

П. Д. ДВУЛІТ<sup>1</sup>, О. В. СМЕЛЯНЕЦЬ<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>Кафедра вищої геодезії та астрономії, Національний університет «Львівська політехніка», вул. С. Бандери, 12, Львів, Україна, 79013, ел. пошта dvupet@ukr.net

<sup>2\*</sup>Кафедра вищої геодезії та астрономії, Національний університет «Львівська політехніка», вул. С. Бандери, 12, Львів, Україна, 79013, ел. пошта smelyanetsalex@gmail.com

## ПРО ТОЧНІСТЬ ОБЧИСЛЕННЯ ОСНОВНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ГРАВІТАЦІЙНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛІ

**Мета.** Основною метою роботи є дослідження вимог щодо точності обчислення характеристик гравітаційного поля Землі (висот квазігеоїда та складових відхилень прямовисних ліній) на основі аналізу методів та чинних вимог до визначення цих характеристик. **Методика.** Гравіметричний метод є основним методом для визначення висот квазігеоїда і складових відхилень прямовисних ліній для суходолу і шельфових зон. Вихідними даними при цьому є результати гравіметричних знімів. Основними способами визначення характеристик гравітаційного поля Землі є методи інтегральних перетворень, методи параметричної апроксимації, методи статистичної колокації та комбіновані методи. Ці методи обчислення висот квазігеоїда і складових відхилень прямовисних ліній дають різні результати щодо точності обчислень. Методи інтегральних перетворень ґрунтуються на формулах Стокса і Венінга–Мейнеса з урахуванням поправок Молоденського. У разі використання аналітичного продовження точність обчислення складових відхилень прямовисних ліній цим методом сягає 0,5–1" для будь-яких регіонів. Методи параметричної апроксимації уможливають обчислення характеристик гравітаційного поля Землі у центральній та близьких зонах (метод В. І. Аронова) або врахування глобальних і регіональних характеристик (метод сферичних гармонік). Метод статистичної колокації використовує статистичні зв'язки між обчислюваними характеристиками гравітаційного поля і вихідними аномаліями прискорення вільного падіння, однак його точність обмежена внаслідок заміни істинних значень коваріацій модельними. У комбінованому методі вплив близьких зон враховують за гравіметричними даними з використанням узагальненого інтеграла Стокса, а вплив далеких зон – з використанням гармонійних коефіцієнтів геопотенціалу. **Результати.** Для практичної реалізації визначення висот квазігеоїда і складових відхилень прямовисних ліній поверхню геосфери ділять на центральну зону (радіусом 100 км), близькі (до 1000 км) і далекі (решта геосфери) зони. Для цього необхідна вихідна інформація у вигляді гравіметричного знімання масштабу 1:50 000 для центральної зони і масштабів 1:100 000-1:200 000 для близьких зон. Вихідною інформацією для далеких зон є сучасні цифрові моделі гравітаційного поля Землі у вигляді гармонійних коефіцієнтів геопотенціалу. **Практична значущість.** Обчислюючи складові відхилення прямовисних ліній, треба враховувати переважання впливу центральної та близьких зон, а визначення висот квазігеоїда потребує ретельнішого врахування впливу далеких зон. Для успішного застосування методів обчислень характеристик гравітаційного поля необхідно використовувати відповідну гравіметричну та топографічну інформацію. **Наукова новизна.** Згідно із сучасними вимогами, обчислення висот квазігеоїда слід проводити з точністю до 0,1 м, а складових відхилень прямовисних ліній – 0,05–0,1". Найбільш ефективним і точним методом обчислення цих характеристик є комбінований метод.

*Ключові слова:* аномалії прискорення вільного падіння, висоти квазігеоїда, складові відхилення прямовисних ліній, гравіметричне знімання, моделі гравітаційного поля Землі.

### *Вступ*

Дослідження фігури Землі та її зовнішнього гравітаційного поля є одним із найважливіших завдань геодезії та геодинаміки. Врахування впливу гравітаційного поля Землі вкрай важливе для розв'язання деяких прикладних задач. Наприклад, під час виконання високоточного нівелювання поправки за непаралельність рівневих поверхонь поля прискорення вільного падіння можуть навіть у рівнинних регіонах сягати кількох сантиметрів. Врахування відхилень прямовисних ліній має велике значення під час виконання геодезичних робіт у гірській місцевості, проектування, будів-

ництва та експлуатації тунелів, шахт, дамб гідроелектростанцій та інших унікальних споруд, а також під час спостережень за деформаціями й осіданнями будівель і споруд.

Протягом останніх десятиліть у геодезії активно впроваджують супутникові методи вимірювань, що дозволяють визначати геодезичні координати точок з високою точністю. Крім того, щороку база гравіметричних даних поповнюється новими високоточними вимірами з використанням сучасних приладів і технологій. Це зумовлює нові підходи до необхідної точності визначення параметрів гравітаційного поля Землі.

### Постановка проблеми

Сучасний стан розвитку геодезії характеризується створенням єдиної Світової системи геодезичних координат та параметрів зовнішнього гравітаційного поля Землі, в яку увійдуть:

- пункти високоточних супутникових мереж і нова тривимірна геоцентрична система координат;
- нова система нормальних висот;
- оновлена гравіметрична система;
- високоточна гравіметрична інформація із широким упровадженням супутникових технологій.

