

**НЕУСТАЛЕНА ФІЛЬТРАЦІЯ СТИСЛИВОЇ РІДИНИ У КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ ПЛАСТІ З НЕЛІНІЙНОЮ ПОВЕДІНКОЮ МАТЕРІАЛІВ ЗОН**

Обґрунтовано ефективність використання непрямого методу приграничних елементів для побудови чисельно-аналітичного розв'язку задачі про неусталений рух стисливої рідини в пружному пористому обмеженому кусково-однорідному пласті з урахуванням нелінійної поведінки матеріалів зон та умов ідеального контакту на межі поділу середовищ. Побудовано дискретно-континуальну модель задачі для різних типів граничних умов на зовнішньому контурі та на межі свердловини і довільних початкових умов. Здійснено низку обчислювальних експериментів для оцінки впливу параметрів моделі на зміну пластового тиску.

**Ключові слова:** неусталений рух стисливої рідини, непрямий метод приграничних елементів, кусково-однорідне пористе середовище, матеріали з нелінійною поведінкою.

**Вступ**

Основні поширені на сьогодні моделі пласта: однорідного за параметрами, шарово-однорідного (включає два або більше пропластків різної проникливості) та зонально-однорідного (включає зони різної, але постійної, проникливості) не завжди адекватно описують реальні нестационарні процеси, що відбуваються при видобуванні нафти і газу, оскільки в них не беруть до уваги взаємовплив характеристик процесу і середовища. Достовірніші математичні моделі, що враховують вплив тиску на коефіцієнти динамічної в'язкості, об'ємної пружності та проникності середовищ (т. зв. фізичну неоднорідність), приводять до нелінійних крайових задач математичної фізики. Запропоновано числово-аналітичний підхід до розв'язування таких задач у випадку простої нелінійності (коли коефіцієнти п'єзопровідності зон незначно залежать від тиску та їх можна вважати сталими), що полягає у поєднанні перетворення Кірхгофа з непрямим методом приграничних елементів (НМПГЕ).

**Математична модель**

Розглянуто двовимірне тіло, яке займає область  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma_{12}$  з довільною криволінійною межею  $\Gamma = \bigcup_{m=1}^2 (\Gamma_z^{(m)} \cup_{l=1}^{L_m} \Gamma_{cl}^{(m)})$ , де  $\Omega_1, \Omega_2$  – зони з різними фізичними характеристиками;  $\Gamma_{12} = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$  – межа поділу середовищ;  $\Gamma_m = \Gamma_z^{(m)} \cup_{l=1}^{L_m} \Gamma_{cl}^{(m)}$  – межа області  $\Omega_m$ ;  $\Gamma_{cl}^{(m)}$  – межа  $l$ -ої свердловини, розміщеної в  $m$ -ій зоні. Коефіцієнти проникності  $k_m$ , динамічної в'язкості рідини  $\mu_m$  та пружної ємності насиченого пласта  $\beta_m^*$  матеріалу кожної зони пласта є неперервними функціями від шуканого тиску  $p^{(m)} = p^{(m)}(x, \tau)$  ( $m=1,2$ ), тобто  $k_m = k_m(p^{(m)}) = k_m^0(1 + k_{mp}(p^{(m)} - p_{mk}))$ ,  $\mu_m = \mu_m(p^{(m)}) = \mu_m^0(1 + \mu_{mp}(p^{(m)} - p_{m\mu}))$ ,

$$\beta_m^* = \beta_m^*(p^{(m)}) = \beta_m^{*0}(1 + \beta_p^*(p^{(m)})S_+(p^{(m)} - p_{m\beta^*})),$$

де  $S_+(z) = 1$  при  $z > 0$ ,  $S_+(z) = 0$  при  $z \leq 0$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ .

