

**Міністерство освіти і науки України  
Національний університет «Львівська політехніка»**

**Фис Михайло Михайлович**

УДК 528.21;550.312;521.21;52.17

**МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ РОЗПОДІЛУ ГУСТИНИ НАДР ПЛАНЕТ ТА ЇХ  
ГРАВІТАЦІЙНИХ ПОЛІВ**

05.24.01–геодезія, фотограмметрія та картографія

**Автореферат**  
дисертації на здобуття наукового ступеня  
доктора технічних наук

Львів–2016 р.

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Національному університеті «Львівська політехніка»  
Міністерства освіти і науки України

**Науковий консультант:** доктор технічних наук, професор  
**Черняга Петро Гервазійович**  
професор кафедри картографії та  
геопросторового моделювання  
Національного університету  
«Львівська політехніка»

**Офіційні опоненти:**

доктор технічних наук , професор  
**Перебудов Володимир Володимирович**  
Директор ДП «Державний інститут з проектування  
підприємств гірничорудної промисловості «Кривбаспроект»».

доктор фізико-математичних наук, професор  
**Міненко Павло Олександрович**  
професор кафедри інформатики та ПМ  
Криворізького національного університету

доктор фізико-математичних наук, професор  
**Джунь Йосип Володимирович**  
завідувач кафедри математичного моделювання  
Міжнародного економіко-гуманітарного університету імені  
академіка Степана Дем'янчука.

Захист відбудеться «    » \_\_\_\_\_ 2016 р. о \_\_\_\_\_ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.052.12 у Національному університеті «Львівська політехніка» за адресою: 79013, м. Львів-13, вул. С. Бандери, 12, ауд. 502 II навч. корп.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Національного університету «Львівська політехніка» (79013, м. Львів, вул. Професорська, 1)

Автореферат розісланий «    » \_\_\_\_\_ 2016 р.

Вчений секретар  
спеціалізованої вченої ради Д 35.052.12  
кандидат технічних наук, доцент \_\_\_\_\_ Паляниця Б.Б.

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми і постановка задач.** Розвиток методологічної, теоретичної та інструментальної бази геодезії і геофізики призвів до отримання принципово нових знань про фігуру, гравітаційне поле і будову Землі та процеси, які є в її надрах. У зв'язку з перспективою розробки загальної теорії еволюції Землі набули особливої актуальності проблемні питання фізичної геодезії і геодинаміки, успішне вирішення яких потребує інтегрованого підходу у напрацюванні знань в таких науках про Землю, як геодезія, геофізика, геологія та астрономія.

Тема дисертаційної роботи охоплює широкий спектр теоретичних досліджень у побудові математичних моделей, які розкривають взаємозв'язок між зовнішнім і внутрішнім гравітаційним полем та розподілом густини в надрах планети. Ці дослідження на абсолютно новому теоретичному рівні продовжують геодезичну історичну традицію, започатковану ще Клеро, котрий стверджував, що зовнішнє і внутрішнє поле сили тяжіння і його генеруюче джерело – розподіл густини всередині Землі, нерозривно взаємозв'язані. Астрономогеодезія, що вивчає фігуру і гравітаційне поле Землі за допомогою астрономогеодезичних та гравіметричних вимірювань і точного нівелювання, має майже 200-річну історію. Класичне вирішення природничо-наукових завдань астрономогеодезії на рубежі XIX-XX ст. подано в знаменитих творах Ф.А. Слудського, Г. Брунса, А. Пуанкаре і Ф.Р. Гельмерта, в яких наведені приклади тісного зв'язку астрономії, геодезії, механіки та математики. Новий розвиток астрономогеодезії в першій половині XX ст. пов'язаний з роботами Ф.Н. Красовського, в яких нова предметна область геодезії – фізична геодезія, визначена як «проблема вивчення внутрішньої структури земної кулі, твердої оболонки Землі, порушень рівноваги в ній, деформацій і переміщень різних частин літосфери». Він сформулював основні положення фізико-геометричного методу вивчення фігури Землі та її гравітаційного поля взагалі, а геоїда - зокрема, шляхом спільного використання даних астрономогеодезії, геології, геофізики, географії та геотектоніки. Ідеї міждисциплінарного вивчення фігури, гравітаційного поля і внутрішньої будови Землі знайшли своє продовження в багатьох наукових працях наприкінці XX ст. і були розвинуті та узагальнені в монографіях Г. Моріца «Фигура Земли: Теоретическая геодезия и внутреннее строение Земли» і М. М. Машимова «Планетарные теории геодезии» та «Теоретическая геодезия».

Дійсно, орбітальний рух і еволюція фігури планет значною мірою визначається їхньою внутрішньою структурною будовою та потенціалом сили ваги  $F$ . Потенціал притягання  $U$ , який є основною складовою величини  $F$ , генерується функцією розподілу мас  $\delta$  і поверхнею  $\tau$ , що обмежує тіло, та поділяється на внутрішній (саме  $U$ ) і зовнішній ( $V$ ). Значення  $U$  експериментально не визначається, а тому дані про  $V$ , які отримують із спостережень за орбітами штучних супутників Землі і результатами наземних гравіметричних вимірювань, є основним джерелом інформації.

Визначення зовнішнього потенціалу  $V$  Землі (планет) є основною задачею фізичної та супутникової геодезії. Методами її розв'язання займалися багато вчених, зокрема: С. М. Молоденський, Г. Моріц, Т. Краруп, Р. Рапп, Л. П. Пеллінен, Ю. М. Нейман, М. І. Юркіна, М. І. Сагітов, М. М. Машимов, М. С. Петровська,

К. В. Холшевников, Н. А. Чуйкова, Г. О. Мещеряков, О. М. Марченко, М. К. Мигаль, М. І. Марич, П. Д. Двудіт та інші. Представлення зовнішнього гравітаційного поля планет ортогональними функціями дозволило визначати потенціал  $V$  з великою точністю, за умови врахування великої кількості членів розкладу, наприклад, порядок сумування за кульовими функціями досягає тисячі і більше, що в свою чергу ставить питання збіжності такого математичного запису, особливо в приповерхневих областях планети.

Знаходження значень  $\delta$  і  $\tau$  за відомим  $V$  належить до оберненої задачі теорії потенціалу, яка характеризується неоднозначністю та нестійкістю її розв'язку. Фундаментальні роботи Стокса, а в подальшому і радикальна теорія Молоденського С. М. про визначення фігури Землі (планети) за її потенціалом  $V$ , дозволили звести задачу до формул без урахування внутрішнього розподілу мас, і це визначило шлях теоретичних та практичних наукових пошуків у вирішенні основної задачі геодезії. Саме С. М. Молоденському приписують відомий вислів, який був озвучений в дискусії з Ф. Н. Красовським, що геодезія повинна бути не «фізичною», а, навпаки, аналітичною. З того часу виявилась тенденція відкидати геофізичну компоненту в глобальних та регіональних геодезичних дослідженнях. Однак ситуація докорінно змінилась в результаті впровадження проектів глобальних геодинамічних досліджень, в яких геодезична інформація стала пріоритетною завдяки своїй достовірності та точності в процесі інтерпретації цих даних з позицій накопичених знань про внутрішню будову Землі.

Розв'язком оберненої геофізичної задачі (знаходження функції розподілу густини  $\delta$  надр планети за відомим потенціалом  $V$ ) займалися Г. Моріц, В. М. Страхов, А. І. Прилепко та інші. В Україні ця проблематика відображена в роботах В. Г. Козленка, В. І. Старостенка, Е. Л. Шена, П. О. Міненка та інших. Вагомі результати отримали науковці Львівської школи, яку започаткував Г. О. Мещеряков, зокрема, П. М. Зазуляк, О. М. Марченко, А. Л. Церклевич, Ю. П. Дейнека, О. С. Заяць.

З потенціалом  $U$  та густиною  $\delta$  планет пов'язана ще одна важлива характеристика – гравітаційна (потенціальна) енергія, яка визначається за відомою формулою:

$$E = -\frac{1}{2} \int_{\tau} \delta U d\tau. \quad (1)$$

Фізичний зміст даної величини – це робота, виконана переміщенням мас в об'ємному тілі  $\tau$ . Основні дослідження даної характеристики проводились в рамках вивчення гідростатично врівноважених планет, оскільки мінімум потенціальної енергії забезпечує такий стан. Найбільш вагомі результати в цьому напрямку були отримані Г. Моріцом, В. М. Жарковим, В. П. Трубіциним, в Україні Г. О. Мещеряковим, О. М. Марченком, Е. Л. Шеном.

У дисертаційній роботі також розглядається проблема визначення параметрів планети, що входять в рівняння:

$$U(P) = f \int_{\tau} \frac{\delta(Q)}{r(P, Q)} d\tau. \quad (2)$$

Побудова моделей розподілу величин  $U$ ,  $\delta$  та  $\tau$  є надзвичайно актуальною проблемою в науках про Землю та планети. Вибір методів та алгоритмів визначення  $U$ ,  $\delta$  і  $\tau$  залежить від поставленої задачі та відомої інформації.

Оскільки дослідження виконуються в основному, для тіл еліпсоїдальної форми, то виникає необхідність в удосконаленні апарату наближення функцій в еліпсоїді, який може бути реалізований за допомогою многочленів трьох змінних. Побудову ортогональних систем можна виконати за допомогою процесу Грама-Шмідта, однак реалізувати його практично неможливо. Тому будуються дві біортогональні системи многочленів  $W_{mnk}$  і  $\omega_{mnk}$  в еліпсоїді. Вони дозволяють представити функцію розподілу мас  $\delta$  у вигляді:

$$\delta(x, y, z) = \sum_{k=1}^m \delta_k(x_k, y_k, z_k) + \delta^0(\rho) + \sum_{m+n+k=0}^N b_{mnk} W_{mnk}(x, y, z), \quad (3)$$

де  $\delta^0(\rho)$  – одновимірний (сферично-симетричний) розподіл мас;  $\delta_k(x_k, y_k, z_k)$  – значення густини в конкретній точці (точкові маси);  $\sum_{m+n+k=0}^N b_{mnk} W_{mnk}(x, y, z)$  – тривимірна частина функції розподілу мас;  $b_{mnk}$  – коефіцієнти розкладу.

Визначення коефіцієнтів  $b_{mnk}$  за даними про гравітаційне поле можливе лише наближено. При великих  $N$  реалізація алгоритму ускладнюється, у зв'язку з чим виникає необхідність удосконалення методики обчислень. Наявність великої кількості даних у вигляді коефіцієнтів розкладу (стоксових постійних) має бути раціонально використана, для цього запропонований новий метод їх застосування для знаходження  $b_{mnk}$ .

Властивості біортогональних систем дають можливість описати потенціал еліпсоїдального тіла рівномірно збіжним рядом:

$$U = \int_{\tau} \frac{\delta}{r} d\tau = \sum_{k=1}^m \frac{\delta_k}{r} + \int_{\tau} \frac{\delta^0}{r} d\tau + \sum_{m+n+k=0}^N b_{mnk} \int_{\tau} \frac{W_{mnk}}{r} d\tau. \quad (4)$$

Класичні результати представлення потенціалу еліпсоїда дозволяють обчислювати елементи формули (4) для кульових планет в замкнутому вигляді за відомими  $b_{mnk}$ ,  $\delta^0(\rho)$ ,  $\delta_k$ . В еліпсоїдальному випадку обчислення елементів виразу (4) значно ускладнюється. Тому більш раціонально обчислювати їх наближено. Для цього сферично-симетричні розподіли  $\delta^0(\rho)$  доцільно представляти у вигляді комбінацій многочленів Лежандра однієї змінної. Надалі це дає можливість також визначати гравітаційну енергію одновимірної функції  $\delta^0(\rho)$  для еліпсоїда. Практичне застосування запропонованої методики з використанням референсної моделі розподілу мас надр Землі – моделі PREM дозволило отримати не тільки оцінку значення енергії, а й використати її для вивчення стану гідростатичної рівноваги Землі.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дослідження, виконані автором за темою дисертації, відповідають тематиці кафедри картографії та геопросторового моделювання "Математичне моделювання в геодезії, геофізиці з прогнозуванням розвитку територій на основі їх картографування та урахування функціональних властивостей і впливу геодинамічних процесів", що є одним з

напрямів Інституту геодезії ”Дослідження фігури та зовнішнього гравітаційного поля Землі та планет, створення геоінформаційних систем, програмних продуктів і баз геопросторових даних”. Також деякі питання за темою дисертації знайшли відображення в рамках наукової програми Міжнародного проекту, підготованого в межах полярного року (2007-2008 р.) Polar Earth Observing Network (POLENET) – керівник Terry Wilson, Ohio State University, USA.

**Мета і завдання досліджень.** Мета роботи полягає в розробці методики апроксимації тривимірних функцій всередині еліпсоїдального тіла та її практичного застосування в дослідженнях об’ємних розподілів густини надр, потенціалу та енергії планети. Для досягнення цієї мети в дисертації були поставлені такі завдання:

- удосконалити математичні методи апроксимації тривимірних кусково-неперервних функцій в еліпсоїді;
- встановити в повному обсязі властивості біортогональних систем  $\{W_{mnk}\}, \{\omega_{mnk}\}$ , необхідних для реалізації методики наближення тривимірних кусково-неперервних розподілів мас надр планет;
- дослідити біортогональні ряди на збіжність (збіжність в середньому та збіжність за Чезаро і Абелем);
- використати біортогональні розклади для представлення потенціалу притягання планети;
- удосконалити формули для зовнішніх та внутрішніх кульових функцій в прямокутній системі координат;
- дослідити структуру стоксових постійних з використанням біортогональних рядів;
- побудувати алгоритми для обчислення некульових гармонічних функцій;
- представити потенціал притягання всюди збіжними рядами;
- визначити тривимірні модельні розподіли мас на основі даних спостережень з використанням нових наближених методів та застосувати їх для геофізичних інтерпретацій;
- отримати формули для визначення потенціалу одновимірної та тривимірної еліпсоїдальної планети;
- обчислити гравітаційну енергію для кульової та еліпсоїдальної планети;
- дослідити відхилення неоднорідного розподілу мас від стану гідростатичної рівноваги на прикладі планети Земля.

**Об’єкт дослідження.** Гравітаційні поля планет (зокрема Землі) та їх внутрішня структура.

**Предметом дослідження** є математичні моделі, методи визначення розподілів густини надр планет та їх зв’язок із зовнішнім і внутрішнім гравітаційним полем на основі біортогональних розкладів і дослідженням властивостей головних інтегральних характеристик.

**Методи дослідження.** Під час проведення теоретичних досліджень і розробки алгоритмів та комп’ютерних програм використовувались різні методи апроксимації функцій, елементи теорії потенціалу еліпсоїда, деякі положення математичного аналізу, алгебри матриць та результати геофізичних досліджень.