Як відомо, гравітаційне поле Землі істотно впливає на результати геодезичних вимірювань. У зв'язку з цим виникає необхідність точного врахування параметрів гравітаційного поля Землі для розв'язання численних прикладних задач. Йдеться передусім про такі характеристики, як прискорення вільного падіння, висоти квазігеоїда, складові відхилень прямовисних ліній тощо. Одним із основних методів врахування гравітаційного поля Землі в прикладних задачах є метод математичного моделювання, який об'єднує взаємозв'язані форми математичного представлення, об'єкти, засоби і критерії оптимізації моделювання.

Сфера застосування математичних моделей гравітаційного поля Землі в геодезії проявляється в обґрунтуванні методів вивчення фігури і зовнішнього гравітаційного поля Землі, встановлення систем координат і висот, виведення параметрів темного еліпсоїда, розв'язання редуційних задач.

Однією з основних вимог є вимога щодо точності представлення характеристик гравітаційного поля Землі. Так, актуальним завданням є створення моделей гравітаційного поля Землі, які б забезпечували точність визначення аномалій прискорення вільного падіння, висот квазігеоїда і складових відхилень прямовисних ліній із середніми квадратичними похибками 0,3–0,5 мГал, 0,1–0,3 м і 0,05–0,1" відповідно [ICGEM, Krynski, 2013].

За останні роки завдяки досягненням у галузі космічної геодезії та геодезичної гравіметрії отримано значний обсяг нової, точнішої інформації про гравітаційне поле Землі (ГПЗ). В результаті досягнуто істотного прогресу щодо підвищення точності й детальності моделей ГПЗ, а також в галузі розроблення і реалізації нових форм математичного представлення гравіметричних аномалій за допомогою цифрових моделей [Бровар, 2010; Hofmann-Wellenhof, 2006; Torge, 1989]. До цифрових моделей гравітаційного поля Землі прийнято зараховувати моделі у вигляді сукупності впорядкованих дискретних значень однієї або декількох характеристик аномального гравітаційного поля – аномалії прискорення вільного падіння, висоти квазігеоїда, складові відхилень прямовисних ліній, які задані у вузлах регулярної сітки координатних ліній в єдиній системі координат, висот і гравіметричній системі. Крім цього, однією з вимог до цифрових моделей

гравітаційного поля Землі є наявність певного алгоритму інтерполювання, який би забезпечував отримання проміжних значень модельованих характеристик гравітаційного поля Землі з необхідною точністю. У геодезії застосовують цифрові моделі гравітаційного поля Землі у вигляді каталогів середніх значень аномалій прискорення вільного падіння і висот квазігеоїда за трапеціями різних розмірів.

### Аналіз досліджень та публікацій, що стосуються цієї проблеми

Питанням дослідження точності визначення характеристик гравітаційного поля Землі займалися протягом тривалого часу різні дослідники. Як відомо, значний внесок у розроблення теорії та методів визначення основних характеристик гравітаційного поля Землі зробили такі вчені, як Дж. Г. Стокс, Ф. А. Венінг-Мейнес, Г. Моріц (зарубіжні), М. С. Молоденський, В. В. Бровар, Л. П. Пеллінен, М. І. Юркіна, М. К. Мигаль, М. І. Марич, В. Ф. Єремєєв, Ю. М. Нейман (вітчизняні) [Heiskanen, 1981; Молоденский, 1960; Бровар, 1996; Пеллінен, 1992; Марыч, 1971]. Особливо слід відзначити роботи М.С. Молоденського, який сформулював основну задачу геодезії як визначення фізичної поверхні та зовнішнього гравітаційного поля Землі та їх зміни з плином часу.

У публікаціях з цієї проблеми традиційно використовують гравіметричний метод визначення складових відхилень прямовисних ліній та висот квазігеоїда. Вихідні дані – результати наземного, морського й аерогравіметричного знімання. До середини 1970-х років цей метод був основним для визначення складових відхилень прямовисних ліній і висот квазігеоїда на суходолі й у Світовому океані. З розвитком космічної геодезії (супутникова альтиметрія і супутникова градієнтометрія) роль гравіметричного методу для Світового океану дещо зменшилась. Однак поки що гравіметричний метод залишається основним методом визначення складових відхилень прямовисних ліній і висот квазігеоїда для суходолу, шельфу, льодовикової зони тощо [Бровар, 2010]. Способи обчислення складових відхилень прямовисних ліній і висот квазігеоїда гравіметричним методом можна розділити на такі методи: методи інтегральних перетворень, методи параметричної апроксимації, методи статистичної колокації та комбіновані методи. Зрозуміло, що наведені методи обчислень складових відхилень прямовисних ліній і висот квазігеоїда дають різні результати щодо точності їх визначень [Двуліт, 2012(1); Двуліт, 2012(2)].

### Мета

Основною метою роботи є дослідження вимог щодо точності обчислення характеристик гравітаційного поля Землі (висот квазігеоїда та складових відхилень прямовисних ліній) на основі аналізу методів та чинних вимог до визначення цих характеристик.

**Методика та результати робіт**

Розглянемо коротко методи визначення характеристик гравітаційного поля Землі й сучасні вимоги щодо їх точності.

*Методи інтегральних перетворень*

Ці методи використовують класичні формули Стокса і Венінга–Мейнеса

$$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} \Delta g \cdot S(\Psi) d\sigma, \quad (1)$$

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} = \frac{1}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} \Delta g \frac{dS(\Psi)}{d\Psi} \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix} d\sigma,$$

де  $\zeta$  – висота квазігеоїда,  $\xi, \eta$  – складові відхилень прямовисних ліній в площині меридіана і першого вертикала,  $\Delta g$  – «змішана» аномалія прискорення вільного падіння (у вільному повітрі),  $R$  – середній радіус земної сфери,  $\gamma$  – нормальне значення прискорення вільного падіння,  $\sigma, d\sigma$  – земна сфера й елемент сфери,  $S(\Psi)$  – функція Стокса,  $\Psi$  – сферична відстань між досліджуванним пунктом і елементом сфери  $d\sigma$ .