Для знаходження невідомих тисків  $p^{(m)}(x, \tau)$  записано систему нелінійних вихідних рівнянь

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (\varepsilon_m(p^{(m)}) \frac{\partial p^{(m)}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial x_i}) - \beta_m^*(p^{(m)}) h \frac{\partial p^{(m)}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = 0, \quad (1)$$

граничні умови

$$p^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) = p_z^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) \text{ або } -\varepsilon_m(p^{(m)}) \frac{\partial p^{(m)}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \mathbf{n}^{(m)}(\mathbf{x})} = 0, \quad (\mathbf{x}, \tau) \in \Gamma_z^{(m)} \times \mathbf{T}, \quad m=1,2, \quad (2)$$

$$p^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) = p_l^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) \text{ або } -\varepsilon_m(p^{(m)}) \frac{\partial p^{(m)}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \mathbf{n}^{(m)}(\mathbf{x})} = q_l^{(m)}(\mathbf{x}, \tau), \quad (\mathbf{x}, \tau) \in \Gamma_{cl}^{(m)} \times \mathbf{T}, \quad l=1, \dots, L, \quad (3)$$

умови ідеального контакту на межі поділу середовищ:

$$p^{(1)}(\mathbf{x}, \tau) = p^{(2)}(\mathbf{x}, \tau), \quad (\mathbf{x}, \tau) \in \Gamma_{12} \times \mathbf{T},$$

$$-\varepsilon_1(p^{(1)}) \frac{\partial p^{(1)}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \mathbf{n}^{(1)}(\mathbf{x})} = -\varepsilon_2(p^{(2)}) \frac{\partial p^{(2)}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \mathbf{n}^{(1)}(\mathbf{x})}, \quad (4)$$

та початкові умови:

$$p^{(m)}(x, 0) = p_0^{(m)}(x), \quad x \in \Omega, \quad (5)$$

де  $\varepsilon_m(p^{(m)}) = h \frac{k_m(p^{(m)})}{\mu_m(p^{(m)})}$ ;  $q_l^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) = \frac{q_{cl}^{(m)}(\mathbf{x}, \tau)}{2\pi R_c}$ ;

$\mathbf{n}^{(m)}(x) = (\mathbf{n}_1^{(m)}(x), \mathbf{n}_2^{(m)}(x))$  – вектор зовнішньої одиничної однозначно визначеної нормалі до границі  $\Gamma_m$ ;  $q_{cl}^{(m)}(\mathbf{x}, \tau)$  – дебіт  $l$ -ої свердловини.

Після введення прямих та обернених перетворень Кірхгофа

$$\vartheta^{(m)}(x, \tau) = \mathbf{K}_m(p^{(m)}(x, \tau)) = \int_{P_h} \varepsilon_m(\zeta) d\zeta, \quad (6)$$

$$\mathbf{K}_m^{-1}(\vartheta^{(m)}(x, \tau)) = p^{(m)}(x, \tau), \quad (7)$$

для знаходження змінних Кірхгофа  $\vartheta^{(m)}(x, \tau)$  замість (1)-(5) одержано задачу:

$$\Delta \vartheta^{(m)}(x, \tau) - \frac{1}{\kappa_m(p^{(m)})} \frac{\partial \vartheta^{(m)}(x, \tau)}{\partial \tau} = 0, (x, \tau) \in \Omega_m \times \mathbf{T}, \quad (8)$$

$$\vartheta^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{K}_m(p_z^{(m)}(x, \tau)) = \vartheta_z^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) \quad \text{або}$$

$$-\frac{\partial \vartheta^{(m)}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \mathbf{n}^{(m)}(\mathbf{x})} = 0, (\mathbf{x}, \tau) \in \Gamma_z^{(m)} \times \mathbf{T}, m=1,2, \quad (9)$$

$$\vartheta^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{K}_m(p_l^{(m)}(\mathbf{x}, \tau)) = \vartheta_l^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) \quad \text{або}$$

$$-\frac{\partial \vartheta^{(m)}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \mathbf{n}^{(m)}(\mathbf{x})} = q_{zl}^{(m)}(\mathbf{x}, \tau), (\mathbf{x}, \tau) \in \Gamma_{cl}^{(m)} \times \mathbf{T}, \quad (10)$$