**Наукова новизна одержаних результатів.** Результати теоретичних досліджень та отримані алгоритми побудови математичних моделей мають фундаментальне значення для вивчення внутрішньої структури та гравітаційних полів планет. Вирішена важлива наукова проблема встановлення зв'язку тривимірної функції розподілу мас еліпсоїдальної планети та її потенціалу. Окрім цього:

1. Удосконалена методика апроксимації кусково-неперервних функцій в еліпсоїді, яка адаптована для побудови тривимірних розподілів мас всередині планети.
2. Уперше запропонована система неортогональних функцій, яка представляє потенціал планет у всьому просторі і є гармонічною поза небесним тілом, фігура якого – еліпсоїд.
3. Уперше отримане представлення потенціалу планети у вигляді всюди збіжних рядів.
4. Уточнені співвідношення для зовнішніх та внутрішніх кульових функцій в декартовій системі координат.
5. Подано формальне представлення для значення густини в центрі мас еліпсоїдальної планети та визначені інтервали його зміни.
6. Уперше запропонований алгоритм зведення стоксових постійних та динамічного стиснення в загальнопланетарну систему відліку.
7. Досліджений класичний наближений метод побудови тривимірних розподілів мас. Запропонований новий наближений спосіб знаходження функцій розподілу густини мас.
8. Отримано формули обчислення потенціалу еліпсоїда для деяких розподілів мас, на основі яких отриманий потенціал кульової та еліпсоїдальної планет.
9. Запропонований наближений метод обчислення потенціалів кусково-неперервних одновимірних функцій розподілу густини еліпсоїда (кулі). Визначені формули обчислення наближеного значення енергії еліпсоїда.
10. Виведено співвідношення для визначення потенціалу та енергії тривимірної еліпсоїдальної планети, на основі якого запропоновано новий метод дослідження стану гідростатичної рівноваги планет. Встановлені закономірності відхилення розподілу мас від стану гідростатичної рівноваги на прикладі планети Земля.

**Практичне значення одержаних результатів.** Практичне значення роботи полягає в розробці методики апроксимації розподілів мас планет та її використання для дослідження внутрішньої будови планет. Вона застосована в процесі виконання держдоговірної науково-дослідної роботи 4493 “Аналіз і дослідження геометричних і гравітаційних фігур Марса та його супутників” (номер державної реєстрації 1870088611) в Центральному науково-дослідному інституті геодезії, аерознімання і картографії (ЦНДІГАіК, м. Москва). На основі розроблених алгоритмів та програмних продуктів обчислені значення модельних розподілів густини мас всередині Марса та виконана інтерпретація основних марсіанських гравітаційних аномалій. Частина результатів роботи була використана при виконанні державної бюджетної теми ДБ “Референц” 2002-2003рр. (номер держреєстрації №0102U001196), зокрема при представленні тривимірних розподілів густини надр Місяця. Результати дисертаційних досліджень використані також при виконанні міжнародного проекту, підготовленого в межах полярного року (2007–2008 р.) Polar Earth Observing Network (POLENET) – керівник Terry Wilson, Ohio State University,

USA (IPY # 383” Geodynamic GPS Network for Argenninean Islands (Antarctsc Peninsula)).

Отримані результати можуть бути використані для інтерпретації гравітаційних аномалій Землі, а методика обчислення основних інтегральних величин – при вивченні планетарних геодинамічних процесів. Представлення потенціалу всюди збіжними рядами дає можливість практичного дослідження збіжності рядів за сферичними функціями, які описують гравітаційні поля планет.

Результати роботи впроваджені у навчальному процесі Національного університету “Львівська політехніка”, зокрема у процесі викладання навчальної дисципліни “Картографія” для базового напрямку 6.080101 “Геодезія, картографія та землеустрій” та дисципліни “Фізика Землі” магістерського напрямку “Космічна геодезія”.

#### **Основні положення, що виносяться на захист.**

1. Удосконалення методів апроксимації кусково-неперервних функцій в еліпсоїді та її використання для визначення функцій розподілу мас еліпсоїдальних планет.
2. Аналіз структури стоксових постійних зовнішніх гравітаційних полів планет.
3. Удосконалення формул представлення зовнішнього потенціалу в прямокутній системі координат.
4. Некласичні способи опису гравітаційних полів небесних тіл.
5. Наближений метод побудови функцій розподілу планетарних надр з використанням даних про гравітаційне поле.
6. Формула, що дає зображення значення густини в центрі мас та інтервал його зміни.
7. Метод побудови тривимірних функцій розподілу та їх похідних, що використовує стоксові постійні.
8. Наближені формули обчислення внутрішнього потенціалу еліпсоїдальної планети та порівняння їх із замкнутими співвідношеннями для кулі.
9. Формули для визначення гравітаційної енергії кульової та еліпсоїдальної планети.
10. Визначення потенціалу та гравітаційної енергії Землі, внутрішнім наповнення якої є модель PREM.
11. Метод дослідження стану гідростатичної рівноваги тривимірної еліпсоїдальної планети.

#### **Особистий внесок здобувача.**

В одноосібних роботах [5,10,11,13,16,19], поданих дисертантом, розроблено методи опису потенціалу за допомогою неортогональних функцій, метод апроксимації фігур планет та обчислення їх внутрішнього потенціалу і гравітаційної енергії, отримано формулу визначення значення густини в центрі еліпсоїдальної планети та встановлені межі її зміни, що дозволяє створювати більш вірогідні моделі розподілів мас планет.

У роботах, опублікованих у співавторстві, автору належить:

- постановка завдання, розробка методу, алгоритму і програм для проведення обчислень та інтерпретація отриманих результатів [1-4, 6-9, 12, 14, 15, 17, 18, 20-24, 24, 25, 27-40].
- інтерпретація отриманих результатів [26].
- розробка алгоритму та інтерпретація результатів [21-24].



**Апробація результатів дисертації.** Основні положення і результати роботи доповідались і обговорювались на міжнародних, всесоюзних та українських наукових конференціях, а також симпозиумах, зокрема на Міжнародному симпозиумі «Figure and Dynamics of the Earth, Moon and Planets» (Прага, 1987 р.), Всесоюзній науковій конференції “Селенодезія и динамика Луны” (Київ, 1987 р.), II Орловській конференції «Изучения Земли как планеты методами геофизики, геодезии и астрономии» (Київ, 1988 р.), III Орловській конференції «Изучение Земли как планеты методами астрономии, геофизики и геодезии» (Київ, 1994 р.), Міжнародному симпозиумі «Геодинаміка гірських систем Європи», (Львів-Яремче, 1994 р.), Міжнародна науково-технічна конференція «Сучасні досягнення геодезичної науки і виробництва в Україні» (Львів, 1997 р.), Міжнародній науково-практичній конференції «Геодезичний моніторинг, геодинаміка і рефрактометрія на межі XXI століття» (Львів, 1998 р.), Науково-технічній конференції «Сучасні досягнення геодезії, геодинаміки та геодезичного виробництва», (Львів, 1999 р.), Міжнародному науково-технічному симпозиумі «VI міжнародний науково-технічний симпозиум геоінформаційний моніторинг навколишнього середовища – GPS і GIS – технології», (Алушта (Крим), 2001 р.), X Jubilee international scientific and technical symposium «Geoinformation monitoring of environment: GPS and GIS TECHNOLOGIES», (Alushta (Ukraine, Crimea), 2005 р.), Міжнародна науково-практична конференція «Новітні досягнення геодезії, геоінформатики та землевпорядкування – Європейський досвід» (Чернігів, 2007 р.), XIII міжнародному науково-технічному симпозиумі «Геоінформаційний моніторинг навколишнього середовища: GPS і GIS – технології», (Алушта (Крим), 2008 р.), Науковій конференції “Місяць через 40 років” (Київ, 2008 р.), Міжнародній науковій конференції «Культурний ландшафт і наука про Землю – основні завдання та шляхи вирішення», (Львів, 2009 р.), XVI міжнародному науково-технічному симпозиумі «Геоінформаційний моніторинг навколишнього середовища GPS і GIS – технології», (Алушта (Крим), 2011 р.), VIII міжнародній науково – практичній конференції «Новітні досягнення геодезії, геоінформатики та землевпорядкування – Європейський досвід», (Чернігів, 2012 р.), XVII міжнародному науково-технічному симпозиумі «Геоінформаційний моніторинг навколишнього середовища: GNSS і GIS – технології», (Алушта (Крим), 2012 р.), Всеукраїнській науково-практичній конференції «Проблеми землеустрою та геоінформатики», (Рівне, 2012 р.), XVIII міжнародному науково-технічному симпозиумі «Геоінформаційний моніторинг навколишнього середовища: GNSS і GIS – технології», (Алушта (Крим), 2013 р.), VII міжнародній науково-практичній конференції «Нові технології в геодезії, землевпорядкуванні та природокористуванні», (Ужгород, 2014 р.), Всеукраїнській науково-практичній конференції «Геодезія. Землеустрій. Природокористування: присвячується пам’яті П.Г. Черняги», (Рівне, 2014 р.), Міжнародних науково-технічних конференціях присвячених професійному святу працівників геології, геодезії і картографії України «GEOFORUM» (Львів–Яворів, 1997, 1999, 2004, 2005, 2008 рр.) та семінарах кафедри картографії та геопросторового моделювання (2010–2015 р.).

**Публікації.** Результати дисертаційних досліджень опубліковані в 40 наукових роботах. Серед них: 4 – в наукометричних, 20 статей у періодичних фахових виданнях, 16 робіт у наукових збірниках, матеріалах і тезах конференцій.

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертація складається зі вступу, п'яти розділів, висновку, списку використаних джерел (195 найменувань) та додатку. Загальний обсяг роботи становить 255 сторінок, в тому числі 24 ілюстрацій та 40 таблиць.

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтована актуальність теми дисертаційної роботи, сформульовано мету і завдання досліджень, наведені основні наукові результати та особистий внесок автора, подано структуру і обсяг роботи, відомості про публікації.

У першому розділі «Аналіз стану вивчення планетарних характеристик» розглянуті основні величини, що входять в інтегральне рівняння (2) та способи їх визначення. Це, насамперед, стосується гравітаційного поля планет, яке визначається зовнішнім та внутрішнім потенціалом. На сучасному етапі величина  $V$  достатньо добре вивчена, адже існує багато способів її подання, до яких слід віднести класичне представлення за кульовими функціями. До інших методів можна віднести зображення гравітаційних полів у вигляді точкових мас, лінійною комбінацією еліпсоїдальних функцій (функцій Ламе), вибірковок функцій, сумою нецентральномультиполів. Тут запропонований новий клас неортогональних гармонічних функцій та подані методи їх обчислення:

$$u_{mnk} = \int_{\tau} \frac{W_{mnk}}{r} d\tau. \quad (5)$$

Внутрішній потенціал  $U$  планети, на відміну від зовнішнього  $V$ , практично не вивчений. Це пояснюється насамперед відсутністю спостережень за величиною  $U$  та складністю її опису. Визначення  $U$  у внутрішній точці  $P(\rho, \theta, \lambda)$  за допомогою кульових функцій розпадається на дві складові: перша – лінійна комбінація внутрішніх кульових функцій в кулі  $K$  радіуса  $\rho$ , друга – лінійна комбінація зовнішніх функцій відносно  $K$ . Використання запропонованих систем (5) для опису  $U$  дає співвідношення типу (3). При цьому змінюється лише спосіб обчислення функцій (5). Отже, при відомих коефіцієнтах  $b_{mnk}$ , стає можливим обчислення величини  $U$ . Тому виникає потреба в методах побудови тривимірних моделей розподілу мас планети, яка полягає в пошуку значень  $b_{mnk}$ .

Важливою складовою досліджень є фігура планети. Її визначення є основною задачею геодезії і займає великий історичний проміжок часу від початкового визначення її ще древніми греками як гіпотетичної кулі до реального визначення на основі вимірів її радіуса. Наступне уточнення фігури Землі дало еліпсоїд обертання, а в деяких випадках – тривісний еліпсоїд, які і приймаються за поверхню відносності. Особливості ж фізичної поверхні можна трактувати як відхилення від еліпсоїда.

На сьогодні основним способом визначення фігури планети вважається гравіметричний метод, суть якого полягає у визначенні її як поверхні постійного потенціалу  $U_0$  (значення потенціалу на поверхні океанів). При відомих коефіцієнтах  $b_{mnk}$  рівність

$$V = \int_{\tau} \frac{\delta}{r} d\tau = \sum_{k=1}^m \frac{\delta_k}{r} + \int_{\tau} \frac{\delta^0}{r} d\tau + \sum_{m+n+k=0}^N b_{mnk} \int_{\tau} \frac{W_{mnk}}{r} d\tau = U_0 \quad (6)$$

визначає шукану поверхню. Її можна подати в цифровому форматі: для фіксованих  $\theta, \lambda$  з (6) обчислюємо  $\rho$ . Залежно від вихідної інформації (наприклад, результатів вимірювань альтиметрії) рівність (6) може бути використана для визначення невідомих коефіцієнтів  $b_{mnk}$ .

Важливим та одночасно недостатньо вивченим параметром є розподіл мас всередині планети, оскільки безпосереднє його вимірювання можливе тільки на поверхні тіла або на невеликій глибині. Тому побудову розподілу мас здійснюємо за допомогою даних спостережень, з яких визначається:  $M$  - маса планети та середній момент інерції  $I = \frac{1}{2}(A+B+C)$ , де  $A, B, C$  - головні моменти інерції. Використання стоксових постійних  $C_{nk}, S_{nk}$  ( $n, k \leq 2$ ) та динамічного стиснення  $H$  визначає функцію розподілу мас многочленом 2-го степеня за змінними  $x, y, z$ . Збільшення порядку апроксимації функції густини можливе тільки наближено. Тому важливим є початкове наближення, яке можна отримати з даних сейсмології. На цій основі для Землі створені реалістичні моделі PЕМ, PREM, які досить добре описують розподіли мас, а тому широко використовуються в астрономії та геофізиці.

Разом з тим такі моделі не можуть повністю відображати розподіл мас, оскільки гравітаційне поле є тривимірним. Відмінність від нуля стоксових постійних  $C_{nk}, S_{nk}$  при  $n \neq 2m, k \neq 0$  може трактуватись як відхилення від еліпсоїдальності або неоднорідність розміщення мас. Тому в подальшому закон розподілу мас в найбільш загальному випадку можна представити у вигляді (3).