Точність визначення  $\zeta, \xi$  і  $\eta$  – за формулами (1) недостатня, оскільки розглядається сфера радіусом  $R$  замість реальної фізичної поверхні Землі. Для підвищення точності визначення  $\zeta, \xi$  і  $\eta$  необхідно використати точніші методи, які ґрунтуються на теорії М. С. Молоденського. Формули Молоденського для обчислення вказаних характеристик можна подати у вигляді:

$$\begin{aligned} \zeta &= \zeta_0 + \delta\zeta, \\ \xi &= \xi_0 + \delta\xi, \\ \eta &= \eta_0 + \delta\eta, \end{aligned} \quad (2)$$

де  $\zeta_0, \xi_0, \eta_0$  – значення висоти квазігеоїда і складових відхилень прямовисних ліній, знайдені за формулами (1), а  $\delta\zeta, \delta\xi, \delta\eta$  – поправки Молоденського у відповідні величини.

Зауважимо, що формули Стокса і Венінга–Мейнеса дають нульове наближення, а формули Молоденського враховують наближення до отримання кінцевих значень  $\zeta, \xi$  і  $\eta$ .

Якщо враховувати перше наближення Молоденського під час визначення складових відхилень прямовисних ліній, можна отримати їх значення з похибкою 0,2–0,3" для різних аномальних районів [Молоденский, 1960; Пеллинен, 1980; Пеллинен, 1984]. Підвищити точність можна було б, врахувавши друге і третє наближення Молоденського,

$$\begin{aligned} T &= \frac{GM}{a} \sum_{n=2}^N \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (\overline{C_{nm}} \cos m\lambda + \overline{S_{nm}} \sin m\lambda) \overline{P_{nm}}(\sin \varphi), \\ \zeta &= \frac{GM}{\gamma r} \sum_{n=2}^N \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (\overline{C_{nm}} \cos m\lambda + \overline{S_{nm}} \sin m\lambda) \overline{P_{nm}}(\sin \varphi), \\ \xi &= -\frac{GM}{\gamma r^2} \sum_{n=2}^N \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (\overline{C_{nm}} \cos m\lambda + \overline{S_{nm}} \sin m\lambda) \frac{\partial \overline{P_{nm}}(\sin \varphi)}{\partial \varphi}, \\ \eta &= -\frac{GM}{\gamma r^2 \cos \varphi} \sum_{n=2}^N \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (\overline{S_{nm}} \cos m\lambda - \overline{C_{nm}} \sin m\lambda) \frac{\partial \overline{P_{nm}}(\sin \varphi)}{\partial \varphi}, \\ \Delta g &= \frac{GM}{r^2} \sum_{n=2}^N \left(\frac{a}{r}\right)^n (n-1) \sum_{m=0}^n (\overline{C_{nm}} \cos m\lambda + \overline{S_{nm}} \sin m\lambda) \overline{P_{nm}}(\sin \varphi), \end{aligned} \quad (4)$$

але їх практична реалізація передбачає великий обсяг обчислень. Тому для потреб практики розроблено інші методи обчислень цих характеристик. Такими альтернативними методами обчислень  $\zeta, \xi$  і  $\eta$  стали метод В. В. Бровара [Бровар, 1996] і метод аналітичного продовження [Марыч, 1971; Мориц, 1983]. Зазначимо, що одним із найзручніших є метод аналітичного продовження, в якому вихідні гравіметричні аномалії редукуються із фізичної поверхні Землі на відлікову сферу з використанням розкладу в ряд Тейлора. Л. П. Пеллінен і Г. Мориц показали еквівалентність цих альтернативних методів теорії Молоденського [Пеллинен, 1992; Hofmann-Wellenhof, 2006]. Інтегральні методи належать до найбільш використовуваних сьогодні методів обчислення висот квазігеоїда і складових відхилень прямовисних ліній за гравіметричною інформацією поля аномалій прискорення вільного падіння. Якщо використати метод аналітичного продовження, то величини  $\xi$  і  $\eta$  можна визначити із середньою квадратичною похибкою 0,5–1" для будь-якого аномального з гравіметричного погляду регіону [Двуліт, 2012(1), Марыч, 1971].

*Методи параметричної апроксимації*

Цими методами передбачено визначення значень висоти квазігеоїда і складових відхилень прямовисних ліній відповідно до формул:

$$\begin{aligned} \zeta(P) &= \sum_{i=1}^N f_i(P) q_i, \\ \begin{Bmatrix} \xi(P) \\ \eta(P) \end{Bmatrix} &= \sum_{i=1}^N \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_i(P)}{\partial x} \\ \frac{\partial f_i(P)}{\partial y} \end{Bmatrix} q_i, \end{aligned} \quad (3)$$

де  $P$  – досліджувана точка;  $f_i(P)$  – базисна функція апроксимації;  $q$  – параметр апроксимації;  $x, y$  – топоцентричні координати.

Параметри апроксимації визначають із системи лінійних алгебраїчних рівнянь, які зв'язують ці характеристики гравітаційного поля Землі з вихідними аномаліями прискорення вільного падіння. Серед методів цієї групи можна виділити: метод сферичних гармонік, метод В. А. Аронова і метод точкових мас [Аронов, 1976; Пеллинен, 1980].

