1960. – №131. – С. 121.
71. Молоденский С.М. Приливы, нутация, и внутреннее строение Земли. Институт физики Земли АН СССР / С.М. Молоденский., 1984. – 213 с.
72. Мориц Г. Фигура Земли: Теоретическая геодезия и внутреннее строение Земли. / Г. Мориц. – Киев, 1994. – 240 с.
73. Муратов Р.З. Потенциалы эллипсоида / Р.З. Муратов. – Москва: Атомиздат, 1976. – 144 с.
74. Натансон И.П. Конструктивная теория функций / И.П. Натансон., 1949. – 688 с.
75. Нейман Ю.М. Вариационный метод физической геодезии / Ю.М. Нейман.- М.: Наука,1979. – 198 с.
76. Новиков П.С. Об единственности решения обратной задачи потенциала / П.С. Новиков. // ДАН СССР. – 1938. – №3. – С. 165–168.
77. Ньютон И. Математические начала натуральной философии / И. Ньютон, А.Н. Крылов // Сочинения, Т. 7., 1936.
78. Оганесян С.М. Тела нулевого внешнего потенциала: О забытых теориях и современном состоянии теории / С.М. Оганесян, В.И. Старостенко. // Физика Земли. – 1985. – №3. – С. 49–62.

79. Остач О. М. Аппроксимация внешнего гравитационного поля Земли моделью гравитирующих точечных мас. Тр. I Орловской конференции. “Изучение Земли как планеты методами астрономии, геодезии и геофизики” / О.М. Остач, И.Н. Агеева. – Киев: Наукова думка, 1982. – 106 с.
80. Пеллинен Л.П. Высшая геодезия (Теоретическая геодезия) / Л.П. Пеллинен. – Москва: “Недра”, 1978. – 264 с.
81. Пеллинен Л.П. Физическая геодезия // Итоги науки и техники. Геодезия и аэрофотосъемка. Т.18. / Л.П. Пеллинен, Ю.М. Нейман. – Москва: ВИНТИ, 1980. – 132 с.
82. Петровская М.С. Представление гравитационного потенциала Земли в виде рядов, сходящихся во всем пространстве. Тр. I Орловской конференции “Изучение Земли как планеты методами астрономии, геодезии и геофизики” / М.С. Петровская. – Киев: Наукова думка, 1982. – 115 с.
83. Прилепко А.И. О разрешимости обратной задачи объемного потенциала переменной плотности / А.И. Прилепко. // Сиб. Мат. Журн. – 1970. – №2. – С. 288–291.
84. Прилепко А.И. Об единственности определения формы и плотности тела в обратных задачах теории потенциала / А.И. Прилепко. // ДАН СССР. – 1970. – №2. – С. 288–291.
85. Сагитов М.У. Иерархия гравиметрий / М.У. Сагитов // Труды II Орловской конференции « Изучения Земли как планеты методами геофизики, геодезии и астрономии» – Киев, 1988. – С. 42–56.
86. Сагитов М.У. Лунная гравиметрия / М.У. Сагитов. – Москва: Наука, 1979. – 432 с.
87. Сагитов М.У. Результаты определения кавендишевой постоянной, массы и средней плотности Земли / М.У. Сагитов, В.К. Милюков. // Астрон. Циркуляр. – 1979. – №1038. – С. 4–6.
88. Свешников А.Г. Теория функций комплексного переменного / А.Г. Свешников. – М: Наука, 1974. – 319 с.
89. Сеге Г. Ортогональные многочлены / Г. Сеге. – Москва: Физматгиз, 1962. – 500 с.
90. Сретенский Л.Н. Теория ньютонового потенциала / Л.Н. Сретенский. – М. –Л.: Гостехиздат, 1946. – 318 с.
91. Старостенко В. И. Методика решения прямых задач гравиметрии и магнитометрии на шарообразных планетах / В.И. Старостенко. – Киев: Наукова думка, 1986. – 112 с.
92. Стокс Д. О силе тяжести на земной поверхности / Д. Стокс // В сб.: Статьи о силе тяжести и фигуре Земли. – М.: Из-во геодезической лит, 1961. – С. 152.