**Другий розділ «Математичні основи наближення тривимірних розподілів мас в еліпсоїдальних планет»** присвячений удосконаленню методики апроксимації функції всередині еліпсоїдальних тіл. Коефіцієнти розкладу двох функцій визначають системи многочленів -  $\{W_{mnk}\}, \{\omega_{mnk}\}$ , які ортогональні одна до одної (біортогональні):

$$l_{mnk} = \int_{\tau} W_{mnk} \omega_{mnk} d\tau = \begin{cases} \frac{3(2N+3)N!V_e}{a^{2m}b^{2n}c^{2k}m!n!k!}, & m = m_1, n = n_1, k = k_1, \\ 0, & m \neq m_1, n \neq n_1, k \neq k_1. \end{cases} \quad (7)$$

Многочлени  $W_{mnk}, \omega_{mnk}$  визначаються також за допомогою формул Родріга, зокрема для  $\omega_{mnk}$  має місце рівність:

$$\omega_{mnk} = \frac{(-1)^{N+3}}{m!n!k!} \frac{\partial^N}{\partial y_1^m \partial y_2^n \partial y_3^k} (1+y_1^2+y_2^2+y_3^2)^{-3/2} (1+r_1)^{N+3/2}, \quad (8)$$

$$\frac{x}{a} = \frac{y_1 \sqrt{1-r^2}}{a}, \frac{y}{b} = \frac{y_2 \sqrt{1-r^2}}{b}, \frac{z}{c} = \frac{y_3 \sqrt{1-r^2}}{c}.$$

Аналітичний вигляд функцій  $\omega_{mkn}$  такий:

$$\omega_{mkn} = \frac{1}{a^m b^n c^k m! n! k!} \sum_{l=0}^N \frac{(-1)^l \Delta^l \left[ \left( \frac{x}{a} \right)^m \left( \frac{y}{b} \right)^n \left( \frac{z}{c} \right)^k \right]}{l! 2^l}. \quad (9)$$

Значення для многочленів  $W_{mkn}$  визначається нерівністю:

$$|W_{mkn}| \leq \frac{N!}{m! n! k! a^m b^n c^k} \frac{k^{\frac{k}{2}} n^{\frac{n}{2}} m^{\frac{m}{2}}}{N^{\frac{x}{2}}}.$$

Властивості розкладу  $\delta = \sum_{m+n+k=0}^{\infty} b_{mkn} W_{mkn}$  (нерівність Бесселя, рівність Парсеваля)

дають збіжність у середньому :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\tau} \left( \delta - \sum_{m+n+k=0}^N b_{mkn} W_{mkn} \right)^2 d\tau = 0, \quad (10)$$

яка гарантує рівномірну збіжність для потенціалу, поданого формулою (3), але не дає поточної його збіжності.

Для покращення практичної збіжності використані методи знаходження сум за Чезаро та Абелем. Дані методи дають змогу отримати більш гладкі представлення для кусково-неперервних функцій, якими є розподіли мас планет. Ефективність такого підходу перевірена на конкретному прикладі, в якому розглядається одинична куля з кусково-неперервним розподілом мас  $\delta$ . Для нього обчислено точні ( $\delta_t$ ) та наближені ( $\delta_i$ ) значення  $\delta$  та виконані їх уточнення за методами Чезаро ( $\delta_{ch}$ ) і Абеля ( $\delta_{ab}$ ) (рис. 1).

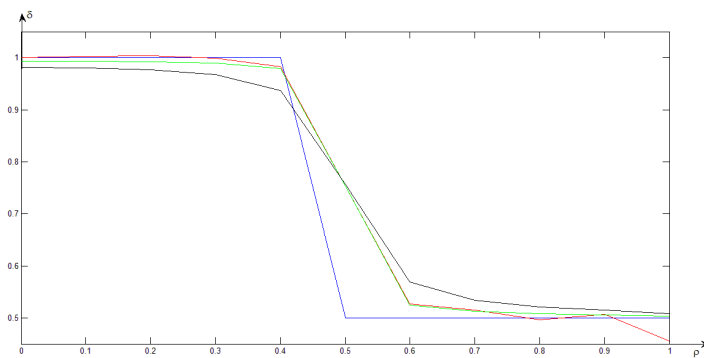


Рис.1. Графіки значень функцій розподілів мас:  
 а) точне ( $\delta_t$ ) - синій колір, б) наближене ( $\delta_i$ ) - червоний,  
 в) уточнене за Чезаро ( $\delta_{ch}$ ) - жовтий, г) уточнене за Абелем ( $\delta_{ab}$ ) -зелений.

Аналіз графіків підтверджує покращення збіжності для уточнених значень за двома методиками, що особливо виявляється на кінцях інтервалу зміни  $\rho$ . Разом з тим в кожному конкретному випадку необхідне окреме дослідження для вивчення збіжності.

У третьому розділі «Дослідження гравітаційного поля планет за допомогою біортогональних рядів» розглянуто практичне використання біортогональних представлень при аналізі гравітаційних полів. З цією метою зображення зовнішнього потенціалу  $V$  подане в комплексній формі:

$$V = \frac{fM}{R} (C_{00} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n C_{nk} U_{nk} + S_{nk} V_{nk}) = \frac{fM}{R} (1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n \operatorname{Re}(W_{nk} CK_{nk})), \quad (11)$$

де  $W_{nk} = U_{kn} + iV_{nk}$ ,  $CK_{nk} = C_n^k - iS_n^k$ .

В прямокутній системі координат формули для зовнішніх кульових функцій  $W_{nk}$  та внутрішніх  $CK_{nk}$  мають вигляд:

$$W_{nk} = \frac{(n-k)!}{2^k R^{2n+1}} \sum_{m=0}^{(n-k)/2} (-1)^m z^{n-k-2m} \frac{(x^2 + y^2)^m (x + iy)^{k/2}}{2^{2m} m!(m+k)(n-k-2m)!}, \quad (12)$$

$$C_{nk} + iS_{nk} = \frac{RR(n+k)!}{Ma_e^n 2^k} \sum_{m=0}^{E(n-k)/2} \frac{(-1)^m \int \xi^{n-k-2m} (\zeta^2 + \eta^2)^m d\tau}{2^{2m} m!(m+k)(n-k-2m)!} (\xi + i\eta)^k \quad (13)$$

і відрізняються одна від одної лише множниками. Тому контроль за правильним визначенням коефіцієнтів (12) або (13) здійснюємо, використовуючи гармонічність кульових функцій.

Декартове зображення постійних розкладу (13) (стоксових постійних) дозволяє дослідити їхню структуру. Для еліпсоїдальної планети найбільш загальний вигляд стоксових постійних подається рівностями:

$$C_{nk} + iS_{nk} = \frac{3n!}{(2n+3)!!} (C_{nk}^{**} + iS_{nk}^{**} + C_{nk}^* + iS_{nk}^*), \quad (14)$$

$$C_{nk}^* + iS_{nk}^* = \frac{3RR(n-k)!}{\delta_c 2^k} \sum_{m=0}^{(n-k)/2} \frac{(-1)^m \gamma^{n-k-2m}}{2^{2m} (m+k)!(n-k-2m-s)!} \sum_{t=0}^{n-2} \frac{b_{pqs} t!}{a^p b^q c^s p! q! s! (t+n+3)!!} \times \quad (15)$$

$$\times \sum_{l=0} \frac{(i)^{j/2} i(n-t+2)! \alpha^{2m+k-l} \beta^{l-s}}{i!(m-i)! j!(k-j)! l!(l-q)!! l!! (2m+k-l-p)!! (n-t+l)!!},$$

$$C_{nk}^{**} + iS_{nk}^{**} = \sum_{p+q+s=n} (\alpha_{pqs} + i\beta_{pqs}) \frac{b_{pqs}}{a^n}. \quad (16)$$

Співвідношення (14) є лінійною комбінацією величин (16) різних  $N, k (k \leq n-1, 0 \leq N \leq n-1)$  і для кулі значення  $C_{nk}^*, S_{nk}^*$  дорівнюють нулю.

Інше використання біортогональних рядів полягає в побудові системи неортогональних гармонічних функцій. Зображення кусково-неперервного розподілу мас надр планети у вигляді (2) визначає реальне наповнення всередині планети, а збіжність в середньому ряду (2) забезпечує рівномірну збіжність виразу (3). Тому система функцій є повною та співпадає у сферичному випадку з кульовими функціями. Кожен її член є потенціалом, а тому зберігає всі властивості останнього. Зокрема має місце гармонічність поза областю інтегрування, що дає рекурентні співвідношення між функціями одного порядку.

Наведемо алгоритм безпосереднього обчислення виразів  $u_{mnk}$ . Потенціал розподілу  $(1-\rho^2)^N$  визначається рівністю:

$$u = \frac{\pi abc (-1)^N}{N+1} \int_{0,\xi}^{\infty} \left( \frac{x^2}{(a^2+u)} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} - 1 \right)^{N+1} \frac{du}{Q(u)}, \quad (17)$$

диференціювання якої дає шукане співвідношення:

$$u_{mnk} = \int_{\tau} \frac{W_{mnk}}{r} d\tau = \frac{3N! a^m b^n c^k V_e}{4(2^N) m! n! k!} \sum_{t=0}^{n+1} \frac{(-1)^t (2t_1-1)!! (2t_2-1)!! (2t_3-1)!!}{2^t (n+1-t)!} \left( \frac{x}{a} \right)^{2t_1-m} \left( \frac{y}{b} \right)^{2t_2-n} \left( \frac{z}{c} \right)^{2t_3-k} M_{t_1 t_2 t_3}, \quad (18)$$

$$M_{t_1 t_2 t_3}(\xi) = a^{2t_1+1} b^{2t_2+1} c^{2t_3+1} \int_{0, \xi}^{\infty} \frac{du}{(a^2 + u)^{t_1} (b^2 + u)^{t_2} (c^2 + u)^{t_3} Q(u)}. \quad (19)$$

Величини  $M_{t_1 t_2 t_3}$  в атомній фізиці прийнято називати потенціальними факторами. В геодезії їх можна трактувати як деякі геометричні характеристики, пов'язані з геометрією еліпсоїда. Величина  $\xi$  є найбільшою додатньою координатою еліпсоїдальної системи і визначається як корінь відповідного рівняння (для внутрішнього потенціалу  $\xi = 0$ ).

Для тривісного еліпсоїда обчислити величини (19) за замкнутими формулами неможливо, тому їх визначення здійснюємо, розкладаючи підінтегральні функції в ряди. Тоді отримаємо:

$$M_{t_1 t_2 t_3}(\xi) = 2\gamma^{2t_3} \beta^{2t_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(2t_1 + 2t_2 + 2t_3 + 2n - 1)(\gamma^2 + \xi^2 / a^2)^{t_1 + t_2 + t_3 + n - 0.5}} \quad (20)$$

і, зокрема, для внутрішнього потенціалу:

$$M_{t_1 t_2 t_3}(0) = 2\gamma^{2t_3} \beta^{2t_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(2t_1 + 2t_2 + 2t_3 + 2n - 1) \gamma^{2(t_1 + t_2 + t_3 + n) - 1}}. \quad (21)$$

У випадку сферичної планети вирази  $u_{mnk}$  для внутрішнього ( $uu_{mnk}$ ) та зовнішнього ( $uuu_{mnk}$ ) потенціалів такі:

$$uu_{mnk} = \frac{3VN!}{2R} \sum_{l=0}^{N+1} \frac{(-1)^l r^{2l}}{(N+1-l)!(2l+1)R^{2l}} \sum_{t_1+t_2+t_3=l} \frac{(2t_1-1)!!(2t_2-1)!!(2t_3-1)!!}{(2t_1-m)!(2t_2-n)!(2t_3-k)!} x^{2t_1-m} y^{2t_2-n} z^{2t_3-k} \quad (22)$$

і

$$uuu_{mnk} = \frac{N!}{2^N (2N+3)!!} \frac{1}{r^{2N+1}} \left\{ \frac{(2N-1)!! x^m y^n z^k}{m!n!k!} + \sum_{l=1}^{N/2} \frac{(2N-2l-1)!! r^{2l}}{2^l} \sum_{i+j+s=l} \frac{x^{m-2i} y^{n-2j} z^{k-2s}}{i!j!s!(m-2i)!(n-2j)!(k-2s)!} \right\}. \quad (23)$$

Ілюстрація обчислення значень однієї з функцій  $u_{12,2,2}$ ,  $uu_{12,2,2}$ ,  $uuu_{12,2,2}$  за формулами (18), (22) та (23) в одній з точок земної поверхні наведена в табл. 1.

Таблиця 1

Значення функцій  $u_{12,2,2}$ ,  $uu_{12,2,2}$ ,  $uuu_{12,2,2}$  для різних радіусів при  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\lambda = 0$ .

$r$	$u_{mnk}$ потенціал	$uu_{mnk}$ внутрішній потенціал	$uuu_{mnk}$ зовнішній потенціал
1	1.0912799065313 $10^{-4}$	1.0912799065310 $10^{-4}$	1.0912799065492 $10^{-4}$
1.2	5.9025030744475 $10^{-4}$	-33.49770262220 $10^{01}$	-0.9025030744475 $10^{-4}$
0.9	1.5647483623623 $10^{-3}$	1.5647483623623 $10^{-3}$	-5.8891959896000 $10^{-4}$
0.998	1.1431900092650 $10^{-3}$	1.1431900092190 $10^{-3}$	-1.1268017118600 $10^{-4}$
1.002	1.0563455490500 $10^{-4}$	-1.080997230567 $10^{-4}$	1.0563455490010 $10^{-4}$

Значення функції  $u_{mnk}$ , як видно з таблиці, представляють потенціал планети як всередині (3, 4 рядок – значення  $uu_{mnk}$ ), так і ззовні (2, 5 рядок). На сфері величини ( $u_{mnk}$ ,  $uu_{mnk}$ ,  $uuu_{mnk}$ ) співпадають. Таким чином, обчислення за допомогою функцій  $u_{mnk}$ , як видно з таблиці 1, не потребує уточнення вибору функцій  $uu_{mnk}$ ,  $uuu_{mnk}$ , що є

важливим при визначенні потенціалу (зовнішнього та внутрішнього) еліпсоїда за формулами (4), (18), (22) та (23) та відомими коефіцієнтами  $b_{mnk}$ .

Приведемо ще один спосіб подання потенціалу всюди збіжними рядами, для чого обернений радіус  $\frac{1}{r}$  розкладемо в ряд:

$$V(P) = \frac{fM}{\sqrt{1+R^2}} \int_{\tau} \left\{ 1 + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(-1)^t (2t-1)!!}{(2t)!!} \left( \frac{\rho^2 - 2\rho R \cos \psi - 1}{1+R^2} \right)^t \right\} \delta d\tau = \sum_{i=0}^{\infty} V_i, \quad (24)$$

який є збіжним у всьому просторі та представляє єдиним чином як зовнішній, так і внутрішній потенціал. В цьому можна переконатись на прикладі потенціалу однорідної одиничної кулі. Результати обчислень наведені в табл. 2.

Таблиця 2

Значення потенціалу в різних точках однорідної одиничної кулі.

$r$	Точне значення $V$	$V_0$	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$\sum V_i$
$\sqrt{3}$	0.5777	0.0650	0.0250	0.0308	0.0054	0.5612
$\sqrt{8}$	0.35353	0.3333	0.0074	0.0102	0.0080	0.3518
$\sqrt{0.5}$	1.2500	0.8165	0.1087	0.0865	0.0892	1.1779
1	1.0000	0.7071	0.0707	0.0078	0.0231	0.8690

Співвідношення (24) може бути використане і для розв'язання оберненої задачі: при відомому потенціалі  $V$  в заданих точках знайдемо коефіцієнти розкладу, що містять функцію розподілу мас і можуть бути іншими, ніж відомі інтегральні характеристики, наприклад, стоксові постійні.