У методі сферичних гармонік використовуються формули розкладу характеристик гравітаційного поля Землі в ряд за сферичними функціями:

де  $T$  – аномальний потенціал;  $\Delta g$  – аномалія прискорення вільного падіння;  $GM$  – геоцентрична гравітаційна стала;  $\gamma$  – нормальне значення прискорення вільного падіння;  $a$  – велика піввісь загального земного еліпсоїда;  $\varphi, \lambda, r$  – сферичні координати досліджуваної точки (широта, довгота, радіус-вектор);  $\overline{C_{nm}}, \overline{S_{nm}}$  – повністю нормовані коефіцієнти розкладу,  $\overline{P_{nm}}(\sin \varphi)$  – повністю нормовані функції Лежандра;  $n$  – степінь гармоніки,  $m$  – порядок гармоніки;  $N$  – границя суми.

Вже створено декілька десятків глобальних моделей гравітаційного поля Землі у вигляді сферичних гармонік геопотенціалу різної точності й детальності [ICGEM]. Для сучасних задач геодезії обчислення висоти квазігеода і складових відхилень прямовисних ліній передбачає використання таких глобальних моделей, як EGM-96, EGM2008, EIGEN-6C4, для яких  $n = 360, 2190$  та  $2190$  відповідно. Точність цих моделей за висотою квазігеода характеризується середньою квадратичною похибкою  $0,5-1$  м [Godah, 2014]. Використання методу сферичних гармонік є обмеженим, оскільки він описує лише планетарні та регіональні складові відхилень прямовисних ліній і висот квазігеода.

Метод В. І. Аронова використовують лише для обчислення складових відхилень прямовисних ліній з похибкою  $1''$  в центральній і близьких зонах. У цьому методі параметрами апроксимації слугують так звані фіктивні аномалії, які підбирають так, щоб їх аналітичне продовження із внутрішніх глибин Землі до їх фізичної поверхні дорівнювало вихідним аномаліям з необхідною точністю.

Метод точкових мас [Бровар, 2010] передбачає апроксимацію аномального поля потенціалом системи точкових мас. Формули для обчислення складових відхилень прямовисних ліній з використанням цього методу подають у вигляді:

$$\begin{cases} \xi \\ \eta \end{cases} = \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^N \frac{GM_i}{r_i^3} \begin{cases} x - x_i \\ y - y_i \end{cases}, \quad (5)$$

де  $N$  – кількість точкових мас;  $G$  – гравітаційна стала;  $M_i$  – значення  $i$ -ї точкової маси;  $r_i$  – відстань від досліджуваного пункту до  $i$ -ї точкової маси.

Основною проблемою цього методу є визначення параметрів точкових мас, оскільки вихідним

аномаліям може відповідати нескінченна множина системи точкових мас. Крім цього, в аномальних районах точкові маси розміщують на малих глибинах, що призводить до сповільнення збіжності ітеративного підбору точкових мас, тому можливості використання цього методу обмежені у разі високоточних визначень складових відхилень прямовисних ліній. Цим методом складено карти складових відхилень прямовисних ліній з похибкою  $0,5-2''$  [Пеллинен, 1980].

#### Методи статистичної колокації

Цими методами можна обчислювати висоти квазігеода і складові відхилень прямовисних ліній, використовуючи статистичні зв'язки між цими характеристиками і вихідними аномаліями прискорення вільного падіння. Формула для обчислення складових відхилень прямовисних ліній має вигляд:

$$\begin{cases} \xi \\ \eta \end{cases} = \begin{cases} \overline{C_{\xi, \Delta g}}^T \\ \overline{C_{\eta, \Delta g}}^T \end{cases} C_{\Delta g, \Delta g}^{-1} \cdot \overline{\Delta g}, \quad (6)$$

де  $\overline{C_{\xi, \Delta g}}, \overline{C_{\eta, \Delta g}}$  – вектори коваріації між складовими відхилень прямовисних ліній і вихідними гравіметричними аномаліями,  $C_{\Delta g, \Delta g}$  – автоковаріаційна матриця вихідних аномалій,  $\overline{\Delta g}$  – вектор вихідних аномалій.

Метод колокації дає змогу в єдиному алгоритмі виконувати опрацювання різномірної інформації та оцінювати точність отриманих результатів з необхідністю знання коваріації між вихідними та визначуваними величинами [Пеллинен, 1980]. Але на практиці істинні значення коваріації замінюють модельними, що обмежує реальну точність цього методу.

#### Комбінований метод

У комбінованому методі поверхню геосфери ділять на дві зони – близьку у вигляді сферичного сегмента і далеку (решта геосфери) [Двуліт, 2008; Двуліт, 2009]. Вплив аномалій гравітаційного поля Землі в далекій зоні враховують за гармонійними коефіцієнтами аномального потенціалу, а у близькій зоні – за детальною гравіметричною інформацією з використанням узагальненого інтеграла Стокса:

$$\begin{aligned} T &= \frac{R^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\Psi_0} \Delta g \cdot S(r, \Psi) \sin \Psi d\Psi d\lambda + \\ &+ \frac{R\gamma}{2} \sum_{n=0}^N Q_n (n-1) \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi), \quad (7) \\ Q_n^c &= \int_{\Psi_0}^{\pi} S(r, \Psi) P_n(\cos \Psi) \sin \Psi d\Psi, \\ S(r, \Psi) &= \frac{2}{r_i} + \frac{1}{r} - \frac{3r_i}{r^2} - \frac{5R}{r^2} \cos \Psi_i - \frac{3R}{r^2} \cos \Psi_i \cdot \ln \frac{r_i + r - R \cos \Psi_i}{2r}, \\ r_i &= \sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr \cos \Psi_i}, \end{aligned}$$

