

## ВИЗНАЧЕННЯ ЗОНАЛЬНИХ ГАРМОНІЧНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ МЕТОДОМ РЕГУЛЯРИЗАЦІЇ

Побудовано глобальні зональні гармоніки до 250 порядку за даними супутникової градієнтометрії. Наведено варіант регуляризації за Тихоновим для отриманого розв'язку. Приведено порівняння зі схожими моделями та їх відповідність до певного порядку.

**Ключові слова:** Супутникова градієнтометрія, гравітаційна модель, регуляризація.

### Вступ

На сьогоднішній день з'являється велика кількість моделей гравітаційного поля Землі, побудованих за супутниковими даними. Зокрема в цьому беруть участь такі супутники, як: Champ, Grace, GOCE. Одною з ознак цих місій є величезна кількість даних. Оскільки завдання покращення точності гармонічних коефіцієнтів  $C_{nm}$  та  $S_{nm}$  потребує використання все більшої кількості інформативної інформації, то потрібно підбирати відповідні методи для вирішення таких задач. Гравітаційні моделі широко використовуються у всьому світі, оскільки вони дозволяють вирішувати такі задачі, як визначення нормальних висот, та використання моделі як апріорної інформації для побудови моделей вищих порядків.

Основною проблемою є те, що перед запуском місії GOCE, завдяки якій були отримані супутникові градієнти, вважалося, що за її даними можна буде досягти 180 порядку та вище, але отримані результати не дають регламентованої точності. Метою роботи є покращення розв'язку (набір гармонічних коефіцієнтів), отриманий за даними супутникової місії GOCE, а саме вертикальними гравітаційними градієнтами  $V_{zz}$ , які є одною із складових тензора гравітаційних

$$\text{градієнтів} \begin{pmatrix} V_{xx} & V_{xy} & V_{xz} \\ V_{yx} & V_{yy} & V_{yz} \\ V_{zx} & V_{zy} & V_{zz} \end{pmatrix}.$$

Поширеним способом для знаходження таких коефіцієнтів  $C_{nm}$  та  $S_{nm}$ , які і представляють модель, є спосіб найменших квадратів. Переважна більшість таких моделей за супутниковими даними побудовані до 250 порядку. Такі коефіцієнти як правило мають затухати за законом Каула, але на практиці виникають осциляції на порядках, що перевищують 180. Таке явище може бути викликане нестабільністю матриці нормальних рівнянь. Для згладження таких осциляцій можна використовувати метод регуляризації [Тихонов А.Н. Арсенин В.Я., 1979].

$$\mathbf{X} = (\mathbf{N} + \alpha \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot (\mathbf{A}^T \mathbf{L}), \quad (1)$$

$\mathbf{X}$ -вектор ( $k \times 1$ ) невідомих  $C_{nm}$ ,  $S_{nm}$ ,  $\mathbf{N}$  – матриця ( $k \times k$ ) нормальних рівнянь,  $\alpha$  – параметр регуляризації (множник-скаляр),  $\mathbf{I}$  – одинична діагональна матриця ( $k \times k$ ),  $\mathbf{A}$  – матриця ( $q \times k$ ) параметричних рівнянь,  $\mathbf{L}$  – вектор вільних членів ( $q \times 1$ ),

$k$  – кількість невідомих,  $q$  – кількість вимірів (параметричних рівнянь).

Як видно з формули (1) множник  $\alpha$  впливає на елементи матриці головної діагоналі матриці нормальних рівнянь  $\mathbf{N}$ . Це дає змогу дещо змінювати елементи головної діагоналі, що не впливає на розв'язок і в свою чергу покращує стабільність і зменшує осциляції високих порядків. Множник  $\alpha$  підбирається вручну і може становити близько 10% від середнього значення діагональних елементів матриці нормальних рівнянь.