Таблиця 3

Коефіцієнти розкладу потенціалу

$X_i$	Кількість рівнянь								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.8458	1,0433	0.9903	1.0018	0.9973	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1	0.1138	0.1492	0.6256	0.4663	0.5070	0.4988	0.5002	0.4998	0.5000
2		1.1551	1.9112	0.6151	0.3019	0.3523	0.3716	0.3755	0.3749
3			1.2703	0.4783	0.6935	0.1833	0,3462	0.3054	0.3138
4				1.3625	0.7467	0,8744	0.0719	0,3303	0.2598
5					1.4547	-1.0055	1.2581	0.0433	0.3374
6						1.5445	0.9715	1.1480	0.8168
7							1.6315	1.5059	1.3729
8								1.7154	1,7852
9									1.8148

Три перші теоретичні ( $x_0 = 1, x_1 = 0,5, x_2 = 0,371$ ) та наближені (табл.3) значення практично збігаються, а тому рівність (24) дає додаткові умови при вивченні внутрішньої структури планет.

**Четвертий розділ «Побудова тривимірних моделей густини розподілу мас еліпсоїдальних планет»** присвячений побудові обґрунтованих тривимірних функцій розподілу мас всередині планети і зводиться, власне, до визначення коефіцієнтів  $b_{mnk}$ , використовуючи дані спостережень, що подаються наборами коефіцієнтів розкладу. До таких даних, в першу чергу, слід віднести інформацію про зовнішнє гравітаційне поле (коефіцієнти розкладу  $\{C_{nk}, S_{nk}\}$ ) та дані про потенціал на поверхні планети, що визначає ще три пари стоксових постійних:  $\{C_{nk}^{\xi}, S_{nk}^{\xi}\}$ ,  $\{C_{nk}^{\eta}, S_{nk}^{\eta}\}$ ,  $\{C_{nk}^{\Delta g}, S_{nk}^{\Delta g}\}$ . Враховуючи розвиток сучасних космічних технологій, в перспективі можливим є використання трансформант (других похідних) гравітаційного поля, кількість яких є дев'ять. Відомими для цього випадку можна вважати функцію значень густини на поверхні планети, яку можна визначити комплектом стоксових постійних  $\{C_{nk}^{\delta}, S_{nk}^{\delta}\}$ , а також дані альтиметрії. Сумарне число комплектів стоксових постійних може досягати 16-ти і більше. Залежність однозначного визначення коефіцієнтів розкладу до  $n$ -го порядку при різних  $k$  (вважаємо, що всі комплекти одного і того ж порядку) є наступною:  $N \leq \frac{6k-5+\sqrt{36k^2-36k+1}}{2}$ , і представлена в табл. 4.

Таблиця 4

Залежність однозначного визначення коефіцієнтів  $b_{mnk}$  від вихідної інформації

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$N$	1	7	14	19	25	31	37	43	49	55

З табл. 4 бачимо, що однозначне визначення коефіцієнтів за гравітаційним полем можливе тільки при  $N=0$  або  $N=1$ , а для вищих порядків необхідна додаткова інформація. Це має стимулювати дослідження для визначення згаданих вище величин. Використання поверхневої густини  $\sigma$  збільшує порядок апроксимації, проте таке визначення не є надійним через неточність визначення  $\sigma$ . Разом з тим є ще одна величина (динамічне стиснення  $H$ ), отримана за даними спостережень, яка також дозволяє збільшити порядок апроксимації до  $N=2$ :

$$b_{000} = \delta_C, b_{101} = \frac{35}{2} C_{21} \delta_C, b_{011} = \frac{35}{2} S_{21} \delta_C, b_{110} = 35 S_{22} \delta_C, b_{002} = \frac{7}{2} \left[ 5 \left( \frac{-C_{20}}{2H} + C_{20} \right) \delta_C - \gamma^2 b_{000} \right],$$

$$b_{200} = \frac{7}{2} \left[ 5 \left( 4C_{22} - \frac{C_{20}}{2H} \right) \delta_C - \alpha^2 b_{000} \right], b_{020} = \frac{7}{2} \left[ 5 \left( -\frac{C_{20}}{2H} - 4C_{22} \right) \delta_C - \beta^2 b_{000} \right]. \quad (25)$$

Таблиця 5

Коефіцієнти розкладу неперервного розподілу  $\delta_2$ , його значення в центрі мас та на поверхні планети

Планета	Стоксові постійні			$b_{200}$	$b_{020}$	$b_{002}$	$\delta_0$	$\delta_p$
	$c_{20} 10^{-7}$	$c_{22} 10^{-5}$	$H 10^{-3}$					
Земля	1083.72	0.28124	3.273995	-0.6255	-0.6108	-0.6023	10.58	1.99
Місяць	203.236	1.44314	6.31	-0.6858	-0.6250	-0.6819	6.667	1.04
Марс	-8746	-8.50	5.07	-0.1601	-0.1259	-0.1260	4.7519	3.30



Приведені результати в табл. 5 показують дещо занижені значення густини, зокрема в центрі планет, що пояснюється практикою апроксимації кусково-неперервних функцій та отриманням невеликої кількості доданків.

Максимальна середньоквадратична похибка таких обчислень визначається рівністю:

$$m_{\Delta\delta_2} = \delta_c \sqrt{\frac{882}{4H^2} m_{\Delta c_{20}}^2 + 9800 m_{\Delta c_{22}}^2 + 1225 (m_{\Delta c_{21}}^2 + m_{\Delta s_{21}}^2 + 4m_{\Delta s_{22}}^2) + \frac{1225 C_{20}^2}{4H^4} m_{\Delta H}^2 + \left(\frac{\partial \delta}{\partial \delta_c}\right)^2 m_{\Delta \delta_c}^2}. \quad (26)$$

Для отримання більш достовірного розподілу мас визначаємо його за формулою (3). В результаті для другого порядку отримано:

$$b_{000} = \delta_c \left( 1 - \frac{3}{\delta_c} \int_0^1 \delta^0(\rho) \rho^2 d\rho \right), \quad b_{110} = 35\delta_c S_{21}, \quad b_{101} = 35\delta_c C_{21}, \quad b_{011} = 35\delta_c S_{21}, \quad (27)$$

$$b_{200} = \frac{7}{2} \alpha^2 \delta_c \left[ 5 \left( \frac{-C_{20}}{2H} + C_{20} \right) - 1 - \frac{5}{\delta_c} \int_0^1 \delta^0(\rho) \rho^4 d\rho + \frac{3}{\delta_c} \int_0^1 \delta^0(\rho) \rho^2 d\rho \right], \quad (28)$$

$$b_{020} = \frac{7}{2} \beta^2 \delta_c \left[ 5 \left( \frac{-C_{20}}{2H} - 2C_{22} \right) - 1 - \frac{5}{\delta_c} \int_0^1 \delta^0(\rho) \rho^4 d\rho + \frac{3}{\delta_c} \int_0^1 \delta^0(\rho) \rho^2 d\rho \right], \quad (29)$$

$$b_{200} = \frac{7}{2} \gamma^2 \delta_c \left[ 5 \left( 1 - \frac{1}{2H} \right) C_{20} - 1 - \frac{5}{\delta_c} \int_0^1 \delta^0(\rho) \rho^4 d\rho + 3 \int_0^1 \delta^0(\rho) \rho^2 d\rho \right]. \quad (30)$$

У формулах (27) – (30) стоксові постійні та динамічне стиснення  $H$  визначаються в різних системах відліку: перші значення  $(C_{nk}, S_{nk})$  – в загальнопланетарній  $(ox_1x_2x_3)$ , друге  $(H)$  – в системі  $(oy_1y_2y_3)$ , що пов'язана з головними осями інерції  $A, B, C$ . Крім цього, в прямокутних системах, у яких одна з осей збігається з віссю обертання, формули (27) – (30), як показано в роботі, також справджуються.

В цьому ж розділі знайдений зв'язок між довільними системами. Трактуючи доданок в розкладі потенціалу:

$$V_2 = \frac{fM}{2R^3} \{ x_1^2 (C_{20} + 6C_{22}) + x_2^2 (-C_{20} - 6C_{22}) + x_3^2 (2C_{20}) + 6C_{21}x_1x_2 + 6S_{21}x_2x_3 + 12S_{22}x_1x_2 \} \quad (31)$$

як квадратичну форму, шукаємо її власні значення та власні вектори, координати яких дають матрицю зв'язку  $A$  між системами відліку. Обернена матриця до  $A$  дає шукані співвідношення між  $oy_1y_2y_3$  та  $ox_1x_2x_3$ :

$$A^{-1} = B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Її коефіцієнти визначають степеневі моменти:

$$I_{110} = 2S_{22}, I_{101} = C_{21}, I_{011} = S_{21}, I_{020} = -\frac{C_{21} - d - 4C_{22}d_{200} - d_{020} - C_{20} + 2C_{22}d_{002}}{d_{200} + d_{020} + d_{002}}, \quad (33)$$

$$I_{200} = 4C_{22} + I_{020}, I_{002} = C_{20} + 2C_{22} + I_{020},$$

де

$$d_{200} = b_{11}^2 + b_{21}^2, d_{020} = b_{12}^2 + b_{22}^2; d_{002} = b_{13}^2 + b_{23}^2, \quad (34)$$

$$d = 2 \left[ (b_{11}b_{12} + b_{21}b_{22}) I_{110} + (b_{11}b_{13} + b_{21}b_{23}) I_{101} \right] + 2(b_{12}b_{13} + b_{22}b_{23}) I_{011}.$$

Подальша побудова модельних розподілів можлива тільки наближено. На основі зведення задачі до проблеми моментів Мещеряков Г.О. запропонував метод знаходження модельних розподілів з урахуванням даних про гравітаційне поле планет. Це значною мірою дозволило отримати результати при вивченні внутрішньої структури Землі та інших небесних тіл.

За основу всіх наближених методів приймається умова  $\int_{\tau} (\delta_z - \delta_{sh})^2 d\tau \rightarrow \min$ , яку можна сформулювати у вигляді задачі Лагранжа:

$$F(b_{003}, \dots, b_{030}, \dots, b_{00N}, \dots, b_{0N0}, \lambda_{30}, \lambda_{31}, \gamma_{31}, \dots, \lambda_{NN}, \gamma_{NN}) = \int_{\tau} \left( \sum_{m+n+k=3}^N b_{mnk} W_{mnk} \right)^2 d\tau + \sum \sum \left[ \lambda_{nk} (c_{nk} - c_{nk}^*) + \gamma_{nk} (s_{nk} - s_{nk}^*) \right], \quad (35)$$

$$c_{nk}^* = c_{nk}^{**} + \sum_{p+q+s=n} \alpha_{pqs}^{nk} b_{pqs}, s_{nk}^* = s_{nk}^{**} + \sum_{p+q+s=n} \beta_{pqs}^{nk} b_{pqs},$$

а  $c_{nk}^{**}, s_{nk}^{**}$  – стоксові постійні, які є незмінними, і знайдені за коефіцієнтами  $b_{mnk}$  нижчих порядків. Умова мінімуму для функції Лагранжа визначається системою:

$$\begin{cases} 2Bb + \alpha^T \lambda = 0, \\ \alpha b = c, \end{cases} \quad (36)$$

що через “квазіортогональність” многочленів  $W_{mnk}$  розпадається на підсистеми:

$$\begin{cases} 2B_k b_k + \alpha_k^T \lambda_k = 0, \\ \alpha_k b_k = C_k - C_k^{**}, \end{cases} \quad (37)$$

розв’язок кожної з яких можна записати у вигляді

$$b_k = -2B_k^{-1} \alpha_k^T (\alpha_k B_k^{-1} \alpha_k^T \lambda)^{-1} (C_k - C_k^{**}). \quad (38)$$

Тут введені позначення:

$$C_n = \begin{pmatrix} c_{n0} \\ c_{n1} \\ s_{n1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ C_{nn} \\ S_{nn} \end{pmatrix}, A_n = \begin{pmatrix} \alpha_{00n}^{n0} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{0n0}^{n0} \\ \alpha_{00n}^{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{0n0}^{n1} \\ \gamma_{00n}^{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & \gamma_{00n}^{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{00n}^{2n+1} & \cdot & \cdot & \cdot & \gamma_{0n0}^{2n+1} \end{pmatrix}, b_n = \begin{pmatrix} b_{00n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{0n0} \end{pmatrix}, B_n = \begin{pmatrix} \int_{\tau} W_{00n} W_{00n} d\tau & \cdot & \cdot & \cdot & \int_{\tau} W_{0n0} W_{00n} d\tau \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \int_{\tau} W_{00n} W_{0n0} d\tau & \cdot & \cdot & \cdot & \int_{\tau} W_{0n0} W_{0n0} d\tau \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Вище описаний метод за суттю подібний до методу Мещерякова Г.О., проте шлях вирішення є іншим, адже коефіцієнти розкладу обчислюються безпосередньо без зведення задачі до проблеми моментів.