93. Страхов В.Н. Состояние и перспективы развития в СССР теории и интерпретации гравитационных магнитных аномалий / В.Н. Страхов. // Физика Земли. – 1982. – №5. – С. 11–23.

94. Тарадий В.К. Вычисление траекторий искусственных спутников Земли. Построение алгоритмов и программ метода Адамса с переменным шагом и порядком / В.К. Тарадий. – Киев: 1984. – 38 с. – (Препринт / АН УССР, Ин.-т теорет. Физики: ИТФ. 84-92 P).

95. Толстов Г.П. Ряды Фурье / Г.П. Толстов. – М.: Наука, 1980. – 381 с.

96. Фис М.М. О приближенном решении одной обратной задачи теории потенциала для эллипсоида / М.М. Фис // сб. научных трудов "Общая теория граничных задач" / М.М. Фис. – Киев: Наукова думка, 1983. – С. 299–300.

97. Фис М.М. Использование биортогональных разложений для вычисления потенциала эллипсоида / М.М. Фис. // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. – 1984. – №40. – С. 114–116.

98. Фис М.М. Методика построения распределений плотности, потенциала и ускорения силы тяжести внутри общеземного эллипсоида / М.М. Фис. – Львов: Укр. ВИНТИ, 1985. – 29 с. – (Деп.рук. №471). – (УК– 85).

99. Фис М.М. О вычислении модельных стоксовых постоянных Земли, соответствующих представлению ее плотности частной суммой обобщенного ряда Фурье/ Міжвідомч. Наук. техн. збірник / М.М. Фис. // «Геодезія картографія і аерофотознімання». – 1982. – №36. – С. 103–107.

100. Фис М.М. Метод сумісного аналізу внутрішньої будови, фігури і гравітаційного поля Землі / М.М. Фис // «Геодинаміка». – Львів. – 1998, №1. – С. 141–143.

101. Фис М.М. Про один клас неортогональних для еліпсоїда гармонійних функцій / М.М. Фис // Збірник наукових праць Західного геодезичного товариства УТГК «Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва». – Львів. – 2006, Вип. I (11). – С. 126–130.

102. Фис М.М. До визначення густини розподілу мас в центрі планети / М.М. Фис // «Геодинаміка». – Львів. – 2006, №1(5). – С. 17–20.

103. Фис М.М. Про один метод визначення внутрішнього потенціалу і гравітаційної енергії еліпсоїдальної планети / М.М. Фис // Збірник наукових праць Західного геодезичного товариства УТГК «Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва». – Львів. – 2008, Вип. I (15). – С. 106– 109.

104. Фис М.М. Приведення фундаментальних сталих у загальну планетарну систему відліку і використання їх при побудові тривимірних

функцій розподілу мас планет / М.М. Фис // Вісник геодезії та картографії. – Київ. – 2008, №4. – С. 11 – 13.

105. Фис М.М. Розклад гравітаційного поля тривісної еліпсоїдальної планети з використанням одного класу не ортогональних гармонійних функцій / М.М. Фис // Міжвідомчий науково-технічний збірник «Геодезія, картографія і аерофотознімання». – Львів. – 2011, Вип. 74. – С. 34–37.

106. Фис М.М. Про один варіант побудови функції розподілу мас еліпсоїдальної планети, узгодженої з стоксовими сталими до четвертого порядку / М.М. Фис, В.О. Волос, І.Я. Покотило // XIII міжнародний науково-технічний симпозіум «Геоінформаційний моніторинг навколишнього середовища: GPS і GIS – технології». – Алушта (Крим). – 2008р. – С. 31-33.

107. Фис М.М. Про еквівалентність одного класу гармонійних функцій з кульовими функціями при представленні потенціалу планети / М.М. Фис, А.М. Бридун, А.Р. Согор, Ю.Г. Кордуба // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія Географія. Землеустрій. Природокористування. – Ужгород. – 2014, Вип. №3, – С. 88-92.