### Вхідні дані

Первинною інформацією були вертикальні супутникові градієнти. Для подальших обчислень використовувались різниці вимірних градієнтів та побудованих за моделлю WGS84 до 10 порядку розкладу. Дана операція виключає нормальне поле. Отримана аномальна частина вертикальних градієнтів дає змогу використовувати правило затухання Каула, яке було отримане саме для аномального потенціалу. Всі різниці були приведені на грід Гаусса  $4' \times 6'$ .

### Виклад основного матеріалу дослідження

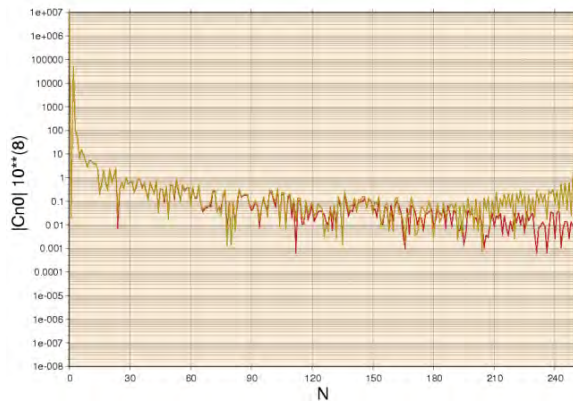
Вертикальні гравітаційні градієнти можна отримати за допомогою гармонічних коефіцієнтів  $C_{nm}$  та  $S_{nm}$ , які входять у наступне рівняння [Th. Gruber et al, 2010], яке представляє собою другу похідну від гравітаційного потенціалу.

$$V_{zz} = \frac{GM}{a^3} \sum_{l=L_{min}}^{L_{max}} (l+1)(l+2) \left(\frac{a}{r}\right)^{l+3} \times \sum_{m=0}^l (C_{lm} \cos(m\lambda) + S_{lm} \sin(m\lambda)) P_{lm}(\cos \vartheta) \quad (2)$$

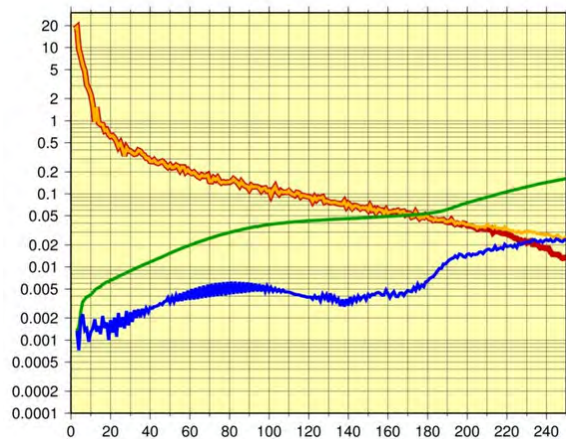
Для знаходження гармонічних коефіцієнтів  $C_{nm}$  та  $S_{nm}$  застосуємо принцип найменших квадратів. У даному випадку будемо розглядати параметричний спосіб. Отже, якщо розписати вираз (2) і повторити цей процес для певної кількості незалежних вимірів, то це можна представити у матричній формі як добре відомий запис:  $\mathbf{Ax} + \mathbf{L} = \mathbf{V}$ , де невідомі  $\mathbf{x}$  будуть шукатись відповідно до рівняння (1).

На першому етапі невідомі було визначено без параметра регуляризації. Оскільки вихідними даними служили різниці градієнтів, то таким чином було отримано прирости до зональних гармонічних коефіцієнтів. Для відновлення гармонік достатньо було додати модельні значення коефіцієнтів

тів, за якими і були побудовані апіорні значення гравітаційних градієнтів. Отримані результати було порівняно із моделлю EGM2008.