У четвертому розділі подано ще один спосіб визначення розподілу мас надр планети. Для цього використовувалась тотожність  $\int_{\tau} \varphi \frac{\partial \delta}{\partial x_i} d\tau = -\int_{\tau} \delta \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} d\tau + \iint_{\Omega} \varphi \delta \cos \alpha_i d\Omega$ ,

$$\text{де } \cos \alpha_i = \pm \frac{a_3 x_i}{a_i^2 D(x_1, x_2)} \quad (i=1, 2, 3), \quad D(x_1, x_2) = \sqrt{1 - \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 + \frac{a_3^2 x_1^2}{a_1^4} + \frac{a_3^2 x_2^2}{a_2^4}},$$

$$z = x_3 = \pm a_3 \sqrt{1 - \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2}.$$

Введено поняття степеневих моментів для похідних розподілу мас:

$$I_{pqs}^i = \frac{1}{M} \int_{\tau} \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^p \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^q \left(\frac{x_3}{a_3}\right)^s \frac{\partial \delta}{\partial x_i} d\tau,$$

які обчислюються за формулою:

$$I_{pqs}^i = \frac{2a_3 \left( \frac{1}{a_1} p \varepsilon(i-1) \sigma_{p+\varepsilon(i-1)qs} + \frac{1}{a_2} q \varepsilon(i-2) \sigma_{pq+\varepsilon(i-2)s} + \frac{1}{a_3} s \varepsilon(i-3) \sigma_{pqs+\varepsilon(i-3)} \right) + I_{p-\varepsilon(i-1)q-\varepsilon(i-2)s-\varepsilon(i-3)5}}{M}, \quad (40)$$

$$\text{де } \varepsilon(i) = \begin{cases} 1 & i=0 \\ 0 & i \neq 0 \end{cases},$$

$$\sigma_{pqs} = \iint_{\Omega} \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^p \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^q \left(\frac{x_3}{a_3}\right)^s \delta d\Omega \quad (41)$$

При  $p+q+s \leq 3$  формули (40) виражаються через степеневі моменти густини до другого порядку включно, а також величини, визначені на поверхні еліпсоїда. При знайдених  $I_{pqs}^i$ , одержуємо коефіцієнти розкладу  $b_{pqs}^i$  до третього порядку включно. Маючи похідні, можна ставити задачу відновлення за ними самої функції, вигляд якої такий:

$$\delta(x_1, x_2, x_3) = \int_0^{x_1} \frac{\partial \delta}{\partial x_1} dx_1 + \int_0^{x_2} \frac{\partial \delta}{\partial x_2} (0, x_2, x_3) dx_2 + \int_0^{x_3} \frac{\partial \delta}{\partial x_3} (0, 0, x_3) dx_3 + \delta_0, \quad (42)$$

що є можливим при виконанні умов:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \delta}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \delta}{\partial x_i} \right), \quad (i=1, 2, 3, \quad j=1, 2, 3, \quad i \neq j). \quad (43)$$

Наведений в роботі числовий приклад підтверджує дієвість такої методики, проте необхідно знати значення функції густини на поверхні, визначення якої можливе лише як узагальнене. Стоксові постійні надійно визначаються за допомогою методів супутникової геодезії. Тому ці величини можна використати для визначення функції розподілу мас та її похідних, враховуючи степені вищих порядків (третьої та четвертій).

$$\delta(x_1, x_2, x_3) = \sum_{m+n+k=0}^4 b_{mnk} W_{mnk}(x_1, x_2, x_3), \quad \frac{\partial \delta}{\partial x_i} = \sum_{m+n+k=0}^3 d_{mnk}^i W_{mnk}(x_1, x_2, x_3). \quad (44)$$

Коефіцієнти розкладу (44) одержимо підстановкою в стоксові постійні до четвертого порядку включно, а також з урахуванням тотожностей виду:

$$\sigma_{p+2qs} + \sigma_{pq+2s} + \sigma_{pqs+2} = \sigma_{pqs}.$$

Перетворення в стоксовій постійній  $C_{00}$  визначає можливі межі зміни значення в центрі планети:  $2,5 - 1,5 \frac{\delta_p}{\delta_c} \leq \delta_0 \leq 2,5$ . На основі вхідних даних планет Сонячної системи обчислимо варіації  $\delta_0$ , а також це значення, отримане за формулою:

$$\delta(0) = \frac{1}{3V_e} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)^N (4N+3)(2N+1)!!}{2^N N!} \cdot \sum_{l=0}^N \frac{(-1)^l (4N-2l+1)!!}{2^l l! (2N-2l+1)!} \cdot \int_{\tau} \delta \rho^{2N-2l} dt. \quad (45)$$

Таблиця 6

Допустимі значення для густини в центрі мас планет

Планета	$\delta_c$	$\delta_p$	$\delta_0^{\min}$	$\delta_0^{\max}$	Середній момент	C	$\delta_0^2$
Меркурій	5.44	3.3	8.65	13.6	0.3248	0.486	10.86
Венера	5.25	2.8	6,125	13.125	0.334	0.501	9.853
Земля	5.514	2.67	9.78	13.785	0.3308	0.4962	10.52
Місяць	3.34	3.08	3.73	8.35	0.3967	0.5951	3.48
Марс	3.94	2.7	5.8	9.85	0.364	0.546	5.802
Юпітер	1.334	0.35	2.8	3.335	0.28	0.42	3.43
Сатурн	0.69	0.36	1.085	1.625	0.26	0.39	1.4145
Уран	1.26	0,3	2.7	3.15	0.27	0.405	2.488
Нептун	1.67	0.3	3.725	4.175	0.27	0.405	4.519
Плутон	1.55	0.35	3,5249	5.25	-	-	-

Наведемо ще один варіант використання стоксових постійних при побудові тривимірних моделей густини. Для цього співвідношення для стоксових постійних перетворимо наступним чином:

$$C_{nk} = \frac{1}{Ma^n} \left\{ - \int_{\tau} \frac{\partial \delta}{\partial x_i} U_{nk}^i d\tau + \iint_{\sigma} \delta U_{nk}^i d\sigma \right\}, S_{nk} = \frac{1}{Ma^n} \left\{ - \int_{\tau} \frac{\partial \delta}{\partial x_i} V_{nk}^i d\tau + \iint_{\sigma} \delta V_{nk}^i d\sigma \right\}, \quad (46)$$

$$U_{nk}^i = \int_0^{x_i} u_{nk} dx_i, \quad V_{nk}^i = \int_0^{x_i} v_{nk} dx_i.$$

Обмежуючись в розкладі (46) тільки одним доданком ( $\delta = const$ ), обчислимо степеневі моменти  $I_{pqs}$  ( $k+q+s \leq 2$ ) за стоксовими постійними до другого порядку включно і динамічним стисненням  $H$  та з їх допомогою визначаємо величини  $\sigma_{pqs}$  ( $k+q+s \leq 4$ ). В результаті чого одержимо:

$$\frac{\delta_0}{\delta_c} + \frac{1}{2} (\sigma_{200} + \sigma_{020} + \sigma_{002}) = \frac{5}{2}, \sigma_{001} = \frac{10}{3} C_{10}, \sigma_{003} = \frac{4}{3} C_{10}, \sigma_{021} = \sigma_{201} = C_{10},$$

$$\sigma_{100} = \frac{10}{3} C_{11}, \sigma_{300} = \frac{4}{3} C_{11}, \sigma_{120} = \sigma_{102} = C_{11}, \sigma_{010} = \frac{10}{3} S_{11}, \sigma_{030} = \frac{4}{3} S_{11}, \sigma_{210} = \sigma_{120} = S_{11}.$$

Розміщення початку системи координат в центрі мас дає:

$$\frac{\delta_0}{\delta_c} + \frac{1}{2}(\sigma_{200} + \sigma_{020} + \sigma_{002}),$$

$$\sigma_{001} = \sigma_{100} = \sigma_{001} = 0 \text{ і } \sigma_{pas} = 0 \text{ (нпу } p+q+s=3),$$

$$\sigma_{101} = 35c_{21}, \sigma_{103} = 17c_{21}, \sigma_{310} = 17c_{21}, \sigma_{121} = c_{21},$$

$$\sigma_{011} = 35S_{21}, \sigma_{211} = S_{21}, \sigma_{031} = 17S_{21}, \sigma_{013} = 17S_{21},$$

$$\sigma_{110} = 70S_{22}, \sigma_{130} = 34S_{22}, \sigma_{310} = 34S_{22}, \sigma_{112} = S_{22}.$$

Степеневі моменти парних степенів  $\sigma_{pqs}$  другого і четвертого порядків для кулі

( $\int \frac{\partial \delta}{\partial x_i} u_{nk}^i d\tau = \int \frac{\partial \delta}{\partial x_i} v_{nk}^i d\tau = 0$ ) визначаємо з системи рівнянь:

$$DY = b_1 C_{20} + b_2 C_{22} + b_3, \quad (47)$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} \sigma_{004} \\ \sigma_{202} \\ \sigma_{022} \\ \sigma_{400} \\ \sigma_{220} \end{pmatrix},$$

розв'язок якої зводимо до визначення змінної  $\sigma_{040}$ .

За формулами знаходимо  $I_{pqs}^i$ , а далі і самі коефіцієнти розкладу  $d_{pqs}^i$  та отримуємо відповідно співвідношення для визначення похідних густини. За ними будуємо карти ізоліній на глибині 3185 км для кожної  $\frac{\partial \delta}{\partial x_i}$ . Вони ілюструють зміну похідних не тільки за глибиною, а і за широтою та довготою.

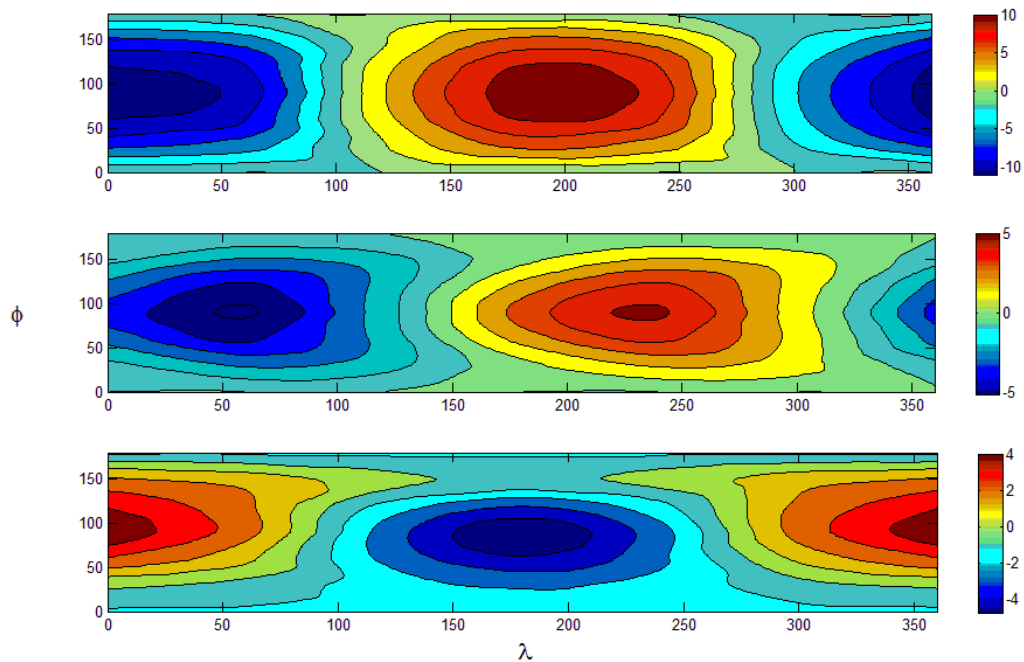


Рис. 2. Карта похідних розподілу:

а) -  $\frac{\partial \delta}{\partial x_1}$ , б) -  $\frac{\partial \delta}{\partial x_2}$ , в) -  $\frac{\partial \delta}{\partial x_3}$  на глибині 3185 км (ізолінії проведені через  $5 \cdot 10^{-4} \text{ г/см}^4$ )

Використавши величини  $I_{pqs}$  ( $p+q+s \leq 2$ ), знаходимо невідомі  $\sigma_{pqs}$  із застосуванням стоксових постійних третього і четвертого порядку, обмежуючись в розкладі похідних многочленами третього степеня. Збільшення порядку апроксимації не змінює значень стоксових постійних нижчих порядків, тому що при підстановці коефіцієнтів розкладу  $C_{nk}, S_{nk}$  перетворюються в тотожності.

Структура стоксових постійних дозволяє об'єднати їх за групами:  $\{C_{30}, C_{32}\}, \{C_{31}, C_{33}\}, \{S_{32}\}, \{S_{31}, S_{33}\}, \{C_{40}, C_{42}, C_{42}\}, \{C_{41}, C_{43}\}, \{S_{41}, S_{43}\}, \{S_{42}, S_{44}\}$ , які формуються за спільними невідомими  $\sigma_{pqs}$ . Загальна структура відповідних систем наступна:

$$A_i \sigma_i^1 + B_i \sigma_i^2 = C_i. \quad (48)$$

У кожній з наведених систем кількість невідомих збігається з кількістю рівнянь. Можна також відзначити, що розмірності матриць  $A_i \in n-1$ . Якщо жодна з систем рівнянь має єдиний розв'язок, то з'являється можливість визначення коефіцієнтів розкладу для похідних до п'ятого порядку включно за умови, що степеневі моменти  $I_{pqs}$  третього і четвертого порядків задовольняють стоксовим постійним третього і четвертого порядків (вибираємо один з можливих варіантів значень цих моментів). Очевидно, що такий спосіб знаходження є наближеним, проте тут враховуються додаткові умови та використовується методика, яка відмінна від загальноприйнятої, а ефективність такого підходу підтверджена наведеним вище прикладом.

У п'ятому розділі «Внутрішній потенціал і гравітаційна енергія сферичної і еліпсоїдальної планети» розглянуто визначення внутрішнього потенціалу та енергії тривимірної кульової та еліпсоїдальної планети з використанням результатів досліджень потенціалу еліпсоїда. З їх допомогою знайдені потенціали деяких одновимірних розподілів в еліпсоїді:

$$\delta(\rho) = (1 - \rho^2)^n, \quad u = \frac{3}{4} \frac{V_e}{(n+1)} \int_{\xi}^{\infty} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2+u} - \frac{y^2}{b^2+u} - \frac{z^2}{c^2+u} \right)^{n+1} \frac{du}{Q(u)}, \quad (49)$$

$$\delta = (\rho^2)^n, \quad u = \frac{3}{4} \frac{V_e}{(n+1)} \int_{\xi}^{\infty} \left[ 1 - \left( \frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} \right)^{n+1} \right] \frac{du}{Q(u)}, \quad (50)$$

для тіла, що має форму кулі з розподілом  $\delta = \rho^n$  ( $n$  – довільне), потенціал визначається:

$$V^z = \frac{3V_k f}{n+2} \left( 1 - \frac{1}{n+3} \right) = \frac{3V_k f}{n+3}, \quad V^v = \frac{3Vf}{R(n+2)} \left( 1 - \frac{1}{n+3} \left( \frac{r}{R} \right)^{n+2} \right). \quad (51)$$

Для однорідної кулі  $K$  ( $n=0$ ) формула (51) має вигляд:

$$V^z = \frac{V_e}{R\rho}, \quad V^v = \frac{3V_e}{R} \left( 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right) \quad (52)$$

і збігається з відомими формулами для внутрішнього та зовнішнього потенціалу кулі одиничної густини. Достовірні одновимірні розподіли мас, як правило, визначаються кусково-неперервними функціями. Тому виникає необхідність наближення останніх неперервними, наприклад, многочленами Лежандра. В роботі

подані різні способи такого представлення, досліджені умови збіжності таких зображень, визначене оптимальне число членів суми для такого наближення та наведений приклад розкладу за парними степенями:

$$\delta(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\rho), C_{2n+1} = 0, C_{2n} = (4n+1) \int_0^1 \delta(\rho) P_{2n}(\rho) d\rho. \quad (53)$$

Таблиця 7

Залежність критерію збіжності від кількості членів суми для двох розподілів густини

$\delta$	$\int_0^1 \delta^2(\rho) d\rho$	$\sum_{l=0}^n \frac{C_l^2}{(4l+1)}$					
		40	45	50	52	54	60
$\delta = \begin{cases} 1, & 0 < \rho \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} < \rho \leq 1 \end{cases}$	0.625	0.62363	0.62356	0.62356	0.62374	0.64812	1.006149
$\delta = \sqrt{\rho}$	0.500	0.49927	0.49643	0.49996	0.52029	0.50871	1.72907

Для двох розподілів густини обчислено потенціали за точними ( $u_1^1, u_1^2$ ) формулами

$$u^1 = \frac{3fV_k}{R\left(\frac{1}{2}+2\right)} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{2}+2}\right) = \frac{6}{5} fV_k \left(1 - \frac{2}{7} \rho^{\frac{5}{2}}\right), \quad (54)$$

$$u^2 = u_1^2 + u_2^2 = \begin{cases} \frac{fV_k}{R} \left(\frac{3}{4} - \frac{\rho^2}{4} + \frac{1}{16} \rho\right) = \frac{fV_k}{R} \frac{1}{4} \left(3 - \rho^2 + \frac{1}{4} \rho\right), & \rho > \frac{1}{2}, \\ \frac{fV_k}{R} \left(\frac{1}{16} (3 - 4\rho^2) + \frac{1}{4} (3 - \rho^2)\right) = \frac{fV_k}{R} \frac{1}{16} (15 - 2\rho^2), & \rho \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (55)$$

та за наближеними ( $u_n^1, u_n^2$ ):

$$V = f \int_{\tau} \frac{\delta(\rho)}{r} d\tau = \delta_c f \sum_{n=0}^{\infty} C_n \int_{\tau} \frac{P_{2n}(\rho)}{r} d\tau = \delta_c f \sum_{n=0}^{\infty} C_n U_n(P),$$

$$U_n(P) = \int_{\tau} \frac{P_{2n}(\rho)}{r} d\tau = \sum_{k=0}^n d_k^n u_k(P), \quad (56)$$

$$u_k(P) = \int_{\tau} \frac{\rho^{2k}}{r} d\tau, u_k(P) = f \frac{\pi abc}{k+1} \int_{\xi(0)}^{\infty} \left[ 1 - \left( \frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} \right)^{k+1} \right] \frac{du}{Q(u)} = \frac{3V_e}{4(k+1)} (M_{000} - \rho^{2k+2} s_{2k}), \quad (57)$$

$$s_{2k} = \int_0^{\infty} \left( \frac{a^2 \sin \theta \cos \lambda}{a^2+u} + \frac{b^2 \sin \theta \sin \lambda}{b^2+u} + \frac{c^2 \cos \theta}{c^2+u} \right)^{k+1} \frac{du}{Q(u)} =$$

$$= \sum_{t_1+t_2+t_3=k+1} \sin^{t_1+t_2} \theta \cos^{t_3} \theta \cos^{t_1} \lambda \sin^{t_2} \lambda M_{t_1, t_2, t_3}.$$

Результати обчислень наведені в табл. 8.