108. Фис М.М. Модельное распределение ускорения силы тяжести на общеземном эллипсоиде / М.М. Фис, П.М. Зазуляк // Львов. политехн. ин-т, Деп. В УкрНИИНТИИ. – Львов. – 01.04.91. №407–Ук91. – 1991. – 9с.

109. Фис М.М. Методи побудови деяких інтегральних характеристик для еліпсоїдальних планет / М.М. Фис, П.М. Зазуляк, В.О. Волос // VI міжнародний науково-технічний симпозіум геоінформаційний моніторинг навколишнього середовища – GPS і GIS – технології». – Алушта (Крим). – 2001. – С.9–10.

110. Фис М. М. До питання визначення кульових функцій в загальнопланетарній системі координат / М. М. Фис, П. М. Зазуляк, О. С. Заяць // Збірник наукових праць Західного Геодезичного Товариства „Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва” / М. М. Фис, П. М. Зазуляк, О. С. Заяць. – Львів: Ліга–Прес, 2004. – С. 401–408.

111. Фис М.М. Про один комбінований метод знаходження потенціалу радіальної еліпсоїдальної планети / М. М. Фис, П. М. Зазуляк, О. С. Заяць // „Геоінформаційний моніторинг навколишнього збірник матеріалів Х ювілейного науково–технічного симпозіуму 6–11 вересня 2005 р., Алушта (Україна, Крим) – С. 39–41.

112. Фис М.М. Значення та варіації густини у центрі мас еліпсоїдальних планет / М.М. Фис, П.М. Зазуляк, П.Г. Черняга // Науково-теоретичний журнал «Кинематика и физика небесных тел». – Київ.–2013, т.29, №2. – С. 62–68.

113. Фис М.М. Про формули представлення динамічного стиску в довільній планетарній системі координат / М.М. Фис, П.М. Зазуляк, В.О. Волос, І.Я. Покотило // Український міжвідомчий науково-технічний збірник «Геодезія, картографія і аерофотознімання». – 2003, Вип. 64. – С. 97-98.

114. Фис М.М. Знаходження оцінки для густини в центрі еліпсоїдальної планети / М.М. Фис, А.Р. Согор, З.О. Котик // Український міжвідомчий

науково-технічний збірник «Геодезія, картографія і аерофотознімання». – Львів. – 2006, Вип. 67. – С.7–9.

115. Фис М.М. Метод знаходження густини розподілу мас планети з урахуванням стоксових сталих до четвертого степеня / М.М. Фис, Р.С. Фоца, А.Р. Согор, В.О. Волос // «Геодинаміка». – Львів. – 2008, № 1(7). – С. 25–34.

116. Фис М. М. Дослідження гідростатичного стану для тривимірного розподілу мас другого порядку сферичної та еліпсоїдальної Землі / М.М. Фис, П.Г. Черняга, А.М. Бридун // Збірник наукових праць Західного геодезичного товариства УТГК «Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва». – Львів. – 2013, Вип. II (26). – С. 53-57.

117. Фис М.М. Використання потенціалу та його похідних при побудові моделей розподілу мас Землі / М.М. Фис, Ю.П. Губар // Міжнародний симпозиум «Геодинаміка гірських систем Європи»,(тези доповідей). – Львів-Яремче. – 1994. С. 48–49.

118. Фис М.М. Про один комбінований метод побудови модельного розподілу мас земних надр / М.М. Фис, Ю.П. Губар // Збірник наукових праць науково-технічної конференції, «Сучасні досягнення геодезії, геодинаміки та геодезичного виробництва». – Львів. – 1999, №1. – С. 41-42.

119. Фис М.М. Про один метод побудови еквіпотенціальних поверхонь / П.М. Зазуляк, М.М. Фис, Ю.П. Губар // «Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва». – Львів. – 2000. – С. 41–43.

120. Фис М.М. Один варіант наближеного знаходження розподілу мас еліпсоїдальних планет / М.М. Фис, П.М. Зазуляк, В.І. Нікулішин. // Вісник Львівського національного аграрного університету. Архітектура і сільськогосподарське будівництво. – 2011. – №12. – С. 198–203.