де  $R$  – радіус відлікової сфери;  $\Psi$  – кут між радіус-вектором точки  $(\varphi, \lambda, r)$  зовнішнього простору і поточною точкою  $i$  поверхні сфери;  $\alpha$  – азимут напрямку на поточну точку сфери;  $\gamma$  – нормальне значення прискорення вільного падіння;  $\Psi_0$  – центральний кут, що визначає радіус близької зони;  $Q_n^c$  – узагальнені коефіцієнти (для зовнішнього простору) впливу далекої зони;  $S(r, \Psi)$  – узагальнена функція Стокса;  $r_i$  – відстань між точкою  $(\varphi, \lambda, r)$  зовнішнього простору і поточною точкою  $i$  геосфери у межах близької зони.

$$\frac{\partial S(r, \Psi)}{\partial \Psi} = -\frac{R}{r^2} \left[ \left( r_0 - 2H - \frac{H^2}{5} \ln \frac{H}{r_0 + 5} \right) \Delta g_0 + \frac{1}{8} \left( r_0 + \frac{H^2}{5} \ln \frac{H}{r_0 + 5} \right) \sum_{k=1}^8 \Delta g_k \right] + \frac{R(r^2 - R^2)}{2r^2} \left[ -\left( \frac{1}{H} + \frac{1}{5} \ln \frac{H}{r_0 + 5} \right) \Delta g_0 + \frac{1}{8} \left( \frac{1}{r_0} + \frac{1}{5} \ln \frac{H}{r_0 + 5} \right) \sum_{k=1}^8 \Delta g_k \right], \quad (8)$$

де  $r_0$  – радіус центральної зони,  $H$  – висота досліджуваної точки,  $\Delta g_0$  – значення аномалії прискорення вільного падіння в центральній зоні досліджуваної точки.

Вплив близької зони радіусом  $\Psi_0$  з центром у досліджуваній точці враховують методом числового інтегрування з використанням гравіметричних і топографічних цифрових карт різних масштабів, а також каталогів середніх значень аномалій прискорення вільного падіння для трапецій малих розмірів. Вплив поля аномалій для решти поверхні Землі, тобто вплив далеких зон, подають у вигляді швидкого збіжного ряду. Виконуючи практичні обчислення, ряд замінюють сумою, залишаючи члени до степеня  $N$ :

$$\zeta_{\Psi_0}^{\pi} = \frac{R}{2\gamma} \sum_2^N Q_n \Delta g_n \quad (9)$$

З формули (9) випливає, що для обчислення впливу далеких зон необхідно знайти коефіцієнти  $Q_n$  і сферичні функції  $\Delta g_n$ . Розкладемо аномалії  $\Delta g_n$  у ряд сферичних функцій. Початкові члени розкладу описують загальні особливості аномального поля, а членам високих порядків відповідають хвилі меншого періоду, які описують локальні особливості гравітаційного поля. Це означає, що локальні особливості будуть враховані інтегральною формулою Стокса і вилучені із ряду  $\zeta_{\Psi_0}^{\pi}$ . Тоді, обчислюючи вплив далеких зон, можна обмежитися порівняно невеликою кількістю гармонік. Наближено залежність між радіусом  $\Psi_0$  близьких зон і кількістю  $N$  врахованих членів розкладу виражають формулою

$$N = \frac{180^\circ}{\Psi_0}$$

Перший член формули (7) враховує вплив поля аномалій близької зони ( $0 \leq \Psi \leq \Psi_0$ ), а другим враховують вплив поля аномалій у далеких зонах.

У центральній зоні (радіусом приблизно 5 км) формули числового інтегрування для висот квазігеоїда і складових відхилень прямовисних ліній не можна використовувати, оскільки за  $r \rightarrow 0$  значення  $S(r, \Psi)$  і  $\frac{\partial S(r, \Psi)}{\partial \Psi}$  прямують до нескінченності, але за малих значень  $\Psi$  функція Стокса  $S(r, \Psi) = \frac{2r}{r_i}$ , а похідна від функції Стокса по сферичній віддалі визначається за формулою

**Практична реалізація методів обчислення складових відхилень прямовисних ліній і висот квазігеоїда за гравіметричними даними.  
Наукова новизна досліджень**

Сьогодні обчислення висот квазігеоїда і складових відхилень прямовисних ліній виконують на основі інтегральних перетворень з урахуванням внеску вихідних аномалій. При цьому виділяють три зони інтегрування: центральну, близьку і далеку. Так, центральна зона являє собою область безпосередньо околу досліджуваного пункту, розміри якої по радіус-вектору в діапазоні 100–200 км. Гравіметрична вихідна інформація задається з найбільшою детальністю з використанням карт масштабу 1:50 000. Близька зона розміщена в межах 200–1000 км від досліджуваної точки. Для цієї зони вихідну інформацію задають у вигляді середніх значень аномалій прискорення вільного падіння за трапеціями з розмірами від  $5' \times 7,5'$  до  $1^\circ \times 1^\circ$ . Далека зона – решта геосфери. Вихідна інформація для далеких зон задається у вигляді гармонійних коефіцієнтів геопотенціалу.

Успішне застосування сучасних методів обчислення висот квазігеоїда і складових відхилень прямовисних ліній за гравіметричною інформацією можливе за умови якісної підготовки вихідних даних, даних про висоту рельєфу у вигляді середніх значень по трапеціях  $5' \times 7,5'$  і детальних цифрових моделей топографічних карт рельєфу масштабу 1:50 000–1:200 000 [Бровар, 2010; Двудіт, 2012(2)]. Висотна інформація забезпечує врахування впливу топографії земної поверхні під час опрацювання гравіметричних даних, що необхідно для досягнення високої точності визначення характеристик гравітаційного поля.