**Рис. 1.** Абсолютні значення зональних гармонічних коефіцієнтів отриманих у даній роботі (оливковий), та EGM2008 (червоний)



**Рис. 2.** Порівняння степеневих дисперсій моделі EIGEN-6C2 (жовтий) GO\_CONS\_GCF\_2\_TIM\_R3 (червоний)



**Рис. 3.** Абсолютні значення зональних гармонічних коефіцієнтів EGM2008 (червоний) та нашої моделі після регуляризації (оливковий)

З рисунка 1 видно що отриманий розв'язок досить непогано співпадає з модельним до 150 по-

рядку. Але вже на наступних порядках спостерігається зростаюча поведінка гармонічних коефіцієнтів, що свідчить про нестабільність задачі і необхідність спеціального моделювання стабілізаторів задачі для високих порядків. Крім того, таке розходження може бути викликано тим, що дана модель побудована лише за супутниковими даними, а модель EGM2008 включає в себе дані різних типів. За даними градієнтів також існують й інші побудовані моделі, наш розв'язок має схожі характеристики з цими моделями.

Модель GO\_CONS\_GCF\_2\_TIM\_R3 побудована за тими ж самими даними, що й наша модель. З (рис. 2) видно, що після 180 порядку розв'язок починає розбігатись, те ж саме спостерігається і для нашої моделі.

Згідно теорії, гармонічні коефіцієнти мають затухати зі збільшенням порядку, на жаль це не відповідає нашій моделі після 180 порядку. Для виправлення цього недоліку ми спробували застосувати метод регуляризації, рівняння (1). Параметр регуляризації вводився починаючи із 180 порядку, отриманий результат показано на (рис. 3).

### Висновки

За даними місії GOCE можливо будувати моделі до 180 порядку, що показує даний розв'язок та його порівняння з іншими незалежними моделями такими, як: GO\_CONS\_GCF\_2\_TIM\_R3.

Перевагою методики регуляризації є можливість впливати на розв'язок з метою зменшення осциляцій або штучного затухання коефіцієнтів. Хоча великим недоліком цього методу є те, що параметр регуляризації потрібно підбирати вручну, що не є таким простим завданням.

В даній роботі побудовані лише зональні коефіцієнти, тому в подальших перспективах планується побудувати повний набір гармонічних коефіцієнтів та отримати степеневі дисперсії для такого розв'язку.

### Література

Зазуляк П.М., Гавриш В.І. Євсєєва Е.М., Йосипчук М.Д, Основи математичного опрацювання геодезичних вимірювань // – Львів: Вид-во "Растр-7", 2007. – 408 с.

Тихонов А.Н. Арсенин В.Я., Методы решения некорректных задач. // Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 2-е издание. – 1979.

<http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/evaluation/evaluation.html>.  
Спектральні характеристики глобальних моделей

Th. Gruber, R. Rummel., O. Abrikosov, R. van Hees, GOCE High Level Processing Facility GOCE Level 2 Product Data Handbook // The European GOCE Gravity Consortium EGG-C. – 2010. – 77 p.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗОНАЛЬНЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ МЕТОДОМ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ**

**А.Н. Марченко, Ю.А. Лукьянченко**

Построены глобальные зональные гармоники до 250 порядка по данным спутниковой градиентометрии. Приведен вариант регуляризации по Тихонову для полученного решения. Приведены сравнения с похожими моделями и их соответствие определенного порядка.

**Ключевые слова:** Спутниковая градиентометрия, гравитационная модель, регуляризация.

**REGULARIZATION METHOD IN DETERMINING OF THE ZONAL HARMONIC COEFFICIENTS**

**O.M. Marchenko, Yu.O. Lukyanchenko**

The zonal coefficients of the gravitational field of the Earth up to degree 250 were determined from the gravity gradients measured on the satellite GOCE board. The stable solution was obtained by the Tikhonov's regularization approach. The comparison with other solutions was considered.

**Key words:** satellite gradiometry, gravity model, regularization

---

*Національний університет "Львівська політехніка" інститут Геодезії,  
м. Львів, Україна*

Надійшла 01.08.2013