121. Фис М.М. Про єдиний алгоритм визначення значень густини, потенціалу та енергії одновимірного розподілу мас еліпсоїдальної планети / М.М. Фис, В.І. Нікулішин // Міжвідомчий науково-технічний збірник «Геодезія, картографія і аерофотознімання». – Львів. – 2009, Вип.71. – С. 90-95.

122. Фис М.М. Нетрадиційний метод побудови поверхонь рівня планети (геоїда, селеноїда, аероїда) за її зовнішнім гравітаційним полем / М.М. Фис, Ю.П. Губар, І.Я. Покотило // Збірник наукових праць конференції «Сучасні досягнення геодезичної науки і виробництва в Україні». – Львів. – 1997. – С. 39–42.

123. Фис М.М. Побудова функції розподілу мас та її похідних для кульової планети з використанням даних про її гравітаційне поле / М.М. Фис, І.Я. Покотило, Ю.Г. Кордуба, Н.М. Фроміль, Г.С. Лех // VII Міжнародна науково-практична конференція «Новітні досягнення геодезії, геоінформатики та землевпорядкування – Європейський досвід». – Чернігів. – 2012. – С. 51–55.

124. Фис М.М. Використання одного класу гармонійних функцій для розкладу потенціала Землі / М.М. Фис, І.Я. Покотило, В.М. Новосад // Збірник наукових праць міжнародної науково-практичної конференції «Геодезичний



моніторинг, геодинаміка і рефрактометрія на межі ХХІ століття». – Львів. – 1998. – С. 8–11.

125. Фис М.М. Наближений метод побудови тримірної моделі Землі з врахуванням тонких структур її зовнішнього гравітаційного поля / М.М. Фис, І.Я. Покотило, В.М. Новосад // Збірник наукових праць науково-технічної конференції «Сучасні досягнення геодезії, геодинаміки та геодезичного виробництва». – Львів. – 1999, №2. – С. 43–45.

126. Фис М.М. Апроксимація потенціалу планети неперервними функціями / М.М. Фис, А.Р. Согор, Р.С. Фоца // «Геодинаміка». – Львів. – 2007, №1(6). – С. 11–15.

127. Фис М.М. Про можливість визначення коефіцієнтів розкладу потенціалу всюди збіжними рядами та їх геофізичне тлумачення / М.М. Фис, А.Р. Согор, Р.С. Фоца // XVII міжнародний науково-технічний симпозиум «Геоінформаційний моніторинг навколишнього середовища: GNSS і GIS – технології». – Алушта. (Крим). – 2012. – С. 115–120.

128. Фис М.М. Побудова точних моделей мас планет з урахуванням стоксових постійних вищих порядків / М.М. Фис, Р.С. Фоца, А.Р. Согор // Збірник наукових праць «Новітні досягнення геодезії, геоінформатики та землевпорядкування – Європейський досвід». – Чернігів. – 2007, Вип. 3. – С. 43-53.

129. Фис М.М. Нетрадиційне розгортання потенціалу Землі / М.М. Фис, І.Я. Покотило // Міжнародний симпозиум «Геодинаміка гірських систем Європи» (тези доповідей). – Львів-Яремче. – 1994. – С. 50.

130. Фис М. Наближення одновимірних розподілів мас еліпсоїдальних тіл рядом по поліномах Лежандра та способи покращення збіжності. / М.М. Фис, В.І. Нікулішин, І.Я. Покотило, З.О. Котик // Міжнародна науково-практична конференція “Новітні досягнення геодезії, геоінформатики та землевпорядкування – Європейський досвід” / М.Фис, В. Нікулішин, І. Покотило, З. Котик. – Чернігів: 2009. – С. 42–44.

131. Фис М.М. Аналіз впливу еліпсоїдальності фігури Землі на її внутрішню структуру на прикладі моделі PREM / М.М. Фис, В.І. Нікулішин // «Геодинаміка». – Львів. – 2011, № 1 (10). – С. 17–21.