Таблиця 8

Значення внутрішнього потенціалу для двох розподілів густини

$\rho$	$u_n^1$	$u_t^1$	$u_n^2$	$u_t^2$
0.0	1.1999962	1.2000000	0.9374550	0.9375000
0.1	0.9324380	0.9325000	0.9324380	0.9325000
0.2	0.9174538	0.9175000	0.9174538	0.9175000
0.3	0.8924094	0.8925000	0.8924094	0.8925000
0.4	0.8573636	0.8575000	1.1653604	1.1653053
0.5	0.8125198	0.8125000	1.1393799	1.1393908
0.6	0.7641075	0.7641667	1.1044214	1.1043926
0.7	0.7168836	0.7167857	1.0593957	1.0594411
0.8	0.6680610	0.6681250	1.0037646	1.0037371
0.9	0.6167158	0.6169444	0.9366391	0.9365371
1.0	0.5623506	0.5625000	0.8572074	0.8571429

Гравітаційна енергія таких розподілів для кульової планети визначається за точними формулами:

$$E^1 = -\frac{3}{7} \frac{f(V_k)^2}{R}, E^2 = \frac{51}{256} \frac{f(V_k)^2}{R} = 0.19921875 \frac{f(V_k)^2}{R}$$

та наближеними:

$$E = -\frac{1}{2} \int_{\tau} u \delta \tau = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\tau} C_{2n} \int_{\tau} \frac{P_{2n}(\rho)}{r} d\tau \sum_{m=0}^{\infty} C_{2m} P_{2m}(\rho) d\tau = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{2n} C_{2m} E_{nm}, \quad (58)$$

$$E_{nm} = \frac{9f(V_k)^2}{4R^2} \sum_{l=0}^n \sum_{t=0}^m \frac{d_{2l}^{2n}}{l+2} d_{2t}^{2m} \left( \frac{1}{2t+3} - \frac{1}{(l+3)(2t+l+3)} \right). \quad (59)$$

Формула (59) для еліпсоїда виглядає так:

$$E_{2n2m} = \frac{3}{4} \frac{f(V_e)^2}{a_e} \sum_{l=0}^n \sum_{t=0}^m \frac{d_{2l}^{2n}}{l+2} d_{2t}^{2m} \left( M_{000} - \frac{s'_{2l}}{2l+2t+5} \right),$$

$$s'_{2l} = \int_{\Omega} s_{2l}(\theta, \lambda) \sin \theta d\theta d\lambda \quad (60)$$

і визначає алгоритм обчислення енергії еліпсоїдального тіла. Реалізація даної методики зроблена на прикладі сферично-симетричної моделі PREM для Землі. Земля представлена двовісним еліпсоїдом та кулею ( $\alpha=1$ ), для яких значення  $M_{t_1, t_2, t_3}$  визначаються:



$$M_{\tau_l} = \frac{2}{a\alpha} \left\{ \frac{1}{2l+2t+1} + (2l+2)! \sum_{s=0}^{2l+2} \frac{(1-\alpha^2)^s}{s!(l+1-s)!} + \sum_{s=2l+2}^{\infty} \frac{(1-\alpha^2)^s (s-l-2)!}{s!} \right\}. \quad (61)$$

Наведені тут формули дозволяють обчислювати потенціал всередині Землі, крім цього контролем для кулі є точні формули, що мають вигляд:

$$V(P) = V_z(P) + V_e(P) + V_p(P), \quad V_z(P) = \left( \sum_{i=1}^{l-1} M_{G_i} - M_{\tau_l} \right) / \rho, \\ V_e(P) = fM \sum_{i=1}^4 \frac{a_{l,i+2}}{i+2} \left( \rho_l^{i+2} - \rho_{l-1}^{i+2} - \frac{\rho^{i+2}}{i+3} \right), \quad (62)$$

де  $M_{G_i}$  – маса  $i$ -го сферичного кільця радіусами  $\rho_i, \rho_{i-1}$ ,

$M_{\tau_l}$  – маса кулі радіуса  $\rho_e$  з розподілом  $\delta_l(\rho)$ ,

$\tau_l$  – куля радіуса  $\rho_i$ ,

$G$  – шар обмежений сферами радіуса  $\rho_i, \rho_{i-1}$ .

Результати, наведені в табл. 9, показують ефективність такої апроксимації, причому перехід від кульової до еліпсоїдальної планети здійснюється незначною зміною алгоритму та дозволяє наближено знаходити потенціал еліпсоїдального тіла.

Таблиця 9

Точне та апроксимаційне значення потенціалу кульової та еліпсоїдальної планети

Потенціал кульової планети $V \times \frac{fM}{R}$ $\frac{fM}{R} = 0.62564825 \cdot 10^8 \frac{M^2}{c^2}$		Потенціал еліпсоїдальної планети $V_e^a \times \frac{fM}{a}$ $\frac{fM}{a} = 0.6249482 \cdot 10^8 \frac{M^2}{c^2}$				
Точне значення $V_k^T$	Апроксимоване значення $V_k^a$	$0^\circ$	$45^\circ$	$90^\circ$	$135^\circ$	$180^\circ$
9.820697	9.820367	9.834310	9.834310	9.834310	9.834310	9.834310
9.755690	9.755057	9.768258	9.767923	9.767586	9.767923	9.768258
9.561246	9.560778	9.571844	9.570538	9.569234	9.570538	9.571844
9.250711	9.249989	9.257882	9.255833	9.252731	9.255833	9.257882
8.833008	8.831719	8.835678	8.832596	8.826859	8.832596	8.835678
8.314364	8.314509	8.313530	8.306856	8.298647	8.306856	8.313530
7.729983	7.729399	7.722965	7.715176	7.707506	7.715176	7.722965
7.161257	7.162159	7.151571	7.141397	7.134145	7.141397	7.151571
6.604243	6.603746	6.586301	6.576352	6.567113	6.576352	6.586301
6.045622	6.043416	6.022191	6.012985	6.000358	6.012985	6.022191
5.486872	5.485424	5.459068	5.448399	5.436360	5.447652	5.459068

Користуючись отриманими співвідношеннями, вираховано енергію за точними та апроксимаційними формулами для еліпсоїда і кулі:

$$E_{nm} = \frac{3}{4} \frac{fM}{(k+1)} \delta_c \sum_{m=0}^n d_k^m \int_{\tau} P_{2n}(\rho) \int_0^{\infty} \left( 1 - \rho^{2k} \left( \frac{a^2 \sin^2 \theta}{a^2 + u} + \frac{c^2 \cos^2 \theta}{c^2 + u} \right)^{k+1} \right) \frac{du}{Q(u)} = \frac{3(fM)^2}{4f(k+1)} \sum_{k=0}^m d_k^m (d_0 - t_n^k), \quad (63)$$

$$E'_{nm} = \frac{9fV^2}{4fR} \sum_{k=0}^m d_k^m (d_0 - t_n^k) t_n^k = \frac{(2k+4)!(2k+4-2n)!!}{(2k+2n+5)!!}, \quad (64)$$

$$t_n^k = \int_{\tau} P_{2n}(\rho) \int_0^{\infty} \rho^{2k} \left( \frac{a^2 \sin^2 \theta}{a^2 + u} + \frac{c^2 \cos^2 \theta}{c^2 + u} \right)^{k+1} \frac{du}{Q(u)}$$

$$E = -\frac{1}{2} \frac{fV}{R} \int_{\tau} u \delta d\tau = -\frac{1}{2} \frac{fV}{R} \sum_{m=1}^{n_k} \int_{\tau_m} u_m(P) \delta_m(P) d\tau_m =$$

$$= \frac{9}{2} \frac{(fM)^2}{fR} \left[ \left\{ \sum_{m=1}^{n_k} \sum_{j=1}^{m_k} \frac{a_{mj+2}}{j+2} \left( \sum_{l=1}^{m_k} \frac{a_{ml+2}}{l+2} \left[ \left( \rho_m^{j+2} - \rho_{m-1}^{j+2} \right) \sum_{i=m+1}^{n_k} \sum_{j=1}^{m_k} \frac{a_{ij+2}}{j+1} \left( \rho_i^{j+1} - \rho_{i-1}^{j+1} \right) + \right. \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \left. + \frac{M_{m-1} - M_{\varepsilon_m}}{j+1} \left( \rho_m^{j+1} - \rho_{m-1}^{j+1} \right) + \left( \rho_m^{l+2} - \rho_{m-1}^{l+2} \right) \left( \rho_m^{j+1} - \rho_{m-1}^{j+1} \right) + \frac{1}{l+j+2} \left( \rho_m^{i+j+2} - \rho_{m-1}^{i+j+2} \right) \right] \right] \right\} \right] \quad (65)$$

За формулами (63) – (65) знайдені значення  $E$  та подані в табл. 10.

Таблиця 10

Точне та апроксимаційне значення енергії для кулі та еліпсоїда

Фігура	Апроксимаційне значення енергії $\times \frac{(fM)^2}{af} = 0.3661079 \cdot 10^{31} \text{ ерг}$	Точне значення енергії $\times \frac{(fM)^2}{af} = 0.3661079 \cdot 10^{31} \text{ ерг}$
Куля	$E_k^a = -2.00853056 / \delta_c^2$	$E_k^T = -2.00893406 / \delta_c^2$
Еліпсоїд	$E_e^a = -2.015587654 / \delta_c^2$	—

Для неоднорідної еліпсоїдальної планети з розподілом  $\delta = \delta^0 + \delta^1$  потенціал визначається рівністю  $U(P) = U^0(P) + U^1(P)$ ,

де

$$U^1(P) = \sum_{m+n+k=0}^{N_k} b_{mnk} \int_{\tau} \frac{W_{mnk}}{r(Q,P)} d\tau = \sum_{m+n+k=0}^{N_k} b_{mnk} u_{mnk}, \quad U^0(\rho) = f \int_{\tau} \frac{\delta(\rho)}{r} d\tau. \quad (66)$$

Енергія такого тіла подається, відповідно, формулами:

$$E = -\frac{1}{2} \int_{\tau} \delta U d\tau = -\frac{1}{2} f (\delta_c)^2 (E_{00} + E_{01} + E_{10} + E_{11}), \quad (67)$$

$$E_{00} = -\frac{9}{8} \frac{f(V_e)^2}{a_e} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{2n} C_{2m} \sum_{l=0}^m d_{2l}^{2m} \left( \frac{d_0}{l+1} - \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(2t+4)!}{t!(l+1-t)!(2t-2n+4)!!} \times \right. \\ \left. \times \sum_{t_1+t_2+t_3=t} \frac{M_{t_1 t_2 t_3} (2t_1+1)!!(2t_2+1)!!(2t_3+1)!!}{t_1! t_2! t_3! (2t+1)!!} \right), \quad (68)$$

$$E_{01} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} \sum_{N=m+n+k=0}^{\infty} \frac{b_{mnk} (N')!}{a^m b^n c^k 2^{N'} (m')!(n')!(k')!} \sum_{l=0}^{N'+1} \frac{(-2)^l}{(N'+1-l)!} \sum_{t_1+t_2+t_3=l} \frac{(2t_1-1)!!(2t_2-1)!!(2t_3-1)!!}{(2t_1-m')!(2t_2-n')!(2t_3-k')!},$$

$$E_{10} = \sum_{m'+n'+k'=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_{mnk} C_{2m}}{2^{N'} 2(m')!(n')!(k')!} \sum_{l=0}^m l! d_{2l}^{2m} \left( \frac{d_0}{l+1} - \sum_{t_1+t_2+t_3=l} \frac{(2t_1-1)!!(2t_2-1)!!(2t_3-1)!!}{(t_1-\frac{m'}{2})!(t_2-\frac{n'}{2})!(t_3-\frac{k'}{2})!} \right), \quad (69)$$

$$E_{11} = \frac{9}{4} \frac{f(V_e)^2}{a_e} \sum_{m+n+k=0} \sum_{m'+n'+k'=0} \frac{(N')!}{2^{N+N'} m!n!k!(m')!(n')!(k')!} \frac{b_{mnk} b_{mnk}}{a^{m+m'} b^{n+n'} c^{k+k'}} \sum_{l=0}^{N+1} \frac{(-2)^l}{(N+1-l)!} \times$$

$$\times \frac{(2t_1-1)!!(2t_2-1)!!(2t_3-1)!!}{(2t_1-m-m')!!(2t_2-n-n')!!(2t_3-k-k')!!}. \quad (70)$$

Подані залежності визначення енергії через коефіцієнти розкладу густини визначають умову стану гідростатичної рівноваги:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E}{\partial b_{mnk}} = \int_{\tau} U^0(\rho) W_{mnk} d\tau + \int_{\tau} \delta^0 U_{mnk} d\tau + \sum_{m_1+n_1+k_1=0}^N b_{m_1 n_1 k_1} \int_{\tau} W_{mnk} U_{m_1 n_1 k_1} d\tau. \end{array} \right. \quad (71)$$