Так, висота квазігеоїда залежить передусім від поля аномалій далеких і близьких зон, а складові відхилень прямовисних ліній – від

аномалій близької та центральної зон. Тому обчислення складових відхилень прямовисних ліній пов'язане з необхідністю використання точнішої та детальнішої інформації в околі досліджуваної точки, а обчислення висот квазігеоїда вимагає підвищеної точності врахування гравітаційного поля Землі в далекій зоні.

### Висновки

На основі наведених даних стосовно точності визначення характеристик гравітаційного поля Землі можна зробити такі висновки:

1. Гравіметричні аномалії, які використовують для врахування впливу поля близьких та далеких зон, повинні бути визначені з точністю 0,2–0,5 мГал. Для забезпечення цього необхідно використовувати гравіметричні карти масштабу 1:50 000 – 1:200 000.

2. Гравіметричні складові відхилень прямовисних ліній з точністю 0,05–0,1" обчислюють з урахуванням в основному впливу близьких зон, з використанням цифрових гравіметричних карт аномалій у вільному повітрі масштабу 1:50 000, а для врахування впливу далеких зон – дані гравіметричного знімання масштабу 1:200 000.

3. Висоти квазігеоїда необхідно визначити з точністю до 0,1 м. Для цього поле аномалій близьких зон повинне бути представлене цифровими гравіметричними картами масштабу 1:50 000 або трапеціями розміру 5'×7,5'. Поле аномалій далеких зон можна подати сучасними моделями гравітаційного поля Землі з точністю визначення аномалій прискорення вільного падіння 1–5 мГал.

4. Із відомих методів визначення характеристик гравітаційного поля Землі ми надаємо перевагу комбінованому методу, оскільки ним можна досягти максимальної точності обчислень.

### Література

- Аронов В. И. Обработка на ЭВМ значений аномалий силы тяжести при произвольном рельефе поверхности наблюдений / В. И. Аронов. – М.: Недра, 1976. – С. 108–124.
- Бровар Б. В. Гравиметрия и геодезия / Б. В. Бровар, Г. В. Демьянов и др. – М.: Научный мир, 2010. – 561 с.
- Бровар В. В. Формулы для вычисления основных характеристик гравитационного поля с погрешностью порядка квадрата сжатия Земли для тестовых моделей / В. В. Бровар, Б. В. Бровар // Физическая геодезия. Книга 2. – М.: ЦНИИГАИК 1996. – С. 191.
- Двуліт П. Д. Про визначення гравіметричних складових відхилень прямовисних ліній / П. Д. Двуліт, Ю. І. Голубінка // Вісник геодезії та картографії. – 2008. – № 2. – С. 7–9.
- Двуліт П. Д. Порівняльна характеристика визначення висот квазігеоїда території України з використанням моделей геоїда/квазігеоїда та гравітаційного поля Землі / П. Д. Двуліт, Ю. І. Голубінка // Геодезія, картографія і аерофотознімання. – № 72 (2009). – С. 27–34.
- Двуліт П. Д. Про точність обчислення складових відхилень прямовисних ліній у районі Західних Альп / П. Д. Двуліт, І. В. Бойко // Геодинаміка. – № 1(12)/2012. – С. 58–62.
- Двуліт П. Д. Модель гравіметричних складових відхилень прямовисних ліній території України за даними EGM2008 / П. Д. Двуліт, Б. Б. Джуман, О. В. Смялянець // Геодинаміка. – № 1(12)/2012. – С. 30–35.
- Марыч М. И. Исследование методов определения возмущающего потенциала и уклонений отвеса на физической поверхности Земли: автореф. на соиск. ученой степени д-ра техн. наук / М. И. Марыч. – 1971.
- Молоденский М. С. Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли / М. С. Молоденский, В. Ф. Еремеев, М. И. Юркина // Труды ЦНИИГАИК, № 131, 1960. – 252 с.
- Пеллинен Л. П. Использование формулы М. С. Молоденского для вычисления аномалий силы тяжести по высотам квазигеоида / Л. П. Пеллинен // Геодезия и картография. – 1984. – № 3.
- Пеллинен Л. П. Определение параметров фигуры и гравитационного поля Земли в ЦНИИГАИК / Л. П. Пеллинен // Геодезия и картография. – 1992. – № 4. – С. 29–35.
- Godah W. Accuracy assesment of GOCE-based geopotential models and their use for modelling the gravimetric quasigeoid – A case study for Poland / W. Godah, M. Szlachowska, J. Krynski // Geodesy and Cartography, Vol. 63, No 1, 2014. – P. 3–24.
- International Centre for Global Earth Models (ICGEM) [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/>
- Heiskanen W. A. Physical geodesy / W. A. Heiskanen, H. Moritz // Institute of Physical Geodesy, Graz, 1981.
- Hofmann-Wellenhof B. Physical geodesy / B. Hofmann-Wellenhof, H. Moritz // Springer Science & Business Media, 2006. – 420 p.
- Krynski, J. New gravity control in Poland – needs, the concept and the design / J. Krynski, T. Olszak, M. Barlik, P. Dykowski // Geodesy and cartography. – 2013. – Vol. 62. – № 1. – P. 3–21.
- Torge W. Gravimetry / Wolfgang Torge // Walter de Gruyter, Berlin–New-York, 1989. – 465 p.