132. Фис М.М. Методи апроксимації радіальних розподілів мас планет многочленами Лежандра і дослідження їх збіжності/ М.М. Фис, В.І. Нікулішин, І.Я. Покотило // Матеріали XV міжнародного науково-технічного симпозиуму “Геоінформаційний моніторинг навколишнього середовища GPS і GIS – технології” . 13–18 вересня, 2010 р., Алушта (Крим) – С. 258–259.

133. Фис М.М. Метод дослідження стану гідростатичної рівноваги трьохвимірної еліпсоїдальної планети / М.М. Фис, В.І. Нікулішин, І.Я. Покотило // XVI міжнародний науково-технічний симпозиум

«Геоінформаційний моніторинг навколишнього середовища GPS і GIS – технології». – Алушта (Крим). – 2011. – С. 99-103.

134. Фис М.М. Методи апроксимації радіальних розподілів густини мас планет многочленами Лежандра і дослідження їх збіжності / М.М. Фис, В.І. Нікулішин, І.Я. Покотило // XV Міжнародний ювілейний науково–технічний симпозіум . Геоінформаційний моніторинг навколишнього середовища: GPS і GIS – технології. 13–18 вересня, 2010 р., Алушта (Крим). – С. 258–259.

135. Фис М.М. Потенціал та його радіальні похідні тришарових кульових планет / М.М. Фис, А.Р. Согор, В.І. Нікулішин // Збірник матеріалів ХУШ Міжнародний науково - технічний симпозіум “Геоінформаційний моніторинг навколишнього середовища: GNSS і GIS – технології”, 10-15 вересня 2013 р., Алушта (Крим). – С. 229–233.

136. Фис М.М. Порівняльний аналіз формул для потенціалу та його радіальних похідних тришарових кульових та еліпсоїдальних планет / М.М. Фис, Ю.І. Голубінка, М.І. Юрків // Збірник наукових праць Західного геодезичного товариства УТГК «Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва». – Львів. – 2014, Вип. I (27). – С. 46-51.

137. Фис М. М. Використання многочленів Лежандра для апроксимації одновимірних розподілів густини мас планет та дослідження їх збіжності / М.М. Фис, В.І. Нікулішин, Р.М. Озімбловський. // Міжвідомч. Наук. техн. збірник «Геодезія картографія і аерофотознімання». – 2010. – №73. – С. 3–6.

138. Фис М.М. Про один метод визначення потенціалу неоднорідної еліпсоїдальної планети / М.М.Фис, О.С. Заяць, Р.С. Фоца, В.О. Волос // Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва. 2005. – С. 236–239.

139. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференціального и інтегрального исчисления. В 3-х томах / Г. М. Фихтенгольц. – К.: Высшая школа, 1992.

140. Церклевич А. Л. Методи і моделі дослідження та інтерпретації гравітаційного поля планет земної групи : автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук : 05.24.01 - геодезія, фотограмметрія і картографія / Анатолій Леонтійович Церклевич ; Національний університет "Львівська політехніка". - Львів, 2011. - 34 с.

141. Церклевич А. Л. Гравітаційні моделі тривимірного розподілу густини планет земної групи / А.Л. Церклевич, О.С. Заяць, М.М. Фис // «Геодинаміка». – Львів. – 2012, №1 (12). – С. 42–53.

142. Церклевич А.Л. Визначення неоднорідностей внутрішньої будови Марса та Місяця за даними їхніх гравітаційних полів Місяця / А.Л.Церклевич, О.С. Заяць, П.М. Зазуляк, М.М. Фис. // Науково-теоретичний журнал «Кинематика и физика небесных тел». – 2010. –2, том 26. – С. 59–73.

143. Чандрасекхар С. Эллипсоидальные фигуры равновесия / С. Чандрасекхар. – М.: Мир, 1973. – 288 с.

144. Черняга П.Г. Новый підхід до використання стоксових сталих для побудови функцій та її похідних розподілів мас планет / П.Г. Черняга, М.М. Фис // Збірник наукових праць Західного геодезичного товариства УТГК «Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва». – Львів. – 2012, Вип. II (24). – С. 40–43.