$$\mathbf{K}_1^{-1}(\vartheta^{(1)}(x, \tau)) = \mathbf{K}_2^{-1}(\vartheta^{(2)}(x, \tau)),$$

$$-\frac{\partial \vartheta^{(1)}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \mathbf{n}^{(1)}(\mathbf{x})} = -\frac{\partial \vartheta^{(2)}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \mathbf{n}^{(1)}(\mathbf{x})}, (\mathbf{x}, \tau) \in \Gamma_{12} \times \mathbf{T}, \quad (11)$$

$$\vartheta^{(m)}(x, \tau) = \mathbf{K}(p_0^{(m)}(x)) = \vartheta_0^{(m)}(x), x \in \Omega_m, \quad (12)$$

де  $\Delta = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$  – оператор Лапласа,

$p_h = \min(p_{1k}, p_{1\mu}, p_{1\beta^*}, p_{2k}, p_{2\mu}, p_{2\beta^*})$  – характе-

ристичний тиск,  $\kappa_m(p^{(m)}) = \frac{k_m(p^{(m)})}{\mu_m(p^{(m)})\beta_m^*(p^{(m)})}$  –

коефіцієнт п'єзопровідності  $m$ -ої зони пласта.

У допущенні простої нелінійності ( $\kappa_m(p^{(m)}) = \kappa_m^0$ ) система рівнянь (8) значно спрощується:

$$\mathbf{P}_{0\tau}^{(m)}(\vartheta^{(m)}(\mathbf{x}, \tau)) = \Delta \vartheta^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) - \frac{1}{\kappa_m^0} \frac{\partial \vartheta^{(m)}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = 0,$$

$$(\mathbf{x}, \tau) \in \Omega_m \times \mathbf{T}, \quad (13)$$

задача (8)-(12) частково лінеаризується, нелінійною залишається лише перша з умов контакту.

#### **Побудова інтегральних зображень розв'язків початково-крайової задачі та системи граничних інтегральних рівнянь**

Згідно основних положень НМПГЕ уведено зовнішні приграничні області  $G_m = B_m \setminus \Omega_m$  ( $\Omega_m \subset B_m \subset \mathbf{R}_m^2$ ,  $\Gamma_m \cap \partial B_m = \emptyset$ ) з невідомими функціями  $\varphi^{(m)}(\mathbf{x}, \tau)$ , які описують розподіл фіктивних джерел, та розширені області початкових умов  $\Omega_{mp}$  ( $\Omega_m \subset \Omega_{mp} \subset \mathbf{R}_m^2$ ,  $\Gamma_m \cap \partial \Omega_{mp} = \emptyset$ ) з відомими неперервними функціями  $f_0^{(m)}(x)$ , які співпадають з  $\vartheta_0^{(m)}(x)$  в  $\Omega_m \cup \Gamma_m$ , рівні нулю зовні  $\Omega_{mp}$ , а в областях  $\Omega_{mp} \setminus (\Omega_m \cup \Gamma_m)$  їх вибрано лінійними, причому їх значення спадають від заданого (чи обчисленого) на межі  $\Gamma_m$  до нульового на  $\partial \Omega_{mp}$  [Журавчак, Грицько, 1996], тут  $\partial A$  – межа області  $A$ .

Використовуючи фундаментальний розв'язок  $U^{(m)}(\mathbf{x}, \tau, \xi, \xi_4)$  оператора  $\mathbf{P}_{0\tau}^{(m)}(\vartheta^{(m)}(\mathbf{x}, \tau))$ , записано інтегральні зображення розв'язків рівнянь (13) з урахуванням початкового розподілу (12):

$$\vartheta^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) = \int_0^\tau \int_{G_m} U^{(m)}(\mathbf{x}, \tau, \xi, \xi_4) \varphi^{(m)}(\xi, \xi_4) dG_m(\xi) d\xi_4 + \int_{\Omega_{mp}} U^{(m)}(\mathbf{x}, \tau, \xi, 0) f_0^{(m)}(\xi) d\Omega_{mp}(\xi), (\mathbf{x}, \tau) \in \mathbf{R}_m^2 \times \mathbf{T}.$$