П. Д. ДВУЛИТ<sup>1</sup>, О. В. СМЕЛЯНЕЦ<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup> Кафедра высшей геодезии и астрономии, Национальный университет «Львовская политехника», ул. С. Бандеры, 12, Львов, Украина, 79013, эл. почта dvupet@ukr.net

<sup>2\*</sup> Кафедра высшей геодезии и астрономии, Национальный университет «Львовская политехника», ул. С. Бандеры, 12, Львов, Украина, 79013, эл. почта smelyanetsalex@gmail.com

### О ТОЧНОСТИ ИСЧИСЛЕНИЙ ОСНОВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ

**Цель.** Главной целью работы является исследование требований к точности вычислений характеристик гравитационного поля Земли (высот квазигеоида и составляющих отклонений отвеса) на основании анализа методов и существующих требований к определению этих характеристик. **Методика.** Гравиметрический метод является главным методом для определения высот квазигеоида и составляющих уклонений отвеса для суши и шельфовых зон. Исходные данные при этом – результаты гравиметрических съемок. Основными методами определения характеристик гравитационного поля Земли являются методы интегральных преобразований, методы параметрической аппроксимации, методы статистической коллокации и комбинированные методы. Приведенные методы вычислений высот квазигеоида и составляющих уклонений отвеса имеют различную точность. Методы интегральных преобразований основаны на формулах Стокса и Венинга–Мейнесса с учетом поправок Молоденского. При использовании аналитического продолжения точность вычислений составляющих уклонений отвеса достигает 0,5–1" в любом регионе. Методы параметрической аппроксимации предоставляют возможность вычисления характеристик гравитационного поля Земли в центральной и близкой зонах (метод В. И. Аронова) или учета глобальных и региональных характеристик (метод сферических гармоник). Метод статистической коллокации использует статистические связи между вычисляемыми характеристиками гравитационного поля и исходными аномалиями ускорения силы тяжести, однако его точность ограничена в связи с заменой истинных значений ковариации модельными. В комбинированном методе влияние близких зон учитывают за гравиметрическими данными с использованием обобщенного интеграла Стокса, а влияние далеких зон – с использованием гармонических коэффициентов геопотенциала. **Результаты.** Для практической реализации определения высот квазигеоида и составляющих уклонений отвеса поверхность геосферы делят на центральную зону (радиусом 100 км), близкие (до 1000 км) и далекие (остальная часть геосферы) зоны. При этом необходимо наличие исходной информации – гравиметрических съемок масштаба 1:50 000 для центральной зоны и масштабов 1:100 000-1:200 000 для близких зон. Исходной информацией для далеких зон служат современные цифровые модели гравитационного поля Земли под видом гармонических коэффициентов геопотенциала. **Практическая значимость.** При расчете составляющих отклонений отвесных линий следует учитывать преобладающее влияние центральной и близких зон, а определение высот квазигеоида требует более тщательного учета влияния дальних зон. Для успешного применения методов вычислений характеристик гравитационного поля необходимо использовать соответствующую гравиметрическую и топографическую информацию. **Научная новизна.** Согласно современным требованиям, вычисления высот квазигеоида следует проводить с точностью до 0,1 м, а составляющих отклонений отвесных линий – 0,05-0,1". Наиболее эффективным и точным методом вычисления этих характеристик является комбинированный метод.

*Ключевые слова:* аномалии ускорения силы тяжести, высоты квазигеоида, составляющие уклонений отвеса, гравиметрическая съемка, модели гравитационного поля Земли.

P. D. DVULIT<sup>1</sup>, O. V. SMELYANETS<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>Department of Higher geodesy and astronomy of Lviv Polytechnic National University, 12, Bandera street, Lviv, Ukraine, 79013 e-mail dvupet@ukr.net

<sup>2\*</sup> Department of Higher geodesy and astronomy of Lviv Polytechnic National University, 12, Bandera street, Lviv, Ukraine, 79013 e-mail smelyanetsalex@gmail.com

### ABOUT THE ACCURACY OF CALCULATION THE MAIN CHARACTERISTICS EARTH'S GRAVITY FIELD

**Objective.** The main purpose is to research the requirements for calculation accuracy characteristics of the Earth's gravitational field (quasigeoid heights and plumb line deflection components) based on an analysis of existing methods and requirements to determine these characteristics. **Methodology.** Gravimetric method is the primary method for determining the height quasigeoid and plumb line deflection components for land and shelf areas. Initial data in this case are results of the gravimetric survey. The main methods of determining the characteristics of Earth's gravitational field is integral transform methods, parametric approximation methods,

statistical collocation methods and combined methods. These methods calculate heights of quasigeoid and plumb line deflection components produce with different results on the accuracy of calculations. Methods of integral transforms based on formulas Stokes and Vening–Meynes amended by Molodensky. When using analytic continuation precision calculation of plumb line deflection components this method reaches 0.5–1" for all regions. Parametric approximation methods make it possible to calculate the characteristics of Earth's gravitational field in the central and close areas (V. I. Aronov method) or incorporation of global and regional characteristics (spherical harmonics method). Statistical collocation method uses statistical relationships between the calculated characteristics of the gravitational field and the initial gravity anomalies, but its accuracy is limited due to the replacement of the true values of kovariations on the model values. In the combined method take into account the impact close areas by gravimetric data using the generalized Stokes integral, the impact of distant zones - using geopotential harmonic coefficients. **Results.** For practical implementation heights quasigeoid and plumb line deflection components definition geosphere surface is divided into a central area (radius 100 km), close (to 1000 km) and long (the rest of the geosphere) zone. It is necessary to have the presence of input information in the form of gravimetric measurements scale of 1:50 000 for the central zone and the scales of 1:100 000–1:200 000 for close zones. The input information for long areas are modern digital models of the gravity field of the Earth in the form of harmonic geopotential coefficients. **Practical significance.** Calculation of plumb line deflection components should be considered the predominant influence of the central and close areas, quasigeoid heights definition requires a careful consideration of the impact of long areas. For successful application of computation methods of gravity field characteristics must use appropriate gravimetric and topographic information. **Originality.** Under current requirements, calculations of quasigeoid heights should be accurate to 0.1 m, and the plumb line deflection components – 0.05–0.1". The most efficient and accurate calculating method of these characteristics is combined method.