Оскільки коефіцієнти розкладу додатково задовольняють стоксові постійні, то, складаючи функцію Лагранжа, з урахуванням такої умови отримано запис розв'язку в матричному вигляді:

$$B = T^{-1} (D + R(\alpha T^{-1} R)^{-1} (C - \alpha T^{-1} D)), \quad (72)$$

де

$$B = \begin{pmatrix} b_{100} \\ b_{010} \\ \dots \\ b_{00N} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{00} \\ c_{10} \\ \dots \\ c_{nk} \\ s_{10} \\ \dots \\ s_{nn} \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{000} \\ \alpha_{100} \\ \alpha_{001} \\ \dots \\ \alpha_{00n} \\ \beta_{000} \\ \dots \\ \beta_{00n} \end{pmatrix}, \quad \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{00} \\ \lambda_{10} \\ \dots \\ \lambda_{nk} \\ \gamma_{10} \\ \dots \\ \gamma_{nn} \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} \int_{\tau} (\delta^0 U_{000} + U_0 W_{000}) d\tau \\ \int_{\tau} (\delta^0 U_{100} + U_0 W_{100}) d\tau \\ \dots \\ \int_{\tau} (\delta^0 U_{00N} + U_0 W_{00N}) d\tau \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} a_{000}^{00} & \dots & a_{000}^{0N} \\ a_{100}^{00} & \dots & a_{100}^{0N} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{00N}^{00} & \dots & a_{00N}^{0N} \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} \int_{\tau} W_{000} U_{000} d\tau & \dots & \int_{\tau} W_{000} U_{00N} d\tau \\ \int_{\tau} W_{100} U_{000} d\tau & \dots & \int_{\tau} W_{100} U_{00N} d\tau \\ \dots & \dots & \dots \\ \int_{\tau} W_{00N} U_{000} d\tau & \dots & \int_{\tau} W_{00N} U_{00N} d\tau \end{pmatrix}.$$

Практична реалізація цього методу є досить трудомістким процесом і в кожному з випадків представляє окреме дослідження. Обмежимося можливістю такого вивчення на прикладі модельного розподілу другого порядку:

$$\delta_2(x, y, z) = \delta^0(\rho) + b_{000} + b_{200} W_{200} + b_{020} W_{020} + b_{002} W_{002} + b_{110} W_{110} + b_{101} W_{101} + b_{011} W_{011}.$$

Використовуючи зв'язок коефіцієнтів розкладу та стоксових постійних, за умови  $\frac{\partial E}{\partial b_{020}} = 0$ , одержимо розв'язок:

$$\frac{b_{020}}{a_e^2} = - \frac{\int_{\tau} [\delta_a \Delta V_2 + V_a \Delta W_2] d\tau}{2 \int_{\tau} \Delta W_2 \Delta V_2 d\tau} \cdot b.$$

За його допомогою визначаємо коефіцієнти розкладу гідростатично врівноваженої Землі, які наведені в табл. 11.

Таблиця 11

Коефіцієнти розкладу гідростатично врівноваженої Землі для радіального та однорідного розподілів

$b_{200}$	$b_{020}$	$b_{002}$	$b_{000}$	$b'_{000}$	$b'_{200}$	$b'_{200}$	$b'_{020}$
0.795733	0.757863	0.7766584	0.45593035	1	1.116224	1.1554094	1.135074

За знайденими коефіцієнтами  $b_{mnk}$  та функціями  $W_{mnk}$  знаходимо значення функції розподілу мас надр Землі для двох приведених випадків та результати представляємо на рис.3.

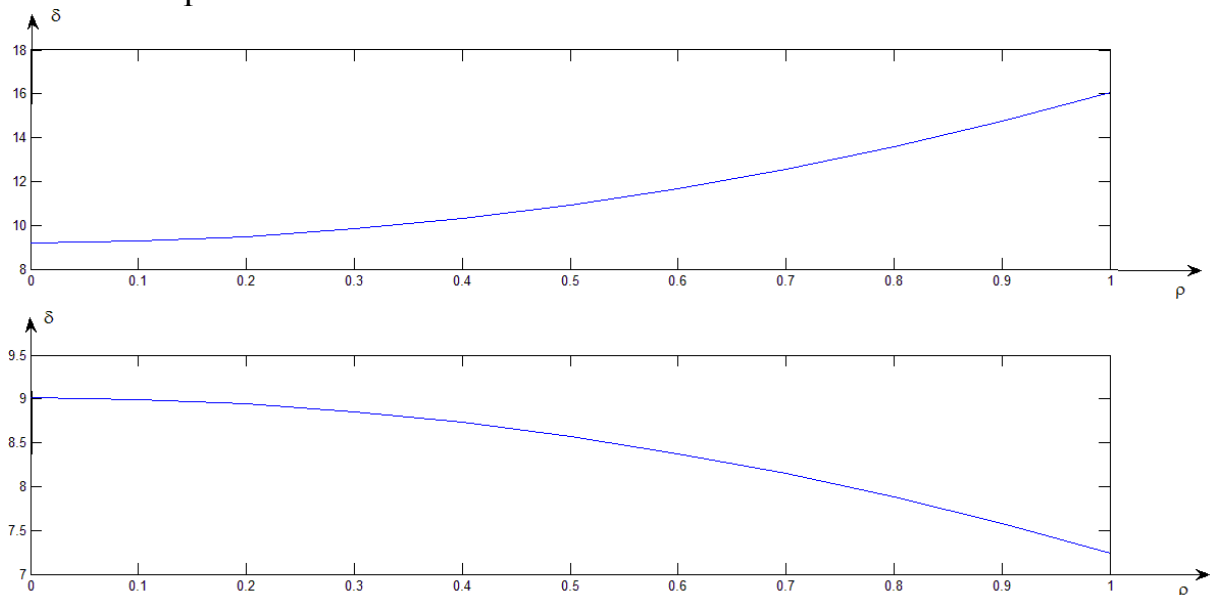


Рис.3. Графік розподілу мас порядку в точці  $\varphi = 60^\circ$ ,  $\lambda = 0^\circ$  по радіусу для однорідної моделі та моделі PREM.

Графіки значень густини гідростатично врівноваженої планети для однорідного та радіального розподілу за моделлю PREM (рис. 3) узгоджуються з дослідженнями, проведеними іншими науковцями. Тому наведений алгоритм можна застосувати при вивченні геодинамічних процесів Землі, причиною яких є гідростатичний стан планети або відхилення від нього.

### Загальні висновки

У дисертаційній роботі наведено теоретичні дослідження апроксимації тривимірних функцій всередині еліпсоїдального тіла та практичне їх застосування при вивченні гравітаційних полів і внутрішньої структури планет. Вирішена важлива наукова проблема зв'язку тривимірних розподілів мас надр еліпсоїдальних планет з їх потенціалами.

Основні наукові та практичні результати роботи полягають в наступному:

1. Удосконалена методика апроксимації кусково-неперервних функцій в еліпсоїді на основі двох біортогональних систем многочленів. Встановлені властивості цих систем, що дають можливість використати їх для побудови тривимірних розподілів густини мас всередині планети.
2. Уперше введено систему неортогональних функцій  $u_{mnk}$ , гармонічних поза небесним тілом, фігурою якого є тривісний еліпсоїд. Потенціал планети з допомогою  $u_{mnk}$  описується всюди збіжними рядами, які у випадку сферичної планети, збігаються з рядами за зовнішніми кульовими функціями.
3. Уперше отримано представлення потенціалу планети сумою негармонічних функцій. Показана можливість його застосування для розв'язання прямих і дослідженні обернених задач гравіметрії.
4. Уперше знайдено формальне представлення для значення  $\delta_0$  функції густини в центрі мас еліпсоїдальної планети. Визначені межі зміни  $\delta_0$  для небесних тіл Сонячної системи, які необхідно враховувати при побудові модельних розподілів мас надр планет.
5. Уточнені аналітичні вирази кульових функцій (зовнішніх та внутрішніх) в прямокутній системі координат, що дає можливість використовувати їх в задачах супутникової та фізичної геодезії, а також при дослідженні внутрішньої неоднорідної структури планет.
6. Уперше подана методика зведення даних спостережень в загальнопланетарну систему відліку, що значно зменшує кількість обчислень у процесі побудови тривимірних моделей. Розгляд часткового випадку обґрунтовує можливість використання стокових постійних без їх попереднього перетворення.
7. Удосконалено наближений метод побудови тривимірних розподілів густини мас з метою спрощення алгоритму та запропонований новий підхід до їх визначення. Застосування поверхневих інтегралів для зображення стокових постійних (до четвертого порядку включно) дало можливість визначати однозначно функцію розподілу густини мас та її похідних.
8. Уперше виведені формули обчислення потенціалу еліпсоїда для деяких розподілів мас, які використані для обчислення потенціалу кульової та еліпсоїдальної планети і гравітаційної енергії.
9. Запропоновано метод наближення кусково-неперервних одновимірних функцій розподілу густини надр еліпсоїдальної та сферичної планети з використанням многочленів Лежандра різними способами, досліджені умови збіжності, а також обґрунтований вибір оптимальної кількості доданків у сумі.
10. Уперше запропоновані формули обчислення наближеного значення енергії кулі і еліпсоїда та показана їх узгодженість з виведеними точними виразами

для енергії кульової планети. Розроблена методика застосована для вивчення інтегральних характеристик планети Земля, функція розподілу мас якої визначається як референсна модель PREM.

11. Аналітичні вирази знаходження потенціалу та енергії тривимірної еліпсоїдальної планети використані для дослідження стану гідростатичної (негідростатичної) рівноваги на прикладі Землі, густина розподілу мас якої – многочлен другого степеня за змінними  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Виконані обчислення та їх аналіз дозволяють зробити висновок про суттєве відхилення планети Земля від стану гідростатичної рівноваги.

**Список основних опублікованих праць за темою дисертації.  
Статті у наукових періодичних виданнях України, що входять до  
міжнародних наукометричних баз:**

1. Фис М.М. Трехмерная и референсная плотностные модели Земли / Г.А. Мещеряков, М.М. Фис // Геофизический журнал. – Киев.–1986, т.8, №4.– С. 68-75.
2. Фис М.М. Трехмерная плотностная модель Земли. 1 / Г.А. Мещеряков, М.М. Фис // Геофизический журнал. – Киев.–1990, т. 12, №4.– С. 50–57.
3. Фис М.М. Трехмерная плотностная модель Земли. 2 / Г.А. Мещеряков, М.М. Фис // Геофизический журнал. – Киев.–1990, т. 12, №5. – С. 11-20.
4. Фис М.М. Значення та варіації густини у центрі мас еліпсоїдальних планет / М.М. Фис, П.М. Зазуляк, П.Г. Черняга // Науково-теоретичний журнал «Кинематика и физика небесных тел». – Київ.–2013, т.29, №2. – С. 62–68.

**Статті у фахових виданнях України:**

5. Фис М.М. Метод сумісного аналізу внутрішньої будови, фігури і гравітаційного поля Землі / М.М. Фис // «Геодинаміка». – Львів. – 1998, №1. – С. 141–143.
6. Фис М.М. Про один комбінований метод побудови модельного розподілу мас земних надр / М.М. Фис, Ю.П. Губар // Збірник наукових праць науково-технічної конференції, «Сучасні досягнення геодезії, геодинаміки та геодезичного виробництва». – Львів. – 1999, №1. – С. 41-42.
7. Фис М.М. Наближений метод побудови тримірної моделі Землі з врахуванням тонких структур її зовнішнього гравітаційного поля / М.М. Фис, І.Я. Покотило, В.М. Новосад // Збірник наукових праць науково-технічної конференції, «Сучасні досягнення геодезії, геодинаміки та геодезичного виробництва». – Львів. – 1999, №2. – С. 43–45.
8. Фис М.М. Про один метод побудови еквіпотенціальних поверхонь / П.М. Зазуляк, М.М. Фис, Ю.П. Губар // «Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва». – Львів. – 2000. – С. 41–43.
9. Фис М.М. Про формули представлення динамічного стиску в довільній планетарній системі координат / М.М. Фис, П.М. Зазуляк, В.О. Волос, І.Я. Покотило // Український міжвідомчий науково-технічний збірник «Геодезія, картографія і аерофотознімання». – 2003, Вип. 64. – С. 97-98.
10. Фис М.М. До визначення густини розподілу мас в центрі планети / М.М. Фис // «Геодинаміка». – Львів. – 2006, №1(5). – С. 17–20.

11. Фис М.М. Про один клас неортогональних для еліпсоїда гармонійних функцій / М.М. Фис // Збірник наукових праць Західного геодезичного товариства УТГК «Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва». – Львів. – 2006, Вип. I (11). – С. 126–130.

12. Фис М.М. Знаходження оцінки для густини в центрі еліпсоїдальної планети / М.М. Фис, А.Р. Согор, З.О. Котик // Український міжвідомчий науково-технічний збірник «Геодезія, картографія і аерофотознімання». – Львів. – 2006, Вип. 67. – С. 7–9.

13. Фис М.М. Про один метод визначення внутрішнього потенціалу і гравітаційної енергії еліпсоїдальної планети / М.М. Фис // Збірник наукових праць Західного геодезичного товариства УТГК «Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва». – Львів. – 2008, Вип. I (15). – С. 106–109.

14. Фис М.М. Апроксимація потенціалу планети неперервними функціями / М.М. Фис, А.Р. Согор, Р.С. Фоца // «Геодинаміка». – Львів. – 2007, №1(6). – С. 11–15.

15. Фис М.М. Метод знаходження густини розподілу мас планети з урахуванням стоксових сталих до четвертого степеня / М.М. Фис, Р.С. Фоца, А.Р. Согор, В.О. Волос // «Геодинаміка». – Львів. – 2008, № 1(7). – С. 25–34.

16. Фис М.М. Приведення фундаментальних сталих у загальну планетарну систему відліку і використання їх при побудові тривимірних функцій розподілу мас планет / М.М. Фис // Вісник геодезії та картографії. – Київ. – 2008, №4. – С. 11–13.

17. Фис М.М. Про єдиний алгоритм визначення значень густини, потенціалу та енергії одновимірного розподілу мас еліпсоїдальної планети / М.М. Фис, В.І. Нікулішин // Міжвідомчий науково-технічний збірник «Геодезія, картографія і аерофотознімання». – Львів. – 2009, Вип. 71. – С. 90–95.

18. Фис М.М. Аналіз впливу еліпсоїдальності фігури Землі на її внутрішню структуру на прикладі моделі PREM / М.М. Фис, В.І. Нікулішин // «Геодинаміка». – Львів. – 2011, № 1 (10). – С. 17–21.

19. Фис М.М. Розклад гравітаційного поля тривісної еліпсоїдальної планети з використанням одного класу не ортогональних гармонійних функцій / М.М. Фис // Міжвідомчий науково-технічний збірник «Геодезія, картографія і аерофотознімання». – Львів. – 2011, Вип. 74. – С. 34–37.

20. Фис М.М. Новий підхід до використання стоксових сталих для побудови функцій та її похідних розподілів мас планет / П.Г. Черняга, М.М. Фис // Збірник наукових праць Західного геодезичного товариства УТГК «Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва». – Львів. – 2012, Вип. II (24). – С. 40–43.