145. Черняга П.Г. Порівняння одного класу гармонічних та кульових функцій при представленні потенціалу планети / П.Г. Черняга, М.М. Фис, Ю.І. Голубінка, М.І. Юрків // Збірник наукових праць Західного геодезичного товариства УТГК «Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва». – Львів. – 2014, Вип. II (28). – С. 19-23.

146. Чуйкова Н. А. Построение сходящегося во внешнем пространстве разложения потенциала притяжения эллипсоида произвольного эксцентриситета / Н.А. Чуйкова // Тр. I Орловской конференции «Изучение Земли как планеты методами астрономии, геодезии и геофизики» – Киев: Наук. думка, 1982. – С. 120–121.

147. Шен Э.Л. О вариационном подходе к построению плотностной модели Земли / Э. Л. Шен. // Геофизический сборник АН УССР. – 1977. – №80. – С. 44–77.

148. Щербаков А.М. Объемное распределение плотности Луны / А. М. Щербаков. // Астрономический весник, т. XII. – 1978. – №2. – С. 88–95.

149. Яцкив Я.С. Нутация в системе астрономических постоянных / Я.С. Яцкив. – Киев, 1980. – 59 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т теор. физики; ИТФ–80–95Р).

150. Anada M.P. Lunar gravity: a mass point model / M. P. Anada // J. Geophys. Res. / M.P. Anada., 1977. – P. 3049–3064.

151. Appel P. Functions hyperspheriques et hepergeometriques polenomes, d 'Hermine / P. Appel, G. Kampe de Feriet. – Paris: Gauthier– Villars, 1926. – 720 p.

152. Bolt B. Upper bound to the density jump at the boundary of the Earth's inner core / B. Bolt, A. Qamar. // Nature London. – 1970. – №228. – P. 148–150.

153. Bullen K. Earth's central density /K. Bullen. // Nature London. – 1962. – №196. – С. 973.

154. Bullen K. Rigidity and density in the Earth's coredensity /K. Bullen. // Nature London. – 1964. – №201. – С. 807.

155. Bursa M. Distribution of gravitational potential energy within the Solar system / M. Bursa. // Earth, Moon and planets. – 1970. – №62-p. 149–159.

156. Bursa M. Gravitational potential energy of the Sun / M. Bursa, I. Krivsky, O. Novorkova. // Studia geoph. Et geod. – 1996. – №40. – p. 1–8.

157. Cajori I. Newton's Principia / I. Cajori. // U. of Calif. Press, Berkeley.- 1946. – p. 634 .
158. Chen K.K. representative portions of type series of all species discussed herein / K.K.Chen. // Sci. Rep.Tohoku Imp. Univ. – 1928. – №1. – C. 1073–1086.
159. Cunningham L. On the computation of the spherical harmonic terms needed during the numerical integration of the orbital motion of an artificial satellite /.L. Cunningham. // Celest.Mech. – 1970. – №2. – p. 207–216.
160. Dzewonski A. Parametrically Simple Earth models, consistent geophysical data / A. Dzewonski, A. Halls, E. Lapwyd. // Physics of the Earth and Planet Inter. – 1975. – №10. – P. 12–48.
161. Dzewonski A. Preliminary reference Earth model. / A. Dzewonski, D. Anderson. // Physics of the Earth and Planet Inter. – 1981. – №25. – p. 297–356.
162. Freeman R.C. Data for Neptune from occultation observations / R.C. Freeman . G. Lunga –Astrophys. J.-1970- № 160.- p. 767-780.
163. Hubbard, W.B., de Sitter's Theory flattens Jupiter //W.B. Hubbard, W. B., Icarus.- 1977.-№ 30, p.311–313.
164. Hagivara Y. A short Article on the Second and Lower Degree Terms in the Elipsoidal Harmoniks / Y. A Hagivara. // Reasarch Institute. – 1981. – p. 441–447.
165. Hofmann–Wellenhof B. / Physical Geodesy // B. Hofmann–Wellenhof, H. Moritz., 2005. – 403 p.
166. Jacobi C. Uber die Figur des Gleichgewichts / C. Jacobi. // Poggendorff Annallen der Physik und Chemie. – 1834. – №33. – p. 229–238.
167. Konopliv A. Resent gravity models as a result of the Lunar Prospector mission / A. Konopliv, S. Asmar, D. Yuang. // Icarus. – 2001. – №150. – p. 1–18.
168. Konopliv A. Venus gravity: 180 th degree and order model / A. Konopliv, W. Banerdt, W. Sjogren. // Icarus. – 1999. – №139. – p. 3-18.
169. Koschmieder L. Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik/ L. Koschmieder. // Jber. Deutsch. Math. – 1925. – №84. – p. 57 – 64.
170. Lemoine F.G. An improved solution of the gravity field of Mars (GMM-2B) from Mars Global Surveyor / F.G. Lemoine, D.D. Smith, D.E. Rowlands. // J. Geophys. Res. – 2001. – p. 23359–23376.
171. Lerch F.I. model improvement using GEOS-3 (GEM 9 and 10) /F. I. Lerch. // J. Geophys. Res. – 1979. – №138. – p. 3897–3916.
172. Lerch F.I. Coddard earth models for oceannograraphic applications (GEM-10 B and 10 C ) / F.I. Lerch, B. Putney. // Mar/ Geodes. – 1981. – №2. – p. 145–185.