Здійснено просторово-часову дискретизацію математичної моделі та побудовано дискретно-континуальну модель для знаходження невідомих інтенсивностей джерел тиску, введених у приграничних елементах [Журавчак, Струк, 2012]. На кожному часовому інтервалі одержано системи нелінійних алгебраїчних рівнянь. Як початкове наближення для лінеаризації рівнянь, що відповідають першій умові контакту, використано розв'язок задачі без врахування залежності характеристик від тиску. Після розв'язання вказаних системи за допомогою обернених перетворень Кірхгофа (7) обчислено шукані величини (тиск і дебіт) на кожному часовому інтервалі.

#### **Числові дослідження**

Числові дослідження проведено для області  $\Omega$ , вибраної у вигляді кусково-однорідного еліпса з півосями  $a=200\text{м}$ ,  $b=150\text{м}$ , що містить концентричну свердловину радіуса  $R_c=0.1\text{м}$ , навколо якої виділяється зона  $\Omega_2$  з іншими фізичними характеристиками, ніж решта пласта, у допущенні, що товщина пласта  $h=18\text{м}$ . Межа поділу зон  $\Gamma_{12} = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$  була еліпсом з півосями  $a_2 = 50\text{м}$ ,  $b_2 = 40\text{м}$ . Зовнішній контур вважали гідронепроникним, на межі свердловини тиск спадав з часом:  $p_{z1}^{(2)}(\mathbf{x}, \tau) = P_z(\tau) = P_{z0} - 0.001 \cdot t \cdot 10^6 \text{Па}$ . Початковий розподіл вибирали постійним і рівним тиску на межі свердловини:  $p_0^{(m)}(\mathbf{x}) = P_{z0}$ . Досліджено вплив залежності коефіцієнта гідропровідності від тиску у різних геологічних умовах, зокрема, при зростанні тиску до високих значень (100 МПа) цей коефіцієнт збільшується, що може бути враховано експоненціальною залежністю, а у випадку низьких значень – лінійною [Бойко, Бойко, 2007]:

$$\varepsilon_m(p^{(m)}) = \varepsilon_m^0 \exp\left(\frac{\alpha_{m\varepsilon}(p^{(m)}(x, \tau) - p_h)}{p_h}\right), \varepsilon_m^0 = hk_m^0 / \mu_m^0,$$

$$\varepsilon_m(p^{(m)}) = \varepsilon_m^0 \left(1 + \alpha_{m\varepsilon} \frac{p^{(m)}(x, \tau) - p_h}{p_h}\right),$$

де  $\alpha_{m\varepsilon}$  – сталі, що характеризують матеріали. Враховано вплив коефіцієнтів  $\alpha_{1\varepsilon}, \alpha_{2\varepsilon}$  на значення пластового тиску (рис. 1): при цьому суцільні криві з символами «□», «○» відповідають значенням  $\alpha_{1\varepsilon} = -0.1, \alpha_{2\varepsilon} = -0.2$ ;

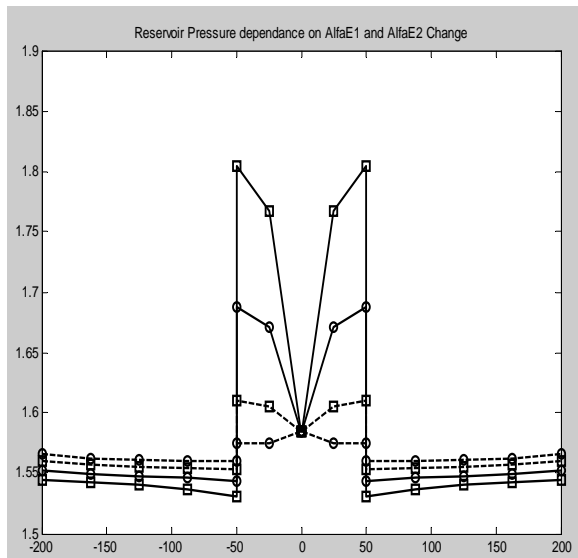


Рис. 1. Урахування впливу коефіцієнтів  $\alpha_{1\varepsilon}, \alpha_{2\varepsilon}$  на тиск у момент часу 0.75 дня у випадку лінійної залежності