*Key words:* gravity anomalies, quasigeoid heights, components of plumb line deviation, gravimetric measurements, models of Earth's gravity field.

#### REFERENCES

- Aronov V. I. *Obrabotka na EVM znachenij anomalij sily tjazhesti pri proizvol'nom rel'efe poverhnosti nabljudenij* [Computer processing values of gravity anomalies for arbitrary surface topography observations]. Moscow: Nedra, 1976, pp. 108-124.
- Brovar B. V., Dem'janov G. V. i dr *Gravimetrija i geodezija* [Gravimetry and geodesy]. Moscow: Nauchnyj mir, 2010, 561 p.
- Brovar V. V., Brovar B. V. *Formuly dlja vychislenija osnovnykh harakteristik gravitacionnogo polja s pogreshnost'ju porjadka kvadrata szhatija Zemli dlja testovykh modelej* [Formulas for calculating the basic characteristics of the gravity field with the error of the order of a square compression of the Earth for test models]. Fizicheskaja geodezija, Kniga 2 [Physical geodesy, book 2], Moscow: CNIIGAIK 1996, pp. 191.
- Dvulit P. D., Gholubinka Ju. I. *Pro vyznachennja ghravimetrychnykh skladovykh vidkhylenj prjamovysnykh linij* [About determination gravimetric components of the plumb line deviation] // Visnyk gheodeziji ta kartografiji [Journal of Geodesy and Cartography]. 2008, no. 2, pp.7-9.
- Dvulit P. D., Gholubinka Ju. I. *Porivnjaljna kharakterystyka vyznachennja vysot kvazigheojida terytoriji Ukrainy z vykorystannjam modelej gheojida/kvazigheojida ta ghravitacijnogho polja Zemli* [Comparative characteristic of determination heights of quasigeoid in Ukraine using geoid/quasigeoid models and Earth's gravity field]. Gheodezija, kartografija i aerofotozmannja [Geodesy, Cartography and Aerial Survey], no. 72, 2009, pp. 27–34.
- Dvulit P. D., Bojko I. V. *Pro tochnistj obchyslennja skladovykh vidkhylenj prjamovysnykh linij u rajoni Zakhidnykh Aljp* [About the accuracy of plumb lines deflections computations in Western Alps area]. Gheodynamika [Geodynamics], no. 1(12)/2012, pp. 58–62.
- Dvulit P. D., Dzhuman B. B., Smelyanets O. V. *Modelj ghravimetrychnykh skladovykh vidkhylenj prjamovysnykh linij terytoriji Ukrainy za danymy EGM2008* [The gravimetric plumb lines deflection model on the Ukraine area computed by EGM2008]. Gheodynamika [Geodynamics], no. 1(12)/2012, pp. 30–35.
- Marych M. I. *Issledovanie metodov opredelenija vozmushhajushhego potentsiala i uklovenij ovesa na fizicheskoy poverhnosti Zemli* [Investigation of methods for determining the perturbing potential and plumb lines deflections on the physical surface of the Earth]. Avtoreferat na soisk. uchenoj stepeni doktora tehniceskikh nauk [Abstract for the degree of Doctor of Technical Sciences], 1971.
- Molodenskij M. S., Eremeev V. F., Jurkina M. I. *Metody izuchenija vneshnego gravitacionnogo polja i figury Zemli* [Methods of research the external gravitational field and figure of the Earth]. Trudy CNIIGAIK, no.131, 1960, 252 p.
- Pellinen L. P. *Ispolzovanija formuly M. S. Molodenskogo dlja vychislenija anomalij sily tjazhesti po vysotam kvazigeoida* [Using the formula of M. S. Molodensky to compute gravity anomalies by heights of quasigeoid]. Geodezija i kartografija [Geodesy and Cartography], no.3, 1984



- Pellinen L. P. *Opredelenie parametrov figury i gravitacionnogo polja Zemli v CNIIGAIK* [Defining the parameters of the figure and the gravity field of the Earth in CNIIGAIK]. *Geodezija i kartografija* [Geodesy and Cartography], no.4, 1992, pp. 29–35.
- Godah W., Szelachowska M., Krynski J. Accuracy assesment of GOCE-based geopotencial models and their use for modelling the gravinetric quasigeoid – A case study for Poland. *Geodesy and Cartography*, Vol. 63, No 1, 2014, pp. 3–24.
- ICGEM (International Centre for Global Earth Models): Available at: <http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/>
- Heiskanen W.A., Moritz H. *Physical geodesy*. Institute of Physical Geodesy, Graz, 1981.
- Hofmann-Wellenhof B., Moritz H. *Physical geodesy*. Springer Science & Business Media, 2006, 420 p.
- Krynski J., Olszak T., Barlik M., Dykowski P. New gravity control in Poland – needs, the concept and the design. *Geodesy and cartography*. 2013, Vol. 62, no. 1, pp. 3–21.
- Torge W. *Gravimetry*. Walter de Gruyter, Berlin – New-York, 1989, 465 p.

Надійшла 5.03.2015 р.