173. Marchenko A.N. On the representation of planet's gravitational and magnetic fields. Planet's radial density profiles / A.N. Marchenko. // *Astronomical Report's, Uman.* – 2000. – p. 24.
174. Marchenko A. N. Estimation of the potential gravitational energy of the Earth based on reference density models / A.N. Marchenko, A.S. Zayats. // *Геодинамика.* – 2008. – p. 5–24.
175. Marchenko A.N. A note on standard parameterization of the Earth's dynamic figure and Darwin's density distribution / A.N. Marchenko, O.A. Abrikosov. // *ANNOLIX Boolletino Di Geodesia Y Scinnze AFFINI.* – 2000. – №4. – p. 335–348.
176. Marchenko A.N. HYDROSTATIC/ISOSTATIC EARTH'S REFERENCE MODELS of IAG/ Special Commission 1 for the period 1999-2003 / A.N. Marchenko. // *Geodynamics.* – 2004. – №1(). – p. 75–78.
177. Marchenko A.N. Earth's radial density profiles based on Gauss' and Roshe's distributions / A.N. Marchenko. // *ANNOLIX Boolletino Di Geodesia Y Scinnze AFFINI–N 3.* – 2000. – №3. – p. 201–220.
178. Marchenko A.N. Estimation of the Earth's tensor inertia from recent global gravity field solutions / A.N. Marchenko, P. Schwitzer. // *Journal of geodesy.* – 2003. – №76. – p. 495–509.
179. Martinenc Z. Three –Dimensional Density Distribution Generating the Observed Gravite Field of planets: Part II. The Moon / Z. Martinenc, K. Pec. // *Proc. Int. Symp. Figure of the Earth, the Moon and other Planets. Czechoslovakia, Prague.* – 1986. – №1. – p. 153–163.
180. Maxwell J.K. *Treatise on Electricity and Magnetism. 2nd Edition* / J.K. Maxwell. // *Oxford.* – 1881.-182 p.
181. Mehcherykov G.A. On the Spheroidal Normal Earth / G.A. Mehcherykov, N.F. Ageyev, M.M. Fys // *Proceedings of the International Symposium «Figure and Dynamics of the Earth, Moon, and Planets».* – Prague. –1987, Sep. 15–20. –P. 95-117.
182. Moritz G. Computatson ellipsoidal mass distributions /G. Moritz. // *Department of Geodetic Science, The Ohio State University.* – 1973. – №206. – p. 20.
183. Moritz G. Fundamental geodetic constant / G. Moritz. // *Proceedings of the IAG XVII Gener. Assemb. IUGG/IAG/.* – 1979. – p. 24.
184. Pavlis N. K. An Earth Gravitational Model to degree 2160: EGM2008 / N.K. 11. Pavlis, S. A. Holmes, S. C. Kenyon. // *EGU General Assembly. Geophysical Reaseach Abstracts.* – 2008. – №10. – p. 2.
185. Rapp R.H. The Earth gravity field to degree and order 180 using SEASAT altimeter data, terrestrial data and other data /R.H. Rapp. // *Report. Depart. of Geod. Science and surveying.* – 1981. – №322. – p. 52.