21. Фис М.М. Гравітаційні моделі тривимірного розподілу густини планет земної групи / А.Л. Церклевич, О.С. Заяць, М.М. Фис // «Геодинаміка». – Львів. – 2012, №1 (12). – С. 42–53.

22. Фис М. М. Дослідження гідростатичного стану для тривимірного розподілу мас другого порядку сферичної та еліпсоїдальної Землі / М.М. Фис, П.Г. Черняга, А.М. Бридун // Збірник наукових праць Західного геодезичного товариства УТГК «Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва». – Львів. – 2013, Вип. II (26). – С. 53–57.

23. Фис М.М. Порівняльний аналіз формул для потенціалу та його радіальних похідних тришарових кульових та еліпсоїдальних планет / М.М. Фис, Ю.І. Голубінка, М.І. Юрків // Збірник наукових праць Західного геодезичного товариства УТГК «Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва». – Львів. – 2014, Вип. I (27). – С. 46-51.

24. Фис М.М. Порівняння одного класу гармонічних та кульових функцій при представленні потенціалу планети / П.Г. Черняга, М.М. Фис, Ю.І. Голубінка, М.І. Юрків // Збірник наукових праць Західного геодезичного товариства УТГК «Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва». – Львів. – 2014, Вип. II (28). – С. 19-23.

**Матеріали в наукових виданнях, збірниках наукових доповідей конференцій:**

**Статті в наукових виданнях, збірниках наукових доповідей конференцій**

25. Fys M.M. On the Spheroidal Normal Earth / G.A. Mecherykov, N.F. Ageyev, M.M. Fys // Proceedings of the International Symposium «Figure and Dynamics of the Earth, Moon, and Planets». – Prague. – 1987, Sep. 15–20. – P. 95-117.

26. Фис М.М. Нетрадиционная нормальная Земля / Г.А. Мещеряков, Н.Ф. Агеев, М.М. Фис // Труды II Орловской конференции «Изучения Земли как планеты методами геофизики, геодезии и астрономии». – Киев. – 1988. – С. 31–33.

27. Фис М. М. Внешнее гравитационное поле Луны и трехмерное распределение плотности ее недр / П.М. Зазуляк, Г.А. Мещеряков, М.М. Фис // В кн.: Селенодезия и динамика Луны. Наукова думка – Киев. – 1990. – С. 39-42.

28. Фис М. М. Вариант механической модели нижней мантии / Г.А. Мещеряков, П.М. Зазуляк, О.В. Кулько, М.М. Фис, П.И. Штабалюк // Труды III Орловской конференции «Изучение Земли как планеты методами астрономии, геофизики и геодезии», Наукова думка. – Киев. – 1994. – С. 172-177.

29. Фис М.М. Модельное распределение ускорения силы тяжести на общеземном эллипсоиде / М.М. Фис, П.М. Зазуляк // Львов. политехн. ин-т, Деп. В УкрНИИНТИИ. – Львов. – 01.04.91. №407–Ук91. – 1991. – 9с.

30. Фис М.М. Нетрадиційне розгортання потенціалу Землі / М.М. Фис, І.Я. Покотило // Міжнародний симпозіум «Геодинаміка гірських систем Європи» (тези доповідей). – Львів-Яремче. – 1994. – С. 50.

31. Фис М.М. Використання потенціалу та його похідних при побудові моделей розподілу мас Землі / М.М. Фис, Ю.П. Губар // Міжнародний симпозіум «Геодинаміка гірських систем Європи», (тези доповідей). – Львів-Яремче. – 1994. С. 48–49.

32. Фис М.М. Нетрадиційний метод побудови поверхонь рівня планети (геоїда, селеноїда, аероїда) за її зовнішнім гравітаційним полем / М.М. Фис, Ю.П. Губар, І.Я. Покотило // Збірник наукових праць конференції «Сучасні досягнення геодезичної науки і виробництва в Україні». – Львів. – 1997. – С. 39–42.

33. Фис М.М. Використання одного класу гармонічних функцій для розкладу потенціала Землі / М.М. Фис, І.Я. Покотило, В.М. Новосад // Збірник наукових праць міжнародної науково-практичної конференції «Геодезичний моніторинг, геодинаміка і рефрактометрія на межі ХХІ століття». – Львів. – 1998. – С. 8–11.



34. Фис М.М. Методи побудови деяких інтегральних характеристик для еліпсоїдальних планет / М.М. Фис, П.М. Зазуляк, В.О. Волос // VI міжнародний науково-технічний симпозіум геоінформаційний моніторинг навколишнього середовища – GPS і GIS – технології». – Алушта (Крим). – 2001. – С.9–10.

35. Фис М.М. Побудова точних моделей мас планет з урахуванням стоксових постійних вищих порядків / М.М. Фис, Р.С. Фоца, А.Р. Согор // Збірник наукових праць «Новітні досягнення геодезії, геоінформатики та землевпорядкування – Європейський досвід». – Чернігів. – 2007, Вип. 3. – С. 43-53.

36. Фис М.М. Про один варіант побудови функції розподілу мас еліпсоїдальної планети, узгодженої з стоксовими сталими до четвертого порядку / М.М. Фис, В.О. Волос, І.Я. Покотило // XIII міжнародний науково-технічний симпозіум «Геоінформаційний моніторинг навколишнього середовища: GPS і GIS – технології». – Алушта (Крим). – 2008р. – С. 31-33.

37. Фис М.М. Метод дослідження стану гідростатичної рівноваги трьохвимірної еліпсоїдальної планети / М.М. Фис, В.І. Нікулішин, І.Я. Покотило // XVI міжнародний науково-технічний симпозіум «Геоінформаційний моніторинг навколишнього середовища GPS і GIS – технології». – Алушта (Крим). – 2011. – С. 99-103.

38. Фис М.М. Побудова функції розподілу мас та її похідних для кульової планети з використанням даних про її гравітаційне поле / М.М. Фис, І.Я. Покотило, Ю.Г. Кордуба, Н.М. Фроміль, Г.С. Лех // VII Міжнародна науково-практична конференція «Новітні досягнення геодезії, геоінформатики та землевпорядкування – Європейський досвід». – Чернігів. – 2012. – С. 51–55.

39. Фис М.М. Про можливість визначення коефіцієнтів розкладу потенціалу всюди збіжними рядами та їх геофізичне тлумачення / М.М. Фис, А.Р. Согор, Р.С. Фоца // XVII міжнародний науково-технічний симпозіум «Геоінформаційний моніторинг навколишнього середовища: GNSS і GIS – технології». – Алушта. (Крим). – 2012. – С. 115–120.

40. Фис М.М. Про еквівалентність одного класу гармонійних функцій з кульовими функціями при представленні потенціалу планети / М.М. Фис, А.М. Бридун, А.Р. Согор, Ю.Г. Кордуба // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія Географія. Землеустрій. Природокористування. – Ужгород. – 2014, Вип. №3, – С. 88-92.

### Анотація

**Фис М. М. Математичні моделі густини надр планет та їх гравітаційних полів.** - Рукопис. Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальності 05.24.01–геодезія, фотограмметрія та картографія. Національний університет “Львівська політехніка”, Львів, 2015.

Дисертація присвячена розробці методів одночасного опису внутрішньої структури та гравітаційного поля планет. З цією метою побудована методика апроксимації функції розподілу мас всередині еліпсоїдальних тіл за допомогою двох взаємоортогональних систем. Зображення потенціалу в прямокутній системі координат, а також біортогональність систем дає можливість дослідити структуру стоксових постійних. Сукупність гармонічних функцій в еліпсоїді, побудованих на

основі властивостей цих систем, дозволяє представляти потенціал рядами за ними, які збігаються рівномірно у всьому просторі і є неперервними. Також приведено інше представлення потенціалу всюди збіжними рядами, коефіцієнти яких можуть бути використані при дослідженні внутрішньої структури планет. Запропонований метод безпосереднього знаходження коефіцієнтів розкладу другого порядку, що визначає відповідний розподіл, який береться за початкову ітерацію в запропонованому наближеному методі побудови модельних розподілів. Цей метод є тотожний методу Мещерякова Г.О., детально дослідженому в роботі. Сформульований новий підхід до використання стоксових постійних, на основі чого отримані межі зміни значення потенціалу в центрі планети та формула для його обчислення. Сформульований метод визначення функції розподілу та її похідних за цими постійними. Знайдені формули для внутрішнього потенціалу деяких розподілів, запропонований метод апроксимації кусково-неперервних розподілів мас, що дало можливість визначити наближено внутрішній потенціал еліпсоїдальної планети, а також значення гравітаційної енергії. Це, в свою чергу, дозволило розробити метод дослідження стану гідростатичної рівноваги небесних тіл, який застосований для еліпсоїдальної Землі з розподілом другого порядку, узгодженого з референчною моделлю PREM.

**Ключові слова:** біортогональні многочлени, внутрішній потенціал, всюди збіжні ряди, гравітаційна енергія, гравітаційне поле, еліпсоїд, рівневі поверхні, тривимірний розподіл мас, функція.

#### Аннотація

**Фыс М. М. Математические модели распределения плотности недр планет и их гравитационных полей.** – На правах рукописи. Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности 05.24.01-геодезия, фотограмметрия и картография. Национальный университет «Львовская политехника» Министерства образования и науки Украины, г. Львов, 2015.

Диссертация посвящена разработке методов одновременного изучения внутренней структуры и гравитационного поля планет (внутреннего и внешнего). С этой целью предложена методика аппроксимации функции распределения масс внутри эллипсоидальных тел с помощью двух взаимно ортогональных систем и изучены свойства таких разложений. Представление внутреннего потенциала в прямоугольной системе координат и биортогональность систем дало возможность исследовать структуру стоксовых постоянных, а также степень влияния на них неоднородности и эллипсоидальной формы планеты. Построена совокупность неортогональных гармонических в эллипсоиде функций, которые изображают потенциал рядами. Для функций одинаковой степени установлены рекуррентные формулы между ними. Для предложенных функций установлены соотношения непосредственного их определения. Такое представление является равномерно сходящимся во всем пространстве и, как следствие, непрерывным. Поэтому оно может быть использовано при построении эквипотенциальных поверхностей (геоида, селеноида, аэроида). Приведен пример построения геоида, учитывающий функцию распределения многочленом второй степени. Для шаровой планеты соответствующее изображение совпадает с рядом по сферическим функциям. Также приведено другое представление потенциала всюду сходящимися рядами, члены

которого не удовлетворяют условию гармоничности. Соответствующие коэффициенты могут быть использованы при исследовании внутренней структуры планет, а также при решении прямых задач гравиметрии. Кроме этого, рассмотренный метод непосредственного нахождения коэффициентов разложения второго порядка, что определяет соответствующую функцию масс недр планеты, которая берется за начальную итерацию в приближенном методе построения модельных распределений Мещерякова Г.А., который детально исследован и усовершенствован в работе. В частности, все данные (стоксовые постоянные и динамическое сжатие) приведены в планетарной системе координат. С помощью модернизированной методики построена трехмерная модель плотности, учитывающая набор стоксовых постоянных до двадцатой степени включительно, а также учтена радиальная референсная функция распределения масс Земли (модель PREM). Построенные карты изоденс (линий постоянной плотности) подтверждают значительную неоднородность не только по глубине, но и широтно-долготном простирании. Реализован принцип минимального отклонения исходной и искомой модели, которая соответствует стоксовым постоянным без приведения к проблеме моментов. Предложены новые подходы к использованию стоксовых постоянных для построения моделей плотности, в результате чего получены пределы изменения значения в центре планеты и формула для его вычисления. Найденные величины плотности в центре масс хорошо согласуются между собой, а также совпадают с вероятным их значением. Сформулирован метод определения функции распределения и ее производных по этим постоянным. Построены карты на разных глубинах для частных производных по переменным  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Найденны формулы для внутреннего и внешнего потенциала некоторых распределений. Предложены методы аппроксимации одномерных кусочно-непрерывных распределений масс планет с помощью многочленов Лежандра, установлено оптимальное количество членов суммирования. Это позволило определить приближенно внутренний потенциал эллипсоидальной планеты, а также значение гравитационной энергии. Получены формулы вычисления внутреннего потенциала радиальной скачкообразной функции шаровой планеты. Сделано сравнение двух подходов и показана близость результатов вычисления по ним. Для объемных функций распределений масс выведены формулы, определяющие их потенциал и гравитационную энергию  $E$  в эллипсоидальных телах. Условие минимума величины  $E$  позволило разработать метод исследования состояния гидростатического равновесия небесных тел, который применен для эллипсоидальной Земли с распределением плотности земных недр многочленом второй степени, согласованного с референсной моделью PREM. Результаты исследования подтверждают гипотезу о стремлении вещества к всплытию с глубины к поверхности планет, предложенную многими исследователями, например, Г. Моритцом. Таким образом, рассмотренная методика дает реальный механизм исследования состояния вещества внутри планет.

**Ключевые слова:** биортогональные многочлены, внутренний потенциал, всюду сходящиеся ряды, гравитационная энергия, гравитационное поле, эллипсоид, эквипотенциальные поверхности, трехмерное распределение масс, функция, сферические функции, производящие функции.

### Annotation

**Fys M. Mathematical models of the density distribution of the planets and their gravitational fields.** – Manuscript. Dissertation for the degree of doctor of technical sciences, specialty 05.24.01, geodesy, photogrammetry and cartography. National University "Lviv Polytechnic", Lviv, 2015.

The thesis is devoted to developing methods for the simultaneous description of internally structure and gravitational fields of planets. For this it was constructed technique of approximation of the mass distribution inside the ellipsoidal bodies using two mutually orthogonal systems. Presentation of the potential in a rectangular coordinate system and biorthogonality of the system enable to research the structure of Stokes constants. Based on the properties of these systems it is built a set of harmonic functions in ellipsoid, that allows to represent the potential by series, which converge uniformly in all space and are continuous. Also it is given another representation of the potential by everywhere convergent series whose coefficients can be used to research the internal structure of planets. The proposed method of the direct determination of the expansion coefficients of the second order determines the appropriate distribution, which is taken as the initial iteration in the proposed method of construction of model distributions. This method is equivalent to method of prof. Meshcheryakov G., studied in detail in this work. A new approach to the use of Stokes constant is proposed and considering it the limits of variation value of the potential in the center of the planet and the formula for its calculating was obtained. The method for determining the distribution function and its derivatives for these constants was formulated. Formulas for internal potential of some distributions were determined, the method of approximation of piecewise continuous mass distribution was proposed, which made possible to determine approximately internal potential of ellipsoidal planet, as well as the value of the gravitational energy. This makes possible to develop a method of investigation of state of hydrostatic equilibrium of celestial bodies, which is applied to the ellipsoidal Earth with the distribution of the second order, consistent with the model of reference PREM.

**Keywords:** biorthogonal polynomials, inner potential, everywhere convergent series, gravitational energy, gravitational field, ellipsoid, smooth surface, three-dimensional mass distribution, function.