$\alpha_{1\varepsilon} = 0.1, \alpha_{2\varepsilon} = 0.2$ ; штрихові з такими ж символами –  $\alpha_{1\varepsilon} = 0.5, \alpha_{2\varepsilon} = 0.9$ ;  $\alpha_{1\varepsilon} = 1, \alpha_{2\varepsilon} = 1.2$ . Числові значення фізичних характеристик кусково-однорідного середовища були такими:  $k_1^0 = 0.16 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2, k_2^0 = 0.08 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2, \mu_1^0 = 0.707 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}, \mu_2^0 = 1.232 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}, \beta_1^{*0} = 7.07 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, \beta_2^{*0} = 4.06 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, \kappa_1^0 = 0.32 \text{ м}^2/\text{с}, \kappa_2^0 = 0.16 \text{ м}^2/\text{с}.$

### НЕУСТАНОВИВШАЯСЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОМ ПЛАСТЕ С НЕЛИНЕЙНЫМ ПОВЕДЕНИЕМ МАТЕРИАЛОВ ЗОН

Л. М. Журавчак, А. Е. Струк

Обосновано ефективність використання непрямого метода приграничних елементів для побудови численно-аналитического решения задачи о неустановившемся движении сжимаемой жидкости в упругом пористом ограниченном кусочно-однородном пласте с учетом нелинейного поведения материалов зон, а также идеального контакта на границе раздела сред. Выполнен ряд вычислительных экспериментов для оценки влияния параметров модели на изменение пластового давления.

**Ключевые слова:** неустановившееся движение сжимаемой жидкости, непрямої метод приграничных элементов, кусочно-однородная пористая среда, материалы с нелинейным поведением.

### UNSTEADY FLOW OF COMPRESSIBLE FLUID IN PIECEWISE HOMOGENEOUS RESERVOIR WITH NONLINEAR BEHAVIOUR OF REGIONS MATERIALS

L.M. Zhuravchak, A. Ye. Struk

The efficiency of using the indirect near-boundary element technique for the construction of numerical-analytical solution of the problem of unsettled motion of compressible fluid in porous, closed, piecewise homogeneous reservoir, including nonlinear behaviour of regions materials and ideal contact at the interface media, was proved. Series of computational experiments were carried out to assess the influence of characteristics of environment on reservoir pressure change.

**Key words:** unsteady flow of a compressible fluid, an indirect near-boundary elements technique, piecewise homogeneous porous reservoir, materials with nonlinear behaviour.

### Висновки

Здійснено програмну реалізацію запропонованого чисельно-аналітичного підходу з використанням системи MATLAB та проведено низку досліджень впливу фізичних та часових параметрів на розподіл тиску у пласті і дебіту свердловини, що дозволяє оцінити можливість інтенсифікації її роботи. Проведені обчислювальні експерименти підтвердили необхідність врахування залежності коефіцієнта гідропровідності від тиску для випадку простої нелінійності, оскільки відносна похибка значень тиску, отриманих з врахуванням цієї залежності і без нього досягає 8–10% і не зменшується з плином часу.

### Література

- Бойко В.С., Бойко Р.В. Підземна гідрогазомеханіка. – Львів: Априорі, 2007. – 452 с.  
 Журавчак Л.М., Грицько Є.Г. Метод приграничних елементів у прикладних задачах математичної фізики. – Львів: Карпатське відділення Інституту геофізики НАН України, 1996. – 220 с.  
 Журавчак Л.М., Струк А.Є. Порівняння методів граничних та приграничних елементів при знаходженні неусталеного тиску у пружному пористому замкненому пласті // Вісник Нац. ун-ту „Львівська політехніка”. Сер. „Комп’ютерні науки та інформаційні технології”, Львів, 2012. – № 732. – С. 198-206.