186. Rubincam D.P. Gravitational potential energy of the Earth. A spherical approach / D.P. Rubincam // *Journal of Geophysical Research*. – 1979. – №84. – p. 6219–6225.
187. Schwarz K.P. Capabilities of airborne gradiometry for gravity estimation / K.P. Schwarz. // *Bull. Geodesic. Affini.* – 2000. – №36. – p. 191–214.
188. Tisserman F. Capabilities of airborne gradiometry for gravity estimation / F. Tisserman. // *Fraite de Mecannique Celeste.* – 1891. – №2. – p. 552.
189. Todyunter I. History of the Mathematical Theories of Attraction and Figure of the Earth, / I. Todyunter. – London,,: Constable, 1873. – 249 p.
190. Warh J.M. A normal mode expansion for the forced response of a rotating Earth / J. M. Warh. // *Geophys. J. Astronom.* – 1981. – №2. – p. 651–675.
191. Warh J.M. The forced notations of an elliptical, rotating, elasting and oceanless Earth / J.M. Warh. // *Geophys. J. Astronom.* – 1982. – №2. – C. 200–215.
192. Weck N. Problem der Potential theorie / .N. Weck. // *Appl. Anal.* – 1972. – №2. – p. 195– 204.
193. Wentzel G. Ultra high degree geopotential models GPM 98A, GPM 98B and GPM 98C to degree 1800 / G. Wentzel. // *Finnish Geodetic Intitute , Masala.* – 1998. – p. 71–80.
194. Yung D.N. Gravity field of Mars: 75 degree and order model / D. N. . Yung, W. Sjogren, A. S. Konopliv A. S. // *Geophys. Res.* – 2001. – №10. – C. 23377–2340.
195. Zidarov D.P. A direct solution of the inverse gravimetrec problem at a given law of the density-trap method /D.P. Zidarov. // *Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences.* – 1978. – №31. – C. 1115–1118.

Додаток

Таблиця деяких інтегралів

$$1. \int_0^1 (\rho^2 - 1)^n \rho^m d\rho = \frac{(-1)^n n! 2^n (m-1)!}{(2n+m+1)!}$$

$$2. \int_0^\pi \cos^m \theta \sin^n \theta d\theta = \begin{cases} 0, & \text{якщо } m - \text{непарне} \\ \frac{2(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}, & \text{якщо } m - \text{парне, } n - \text{непарне} \\ \frac{\pi(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}, & \text{якщо } m, n - \text{парні} \end{cases}$$

$$3. \int_0^{2\pi} \cos^m \lambda \sin^n \lambda d\lambda = \begin{cases} 0, & \text{якщо } m \text{ або } n - \text{непарні} \\ \frac{2\pi(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}, & \text{якщо } m, n - \text{парні} \end{cases}$$

$$4. \int_\tau x^p y^q z^s d\tau = \begin{cases} 0, & \text{якщо } p \text{ або } q, \text{ або } s - \text{непарне} \\ \frac{3V_e a^p b^q c^s (p-1)!!(q-1)!!(s-1)!!}{(p+q+s+3)!!}, & \text{якщо } p, q, s - \text{парні} \end{cases}$$

$$5. \int_\tau (\rho^2 - 1)^n x^p y^q z^s d\tau = \begin{cases} 0, & \text{якщо } p \text{ або } q, \text{ або } s - \text{непарне} \\ \frac{2^n 3V_e a^p b^q c^s (p-1)!!(q-1)!!(s-1)!! n!(m-1)!!}{(2n+p+q+s+3)!!}, & \text{якщо } p, q, s - \text{парні} \end{cases}$$